UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO
Instituto de Matemática
Programa de Pós-Graduação em Ensino e História da Matemática e da Física
Doutorado em Ensino e História da Matemática e da Física

A contribuição de James MacCullagh (1809–1847) à Óptica

Otávio Fossa de Almeida

Tese de Doutorado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino e História da Matemática e da Física, Instituto de Matemática, Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Doutor em Ensino e História da Matemática e da Física.

Orientador: Penha Maria Cardozo Dias

Rio de Janeiro
Fevereiro de 2024

FICHA CATALOGRÁFICA

A447c Almeida, Otávio Fossa de

A contribuição de James MacCullagh (1809–1847) à Óptica / Otávio Fossa de Almeida. – Rio de Janeiro: UFRJ/IM, 2024.

14, 100f.: il.11; 30 cm.

Orientador: Penha Maria Cardozo Dias.

Tese (doutorado) – UFRJ / Instituto de Matemática / Programa de Pós-Graduação em Ensino e História da Matemática e da Física, 2024.

Referências Bibliográficas: f. 101–111.

1. História da Física. 2. História da Óptica. 3. James MacCullagh. I. Dias, Penha Maria Cardozo. II. Universidade Federal do Rio de Janeiro, Instituto de Matemática, Programa de Pós-Graduação em Ensino e História da Matemática e da Física. III. A contribuição de James MacCullagh (1809–1847) à Óptica.

Universidade Federal do Rio de Janeiro

A contribuição de James MacCullagh (1809-1847) à Óptica

Otávio Fossa de Almeida

Tese de Doutorado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Ensino e História da Matemática e da Física do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro – UFRJ, como parte dos requisitos necessários para obtenção do título de Doutor em Ensino e História da Matemática e da Física.

Aprovada em 23/02/2024

Penha Maria Cardozo Dias
Doutor – IF/UFRJ, Presidente

Antônio Augusto Passos Videira
Doutor – IFCH/UERJ

Carlos Eduardo Magalhães de Aguiar
Doutor – IF/UFRJ

Francisco Caruso Neto
Doutor – CBPF

Ildeu de Castro Moreira
Doutor – IF/UFRJ

A meus pais, professores e alunos.

Agradecimentos

Agradeço a meus pais, Sávio e Maria Inês, por terem incentivado meu interesse pela Ciência desde a mais tenra idade e por me ensinarem que a criatividade é o suporte para os bons profissionais. Agradeço, também, a meus professores, do jardim de infância à universidade, pois, sem a paciência, a dedicação e o auxílio deles, este presente trabalho não poderia existir.

RESUMO

A contribuição de James MacCullagh (1809–1847) à Óptica

Otávio Fossa de Almeida

Orientador: Penha Maria Cardozo Dias

Resumo da Tese de Doutorado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino e História da Matemática e da Física, Instituto de Matemática, Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Doutor em Ensino e História da Matemática e da Física.

MacCullagh é um autor pouco conhecido entre os físicos atuais, embora tenha uma contribuição essencial aos debates da Óptica do século XIX. Seus estudos sobre reflexão e refração da luz removeram as vibrações longitudinais da teoria ondulatória, o que outros pesquisadores da época não fizeram, e conseguiu impor as condições de contorno corretas na superfície entre os meios. Por outro lado, em relação à participação de MacCullagh nos debates históricos sobre luz, eletricidade e magnetismo, MacCullagh adiantou uma parte significativa da estrutura matemática da Óptica eletromagnética, como observado por historiadores. O uso do método lagrangiano foi ferramenta de cálculo importante para produzir esses resultados. Entretanto, seus estudos parecem não ter contribuído para o desenvolvimento da teoria eletromagnética. Na verdade, Maxwell, no início, parecia conhecer pouco do trabalho de MacCullagh e até tentou compreender a reflexão. Neste cenário, Maxwell só compreende corretamente MacCullagh no final da vida, quando recebe a tarefa de revisar um artigo de FitzGerald, que foi o primeiro a chamar atenção para o significado eletromagnético das equações de MacCullagh.
Palavras chave: História da Física, História da Óptica, James MacCullagh.

Rio de Janeiro
Fevereiro de 2024

ABSTRACT

The contribution of James MacCullagh (1809–1847) to Optics

Otávio Fossa de Almeida

Supervisor: Penha Maria Cardozo Dias

Abstract of doctoral thesis submitted to Programa de Pós-Graduação em Ensino e História da Matemática e da Física, Instituto de Matemática, Universidade Federal do Rio de Janeiro, in partial fulfillment of the requirements for the degree Doctor em Ensino e História da Matemática e da Física.

MacCullagh is an obscure author to most of current physicists, although he made an essential contribution to the debates in 19th century Optics. His studies on reflection and refraction of light removed the longitudinal vibrations of wave theory, which other researchers at the time did not do, and managed to impose the correct boundary conditions on the surface between the media. On the other hand, in relation to MacCullagh's participation in the historical debates about light, electricity and magnetism, MacCullagh advanced a significant part of the mathematical structure of electromagnetic Optics, as noted by historians. The use of the Lagrangian method was an important calculation tool to produce these results. However, his studies do not seem to have contributed to the development of electromagnetic theory. In fact, Maxwell, apparently, seemed to be almost unaware of MacCullagh's work and even tried to understand the reflection. In this scenario, Maxwell only correctly understands MacCullagh at the end of his life, when he is given the task of reviewing an article by FitzGerald, who was the first to draw attention to the electromagnetic significance of MacCullagh's equations.
Keywords: History of Physics, History of Optics, James MacCullagh.

Rio de Janeiro
Fevereiro de 2024

Sumário

1 Introdução **1**

2 Panorama dos principais problemas da Óptica no primeiro quarto do século XIX **5**

2.1 A "velha" teoria ondulatória 8

2.2 Polarização da luz na teoria corpuscular 13

2.2.1 O conceito de plano de polarização segundo os emissionistas 19

2.3 Polarização da luz e o surgimento de um "nova" teoria ondulatória 21

2.4 Tentativas de Fresnel de resolver o problema da direção das vibrações transversais 27

2.4.1 Vibrações transversais na reflexão em meios comuns . . 34

3 Modelos dinâmicos de propagação da luz: Cauchy e Green **39**

3.1 "Teorias" dinâmicas de Cauchy para a propagação da luz . . . 42

3.1.1 A "primeira teoria" de Cauchy para a birrefração em cristais 46

3.1.2 A "primeira teoria" de Cauchy para a reflexão e para a refração da luz em meios comuns 49

3.1.3 Outras "teorias" de Cauchy para a reflexão e para a birrefração 52

3.2 Solução lagrangiana de Green 54

4 Modelos dinâmicos de MacCullagh **61**

4.1 Estudos iniciais sobre reflexão e refração da luz em cristais . . 64

4.1.1 A solução "geométrica" correta do problema 70

4.1.2 A "teoria" de MacCullagh e Neumann 73

4.2 Solução lagrangiana de MacCullagh 77

4.2.1 O potencial elástico rotacional 80

4.2.2 As equações de onda 81

4.2.3 As condições de contorno na superfície 83
4.3 Controvérsias, na historiografia, sobre as motivações de MacCullagh no "Essay" 85

5 Debates a respeito de MacCullagh na segunda metade do século XIX 89
5.1 Críticas à obra de MacCullagh 91
5.2 O resgate do trabalho de MacCullagh no Eletromagnetismo . . 94

6 Considerações Finais 99

Referências primárias 101

Referências secundárias 109

Lista de Figuras

2.1 Cristal de calcita extraído de um garimpo localizado no estado do Mato Grosso, Brasil, e posteriormente lapidado. Na imagem, é possível ver o fenômeno da birrefração, com a formação simultânea de duas imagens refratadas. 11

2.2 Figura adaptada do original de Huygens [9, p. 68]. O plano contém os raios e o eixo óptico (LCM). A partir de C, a onda ordinária propaga-se como uma esfera (seção LML) e a extraordinária como um esferoide (seção $LGML$). O semieixo maior do esferoide ($\overline{CG}$) representa a direção de maior velocidade de propagação do raio extraordinário. 12

2.3 "Newton analysando a luz", figura extraída do artigo de João de Mendonça no extinto Jornal do Domingo, 1881 [15]. 14

2.4 "Polarização" convencional da luz em meios comuns (esquerda) e em cristais (direita). A luz incide em C. O símbolo $\odot$ representa uma seta "saindo" do plano da folha. 19

2.5 À esquerda, os dois eixos ópticos do cristal biaxial no plano da seção principal. À direita, a mesma figura, dessa vez evidenciando as seções da "superfície de onda" em um instante qualquer, de onde se obtém os dois raios extraordinários (respectivamente, seções $GSQG$ e SS). Os dois raios emanam de um mesmo ponto, o ponto de incidência C. Figuras adaptadas do original de Fresnel [52, Fig. 14]. O símbolo $\odot$ representa uma seta "saindo" do plano da folha. 29

2.6 Feixe de luz refratado. As linhas tracejadas, em vermelho, representam duas frentes de onda. Imagem adaptada da original de Fresnel [56, p. 397, fig. sem número] 34

2.7 Continuidade das componentes da velocidade de oscilação da onda luminosa durante a reflexão. O símbolo $\odot$ representa uma seta "saindo" do plano da folha. 35

3.1 Componentes perpendiculares ao plano de polarização das oscilações da onda incidente, ζ_i, da onda refletida, ζ_r, e da onda refratada, ζ_t, no plano de incidência em meios comuns. O símbolo $\odot$ representa uma seta "saindo" do plano da folha. . . 50

4.1 Rascunho de MacCullagh feito imediatamente após sua morte, em 1847. Segundo Scaife [69, p. 85], esse rascunho foi feito "de memória" por Frederic Burton (1816–1900). Imagem em domínio público [71]. 62

4.2 Na figura, um paralelepípedo elementar (retângulo azul) é descrito no éter quando o meio luminífero está em repouso. As faces do paralelepípedo, perpendiculares ao eixo z', são, então, deslocadas, cada uma em seu próprio plano, em uma direção paralela ao eixo y', de tal maneira que as arestas inicialmente paralelas ao eixo z' se inclinam em relação ao eixo por um ângulo κ (paralelogramo tracejado) [90, pp. 25–26, 70, pp. 154–155]. 80

Capítulo 1

Introdução

O desenvolvimento da Óptica e suas relações com o Eletromagnetismo no século XIX é certamente um tema bastante explorado na historiografia atual. Por um lado, a maior parte dos documentos históricos pertinentes já está catalogada, digitalizada e disponível na Internet, o que facilita a pesquisa, conquanto diminua as chances da descoberta de alguma fonte primária nova e/ou o estabelecimento de algum fato histórico novo. Por outro, existem grandes autores que fizeram obras importantes sobre o assunto. Mesmo assim, o tema não está esgotado, visto que vários de seus aspectos essenciais continuam abertos ao debate, como é o caso da controversa contribuição de James MacCullagh (1809–1847) ao entendimento das propriedades ondulatórias (clássicas) da luz. MacCullagh não conhecia a natureza eletromagnética dos fenômenos ópticos, mas, de algum modo, antecipou uma parte significativa da estrutura matemática da teoria, o que é um fato notável, embora historiadores da Ciência como Edmund Whittaker (1873–1956) [1, 2], Kenneth Schaffner [3] e Oliver Darrigol [4] pareçam ter opiniões diferentes a respeito da importância da obra de MacCullagh para a Óptica.

Para Whittaker, que se confunde com uma fonte primária [1, p. 157, 2, p. 144]:

> O trabalho de MacCullagh foi recebido com dúvida por ele próprio e pela geração seguinte de físicos-matemáticos [até ser compreendido pelo Eletromagnetismo cerca de quatro décadas mais tarde. . .] Contudo, não há dúvida de que MacCullagh realmente resolveu o problema de criar um meio cujas

> vibrações, calculadas de acordo com as leis corretas da dinâmica [clássica], devessem ter as mesmas propriedades que as vibrações da luz.

Schaffner, porém, critica duramente Whittaker, principalmente em relação ao que chama de "idolatria injustificada" [3, p. viii] às propriedades mecânicas do meio, que emergem das equações de MacCullagh. Na opinião de Schaffner [3, p. 60]: i) o meio de MacCullagh é mais importante como um meio eletromagnético do que como um meio dinâmico e ii) o trabalho de MacCullagh demorou para ser aceito porque foi considerado, na segunda metade século XIX, como contrário às "leis da dinâmica".

Darrigol, por seu turno, parece dar menos atenção às intrincadas discussões mecânicas a respeito do meio (afinal, até onde se sabe, o suposto meio lumínífero, o éter, permanece desconhecido), apresentando a ideia de que equações semelhantes ou intimamente relacionadas às equações de Maxwell já apareciam em autores anteriores ao próprio Maxwell, como é o caso de MacCullagh [5, p. 237]. Neste novo cenário, para defender a ideia de que MacCullagh "resolve um grande problema da filosofia natural" [4, p. 134], Darrigol propõe-se a analisar "o contexto, o conteúdo e a recepção" dos trabalhos de MacCullagh [4, p. 134]. Como conclusão, Darrigol obtém [4, p. 162]:

> Resumindo, por uma via óptica, MacCullagh obteve um sistema de equações formalmente equivalente às equações de Maxwell, embora apenas no caso óptico para o qual não existem cargas ou correntes macroscópicas. Ele não foi o único a fazê-lo, mas foi o primeiro e o fez da maneira mais satisfatória [...] O grande mérito de MacCullagh [assim] não foi antecipar a teoria eletromagnética, mas exibir a estrutura que essa teoria compartilha com a óptica.

Em princípio, a maneira pela qual Darrigol se propõe a estudar o tema parece adequada e a conclusão está correta, mas não é exagero dizer que o "contexto", o "conteúdo" e a "recepção" do trabalho de MacCullagh não estão, de todo, esclarecidos. Assim, esta tese se propõe a investigar i) *a construção do pensamento* de MacCullagh, ii) *como ele soluciona os principais problemas da Óptica de seu tempo* e iii) *como se deu a recepção de seu trabalho na segunda metade do século XIX*. Para tanto, esta tese se estrutura da maneira a seguir:

- Nos Capítulos 2 e 3, será oferecido ao leitor, um panorama da literatura histórica sobre *a reflexão e a refração da luz.* Estas discussões levam a problemas teóricos fundamentais relacionados às propriedades ondulatórias atribuídas à luz e envolvem, por exemplo, a origem da hipótese de vibrações transversais, as nomenclaturas adotadas no período, os métodos matemáticos usados na época e as tentativas concorrentes de explicação da reflexão e da refração, em diferentes meios, pelos principais contemporâneos de MacCullagh.

- No Capítulo 4, a contribuição de MacCullagh à Óptica será descrita em detalhes. Para explicar a reflexão e a refração, MacCullagh precisou supor que a luz fosse uma onda puramente transversal desde o início e obteve determinadas condições de contorno na superfície de separação entre os meios que, até o desenvolvimento do Eletromagnetismo na segunda metade do século XIX, permaneceram incompreendidas pela maioria dos físicos da época.

- No Capítulo 5, tópicos relacionados à recepção da obra de MacCullagh na segunda metade do século XIX serão apresentados. O enfoque deste capítulo é evidenciar, sobretudo, as críticas ao trabalho de MacCullagh e o impacto destas críticas em sua reputação. Também, será feito um breve resumo de como o modelo de reflexão e refração da luz de MacCullagh foi, finalmente, compreendido sob uma perspectiva eletromagnética.

- No Capítulo 6, as considerações finais desta tese serão feitas.

Capítulo 2

Panorama dos principais problemas da Óptica no primeiro quarto do século XIX

Em linhas gerais, os debates sobre a luz, sua natureza e suas propriedades, remontam à antiguidade, mas é no caldeirão de inovações científicas do século XVII, que ganha impulso, a ideia de que a luz tem sua origem em processos mecânicos baseados em algum tipo de movimento. Este período é marcado, tanto pela eclosão de novas teorias na Óptica, quanto pelo desenvolvimento de novas tecnologias (como a invenção do telescópio e do microscópio) e pela descoberta de uma série de novos fenômenos ópticos, como a dispersão, a difração e, sobretudo, a *birrefração em cristais*, que merece uma atenção especial neste capítulo, pois ditará uma parte significativa das pesquisas futuras de MacCullagh.

O movimento da luz foi uma das questões iniciais. Galileo Galilei (1564–1642), por exemplo, está entre os primeiros a contestar a ideia, reforçada pela experiência cotidiana, de que a luz produzida por um corpo brilhante alcança instantaneamente o observador. Em seu *Discorsi e dimostrazioni Matematiche, intorno à due nuove scienze* [6], Galileo defende o conceito, inovador para a época, de velocidade finita para o deslocamento dos raios luminosos, embora considere, com efeito, que essa velocidade deveria ser elevadíssima quando comparada a outros movimentos rápidos, como o movimento do som [6, p. 43].[1] Cerca de vinte e cinco anos mais tarde, Pierre de Fermat (1607–1665) [7, p. 457] não só defende o argumento galileano, sem citá-lo diretamente, de que a luz possui uma velocidade finita, como também apresenta, grosso modo, uma demonstração geométrica relativamente simples (quando vista em retrospecto) para argumentar que, na refração da luz em *meios comuns* (meios não-cristalinos), "a luz passa mais facilmente em corpos rarefeitos do que em corpos densos" [7, p. 470], isto é, a velocidade da luz diminui quando o raio é refratado no meio mais refringente.[2]

Quanto às novas teorias que surgiram na Óptica do século XVII, duas correntes de pensamento majoritárias e muito bem estabelecidas, capazes de dar substrato à ideia de que os fenômenos ópticos eram oriundos de processos mecânicos, destacaram-se nos debates. A primeira corrente propunha que esses fenômenos fossem transmitidos, de alguma maneira, por uma substância sutil a qual preencheria todo o espaço, como é o caso da teoria ondulatória. A segunda defendia que a luz era uma partícula, ou uma espécie de projétil, que se moveria no vácuo, como é o caso da teoria corpuscular. Essas duas teorias principais e antagônicas praticamente ditaram os rumos das discussões da Óptica até meados do século XIX, quando ficou claro para uma parcela significativa dos físicos da época que a teoria corpuscular, a despeito de seu sucesso inicial, era incapaz de se sustentar frente a novas evidências. Por exemplo, a teoria corpuscular permitiu a formulação do conceito de *polarização da luz* para explicar a birrefração em cristais, mas não foi capaz de

[1]Para verificar o conceito de velocidade finita da luz, os *Discorsi* propõem o experimento mental a seguir [6, p. 44]. Uma pessoa, em posse de uma fonte de luz, envia um sinal luminoso a um companheiro a uma certa distância, que, ao receber o primeiro sinal, responde com um outro sinal. Se a primeira pessoa perceber um atraso significativo no tempo entre o envio do primeiro sinal e a recepção do segundo sinal, então a luz possui uma velocidade finita. Entretanto, Galileo aponta que, para distâncias comuns do dia a dia, muito curtas em face da elevadíssima velocidade da luz, não seria possível perceber qualquer atraso entre o envio do primeiro sinal e a recepção do segundo sinal, de sorte que o experimento ideal para verificar a velocidade da luz seria aquele cuja distância entre a pessoa e o companheiro fosse enorme, tão grande, segundo ele, que demandaria o uso do telescópio para que os sinais pudessem ser observados.

[2]Essa demonstração propõe que o raio de luz na refração deve seguir pelo caminho de menor tempo entre a fonte e o observador [7, p. 467] e é conhecida, hoje, como o "princípio de Fermat".

explicar a interferência dos raios luminosos, descoberta por Thomas Young (1773–1829) no começo dos anos 1800.

Na teoria ondulatória, por outro lado, a polarização foi entendida, no primeiro quarto do século XIX, como consequência de *oscilações transversais da luz*, e o desenvolvimento da teoria se deu, nesse período, em torno de dois problemas principais: i) determinar para qual direção perpendicular ao raio, entre duas direções conhecidas, está a oscilação e ii) compreender o que acontece com as *vibrações longitudinais* que se propagam no meio universal, as quais não foram verificadas experimentalmente, conquanto fossem previstas pela teoria desde seus primórdios. O primeiro problema foi intimamente associado ao estudo da reflexão e da refração da luz em cristais e em meios comuns, mas só pôde ser completamente compreendido com o desenvolvimento do Eletromagnetismo décadas mais tarde. O segundo problema, por sua vez, encontrou uma solução matemática com MacCullagh, que obteve equações para ondas transversais a partir do conceito de *elasticidade rotacional*, eliminando qualquer possibilidade de vibração longitudinal. Compreender as origens destes dois problemas principais é o objetivo geral deste capítulo.

Com isso em mente, este capítulo divide-se em quatro seções. Na Seção 2.1, apresentar-se-ão as propriedades da luz na chamada "velha" teoria ondulatória (que surge no final do século XVII), na qual a luz é formada exclusivamente por pulsos longitudinais. Também, mostrar-se-á o modelo de birrefração em cristais de Christiaan Huygens (1629–1695). Na Seção 2.2, expor-se-ão as origens do conceito de polarização no cenário da teoria corpuscular proposta, mais ou menos no mesmo período, por Isaac Newton (1643–1727). O objetivo desta seção é, sobretudo, estabelecer algumas *nomenclaturas* que serão importantes nos debates dos próximos capítulos. A elas, o leitor deve estar atento. Na Seção 2.3, por sua vez, discutir-se-á como o problema específico da interferência da luz polarizada propicia, no primeiro quarto do século XIX, o surgimento de uma "nova" teoria ondulatória, que exige a existência de ondas luminosas transversais. *É nesta seção que surgem os dois problemas principais, mencionados acima, relacionados ao desenvolvimento da teoria.* Finalmente, na Seção 2.4, apresentar-se-á como a "nova" teoria ondulatória permite, graças aos trabalhos de Augustin-Jean

Fresnel (1788–1827), uma primeira solução (que, mais tarde, será contestada por MacCullagh e outros) para o problema da determinação da direção da oscilação transversal da luz na birrefração em cristais e na reflexão em meios comuns. Se por um lado, a birrefração é importante e não pode ser negligenciada, por outro, a reflexão se mostrará *decisiva* em muitos casos ao longo desta tese.

2.1 A “velha” teoria ondulatória

Em 1665, Robert Hooke (1635–1703), em seu *Micrographia* [8], ao realizar observações ao microscópio dos mais variados tipos de corpos e materiais, é um dos primeiros a sugerir que os fenômenos ópticos são causados por “vibrações muito curtas” no interior dos meios transparentes [8, pp. 56–57], de tal modo que uma fonte luminosa pontual emite pulsos, ou vibrações, que se espalham em esferas, cada vez maiores, cujos raios coincidem com os raios da luz. Em geral, a ideia de Hooke pode ser considerada uma tentativa inicial de teoria ondulatória, pois o *Micrographia* apresenta uma comparação entre as vibrações da luz e pulsos produzidos por uma fonte sonora [8, p. 54] e entre essas vibrações e ondulações, ou “anéis”, produzidas na superfície da água [8, p. 57]; mas o crédito da fundação da teoria em si é comumente atribuído a Huygens, que teve o mérito de desenvolver, em seu *Traité de la lumière* [9], de 1690, uma discussão a respeito das propriedades ondulatórias da luz mais profunda e detalhada que qualquer um de seus contemporâneos, tornando-o a principal referência do assunto na época.

O *Traité* [9] versa sobre o movimento da luz, sobre a reflexão e a refração em meios comuns e sobre a birrefração em cristais, mas não apresenta uma discussão para a origem das cores, pois Huygens considera, em carta a Gottfried Leibniz (1646–1716), “esse assunto muito difícil, sobretudo por causa das tantas maneiras diferentes pelas quais as cores são produzidas” [10, p. 7]. De modo semelhante, o *Traité* não faz qualquer menção à difração, descoberta por Francesco Maria Grimaldi (1618–1663) [11] cerca de trinta anos antes. Nesse breve contexto, em relação ao movimento dos raios luminosos, Huygens apresenta uma das primeiras estimativas para a velocidade da luz [9,

p. 6–9], baseadas nas observações astronômicas de Ole Rømer (1644–1710) [12], e incorpora à nascente teoria ondulatória a demonstração geométrica de Fermat, já citada na p. 6 deste capítulo, para o problema da refração [9, pp. 32–33].[3] Ademais, Huygens apresenta um importante modelo geométrico para o "estranho" problema da birrefração em cristais, que será fundamental nos debates da Óptica do século XIX.

No *Traité*, Huygens adota as mesmas analogias propostas por Hooke, isto é, analogias com as ondas na superfície da água e com o som [9, p. 4]. Na primeira, Huygens usa a comparação entre luz e as ondas produzidas na superfície da água para justificar que ela também é uma "onda", embora tenha "outra causa" e um outro comportamento [9, p. 4]. A segunda analogia, por seu turno, permite identificar que os fenômenos ópticos necessitam de um meio sutil e universal para serem transmitidos, o qual nomeia "éter". Porém, em relação a esta última analogia, Huygens parece ter algumas dúvidas de que as "ondas" luminosas se comportam como as ondas sonoras, pois o *Traité* menciona algumas diferenças entre som e luz. Uma delas é que o som é produzido pelo "abalo súbito" da totalidade, ou de uma parte considerável, do corpo, ao passo que a luz, espalhando-se em pulsos concêntricos, é produzida em cada ponto da superfície do corpo, o que permite ao observador distinguir, com nitidez, seus detalhes e nuances [9, p. 9]:[4]

> Mas se ambos [som e luz] são semelhantes nisso [movimentos esféricos partindo da fonte], [eles] diferem em várias outras coisas [...] Porque, no que diz respeito à produção do som, sabemos que é pelo abalo súbito de um corpo inteiro, ou de uma parte considerável [dele], que agita todo o ar ao redor. Mas o movimento da luz deve nascer de cada ponto do objeto luminoso para

[3] Se for possível fazer uma leitura em retrospecto da discussão histórica, de maneira a facilitar a compreensão de um leitor moderno, é como se Fermat tivesse indiretamente identificado, na lei de Snell, o conceito de índice de refração relativo, n_r:

$$n_r = \frac{v_i}{v_t}, \tag{2.A}$$

em que v_i, por exemplo, é a velocidade da luz no meio menos refringente e v_t é, por conseguinte, a velocidade da luz no meio mais refringente.

[4] O princípio de que a luz é produzida por pontos na superfície dos corpos brilhantes e se propaga em esferas, a partir de cada ponto, é conhecido, hoje, como o "princípio de Huygens", embora Hooke já tivesse sugerido algo similar, só que muito mais simples, algumas décadas antes.

> poder mostrar todas as diferentes partes deste objeto [...] E não acredito que este movimento possa ser melhor explicado, que supondo aqueles entre os corpos que são líquidos, como a chama, e aparentemente o sol, e as estrelas, compostos de partículas que nadam em uma matéria muito mais sutil, que as agita com grande rapidez, e as faz bater nas partículas do éter, que as rodeiam, e que são muito menores que elas [...]

Uma vez definido (mais ou menos) como a luz é produzida, o objetivo agora é definir como ela é transmitida da fonte ao observador. Huygens, nesse sentido, aponta outra diferença entre som e luz [9, p. 11]:

> Quanto às diferentes maneiras pelas quais os movimentos do som e da luz são sucessivamente comunicados, podemos compreender como isso ocorre em relação ao som, quando consideramos que o ar é de tal natureza que pode ser comprimido e reduzido a um espaço muito menor do que normalmente ocupa, e que ao ser comprimido faz um esforço para retornar ao seu volume [original]: porque isso, junto à sua penetrabilidade, que permanece consigo apesar da sua compressão, parece provar que [o ar] é feito de pequenos corpos que nadam e que se agitam muito rapidamente na matéria etérea, composta de partes muito menores. De modo que a causa da extensão das ondas do som é o esforço feito por esses pequenos corpos, que se chocam, para voltarem ao seu volume [original], quando estão um pouco mais apertados no circuito dessas ondas do que em outros lugares.

Huygens, então, lança uma série de hipóteses de como as "ondas" (pulsos, na verdade) se propagam no éter, embora pareça mudar de opinião algumas vezes ao longo do texto. Em um primeiro momento, o éter é constituídos de esferas de mesmo tamanho. Em um segundo momento, o formato esférico não é mais necessário, e nem é necessário ter o mesmo tamanho. Também, as partículas de éter parecem colidir entre si. Uma hora estas colisões são perfeitamente "elásticas" (*ressort* no original). Outra hora, não. Nesse cenário confuso, as únicas hipóteses que parecem permanecer inalteradas no *Traité* são: i) que os pulsos luminosos se propagam com velocidade finita no éter [9, p. 9]; ii) que o éter seria constituído de "pequenos corpos invisíveis" e "muito duros" para justificar a imensa velocidade com a qual a luz se propaga [9, p. 13]; iii) que essas partículas se "tocam" entre si [9, p. 14]; iv) que, quando a luz passa, elas se deformam e rapidamente "restituem" sua forma original [9, p. 12] e v) que a soma dessas restituições faz com que a luz se propague

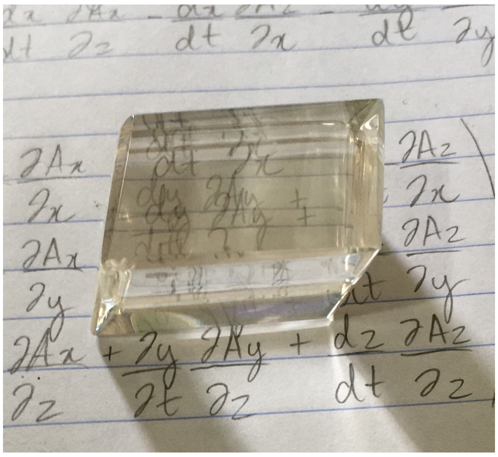


Figura 2.1: Cristal de calcita extraído de um garimpo localizado no estado do Mato Grosso, Brasil, e posteriormente lapidado. Na imagem, é possível ver o fenômeno da birrefração, com a formação simultânea de duas imagens refratadas.

"sempre para frente" [9, p. 14]. Estas deformações e restituições ocorrem na direção de propagação e podem, assim, ser entendidas, hoje, como uma espécie de *onda longitudinal*, embora esse termo não existisse na época.

Huygens, por fim, demonstra, com base em sua hipótese ondulatória, a reflexão e a refração da luz em meios comuns [9, Capítulos II e III] e propõe um modelo para explicar o que ele chama de "estranha refração" que ocorre no "cristal da Islândia" [9, Capítulo V, p. 48], cujas propriedades ópticas foram divulgadas por Rasmus Bartholin (1625–1698) [13] algumas décadas antes.[5] Esse cristal possui uma propriedade óptica conspícua, a saber, um raio de luz, ao atravessá-lo, sofre uma refração dupla, ou birrefração, que segue dois caminhos, como mostra a Fig. 2.1: o caminho do chamado *raio ordinário*, que obedece à lei de Snell, e o caminho do chamado *raio extraordinário*. Huygens argumenta i) que o éter deve ser capaz de permear as partículas que constituem o cristal e ii) que os dois caminhos se devem à emanação de duas ondulações independentes, refratadas a partir de um

[5]Atualmente, esse cristal é conhecido pelo nome de *calcita*, uma variante cristalina do carbonato de cálcio, e pode, é claro, ser encontrado em outras formações calcárias pelo mundo, não só na Islândia. Esse é o caso, por exemplo, do belíssimo exemplar, brasileiro, mostrado na Fig. 2.1.

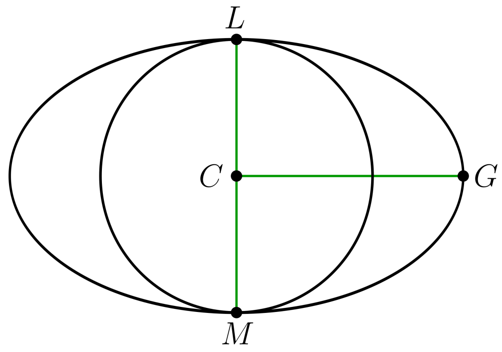


Figura 2.2: Figura adaptada do original de Huygens [9, p. 68]. O plano contém os raios e o eixo óptico (LCM). A partir de C, a onda ordinária propaga-se como uma esfera (seção LML) e a extraordinária como um esferoide (seção $LGML$). O semieixo maior do esferoide ($\overline{CG}$) representa a direção de maior velocidade de propagação do raio extraordinário.

mesmo ponto (o ponto de incidência) sobre qualquer uma das superfícies do meio cristalino [9, p. 58]. A primeira emanação é esférica e está relacionada ao raio ordinário, resultando em uma "refração regular" que se propaga com a mesma velocidade em todas as direções no interior do cristal. A segunda emanação, porém, é esferoidal, é concêntrica à primeira e está relacionada ao raio extraordinário, resultando em uma "refração irregular" que se propaga com velocidades diferentes no meio [9, p. 59].

Para encontrar essa segunda emanação, Huygens define o que ele chama de "seção principal do cristal" [9, p. 52], isto é, o plano que contém a direção mais rápida de propagação do raio extraordinário.[6] A Fig. 2.2 ilustra o modelo e mostra a seção, em um tempo arbitrário, das duas emanações no plano da seção principal. Na figura, as duas emanações são produzidas simultaneamente a partir do ponto de incidência, C, em uma das faces do cristal, e suas velocidades são iguais na direção do semieixo menor da elipse, $\overline{CL}$. Huygens chama a direção $\overline{LM}$ de "eixo do cristal" [9, p. 85] (ou, simplesmente, *eixo óptico*, como é conhecido hoje) ao longo do qual as velocidades dos dois raios

[6] Cristais como a calcita são classificados na literatura moderna como cristais *negativos* e possuem uma direção (eixo desigual do esferoide) mais rápida de propagação. Em contrapartida, os cristais ditos *positivos* possuem uma direção mais lenta de propagação; embora isso não afete decisivamente a definição de seção principal. Nos cristais positivos, o plano da seção principal contém a direção mais lenta de propagação do raio extraordinário.

são iguais e eles se confundem. O raio extraordinário, porém, aumenta sua velocidade, em relação ao raio ordinário, e se distancia cada vez mais deste à medida que sua direção de propagação se aproxima do semieixo maior, $\overline{CG}$.

2.2 Polarização da luz na teoria corpuscular

Paralelamente às discussões da seção anterior, Newton é um dos principais nomes a desenvolver uma teoria rival à teoria ondulatória: a teoria corpuscular. Em 1672, em seu "New Theory about Light and Colors" [14], Newton apresenta à *Royal Society* de Londres uma primeira crítica, embora comedida (ainda), à ideia de que a luz é formada por movimentos no éter [14, p. 3078], concluindo, ao contrário, que ela é constituída por "corpos" capazes de se mover no vácuo sideral que separa a Terra do Sol [14, p. 3085]. O artigo trata de seu famoso estudo sobre a dispersão da luz, celebrado pelo gravura mostrada na Fig. 2.3, no qual a luz branca (do Sol, por exemplo) é decomposta em diversas luzes coloridas ao passar por um prisma. Segundo Newton, a hipótese de que a luz é formada por partículas que se movem pelo espaço vazio e são emitidas pelos corpos brilhantes é sustentada, sobretudo, por seus experimentos de separação e "mistura" de cores [14, p. 3085], que consistem em separar cada cor individualmente após passar por diversos prismas consecutivos, e, depois remisturá-las, identificando o que ele chama de "cores primárias" e "cores secundárias" [14, p. 3083]. Por esse motivo, para ele, cada corpúsculo de luz seria dotado de certa propriedade "original" e "inata" que caracteriza sua cor [14, p. 3081].

Em linhas gerais, as concepções newtonianas sobre a natureza corpuscular da luz permaneceram em estado de relativa latência por cerca de três décadas, até que, em 1704 [16], Newton publica a primeira edição de seu memorável tratado sobre a reflexão, a refração, a "inflexão" (difração) e as cores da luz: o *Opticks*. Partindo de uma leitura qualitativa do *Opticks* (isto é, sem entrar nos cálculos), a obra introduz uma surpreendente comparação entre as cores e as notas musicais [16, livro I, p. 114], identificando que a luz é composta por partículas com sete "tamanhos" diferentes, cada "tamanho" associado a uma cor. Como cada tamanho corresponde, em linguagem contemporânea, a

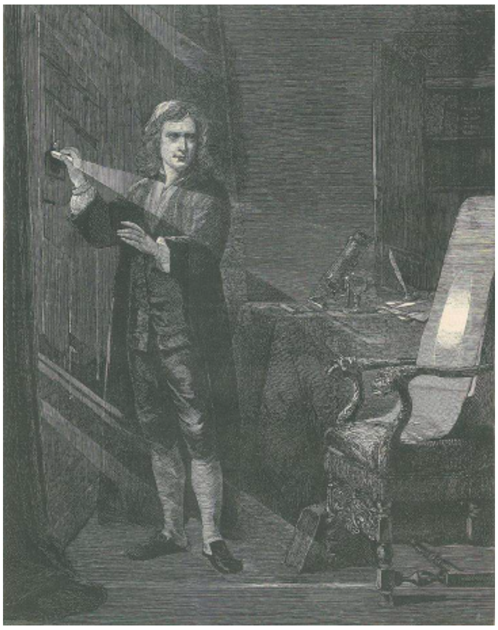


Figura 2.3: “Newton analysando a luz”, figura extraída do artigo de João de Mendonça no extinto Jornal do Domingo, 1881 [15].

uma massa, os raios luminosos, que representam as trajetórias das partículas, associados a cada cor podem ser desviados por forças durante a reflexão e a refração. Neste cenário, *a luz é considerada mais rápida nos materiais que no vácuo*, pois as forças são proporcionais às “densidades” dos materiais [16, livro II, p. 70–71].[7] De modo semelhante, Newton [16, livro III, p. 132], ao discutir o problema da difração, propõe que a “inflexão” dos raios luminosos que passam próximos às extremidades de um corpo devem sofrer a influência das mesmas causas que provocam o desvio dos raios na reflexão e na refração, isto é, a ação de forças à distância sobre as partículas de luz.

A partir da segunda edição do *Opticks*, em 1718 [17], Newton finalmente inclui discussões sobre a teoria ondulatória de Huygens e sobre a birrefração em cristais, introduzindo, ao defender a hipótese de um vácuo sideral, uma série de críticas à possibilidade de vibrações propagando-se em um meio sutil

[7]Hooke, contemporâneo de Newton, explica, no *Micrographia*, que os meios transparentes são meios homogêneos com “densidades” ópticas específicas, que não são proporcionais à densidade com respeito à “gravidade” [8, p. 57]. No entanto, Newton não parece fazer essa distinção.

e universal. A mais famosa delas, que será repetida várias vezes ao longo dos dois século seguintes, é que a existência de um espaço completamente preenchido deveria oferecer resistência ao movimento dos planetas, retirando-os de suas órbitas estáveis. Para explicar esta crítica, Newton faz uma comparação entre o comportamento mecânico do éter e o do ar, pois ele diz: "eu não sei o que o éter é" [17, p. 326], concluindo que o meio universal deveria ser centenas de milhares de vezes mais rarefeito que o ar para que nenhuma alteração sensível no movimento dos planetas fosse percebida em "dez mil anos" [17, p. 327] e, ao mesmo tempo, centenas de milhares de vezes mais elástico, para que a luz se propagasse tão rápido. Assim, por esta e outras razões, Newton descarta a explicação ondulatória de Huygens para a birrefração, sugerindo, em seu lugar, a ideia de que as partículas de luz possuem "lados" sujeitos à ação de forças análogas a forças "magnéticas", embora acreditasse que essas forças fossem de outro "tipo" [17, p. 345–349]:

> Qu. 29. Não são os raios de luz corpos muito pequenos emitidos por substâncias brilhantes? [...] Nada mais é necessário para produzir toda a variedade de cores e graus de refrangibilidade do que os raios de luz serem corpos de tamanhos diferentes, o menor dos quais pode formar o violeta, a mais fraca e mais escura das cores, e ser mais facilmente desviado do seu curso correto por superfícies refratárias; e os demais [tamanhos], por serem cada vez maiores, podem tornar as cores mais fortes e lúcidas, [na sequência] azul, verde, amarelo e vermelho, e serem cada vez menos desviadas [...] E, por último, a refração incomum do cristal da Islândia é como se fosse executada por algum tipo de virtude atrativa alojada em certos lados, tanto dos raios [de luz], quanto das partículas do cristal [...] Não digo que essa virtude seja magnética: [pois] parece ser de outro tipo. Eu apenas digo que, seja o que for, é difícil conceber como os raios de luz, a menos que sejam corpos, podem ter uma virtude permanente em dois de seus lados que não esteja em seus outros lados, e isso sem qualquer consideração sobre sua posição no espaço ou sobre o meio pelo qual eles passam.

Em princípio, a teoria corpuscular newtoniana parecia fornecer uma boa explicação para a natureza de todos os fenômenos ópticos conhecidos na virada do século XVII para o século XVIII, principalmente diante das dificuldades de Huygens em discutir a natureza ondulatória das cores e a ausência de uma explicação ondulatória para a difração (p. 8 da seção anterior deste capítulo). Outro fator relevante que parece ter colaborado com o sucesso inicial da teoria corpuscular foi a descoberta da aberração de luz. Samuel Molyneux (1689–1728) e James Bradley (1693–1762) observam em conjunto, entre 1725 e 1727, que as posições aparentes das estrelas no céu sofrem um desvio na direção tangencial ao movimento da Terra, mas no sentido oposto. Essa descoberta, foi comunicada por Bradley em carta a Edmond Halley (1656–1742) e publicada em 1728 [18]. Na carta, Bradley explica, detalhadamente, suas observações tomando por hipótese i) que a luz é uma "partícula" que viaja das estrelas até um observador na Terra e ii) que a luz tem sua trajetória alterada por simples composição de movimentos [18, pp. 646–647]:

> Por fim, conjecturo que todos os fenômenos até agora mencionados decorreram do movimento progressivo da luz e do movimento anual da Terra em sua órbita. Pois percebi que, se a luz se propagasse no tempo, o lugar aparente de um objeto fixo não seria o mesmo quando o olho está em repouso, como quando ele está se movendo em qualquer outra direção que não seja a da linha que passa pelo olho e pelo objeto; e que, quando o olho se move em direções diferentes, o lugar aparente do objeto seria diferente.

Nesse cenário, a hipótese de que a luz é constituída por partículas que se movem no vácuo tornou-se, grosso modo, uma explicação cada vez mais popular para a natureza da luz ao longo do século XVIII, principalmente na França, onde ficou conhecida pelo nome de *teoria da emissão*. Um exemplo notável desta crescente popularidade é um distinto trabalho de Pierre Louis de Maupertuis (1698–1759). Em 1748, Maupertuis propõe um novo princípio de mínimo para a refração em que a luz sofre uma ação que a desvia de sua trajetória original e, ao contrário do que Fermat defendeu (p. 6 deste capítulo), *aumenta* sua velocidade em meios mais refringentes.[8] Maupertuis não chega a aplicar diretamente a Mecânica newtoniana para justificar seu princípio, mas a elogia [19, p. 420]: "esta força" que atua, segundo Newton, sobre as partículas de luz na superfície de separação entre materiais transparentes "difundida em todos os corpos em proporção à sua quantidade de matéria, uma vez admitida, explica da maneira mais exata e rigorosa os

[8]Ou seja, Maupertuis propõe o inverso do resultado obtido a partir de Fermat, eq. (2.A), na nota de rodapé 3, p. 9.

fenômenos de refração".[9] Entretanto, foi no início do século XIX que a teoria corpuscular alcançou seu apogeu, principalmente graças a Pierre Simon de Laplace (1749–1827), que teve uma grande influência intelectual na França de sua época. Laplace adota a teoria corpuscular, explicitamente, em seu *Traité de Mécanique Céleste* [20] e, ao estudar a refração da luz na atmosfera da Terra, propõe o termo "molécula de luz" para se referir às partículas luminosas [20, p. 231–235]. Ademais, Laplace incorpora em seu "Sur le mouvement de la lumière dans les milieux diaphanes" [21], como propriedade necessária à teoria, o princípio de mínimo de Maupertuis [21, p. 124–125].

Outro fenômeno no qual a teoria corpuscular apresenta um certo sucesso é na explicação da "polarização da luz". Étienne-Louis Malus (1775–1812), que fazia parte do círculo de influência de Laplace, descobre, ao colocar um cristal de calcita no caminho de raios de luz refletidos por superfícies de materiais transparentes comuns, isto é, materiais não cristalinos e não metálicos, que a reflexão também é capaz de corroborar a ideia de "lados" nas moléculas de luz. Seus resultados são publicados em 1809 [22, 23]. Ernst Mach (1838–1916) relata a maneira pela qual esta descoberta ocorreu [24, p. 190]:

> Um anúncio de prêmio proposto [em 1808] pela Academia de Paris para uma teoria matemática da dupla refração direcionou-o [Malus] para um de seus trabalhos mais frutíferos. Enquanto se ocupava desse problema, em sua casa na Rue d'Enfer, em uma tarde, olhou, através de um cristal de calcita, para o reflexo do Sol poente em uma janela do Palácio de Luxemburgo e ficou surpreso ao ver, sob certas orientações, apenas uma imagem, ao invés de duas, [pois] as imagens ordinárias e extraordinárias desapareciam conforme o cristal rodava. Sua primeira conclusão foi que a luz sofria modificação pela atmosfera. Nesse ínterim, porém, o Sol se pôs e a observação não pôde ser repetida como antes. Então, Malus permitiu que a luz de uma vela fosse refletida, primeiro, pela superfície da água e, depois, pela superfície do vidro e a testou com um cristal de calcita. Da mesma forma, a luz foi submetida à reflexão após deixar o cristal de calcita. Na noite dessa observação original,

[9] É interessante notar, aqui, que Maupertuis, assim como Newton (veja nota de rodapé 7, p. 14), parece não fazer distinção entre "quantidade de matéria" e o que, hoje, conhecemos como índice de refração, mesmo que Hooke, em seu *Micrographia* [8, p. 57], já alertasse que poderiam haver diferenças entre a "densidade óptica" e a densidade usual de matéria.

> ele havia descoberto as características essenciais do que, em relação ao ponto de vista expressado por Newton, é denominado luz "polarizada"[...]

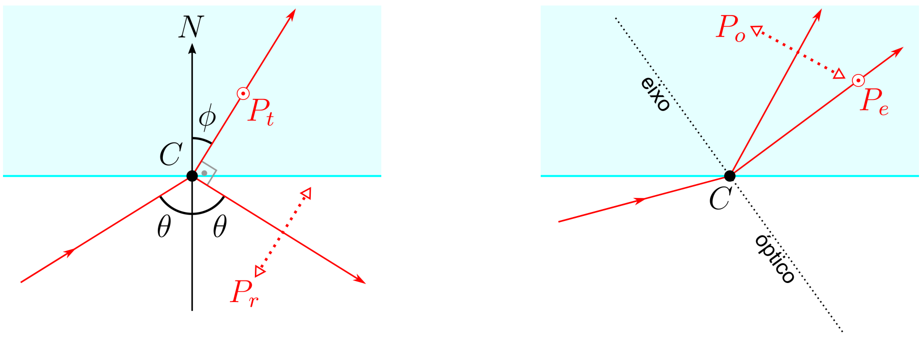
Malus, por seu trabalho sobre a birrefração, vence o prêmio citado por Mach, concedido pela *Académie des Sciences* de Paris, em 1809, e, no ano seguinte, nomeia o novo fenômeno de luz "polarizada" (ou simplesmente *polarização*, como se diz hoje). Em suas palavras [25, p. 447]: "não só a luz é uma substância sujeita às forças que animam outros corpos, como também a forma e a disposição de suas moléculas têm grande influência nos fenômenos" observados. Malus não revela seus motivos para se referir aos "lados" das moléculas de luz como "polos" e nem mesmo usa a palavra "polo" isoladamente, mas é possível especular, com algum grau de certeza, que ele a tenha adotado por causa da sugestão de Newton de que esses "lados" poderiam sofrer algum tipo de ação magnética (p. 15 deste capítulo), mesmo que não existisse qualquer evidência, pelo menos não naquela época, que sustentasse essa ideia.[10]

Pouco tempo depois, Jean-Baptiste Biot (1774–1862) e François Arago (1786–1853), que, assim como Malus, faziam parte do círculo de influência de Laplace, passam a adotar um sistema de nomenclaturas que será fundamental para as discussões da Óptica nas décadas seguintes, não só no cenário da teoria corpuscular (que é sua origem), como também na própria teoria ondulatória.[11] Em seu "Sur de nouveaux rapports qui existent entre la réflexion et la polarisation de la lumière des corps cristallisés" [29], por exemplo, Biot define que, constitui uma luz com "polarização confusa" [29, p. 235], um raio formado por uma fileira de moléculas cujos "eixos" estão dispostos de maneira desordenada. Também, se apenas uma parte das moléculas que compõem o raio estiverem com seus "eixos" contidos em um mesmo plano,

[10]A evidência definitiva de que a polarização da luz está intimamente relacionada a fenômenos magnéticos só será descoberta por Michael Faraday (1791–1867) muitos anos mais tarde. Como bem identificou Roberto Torretti [26], Faraday passou mais de uma década procurando uma relação experimental entre luz, eletricidade e magnetismo até que, em 1845, consegue finalmente encontrar a conexão que procurava ao induzir, a partir de campos magnéticos, a rotação de polarização da luz que atravessava um bloco de vibro temperado com chumbo [27]. Esse fenômeno ficou conhecido como "efeito Faraday".

[11]Essas nomenclaturas, porém, só serão definidas com total clareza por Biot cerca de dez anos depois, em seu *Précis élémentaire de physique expérimentale* [28].

diz-se que a luz possui "polarização parcial" [29, p. 161]. Finalmente, se todas as moléculas estiverem com seus "eixos" em um mesmo plano, diz-se que a luz está com "polarização completa" ou com "polarização total" [29, pp. 140–143]. Arago, por outro lado, no mesmo ano [30], adota o termo "luz não polarizada" [30, p. 16] (que é nome usado até hoje) para o caso da polarização confusa de Biot, embora ambos concordem com os outros termos e passem a chamar de "plano de polarização" [29, p. 237, 30, p. 120], o plano que contém os "lados" das moléculas de luz que constituem o raio, tanto na polarização parcial, quanto na polarização total. Todas essas discussões ocorrem no final de 1811 e, em 1815, Biot nomeia, agora com um pouco mais de clareza, "eixo de polarização" (direção de polarização) o eixo que une os "polos" de uma única molécula [31, p. 190].



(a) Plano de incidência em meios comuns. P_r e P_t são, respectivamente, as direções de polarização do raio refletido e refratado no fenômeno da reflexão totalmente polarizada.

(b) Seção principal de um cristal. O raio ordinário é, por convenção, "polarizado" como o raio refletido em (a). O raio extraordinário é, necessariamente, polarizado perpendicularmente.

Figura 2.4: "Polarização" convencional da luz em meios comuns (esquerda) e em cristais (direita). A luz incide em C. O símbolo $\odot$ representa uma seta "saindo" do plano da folha.

2.2.1 O conceito de plano de polarização segundo os emissionistas

A ideia de que a luz possui "polos" leva ao problema imediato de como determinar para onde eles se orientam quando as moléculas de luz interagem com a matéria e, talvez, este seja um das maiores focos de confusão para todos aqueles que se arriscam a ler as discussões da Óptica do século XIX. A isto, o leitor deve estar atento. Como é difícil saber se os emissionistas, pelo menos no início, compreendiam a direção de polarização de cada molécula individual da luz como perpendicular à trajetória, isto é, ao raio, toda a discussão era sobre a determinação do *plano de polarização.*[12] Por esse motivo, os emissionistas *impuseram*, sem qualquer justificativa, que *o plano de polarização de um raio de luz totalmente polarizada por reflexão em meios comuns deve coincidir com o "plano da reflexão"*, ou plano de incidência, como se diz hoje. A convenção é explicada na Fig. 2.4a, em que o ponto C representa o ponto de incidência de um raio de luz não-polarizada sobre a superfície entre dois meios transparentes comuns, de onde emergem os raios refletido e refratado.

Em 1815, David Brewster (1781–1868) [33, prop. XI] descobre, experimentalmente, que a polarização total da luz, quando refletida pela superfície entre dois materiais comuns e transparentes, só ocorre quando o raio refletido é perpendicular ao raio refratado (lei de Brewster).[13] Da mesma maneira, Brewster descobre que, neste caso, *o raio refratado nos meios comuns também é totalmente polarizado, mas tem seu plano de polarização perpendicular o plano do raio refletido.* Logo, pela convenção dos emissionistas, uma maneira

[12]Segundo Max Born (1882–1970) e Emil Wolf (1922–2018) [32, p. 29], os termos "direção de polarização" e "plano de polarização", como definidos pelos emissionistas, correspondem respectivamente, no Eletromagnetismo atual, ao *vetor magnético* e ao plano que contém o vetor magnético e a direção de propagação da luz. Alguns autores modernos, porém, inadvertidamente redefinem esses termos como a direção do campo elétrico e o plano que contém as oscilações do campo elétrico, o que, em princípio, pode dificultar o entendimento das origens históricas desses termos. Como ficará claro nesta tese, "polarização" e "plano de polarização" serão usados pelos defensores da teoria ondulatória, ao longo de todo o século XIX, para se referir a direções bem definidas no espaço e que coincidem com aquelas definidas originalmente pelos emissionistas.

[13]Em notação atual, a descoberta citada acima pode ser descrita pela chamada "lei de Brewster", em homenagem a seu descobridor:

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{1}{n_r}, \tag{2.B}$$

em que θ corresponde, tanto ao ângulo de incidência, quanto ao ângulo de reflexão, e n_r corresponde ao índice de refração relativo definido pela eq. (2.A) na nota de rodapé 3, p. 9, deste capítulo.

de representar este problema, embora anacrônica, é considerar P_r (paralela ao plano de incidência) e P_t (perpendicular ao plano), respectivamente, a orientação dos eixos de polarização de uma molécula qualquer pertencente ao raio refletido e de uma molécula qualquer do raio refratado.

Nos cristais, por sua vez, os planos de polarização dos raios ordinário e extraordinário podem ser obtidos a partir do experimento original de Malus descrito na p. 18 desta seção, que estende os conceitos estabelecidos na reflexão em materiais comuns à birrefração. Quando um raio de luz totalmente polarizada incide sobre a superfície de um cristal de calcita, por exemplo, existe uma orientação específica do cristal que só permite a passagem de raios ordinários, o que ocorre quando a polarização da luz incidente é paralela à seção principal. Por este motivo, diz-se que *a seção principal do cristal*, Fig. 2.4b, *coincide com o plano de polarização do raio ordinário*. Perpendicular a essa orientação, porém, existe uma segunda orientação que só permite a passagem de raios extraordinários, logo, *o plano de polarização do raio extraordinário deve ser perpendicular à seção principal do cristal*. Uma maneira anacrônica de representar essa discussão é considerar P_o, a direção de polarização das moléculas que compõem o raio ordinário e P_e, a direção para o eixo que une os polos da luz que constituem o raio extraordinário. Por fim, se a luz incidente for não polarizada, como é o caso da Fig. 2.4b, ou se seu plano de polarização for *oblíquo*, isto é, nem perpendicular, nem paralelo à seção principal do cristal, então formam-se dois raios refratados com polarizações perpendiculares entre si.

2.3 Polarização da luz e o surgimento de um "nova" teoria ondulatória

Durante o século XVIII, apesar do aumento gradual na popularidade da teoria corpuscular newtoniana, a teoria ondulatória não permaneceu estagnada. Em geral, as ideias ondulatórias na Óptica foram muito beneficiadas pelo rápido desenvolvimento da Acústica no período, o qual consolidou conceitos importantes como comprimento de onda, frequência e amplitude e possibilitou, também, o surgimento de uma nova matemática. Um caso emblemático nesse sentido foram as pesquisas de Leonhard Euler (1707–1783), que, por exemplo, em seu "Nova theoria lucis & colorum" [34], de 1746, estende seus estudos sobre o som para a luz e tenta responder a principal crítica de Newton (Seção 2.2, p. 15) contra a existência do éter, defendendo que a densidade do meio universal é tão pequena que, para todos os efeitos, deveria ser considerada desprezível [34, p. 173]. De maneira semelhante, Euler apresenta no "Nova Theoria" uma das primeiras analogias conhecidas entre o movimento da luz e o movimento de "cordas vibrantes [34, p. 184], que era, do ponto de vista matemático, um tema relativamente bem compreendido na época. Contudo, ao contrário de Huygens (Seção 2.1, p. 9), Euler não tinha dúvidas de que a luz se propagava no éter como o som se propaga nos meios materiais, ou seja, com regiões mais densas e regiões menos densas em um meio elástico (pulsos longitudinais) [34, p. 184]:

> [...] se prestarmos atenção à propagação do som e concebermos uma propagação semelhante à da luz, teremos uma investigação muito segura. O som se propaga principalmente através do ar, que é um fluido elástico que, não só possui uma grande força de expansão, como também pode ser comprimido por um impacto qualquer até um alto grau de condensação. Portanto, será apropriado conceber o éter também com a mesma natureza, de modo que, através dele, a luz se propague como o som se propaga através do ar. A explicação dos raios de luz a partir da investigação da natureza dos fluidos elásticos é muito difícil, se não a mais difícil de investigar na mecânica, por isso tentarei compreender como um pulso é produzido e propagado por tais fluidos.

Nessa perspectiva, um dos principais objetivos da analogia entre o éter e as cordas vibrantes é estabelecer de maneira clara, a partir das leis da Dinâmica, que a velocidade de propagação da onda luminosa depende da raiz quadrada do produto entre a "elasticidade" (força elástica por unidade de área) do meio e sua "raridade" (o inverso da densidade) [34, p. 195].[14] Uma vez que a elasticidade e a "raridade" são propriedades exclusivas do meio, independente das ondas que se propagam nele, Euler compreende que

[14] Em notação modernizada, se K é a força elástica (lei de Hooke) por unidade de área e ρ é a densidade, a velocidade de propagação, v, da onda luminosa "longitudinal" em um

as cores estão associadas a frequências, resolvendo, assim, uma das principais dificuldades enfrentadas por Huygens na gênese da teoria ondulatória; embora Euler tenha concluído que a cor vermelha está associada a sons agudos e a cor violeta, a sons graves [34, p. 218], o que, é claro, é o inverso do aceito hoje. Outro desafio era que a luz ainda era explicada por pulsos viajando no meio, e não por ondas em seu sentido mais amplo.

Neste ponto, porém, não é o objetivo deste capítulo se aprofundar no desenvolvimento da mecânica ondulatória do século XVIII. O que importa realmente é que Young, em 1800 [35], já dispõe, afinal, de ferramentas matemáticas e conceituais suficientes para compreender a interferência do som na formação de estados estacionários em instrumentos musicais de sopro, como o órgão de tubo, e discute a possibilidade de uma situação análoga na Óptica, caso a luz fosse uma onda. Inspirado por essa suposição, Young conduz, ao longo do ano seguinte, uma série de experimentos bem sucedidos sobre a interferência da luz e publica suas conclusões pouco depois [36]. O impacto dessa descoberta levou a Óptica a um impasse: a polarização proposta por Malus (p. 18 da seção anterior deste capítulo), sob inspiração newtoniana, parecia ser a evidência derradeira de um comportamento corpuscular para a luz, enquanto a interferência parecia uma prova inconteste de sua natureza ondulatória.

A descoberta da interferência foi tão importante para a História da Óptica que, por volta de 1814, convence Fresnel de que a natureza da luz era, obviamente, ondulatória, direcionando suas pesquisas. De maneira muito resumida, os trabalhos iniciais de Fresnel eram essencialmente experimentais, pois, segundo Jed Buchwald [37, p. 219], Fresnel não apresenta uma "matemática sofisticada" antes de 1818. Contudo, o cenário muda quando ele se envolve na disputa pelo próximo prêmio bianual concedido pela *Académie des Sciences* de Paris, cujo tema é a difração. Seu principal oponente é Biot, um emissionista, e Fresnel debruça-se sobre uma explicação ondulatória rigorosa

dioptro qualquer pode ser dada por:

$$v = \sqrt{\frac{\mathrm{K}}{\rho}}. \tag{2.C}$$

para o fenômeno, apresentando seus resultados preliminares ainda naquele ano [38]. Essas pesquisas levam-no a vencer o prêmio, no início do ano seguinte, graças a uma demonstração baseada em "princípios físicos simples" de interferência, como defende Eugene Frankel [39, p. 161]. Mesmo assim, segundo Darrigol [40, p. 205], nem diante dessa e de outras provas imediatas das capacidades da "teoria de Fresnel" em explicar a difração, Laplace e seus "discípulos" se "convertem" à teoria ondulatória.

No mesmo ano de 1818, Fresnel também ataca outra trincheira da teoria corpuscular: a aberração de luz. Em carta a Arago, publicada no *Annales de Chimie et de Physique* [41], Fresnel propõe que a aberração não é causada por uma simples composição de movimentos, como defendeu Bradley quase um século antes (Seção 2.2, p. 16). O motivo, segundo ele, é que a matéria ponderável que compõe a Terra deveria arrastar consigo, em seus interstícios, uma parte do "fluido universal", o que provocaria o efeito observado [41, p. 58]:

> Se admitíssemos que o nosso globo [nosso planeta] imprime o seu movimento no éter que o envolve, compreenderíamos facilmente porque um mesmo prisma refrata a luz [que emana das estrelas] sempre da mesma maneira, seja qual for o lado de onde chega. Mas parece impossível explicar a aberração das estrelas nesta hipótese: pelo menos até agora só consegui conceber claramente este fenômeno supondo que o éter passa livremente através do globo, e que a velocidade comunicada a este fluido sutil é apenas uma pequena parte daquela da terra [...]

Essa explicação para a aberração, em geral, ficou conhecida, ao longo do século XIX, como a hipótese do "arrasto do éter" e parte do princípio que o meio universal mantém constante sua elasticidade, K, e aumenta sua densidade, ρ, conforme aumenta o índice de refração relativo, n, do meio em relação ao próprio éter. Assim, em notação adaptada da original, supondo K igual a 1, a densidade relativa, ρ_r, do fluido universal no interior da matéria ponderável deveria ser, segundo Fresnel:[15]

$$\rho_r = n^2. \tag{2.1}$$

Após o prêmio, Fresnel passa a se dedicar, quase exclusivamente, ao problema da polarização. Conforme explica Frankel [39, p. 163], Fresnel já vinha se ocupando do tema há alguns anos, pois, em 1816, ele, em parceria com Arago, realiza uma série de experimentos decisivos sobre a interferência da luz polarizada, dentro de uma discussão maior sobre a polarização cromática descoberta por Arago em 1810 [30].[16] Segundo Darrigol [40], Fresnel acreditava, inicialmente, que as luzes coloridas provocadas pela dispersão em lâminas cristalinas fossem provocadas pela interferência entre os raios ordinários e extraordinários refletidos e refratados por essas lâminas; mas, os experimentos mostraram que *dois feixes com polarizações perpendiculares entre si, quando sobrepostos, não apresentam o resultado esperado da interferência, isto é, o padrão usual de franjas claras e escuras*. Então, em carta a Arago, em janeiro de 1817, Young sugere que a polarização da luz se deve a uma propriedade transversal das ondas luminosas, análoga às ondas que se propagam em uma corda vibrante, pois, segundo ele, regiões de interferência destrutiva não são formadas quando duas ondas transversais perpendiculares entre si se sobrepõem [44, p. 383].[17] Entretanto, Fresnel só irá publicar suas conclusões sobre a transversalidade da luz no início da década de 1820.

O começo dessa década marca, sem dúvida, um período extremamente produtivo na carreira de Fresnel. Por exemplo, em seu "De la Lumière"

[15]Essa equação pode ser obtida, sem muito esforço, a partir das eqs. (2.A) e (2.C) das notas de rodapé 3 e 14, pp. 9 e 22 respectivamente, e implica que a densidade do éter no interior dos meios opacos ($n \to \infty$) deveria explodir para infinito. Esse resultado parecia ter sido confirmado, pelo menos em primeira aproximação, por Hyppolyte Fizeau (1819–1896) em 1851 [42] e, depois, por Albert Michelson (1852–1931) e Edward Morley (1838–1923) em 1886 [43], mas discussões sobre o arrasto do éter não fazem parte do escopo desta tese, embora a eq. (2.1), em si, seja imprescindível.

[16]Em 1814, Arago abandona a teoria corpuscular por ficar "impressionado", nas palavras Frankel [39, p. 156], com os experimentos iniciais de Fresnel sobre a interferência, passando a tutela-lo pouco depois.

[17]Há indícios de uma segunda carta de Young a Arago, de abril de 1818, a respeito da mesma temática e que é mencionada por Whittaker [2, p. 115] e outros tantos historiadores, além do próprio Fresnel [45, p. 184], mas seu paradeiro é desconhecido.

[46], Fresnel demonstra que a interferência entre duas ondas transversais com polarizações perpendiculares entre si resulta em uma onda plana com polarização, ou "linear", ou "circular", ou "elíptica", dependendo da diferença entre suas fases [46, pp. 194-195].[18] Em um outro trabalho, o "II^e Note sur la Coloration des lames cristallisées" [45], Fresnel finalmente lança os dois problemas principais mencionados no início deste capítulo, p. 7: i) determinar se a direção de oscilação transversal da luz é paralela ou perpendicular ao conceito de plano de polarização, definido no cenário da teoria corpuscular, e ii) compreender o que acontece com as vibrações longitudinais da luz, que, embora fossem previstas pela "velha" teoria ondulatória de Huygens e Euler, não foram verificadas por seus experimentos, em parceria com Arago, sobre a interferência da luz polarizada. Em relação ao primeiro problema, Fresnel conclui que o *plano de oscilação* da onda luminosa, isto é, o plano que contém, tanto a direção de oscilação transversal, quanto a direção de propagação, deveria ser *perpendicular ao plano de polarização* [45, pp. 186–187], o que contraria as direções mostradas nas Figs. 2.4a e 2.4b. A maneira pela qual ele chega a essa conclusão será demonstrada com um pouco mais de detalhes na próxima seção (Seção 2.4), mas, em geral, ela está intimamente relacionada a seus estudos sobre a birrefração em cristais e sobre a reflexão em meios comuns.

Em relação ao segundo problema, por sua vez, Fresnel diz ter ficado convencido, pelo menos no início, que as ondas longitudinais da luz, de fato, não deveriam existir [45, pp. 179–180]:

> Essas dificuldades [de entender o que acontece com as oscilações longitudinais] me pareceram tão embaraçosas que negligenciei nossa primeira ideia [de oscilações puramente transversais] e continuei a supor oscilações longitudinais em raios polarizados, admitindo ao mesmo tempo movimentos transversais, sem os quais sempre me pareceu impossível conceber influências mútuas

[18] Arago, em seus experimentos sobre polarização cromática descobre que a direção de polarização do "cristal de rocha", como o quartzo era conhecido na época, possui uma propriedade inusitada [30, p. 117]. Para explicá-la, Biot, em 1815, [31] propõe que essa propriedade se deve a rotações contínuas dos eixos de polarização das moléculas de luz no interior do material e são diferentes para cada cor. Essa propriedade, porém, não é exclusiva do quartzo, aparecendo também em outras substâncias, como em uma solução de açúcar em água e na terebentina (aguarrás natural), e é conhecida, atualmente, como *atividade óptica*.

> [interferência] de raios polarizados em ângulos retos. Só há alguns meses, meditando com mais atenção sobre esse assunto, reconheci que era muito provável que os movimentos oscilatórios das ondas luminosas fossem executados apenas de acordo com o plano dessas ondas [o plano da onda é o plano perpendicular à direção de propagação], tanto para a luz direta [não polarizada] quanto para a luz polarizada. [Entretanto,] Não posso entrar aqui nos detalhes dos cálculos das várias combinações de movimentos longitudinais e transversais que me levaram a essa conclusão[. . .]

Este é o problema fundamental da Óptica que encontrará uma solução matemática com MacCullagh e, por isto, os debates sobre as ondas longitudinais da luz entre seus contemporâneos exigirá um capítulo próprio nesta tese, o Capítulo 3.

Após os trabalhos de Fresnel, a hipótese corpuscular entra em um rápido declínio e outros dois fatores relevantes contribuem para isto. O primeiro é experimental. Por volta de 1850, os experimentos de Léon Foucault (1819–1868) demonstram que, na água, a luz tem velocidade menor do que no ar [47], significando, de maneira inequívoca, que o modelo de refração de Newton-Maupertuis (Seção 2.2, pp. 14 e 16), uma das previsões mais fundamentais da teoria da emissão, estava errado. O segundo fator é teórico e está relacionado à explicação ondulatória para a dispersão, que alcança seu estado da arte com os trabalhos de Joseph Boussinesq (1842–1929), em 1868 [48, 49]. Assim, até pelo menos o início do século XX, a teoria ondulatória se consolida como a explicação dominante na Óptica, embora o termo "plano de polarização", cujos lugares no espaço foram definidos pelos emissionistas (Subseção 2.2.1), continue a ser amplamente usado no período.

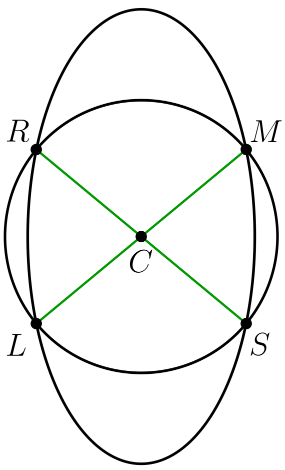
2.4 Tentativas de Fresnel de resolver o problema da direção das vibrações transversais

Apesar de William Hyde Wollaston (1766–1828) oferecer, nos primeiros anos do século XIX [50], uma prova experimental bastante precisa (para os padrões da época) para o modelo de Huygens para a birrefração em *cristais com polarização linear*, como a calcita (Seção 2.1, p. 11), novos indícios demonstraram que ele não era um modelo geral. Um dos indícios mais determinantes nesse sentido foi descoberto por Brewster [51], o qual demonstrou experimentalmente que a propagação da luz em alguns cristais, como a aragonita, não podia ser explicada por "um único elipsoide", pois, em suas palavras, exigia a existência de "dois eixos de refração dupla" [51, p. 202].[19] A descoberta de meios cristalinos com dois eixos ópticos rapidamente chamou a atenção de Fresnel que, para dar conta da nova descoberta, apresenta aos membros da *Académie des Sciences* de Paris, entre novembro de 1821 e abril de 1822, um de seus mais importantes trabalhos, cujo objetivo é generalizar o modelo de Huygens para explicar, tanto os cristais uniaxiais (com um eixo), quanto os biaxiais (com dois eixos). Em relação a isto, Fresnel comenta [52, p. 51]:

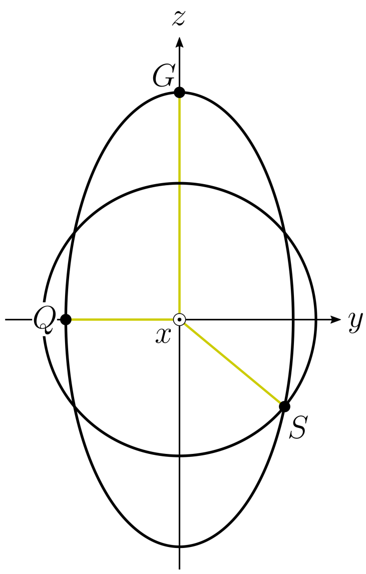
> A teoria das vibrações [teoria ondulatória], que sugeriu a Huygens a ideia das ondas elipsoidais, por meio das quais ele felizmente representou o caminho dos raios extraordinários em cristais de um eixo, levou-nos à descoberta das verdadeiras leis da dupla refração no caso geral de cristais com dois eixos [...]

Este distinto trabalho, intitulado "Mémoire sur la double réfraction" [52], inicia-se com uma dinâmica para tentar explicar a propagação das vibrações transversais da luz em cristais; mas é possível inverter a ordem do raciocínio original de Fresnel, que é extremamente longo e difícil, e iniciar a exposição pelo final, ou seja, pelo modelo geométrico de birrefração. Talvez isto facilite um pouco o entendimento e dê uma noção básica do problema físico envolvido nos cálculos. Segundo Fresnel, para compreender o problema geral dos meios cristalinos biaxiais, "não existe mais razão para dar o nome de raio ordinário" a qualquer um dos dois raios refratados [52, p. 170], porque nenhum deles possui velocidade de propagação independente da direção em que se propagam [52, p. 171]. Mesmo assim, os dois raios (ambos extraordinários) podem se mover com velocidades iguais, uma da outra, em determinadas circunstâncias e isso ocorre na direção do eixo óptico [52, p. 150]. A diferença,

[19] Para compreender este resultado, é necessário recordar que, segundo Huygens, o eixo óptico da calcita está sempre na direção do segmento $\overline{LM}$, Fig. 2.2, p. 12, ao longo do qual as velocidades das duas ondas são iguais e elas se confundem.



(a) RS e LM representam os dois eixos ópticos do cristal (biaxial). No caso particular em que RS e LM coincidem, o cristal torna-se uniaxial.



(b) Apenas no plano da seção principal, a seção da "superfície de onda" resulta em uma elipse (seção $GSQG$) e em uma circunferência (seção SS).

Figura 2.5: À esquerda, os dois eixos ópticos do cristal biaxial no plano da seção principal. À direita, a mesma figura, dessa vez evidenciando as seções da "superfície de onda" em um instante qualquer, de onde se obtém os dois raios extraordinários (respectivamente, seções $GSQG$ e SS). Os dois raios emanam de um mesmo ponto, o ponto de incidência C. Figuras adaptadas do original de Fresnel [52, Fig. 14]. O símbolo $\odot$ representa uma seta "saindo" do plano da folha.

agora, é que existem dois eixos ópticos e a seção principal do cristal passa a ser definida como o plano que contém os dois eixos, como mostra a Fig. 2.5a. A luz incide em C, sobre uma das faces do cristal, e $\overline{LM}$ e $\overline{RS}$ representam os eixos ópticos. Com isso em vista, o problema imediato que surge é entender o que são as seções esférica e elíptica representadas na figura.

Na "Mémoire", Fresnel descobre que a direção de propagação da luz nos dois raios refratados podem ser obtidos por uma única equação matemática, denominada "superfície de onda" [52, p. 109]. Nas palavras de Fresnel, após "longos e tediosos" cálculos, "que, creio eu, não deva transcrevê-los aqui", a equação é [52, p. 136, eq. (D)]:

$$\begin{aligned} v_t^2 u_t^2 w_t^2 t^4 - [u_t^2 x^2 (v_t^2 + w_t^2) + v_t^2 y^2 (u_t^2 + w_t^2) + w_t^2 z^2 (u_t^2 + v_t^2)] t^2 + \\ + (x^2 + y^2 + z^2)(u_t^2 x^2 + v_t^2 y^2 + w_t^2 z^2) = 0, \end{aligned} \tag{2.2}$$

em que t é o tempo e u_t, v_t e w_t são velocidades associadas ao que ele chama de "eixos de elasticidade" do cristal [52, p. 93], isto é, o sistema de coordenadas cartesianas x, y e z na Fig. 2.5b [52, p. 108]. O problema geral é dificílimo, como o leitor pode reparar, mas, pelo menos no caso específico em que os raios se movem no plano da seção principal do cristal (plano yz na Fig. 2.5b), Fresnel mostra que a velocidade de propagação do raio obtido da seção circular da "superfície de onda" (seção SS na Fig. 2.5b) depende apenas de u_t [52, p. 165]. Nestas condições, o raio se comporta como se fosse um raio ordinário. Por outro lado, a velocidade de propagação do raio obtido da seção elíptica da "superfície de onda" (seção $GSQG$ na Fig. 2.5b) depende dos outros dois "eixos de elasticidade", ou seja, se o raio se propagar na direção de $\overline{CG}$, sua velocidade de propagação é v_t e, se ele se propagar na direção de $\overline{CQ}$, sua velocidade é w_t [52, p. 165]. Por fim, quando u_t é igual a w_t, os segmentos $\overline{LM}$ e $\overline{RS}$ da Fig. 2.5b coincidem e o cristal torna-se um cristal uniaxial usual.

Com isso posto, segue-se o problema dinâmico da propagação das vibrações transversais em cristais. Após discutir as consequências de seus experimentos sobre interferência de raios com polarizações perpendiculares entre si (a ausência de franjas claras e escuras), Fresnel se propõe a explicar, ou pelo menos tentar explicar, quais propriedades são necessárias ao meio universal para que ele permita oscilações perpendiculares à direção de propagação [52, pp. 74-75]:

> Depois de provar que a direção transversal das vibrações luminosas é uma consequência necessária da ausência de fenômenos ordinários de interferência na reunião de raios polarizados em ângulos retos, deve-se mostrar que esta hipótese, estabelecida pelos fatos [pelos experimentos], no sistema de ondas [teoria ondulatória], não contraria os princípios da mecânica, e explica como tais vibrações podem se propagar em um fluido elástico.

Em seguida, Fresnel propõe uma série de hipóteses para o "fluido elástico".

Uma delas é que um "fluido" é constituído por um conjunto de "moléculas" separadas entre si por distâncias muito grandes quando comparadas às suas próprias dimensões, isto é, podem ser entendidas como pontos materiais. Uma segunda hipótese é que essas massas pontuais, inicialmente em equilíbrio, oscilam sob a ação de forças de atração e repulsão provocadas pela interação, seja ela qual for, entre elas.[20] Em geral, essas forças obedecem à lei de Hooke e, para fins de diferenciação, serão denominadas *elasticidade linear* nesta tese, pois MacCullagh irá definir um outro tipo de elasticidade no futuro (Capítulo 4).

Fresnel, então, enuncia dois teoremas para explicar como os movimentos lineares das moléculas etéreas sofrem a ação das forças. O primeiro deles é [52, p. 82]:

> Em qualquer sistema de moléculas em equilíbrio, e qualquer que seja a lei de suas ações recíprocas [a natureza das interações], o deslocamento muito pequeno de uma molécula em qualquer direção produz uma força repulsiva igual, em magnitude e direção, à resultante de três forças repulsivas que seriam produzidas separadamente por três deslocamentos retangulares deste ponto material iguais às componentes estáticas do primeiro deslocamento.

O segundo, por outro lado, é [52, p. 85]:

> Em qualquer sistema de moléculas ou pontos materiais em equilíbrio, existem sempre, para cada um deles, três direções retangulares segundo as quais qualquer pequeno movimento deste ponto, alterando um pouco as forças às quais está submetido, produz uma resultante total dirigida na linha do seu movimento [elasticidade linear].

Nesse contexto, se todas as constantes elásticas forem iguais a 1 e o tempo t também for igual a 1, Fresnel obtém as nove componentes das três forças

[20] Apesar de Fresnel usar a expressão "fluido elástico" para o éter, um fluido clássico não é capaz de transmitir ondas transversais. Uma possibilidade, então, para explicar a existência de vibrações transversais da luz seria o meio luminífero ser uma espécie de sólido elástico, que já era um tema relativamente bem compreendido no período. Neste cenário, o formalismo proposto por Fresnel é similar, por exemplo, àquele empregado por Biot em seu capítulo "De l'élasticité" [53], de 1816. Neste capítulo, Biot se propõe a investigar oscilações em "corpos elásticos" solicitados por forças de "compressão" e de "torção", embora ainda não use o termo onda transversal para se referir às oscilações provocadas pelas forças de "torção".

elásticas lineares que atuam sobre as moléculas etéreas na direção dos eixos de elasticidade do cristal [52, p. 86]: u_t, h, g são as componentes da força na direção do eixo x; h, v_t, f são as componentes da força elástica na direção y; e g, f, w_t são as componentes da força em z.

A discussão é extensa e não é necessário esgotá-la nesta seção, até porque o modelo de Fresnel será debatido e, em grande medida, aperfeiçoado por seus sucessores na primeira metade do século XIX, como se verá no próximo capítulo desta tese. O que realmente importa é o resultado de todos esses cálculos, que é, em notação adaptada da original [52, p. 91]:[21]

$$\xi = u_t \cos\alpha + h\cos\beta + g\cos\gamma, \tag{2.3a}$$

$$\eta = h\cos\alpha + v_t\cos\beta + f\cos\gamma, \tag{2.3b}$$

$$\zeta = g\cos\alpha + f\cos\beta + w_t\cos\gamma, \tag{2.3c}$$

com ξ, η e ζ, as componentes do deslocamento do éter e α, β e γ, respectivamente, os ângulos entre essas componentes e os eixos x, y e z. Além disso, Fresnel argumenta que, quando ξ é paralelo ao eixo x, α, g e h são iguais a zero [52, p. 93], o que permite reescrever as eqs. (2.3) como:

$$\xi = u_t, \tag{2.4a}$$

$$\eta = v_t\cos\beta + f\cos\gamma, \tag{2.4b}$$

$$\zeta = f\cos\beta + w_t\cos\gamma. \tag{2.4c}$$

Fresnel não chega a escrever estas equações explicitamente, eqs. (2.4), mas elas permitem compreender para onde se orientam as oscilações transversais dos dois raios refratados, o que Fresnel faz textualmente, por páginas

[21]Em princípio, as eqs. (2.3) levam a uma espécie de *equações de onda* rudimentares, embora o formalismo matemático de equações de onda já existisse na época. Poucos meses antes da "Mémoire" de Fresnel sobre a birrefração, Louis Henri Navier (1785–1836) é pioneiro a apresentar à *Académie* este formalismo para explicar a propagação de ondas mecânicas em meios elásticos, de modo que seu célebre trabalho, o "Mémoire sur les lois de l'équilibre et du mouvement des corps solides élastiques" [54], pode ser considerado, nas palavras de Isaac Todhunter (1820–1884) e Karl Pearson (1857–1936) [55, p. 133], o artigo "fundador" da teoria "moderna" de sólidos elásticos. Fresnel, no entanto, não adota, em suas pesquisas sobre a luz, o formalismo recém desenvolvido por Navier e este formalismo só será empregado na Óptica por seus sucessores, como se verá no Capítulo 3.

e mais páginas a fio. Quando u_t é igual w_t, o cristal torna-se uniaxial e o raio ordinário, que só depende de uma velocidade de propagação, eq. (2.4a), vibra na direção do eixo x, perpendicular ao plano da seção principal do cristal, Fig. 2.5b. Por outro lado, o raio extraordinário tem sua direção de propagação desviada pela ação dos outros dois eixos de elasticidade, eqs. (2.4b) e (2.4c), e vibra na própria seção principal do cristal, plano yz. Oras, isso é justamente o contrário das direções dos eixos de polarização representados na Fig. 2.4b, p. 19, o que faz Fresnel concluir que as oscilações transversais da luz devem ser perpendiculares ao conceito de plano de polarização definido pelos emissionistas [52, p. 157]. Mais ainda, Fresnel redefine o conceito de plano de polarização, dessa vez colocando-o em termos da teoria ondulatória [52, p. 157]: "assim, chamaremos o *plano de polarização de uma onda luminosa*, o plano normal à direção de suas vibrações".[22]

As pesquisas de Fresnel a respeito da birrefração em cristais com polarização fixa (ou polarização linear) foram, sem dúvida, um grande sucesso da teoria ondulatória da época e o passo seguinte parecia ser um só: explicar a polarização na reflexão em meios comuns, pois a escolha da direção de polarização em cristais afeta, de maneira inequívoca, a escolha da polarização por reflexão (e vice-versa), como mostra a Subseção 2.2.1, p. 21. Foi assim, seguindo esta sequência histórica, que a teoria corpuscular permitiu a formulação do conceito de polarização da luz. Fresnel, então, segue o mesmo caminho, intencionalmente ou não; embora o problema da reflexão, pelo menos no caso particular de meios comuns, seja muito mais simples de compreender do que o problema da birrefração em cristais. Os cálculos serão mostrados com bastante detalhes na subseção a seguir, principalmente porque o problema da reflexão em meios comuns será, em muitos casos, decisivo ao longo do século XIX.

[22]Como, no Eletromagnetismo atual, o plano de polarização convencional corresponde ao plano que contém as oscilações do campo magnético (veja a nota de rodapé 12, p. 20, deste capítulo), as vibrações transversais de Fresnel correspondem, imediatamente, às direções do campo elétrico.

2.4.1 Vibrações transversais na reflexão em meios comuns

No início de 1823, Fresnel apresenta um novo trabalho à *Académie*, sob o título "Mémoire sur la loi des modifications que la réflexion imprime à la lumière polarisée" [56], cujo objetivo é dar uma explicação ondulatória para a polarização da luz na reflexão. Neste novo trabalho, suas hipóteses são claras: i) *a elasticidade linear do éter deve ser constante* no interior de qualquer meio transparente, enquanto que *a densidade é quem deve variar*; ii) as vibrações transversais da luz produzidas no fluido universal pelas ondas incidente, refletida e refratada podem ser separadas em componentes paralelas e componentes perpendiculares ao plano de incidência; iii) essas vibrações devem ser perpendiculares a seus respectivos planos de polarização e devem ser, de alguma maneira, *contínuas na superfície* entre os dois dioptros; e iv) deve haver conservação de energia na superfície. A questão, agora, é entender como todas essas hipóteses são colocadas em prática nesta nova "Mémoire" e vale a pena tentar mostrar a linha de raciocínio de Fresnel, até porque cálculos análogos a estes serão feitos e refeitos várias vezes nos próximos capítulos desta tese, sob diferentes hipóteses e usando diferentes métodos, então será interessante comparar os resultados.

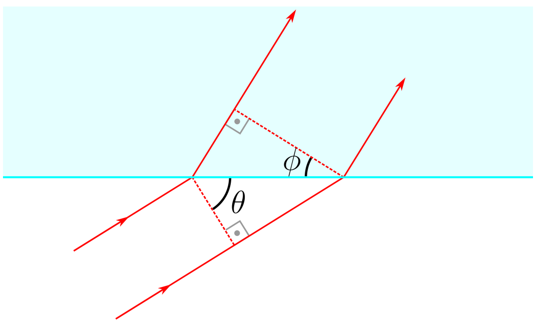
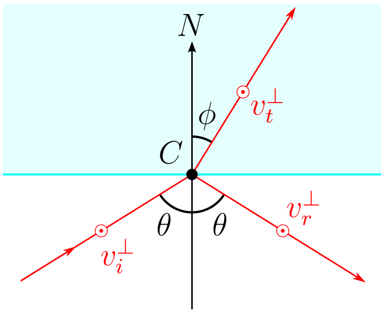
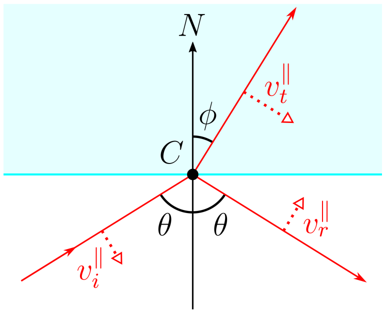


Figura 2.6: Feixe de luz refratado. As linhas tracejadas, em vermelho, representam duas frentes de onda. Imagem adaptada da original de Fresnel [56, p. 397, fig. sem número]

Assim, reconstituindo a demonstração original de Fresnel em uma linguagem um pouco mais atual, a Fig. 2.6 representa um feixe de luz não



(a) Componentes perpendiculares ao plano de incidência.



(b) Componentes paralelas ao plano de incidência.

Figura 2.7: Continuidade das componentes da velocidade de oscilação da onda luminosa durante a reflexão. O símbolo ⊙ representa uma seta "saindo" do plano da folha.

polarizada que sofre reflexão e refração ao passar de um meio para outro. As linhas pontilhadas representam a seção de duas "superfícies de onda" planas (ou planos de onda) pelo plano de incidência que, junto aos raios extremos do feixe (linhas cheias em vermelho), formam a base de um prisma de base triangular. O volume de éter afetado pela passagem das ondas incidentes, $\mathcal{V}_1$, depende do ângulo de incidência, θ, e o volume afetado pelo raio refratado, $\mathcal{V}_2$, depende do ângulo de refração, ϕ. Supondo que as alturas dos dois prismas são iguais, a relação entre os volumes é [56, p. 398]:

$$\frac{\mathcal{V}_1}{\mathcal{V}_2} = \frac{\text{sen}\,(\theta)\cos(\theta)}{\text{sen}\,(\phi)\cos(\phi)}. \tag{2.5}$$

Neste ponto, as suposições de Fresnel sobre a densidade do éter entram nos cálculos. A partir da razão entre os volumes mostrada na eq. (2.5) e a partir da eq. (2.1), p. 25 (a relação entre as densidades e o índice de refração), obtém-se com facilidade a razão entre as respectivas massas de éter deslocadas, m_1 e m_2, nos dois meios [56, p. 399, eq. sem número]:

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{\text{sen}\,(\phi)\cos(\theta)}{\text{sen}\,(\theta)\cos(\phi)}. \tag{2.6}$$

Em seguida, é a vez das hipóteses de elasticidade linear constante e de decomposição das vibrações em termos de componentes serem incluídas nos cálculos. Como as massas de éter deslocadas são diferentes, eq. (2.6), e como as forças elásticas de ação e reação na superfície são consideradas iguais nos dois meios, isso implica que, em geral, *pelo menos uma componente das vibrações deve ser descontínua*, pois forças iguais aplicadas sobre massas diferentes produzem acelerações diferentes. Fresnel, então, precisa descobrir quais componentes são contínuas e a resposta mais imediata é: os movimentos na superfície, onde há contato direto entre as duas porções do fluido universal, é que devem ser contínuos. Se não fossem, isso geraria fricção entre as duas porções de éter e seria praticamente impossível impor qualquer princípio de conservação de energia.

Primeiro, Fresnel obtém o que acontece com as componentes perpendiculares ao plano de incidência, isto é, as velocidades de oscilação transversal da onda incidente, $v_i^{\perp}$, da onda refletida, $v_r^{\perp}$, e da onda refratada, $v_t^{\perp}$, na Fig. 2.7a. Sabendo que as massas deslocadas pelos raios incidente e refletido devem ser iguais (pois possuem ângulos iguais), e assumindo como hipótese a conservação de energia cinética, é possível obter [56, p. 400, eq. (A)]:

$$\left[(v_i^{\perp})^2 - (v_r^{\perp})^2\right] \operatorname{sen}(\phi) \cos(\theta) = (v_t^{\perp})^2 \operatorname{sen}(\theta) \cos(\theta). \tag{2.7}$$

Por outro lado, como as velocidades de oscilação transversal devem ser contínuas na superfície, $v_i^{\perp}$, $v_r^{\perp}$ e $v_t^{\perp}$ devem ser contínuas, ou seja [56, p. 401, eq. sem número]:

$$v_i^{\perp} + v_r^{\perp} = v_t^{\perp}. \tag{2.8}$$

Substituindo a eq. (2.8) na eq. (2.7), é fácil chegar à chamada *lei seno* de Fresnel para a luz refletida na superfície de meios comuns [56, p. 401, eq. (1)]:

$$\frac{v_r^{\perp}}{v_i^{\perp}} = -\frac{\operatorname{sen}(\theta - \phi)}{\operatorname{sen}(\theta + \phi)}, \tag{2.9}$$

em que o sinal negativo indica uma inversão de fase da componente perpendicular ao plano de incidência da onda refletida, em relação à mesma componente da onda incidente (isto é, $v_r^{\perp}$ deveria ser uma seta “entrando” no plano da folha na Fig. 2.7a).

De maneira semelhante, é possível investigar a continuidade das componentes das oscilações transversais contidas no plano de incidência ($v_i^{\|}$, $v_r^{\|}$ e $v_t^{\|}$ na Fig. 2.7b). Tomando, arbitrariamente, *apenas* as projeções das velocidades sobre a superfície de separação entre os meios, isto é [56, p. 401, eq. sem número]:

$$(v_i^{\|} - v_r^{\|}) \cos\theta = v_t^{\|} \cos\phi, \tag{2.10}$$

não é difícil perceber que, por conservação de energia cinética, a razão entre as velocidades de oscilação das ondas incidentes e refratadas é [56, p. 402, eq. (2)]:

$$\frac{v_r^{\|}}{v_i^{\|}} = -\frac{\operatorname{tg}(\theta - \phi)}{\operatorname{tg}(\theta + \phi)}, \tag{2.11}$$

que resulta na chamada *lei tangente* de Fresnel. Mais uma vez, o sinal negativo significa uma inversão de fase nas vibrações transversais da onda refletida e $v_r^{\|}$ deveria ser no sentido oposto da seta correspondente na Fig. 2.7b.

Por fim, a única hipótese de Fresnel que ainda não foi demonstrada é aquela na qual as vibrações transversais são consideradas perpendiculares ao plano de polarização convencional. Para demonstrá-la, basta estudar o que acontece com a luz no caso particular da reflexão totalmente polarizada, obtida a partir da lei de Brewster (Seção 2.2, p. 20). Nestas condições, o ângulo de incidência, θ, e ângulo de refração, ϕ, são complementares e a lei tangente de Fresnel, eq. (2.11), é zero. *Isso significa que a polarização por reflexão é regida, sobretudo, pela lei seno*, eq. (2.9), e a oscilação transversal da onda refletida é inteiramente perpendicular ao plano de incidência, contrariando, de maneira clara, as polarizações da Fig. 2.4a, p. 19.

Capítulo 3

Modelos dinâmicos de propagação da luz: Cauchy e Green

Se, por um lado, a "nova" teoria ondulatória proposta por Young e, sobretudo, por Fresnel ofereceu uma explicação bem-sucedida, pelo menos no início, para os fenômenos ópticos conhecidos na primeira metade do século XIX, por outro, é possível identificar que os problemas fundamentais da teoria, apresentados no capítulo anterior desta tese nas pp. 7 e 26, não encontraram solução definitiva com os trabalhos de Fresnel por três motivos principais: i) as eqs. (2.3), p. 32, para a birrefração em cristais não proporcionavam uma formulação adequada de *equações de onda*, que eram relativamente bem compreendidas no período; ii) o modelo de reflexão em meios comuns dependia de uma hipótese sobre a *densidade do éter*, eq. (2.1), p. 25, cuja aceitação não foi unânime entre os pesquisadores da época e poderia, inclusive, ser destacada como um *problema distinto*, independente dos demais; e iii) as vibrações longitudinais continuavam a gerar incertezas quanto a sua existência porque pareciam necessárias a qualquer modelo (clássico) de ondas mecânicas, malgrado não fossem verificadas pelos experimentos.

Por sinal, Fresnel até dá a entender, em seu "II^{e} Note", que ondas longitudinais da luz não deveriam existir (Seção 2.3, p. 27), mas em sua "Mémoire" sobre a dupla refração, parece hesitar desta ideia. Seu modelo de "fluido etéreo" como pontos materiais sujeitos a forças de atração e repulsão mútuas (Seção 2.3, p. 31) impõe a existência de movimentos na direção de propagação que são produzidos pela compressão e, ao que tudo indica, a solução derradeira encontrada por ele para o problema foi propor que as ondas longitudinais no éter deveriam existir, sim, só não poderiam ser consideradas *luz visível* [52, pp. 78–79]:

> Com efeito, sendo a resistência à compressão muito maior do que a outra força elástica provocada pelo simples deslizamento das camadas [de moléculas etéreas], a onda produzida pela primeira estender-se-á muito mais do que aquela resultante da segunda, durante a mesma oscilação da partícula iluminadora [da fonte de luz] cujas vibrações agitam o éter; assim, mesmo que os pequenos movimentos das moléculas deste fluido sejam realizados de tal maneira que suas forças vivas [energia cinética] sejam repartidas igualmente entre os dois modos de vibração, as forças vivas incluídas na onda de condensação ou dilatação [onda longitudinal] encontram-se distribuídas em uma área muito maior do fluido do que aquelas da outra onda [onda transversal], [de modo que] as oscilações paralelas aos raios teriam uma amplitude menor que as oscilações perpendiculares e, consequentemente, só poderiam imprimir vibrações muito menores no nervo óptico [do olho humano]; porque a amplitude de suas vibrações não pode exceder a [amplitude] das vibrações do éter que o banha. Ora, é natural supor que a intensidade da sensação [da visão] depende da amplitude das vibrações do nervo óptico, e que, assim, a sensação de luz resultante das vibrações normais às ondas [vibrações longitudinais] seria substancialmente zero em relação àquela que seria produzida pelas vibrações paralelas à sua superfície [vibrações transversais].

Esse impasse levou grandes nomes da Óptica da primeira metade do século XIX, como Augustin Louis Cauchy (1789–1857), George Green (1793–1841) e MacCullagh (que podem ser considerados os principais sucessores de Young e Fresnel) a buscar novos métodos matemáticos para descrever a dinâmica da luz. Cauchy e Green defenderam que a luz era uma onda que se propagava em um éter com as mesmas propriedades físicas de um *sólido elástico*, embora lançassem mão de métodos matemáticos distintos. MacCullagh, por outro lado, será um caso à parte e, por isso, será discutido em um capítulo futuro (Capítulo 4). Com isso em vista, Cauchy foi pioneiro ao introduzir equações de onda para a luz e, para obtê-las, assumiu forças que atuam sobre cada partícula do meio com o intuito de determinar como as ondas são produzidas em escala microscópica, como se verá na Seção 3.1. Green, por sua vez, foi o primeiro a adotar o método lagrangiano na Óptica, que dispensa uma descrição da interação microscópica entre as partículas do meio, para obter as equações de onda a partir de um potencial, como será mostrado na Seção 3.2.[1]

Não obstante, tanto Cauchy, quanto Green, incorreram em vários erros que serão corrigidos, em grande medida, por MacCullagh e, por este motivo, compreender a origem destes erros é o objetivo geral deste capítulo. Cauchy, por exemplo, apesar de seu virtuosismo matemático e sua incontestável influência nos trabalhos de Green e MacCullagh, não removeu as vibrações longitudinais da teoria por possuir uma crença genuína de que elas realmente deveriam existir. Além disso, Cauchy não conseguiu fornecer uma resposta clara para a direção das oscilações transversais e para a densidade do éter em suas tentativas de explicar a birrefração em cristais e de explicar a reflexão e a refração da luz em meios comuns. O motivo: ele mudou de ideia algumas vezes e as simetrias propostas para as interações entre as moléculas do éter foram dadas, em todas as ocasiões, de maneira arbitrária, gerando mais confusão do que esclarecimento. Green, em compensação, embora tenha encontrado uma explicação mais ou menos satisfatória para a lei seno de Fresnel usando o método lagrangiano, ao tentar deduzir a lei tangente, chegou a uma equação incompatível com os resultados experimentais justamente por não remover, dos cálculos, as vibrações longitudinais.

[1] Estes dois métodos foram propostos pelo próprio Navier em seu artigo "fundador" da teoria de sólidos elásticos, brevemente mencionado na nota de rodapé 21, p. 32, do capítulo anterior desta tese. O artigo é dividido em duas "partes" [54, p. 375]: a primeira é dedicada à obtenção de "equações diferenciais que experimentam as leis de equilíbrio ou do movimento" e a segunda, à "integração dessas equações". Na primeira parte, Navier obtém equações diferenciais (equações de onda) a partir das forças que surgem da interação partícula-a-partícula do meio e, na segunda parte, adota o método lagrangiano para obtê-las.

3.1 "Teorias" dinâmicas de Cauchy para a propagação da luz

Cauchy foi certamente um dos maiores nomes do estudo da elasticidade dos materiais na primeira metade do século XIX. Logo em uma de suas publicações iniciais sobre o tema, do começo de 1823 [57], comenta que estava trabalhando em um "teorema" no qual um pequeno elemento de volume do meio estaria sujeito a "pressões" ou "tensões" em cada ponto de cada uma de suas faces [57, p. 10], quando foi "procurado" por Fresnel [57, p. 10]:[2]

> [. . .] Eu estava neste momento [de minhas pesquisas] quando o sr. Fresnel, vindo falar comigo sobre o trabalho que estava fazendo sobre a luz, e do qual havia apresentado apenas parte ao Instituto [*l'Institut de France*], disse-me que, por sua vez, havia obtido, para as leis segundo as quais a elasticidade varia nas diversas direções que emanam de um único ponto, um teorema análogo ao meu [. . .]

Porém, apesar da visita de Fresnel, Cauchy não se envolveu de pronto nas discussões a respeito da teoria ondulatória da luz, pois considera que [57, p. 10]: "o teorema em questão estava longe de ser, para mim, suficiente para atingir o objetivo ao qual me propus", prometendo desenvolver os cálculos em trabalhos futuros.

Cauchy demorou alguns anos para desenvolver corretamente os cálculos prometidos. Em 1827, por exemplo, no segundo volume de seus *Exercices de Mathématiques* [58], Cauchy volta a fazer alusão a Fresnel, dessa vez creditando a ele suas equações (que ainda estavam em desenvolvimento) para a propagação de ondas mecânicas em corpos sólidos [59, p. 59, eqs. (12)]. De fato, estas equações eram praticamente as mesmas equações de Fresnel para

[2]Segundo Todhunter e Pearson [55, p. 319], Cauchy começou a se envolver no estudo da elasticidade e da resistência dos materiais após ser nomeado revisor da já citada "Mémoire" de Navier. Nesse contexto, nesta publicação inicial sobre elasticidade dos materiais, mencionada acima, Cauchy diz que Navier havia considerado dois tipos de força em sua "Mémoire": uma produzida pela "expansão" ou "contração" do meio e a outra produzida por "flexão" [57, p. 10]. Entretanto, Cauchy considera que estes dois tipos de forças poderiam ser reduzidas a uma única força, que daria origem a uma "tensão" ou "pressão" com "a mesma natureza que a pressão hidrostática exercida por um fluido em repouso contra a superfície de um corpo sólido" [57, p. 10].

a birrefração, eqs. (2.3), p. 32, e, portanto, ainda não eram equações de onda em seu sentido moderno. No ano seguinte, porém, no terceiro volume dos *Exercices* [59], Cauchy finalmente obtém as equações corretas para o "teorema" supracitado. No capítulo sobre as equações do equilíbrio no interior de sólidos elásticos e não elásticos [59, p. 160], Cauchy apresenta equações para um meio isotrópico desprovido de tensões iniciais e, no capítulo seguinte, sobre o equilíbrio do movimento de um sistema de pontos materiais sujeitos a forças de atração e repulsão mútuas [59, p. 188], generaliza as equações para os meios anisotrópicos.

Como os *Exercices* apresentam uma longa análise, vale a pena resumir seus pontos mais relevantes, adaptando-os para uma notação mais atual e padronizada. Cauchy apresenta um estudo geral das interações internas de um sistema qualquer de moléculas do corpo partindo de quatro hipóteses principais: i) o meio elástico é constituído de um conjunto muito grande de moléculas, ii) essas moléculas são consideradas pontos materiais cujas massas agem umas sobre as outras a partir de forças que atuam na direção das linhas que as unem (elasticidade linear), iii) as forças dependem, de algum modo, da distância entre elas e iv) as massas puntiformes são dispostas simetricamente em relação a três planos ortogonais, resultando em uma densidade constante, ρ, para o meio. Nestas condições, dadas as componentes ξ, η e ζ do deslocamento das moléculas do material, as forças elásticas são consideradas oriundas de tensões, T_{ij}, que dependem de nove "coeficientes", $k_1, \ldots, k_9$, que surgem de complicadas simetrias para as interações [59, p. 199, eqs. (37), (38) e (39)]. Após um extenso trabalho de virtuosismo matemático, Cauchy obtém equações para as acelerações que surgem nas faces de um elemento de volume muito pequeno do sólido elástico anisotrópico em termos das tensões [59, p. 205, eq. (58)]:

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} = \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial T_{11}}{\partial x} + \frac{\partial T_{12}}{\partial y} + \frac{\partial T_{13}}{\partial z}\right), \tag{3.1a}$$

$$\frac{d^2\eta}{dt^2} = \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial T_{21}}{\partial x} + \frac{\partial T_{22}}{\partial y} + \frac{\partial T_{23}}{\partial z}\right), \tag{3.1b}$$

$$\frac{d^2\zeta}{dt^2} = \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial T_{31}}{\partial x} + \frac{\partial T_{32}}{\partial y} + \frac{\partial T_{33}}{\partial z}\right). \tag{3.1c}$$

As tensões são consideradas simétricas (para que haja conservação do momento angular), ou seja, $T_{12} = T_{21}$, $T_{13} = T_{31}$ e $T_{23} = T_{32}$, de modo que [59, p. 204, eqs. (56) e (57)]:

$$T_{11} = (k_4 + k_1)\frac{\partial \xi}{\partial x} + (k_9 - k_1)\frac{\partial \eta}{\partial y} + (k_8 - k_1)\frac{\partial \zeta}{\partial z}, \tag{3.2a}$$

$$T_{22} = (k_9 - k_2)\frac{\partial \xi}{\partial x} + (k_5 + k_2)\frac{\partial \eta}{\partial y} + (k_7 - k_2)\frac{\partial \zeta}{\partial z}, \tag{3.2b}$$

$$T_{33} = (k_8 - k_3)\frac{\partial \xi}{\partial x} + (k_7 - k_3)\frac{\partial \eta}{\partial y} + (k_6 + k_3)\frac{\partial \zeta}{\partial z}, \tag{3.2c}$$

$$T_{23} = T_{32} = (k_7 + k_3)\frac{\partial \eta}{\partial z} + (k_7 + k_2)\frac{\partial \zeta}{\partial y}, \tag{3.2d}$$

$$T_{13} = T_{31} = (k_8 + k_1)\frac{\partial \zeta}{\partial x} + (k_8 + k_3)\frac{\partial \xi}{\partial z}, \tag{3.2e}$$

$$T_{12} = T_{21} = (k_9 + k_2)\frac{\partial \xi}{\partial y} + (k_9 + k_1)\frac{\partial \eta}{\partial x}, \tag{3.2f}$$

com k_1, k_2 e k_3 relacionadas às chamadas "pressões" iniciais, ou *tensões iniciais* (como ficaram conhecidas ao longo do século XIX);[3] k_4, k_5 e k_6 relacionadas aos eixos do elipsoide da onda longitudinal; e k_7, k_8 e k_9 relacionadas aos eixos do elipsoide da onda transversal. Substituindo as eqs. (3.2) nas eqs. (3.1), obtém-se [59, p. 208, eqs. (68)]:

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} = \frac{k_4 + k_1}{\rho}\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{k_9 + k_2}{\rho}\frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{k_8 + k_3}{\rho}\frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} + \frac{2k_9}{\rho}\frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial y} + \frac{2k_8}{\rho}\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \partial z}, \tag{3.3a}$$

$$\frac{d^2\eta}{dt^2} = \frac{k_9 + k_1}{\rho}\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + \frac{k_5 + k_2}{\rho}\frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2} + \frac{k_7 + k_3}{\rho}\frac{\partial^2 \eta}{\partial z^2} + \frac{2k_7}{\rho}\frac{\partial^2 \zeta}{\partial y \partial z} + \frac{2k_9}{\rho}\frac{\partial^2 \xi}{\partial x \partial y}, \tag{3.3b}$$

$$\frac{d^2\zeta}{dt^2} = \frac{k_8 + k_1}{\rho}\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{k_7 + k_2}{\rho}\frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} + \frac{k_6 + k_3}{\rho}\frac{\partial^2 \zeta}{\partial z^2} + \frac{2k_8}{\rho}\frac{\partial^2 \xi}{\partial x \partial z} + \frac{2k_7}{\rho}\frac{\partial^2 \eta}{\partial y \partial z}. \tag{3.3c}$$

Para que as acelerações obtidas acima possam ser consideradas gerais, elas precisam abranger, também, soluções para os meios isotrópicos. A onda produzida neste caso deve apresentar superfícies de onda esféricas, implicando nas condições $k_1 = k_2 = k_3$, $k_4 = k_5 = k_6$ e $k_7 = k_8 = k_9$. Definindo o deslocamento das oscilações das moléculas do meio como $\vec{e}$, cujas compo-

[3] Isto é, quando k_1, k_2 e k_3 são nulos, as moléculas do meio podem ser consideradas livres de tensões de qualquer natureza quando não experimentam oscilações provocadas pela passagem de uma onda.

nentes são ξ, η e ζ, e adotando a relação arbitrária $k_4 = 3k_9$, Cauchy reduz as eq. (3.2) a [59, p. 210, eq. (78)]:

$$T_{11} = 2\mathrm{k}\frac{\partial \xi}{\partial x} + \mathrm{K}\vec{\nabla} \cdot \vec{e}, \tag{3.4a}$$

$$T_{22} = 2\mathrm{k}\frac{\partial \eta}{\partial y} + \mathrm{K}\vec{\nabla} \cdot \vec{e}, \tag{3.4b}$$

$$T_{33} = 2\mathrm{k}\frac{\partial \zeta}{\partial z} + \mathrm{K}\vec{\nabla} \cdot \vec{e}, \tag{3.4c}$$

$$T_{23} = T_{32} = \mathrm{k}\left(\frac{\partial \eta}{\partial z} + \frac{\partial \zeta}{\partial y}\right), \tag{3.4d}$$

$$T_{31} = T_{13} = \mathrm{k}\left(\frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{\partial \xi}{\partial z}\right), \tag{3.4e}$$

$$T_{12} = T_{21} = \mathrm{k}\left(\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial \eta}{\partial x}\right), \tag{3.4f}$$

onde $\mathrm{k} = k_9 + k_1$ e $\mathrm{K} = k_9 - k_1$. Com esses valores particulares para as tensões, as equações para as acelerações sofridas por uma perturbação no sólido elástico isotrópico, em notação anacrônica, pode ser reescrita como [59, p. 211, eq. (80)]:

$$\frac{\partial^2 \vec{e}}{\partial t^2} = -\frac{\mathrm{k}}{\rho}\vec{\nabla} \times \left(\vec{\nabla} \times \vec{e}\right) + \frac{2\mathrm{k} + \mathrm{K}}{\rho}\vec{\nabla}\left(\vec{\nabla} \cdot \vec{e}\right). \tag{3.5}$$

Assim, uma vez estabelecido o método, Cauchy finalmente pôde se envolver nas discussões da Óptica.[4]

[4]Um fato interessante de ser mencionado é que Cauchy faz questão de adotar a condição $K = k$ [59, p. 211], obtendo, assim, um meio ainda mais particular. Este meio, que, em princípio, aparece nos cálculos de Cauchy sem uma explicação aparente, é, na verdade, o meio proposto arbitrariamente, pela primeira vez, pelo próprio Navier e consiste na equação [54, p. 384, eq. sem número]:

$$\frac{\partial^2 \vec{e}}{\partial t^2} = -\frac{\mathrm{k}}{\rho}\vec{\nabla} \times \left(\vec{\nabla} \times \vec{e}\right) + \frac{3\mathrm{k}}{\rho}\vec{\nabla}\left(\vec{\nabla} \cdot \vec{e}\right). \tag{3.A}$$

Ademais, no mesmo ano em que o quarto volume dos *Exercices* de Cauchy foi publicado, Siméon Denis Poisson (1781–1840) [60] determina que a velocidade de propagação da onda longitudinal no sólido elástico de Navier é $\sqrt{\frac{3\mathrm{k}}{\rho}}$ [60, pp. 406 e 441] e da onda transversal é $\sqrt{\frac{\mathrm{k}}{\rho}}$ [60, p. 625], de modo que a razão entre as velocidades das ondas longitudinal, v_p, e transversal, v_s, é $\sqrt{3}$. Hoje, porém, sabe-se experimentalmente que a razão v_p/v_s não

3.1.1 A "primeira teoria" de Cauchy para a birrefração em cristais

Em 31 de maio e 7 de junho de 1830, Cauchy apresenta aos membros da *Académie de Sciences* de Paris, suas ideias sobre a birrefração em meios cristalinos, aplicando o formalismo desenvolvido nos *Excercices* ao movimento da luz. O conteúdo dessas apresentações ficou conhecido ao longo do século XIX como a "primeira teoria" de Cauchy para a birrefração e foi publicado sob o título de "Mémoire sur la théorie de la lumière" [61]. Na "Mémoire", Cauchy estabelece que a refração dupla em cristais uniaxiais e biaxiais pode ser explicada facilmente pelas eqs. (3.3), que descrevem o movimento de um sistema de moléculas submetidos a três eixos de elasticidade perpendiculares entre si, e determina como os raios de luz são obtidos destas equações [61, pp. 308–309]:

> [...] Sendo os coeficientes aqui em questão [coeficientes $k_1, \ldots, k_9$] considerados constantes, construiremos facilmente o elipsoide cujos três eixos são reciprocamente proporcionais às três velocidades de propagação das ondas planas paralelas a um plano determinado, e dirigidas paralelamente às retas ao longo das quais as velocidades próprias das moléculas etéreas dessas ondas planas são medidas. Podemos determinar também, 1º as direções dos três raios polarizados produzidos pela subdivisão de um raio de luz no qual as vibrações das moléculas possuiriam em direções quaisquer; 2º a velocidade da luz em cada um destes três raios; 3º os diversos valores que esta velocidade assumiria nos raios polarizados produzidos pela subdivisão de diversos raios de luz que partem simultaneamente de um mesmo ponto[...]

Cauchy, então, propõe que a refração dupla em cristais deveria ser, na realidade, uma "tripla refração" [61, p. 305], pois deveria apresentar três ondas: duas ondas transversais usuais, correspondentes aos raios ordinário e extraordinário, e uma terceira onda, longitudinal, parecendo repetir o argumento de Fresnel (citado na introdução deste capítulo, p. 40) de que as ondas longitudinais propagadas no "fluido etéreo" não seriam luz visível [61, p. 311]: "Quanto ao terceiro raio polarizado, os cálculos mostram que ele é muito difícil de perceber, visto que a intensidade da luz a ele associada permanece

precisa ser aquela estabelecida por Navier.

sempre muito pequena, [isso] quando não é estritamente zero".

Outro aspecto relevante da "primeira teoria" de Cauchy para a birrefração em cristais é que ela leva a uma direção de oscilação transversal das ondas luminosas diferente daquela definida por Fresnel (Seção 2.4, p. 33). Para compreender este resultado, seguem-se os cálculos. As direções da oscilação transversal dos raios ordinário e extraordinário podem ser obtidas a partir da Fig. 2.5b, p. 29, que mostra o plano yz da seção principal do cristal. Na figura, os eixos x, y, e z representam os eixos de elasticidade do elipsoide de Fresnel. Apesar de usar o termo "fluido etéreo", Cauchy considera que o éter se comporta, no interior dos cristais, como um sólido elástico anisotrópico constituído de moléculas livres de "pressões iniciais", isto é, k_1, k_2 e k_3 são nulos [61, p. 309, eqs. (1) e (3)]. Para simplificar o problema, o cristal torna-se uniaxial se k_7 é igual a k_9 [61, p. 309, eq. (1)]. Nestas condições, e tomando a condição arbitrária k_4, k_5 e k_6 iguais a $3k_7$ [61, p. 309, eq. (1), p. 310, eq. sem número], as eqs. (3.3) se reduzem, quando a propagação ocorre no plano da seção principal, a:

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} = \frac{k_7}{\rho}\frac{\partial^2\xi}{\partial y^2} + \frac{k_8}{\rho}\frac{\partial^2\xi}{\partial z^2}, \tag{3.6a}$$

$$\frac{d^2\eta}{dt^2} = \frac{k_7}{\rho}\left(3\frac{\partial^2\eta}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\eta}{\partial z^2} + 2\frac{\partial^2\zeta}{\partial y\partial z}\right), \tag{3.6b}$$

$$\frac{d^2\zeta}{dt^2} = \frac{k_7}{\rho}\left(\frac{\partial^2\zeta}{\partial y^2} + 3\frac{\partial^2\zeta}{\partial z^2} + 2\frac{\partial^2\eta}{\partial y\partial z}\right), \tag{3.6c}$$

e se reduzem ainda mais quando a propagação ocorre na direção do eixo óptico (direção y):

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} = \frac{k_7}{\rho}\frac{\partial^2\xi}{\partial y^2}, \tag{3.7a}$$

$$\frac{d^2\eta}{dt^2} = \frac{3k_7}{\rho}\frac{\partial^2\eta}{\partial y^2}, \tag{3.7b}$$

$$\frac{d^2\zeta}{dt^2} = \frac{k_7}{\rho}\frac{\partial^2\zeta}{\partial y^2}. \tag{3.7c}$$

Cauchy não chega a apresentar estas equações, eqs. (3.6) e (3.7), explicitamente, talvez porque elas sejam consequências imediatas da eq. (3.3) quando as simetrias para os coeficientes são escolhidas. Porém, a partir delas, é fácil identificar as três ondas. A eq. (3.6a) é a única equação que depende de duas velocidades de propagação, $\sqrt{\frac{k_7}{\rho}}$ e $\sqrt{\frac{k_8}{\rho}}$, logo, ξ deve ser a direção de oscilação do raio extraordinário. Em seguida, como a direção do eixo óptico é a direção em que os dois raios possuem a mesma velocidade, $\sqrt{\frac{k_7}{\rho}}$, e eles se confundem, então ζ deve ser a direção de oscilação do raio ordinário, eq. (3.7c). Por fim, a eq. (3.7b) mostra claramente o terceiro raio, longitudinal, propagando-se com velocidade $\sqrt{\frac{3k_7}{\rho}}$ na direção do eixo óptico.[5] Oras, as direções transversais obtidas acima são justamente opostas àquelas encontradas por Fresnel, levando Cauchy a defender, pelo menos em um primeiro momento, que as vibrações transversais da luz estão contidas no plano de polarização, pois, por exemplo, o plano de polarização do raio ordinário coincide com o plano da seção principal do cristal (Subseção 2.2.1, p. 21).[6]

Vale mencionar que, neste período, Cauchy não foi o único a chegar à conclusão de que a birrefração, não só deveria possuir uma terceira onda, longitudinal, como também deveria apresentar vibrações transversais contidas em seus respectivos planos de polarização. Em 1832, Franz Ernst Neumann (1798–1895) [62] chega, de maneira independente, aos mesmos resultados de Cauchy; mas, ao contrário deste, adota apenas seis constantes para as interações intermoleculares do éter. As constantes propostas por Neumann equivalem às constantes $k_4, \ldots, k_9$ supracitadas, pois ele considera, desde o princípio, que não há tensões iniciais no meio, conforme a nomenclatura da época. Neumann, assim como Cauchy, também apresenta dificuldades em interpretar a componente longitudinal da luz que aparece nos cálculos, mas, ao contrário de Cauchy, não dá maiores justificativas físicas para as vibrações provocadas pela compressão entre as moléculas etéreas, adotando uma postura mais pragmática. Na opinião de Neumann, a componente longitudinal é uma espécie de consequência matemática do modelo [62, p. 425]:

> Não é minha opinião, que os valores numéricos encontrados aqui para estas

[5] Para compreender o porquê Cauchy considera que a velocidade de propagação da onda longitudinal é $\sqrt{\frac{3k_7}{\rho}}$, veja nota de rodapé 4 deste capítulo.

[6] O que significa que as vibrações de Cauchy correspondem, de alguma maneira, às oscilações do campo magnético quando interpretadas segundo a teoria eletromagnética atual. Para maiores esclarecimentos, veja as notas de rodapé 12 e 22 do capítulo anterior.

constantes [associadas à compressão da substância cristalina], que coincidem com aqueles que podem ser obtidos para velocidades de propagação de ondas sonoras [ondas longitudinais], sejam idênticos aos que são obtidos para as velocidades de propagação das ondas luminosas — mas é minha opinião, que existe uma conexão entre os valores destas constantes, que são obtidos destas duas maneiras, como indicado pelo aparecimento [de ondas longitudinais] em substâncias transparentes não-cristalinas comprimidas.

3.1.2 A "primeira teoria" de Cauchy para a reflexão e para a refração da luz em meios comuns

Na semana seguinte, em 14 de junho de 1830 [63], Cauchy apresenta à *Académie* uma polêmica continuação de seus estudos em Óptica, cujo tema, agora, é a reflexão da luz em meios comuns. Nesse estudo, que ficou amplamente conhecido, ao longo do século XIX, como sua "primeira teoria" para a reflexão, Cauchy obtém as leis seno e tangente de Fresnel, eqs. (2.9) e (2.11), p. 36, a partir de uma determinada continuidade para as tensões na superfície entre os dois meios, concluindo, mais uma vez, que a direção da oscilação transversal deveria ser paralela ao plano de polarização, em concordância com suas pesquisas sobre a birrefração [63, p. 8]:

> [...] Estas fórmulas mostram que a luz refletida é totalmente polarizada no plano da reflexão [plano de incidência] quando o raio refletido é perpendicular ao raio refratado [lei de Brewster], e concordam com todas as observações dos físicos sobre a reflexão ou refração da luz [...]

Porém, Cauchy chega a essa conclusão de maneira que parece açodada, pois a interpretação dos cálculos está *errada*, como será demonstrado a seguir.

Na Fig. 3.1, o plano de incidência é dado pelo plano yz, de tal maneira que o eixo z corresponde à normal à superfície de separação entre os dois meios (plano xy). O ponto de incidência, C, representa a origem do sistema de coordenadas. Se o raio incidente é constituído por uma onda plana não polarizada, a direção de oscilação transversal pode ser separada em componentes perpendicular e paralela ao plano de incidência, como feito por Fresnel no final do capítulo anterior. O mesmo procedimento pode ser repetido para os raios refletido e refratado, cujas polarizações dependem dos ângulos

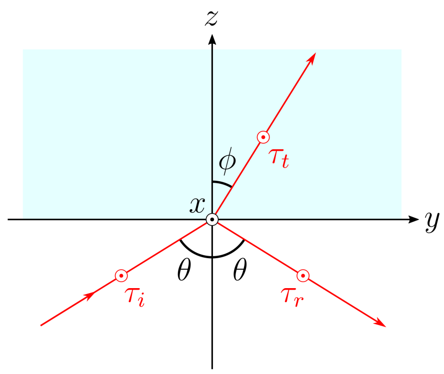


Figura 3.1: Componentes perpendiculares ao plano de polarização das oscilações da onda incidente, ζ_i, da onda refletida, ζ_r, e da onda refratada, ζ_t, no plano de incidência em meios comuns. O símbolo $\odot$ representa uma seta "saindo" do plano da folha.

de incidência, θ, e de refração, ϕ. O erro de Cauchy pode ser facilmente compreendido, então, ao se estudar o que acontece com as componentes das oscilações perpendiculares ao plano de incidência, que podem ser descritas pela coordenada $\xi(y, z, t)$, paralela ao eixo x, das moléculas etéreas. Nestas condições, as oscilações das ondas incidente, ξ_i, e refletida, ξ_r, são funções espaciais de $(y \cos\theta + z \operatorname{sen}\theta)$ e $(y \cos\theta - z \operatorname{sen}\theta)$, respectivamente, enquanto que a oscilação da onda refratada, ξ_t, é função de $(y \cos\phi + z \operatorname{sen}\phi)$ [63, p. 7, eqs. sem número], de modo que as diferenciais $\frac{\partial\xi}{\partial y}$ e $\frac{\partial\xi}{\partial z}$ são:

$$\frac{\partial\xi_i}{\partial y} \equiv \tau_i \cos\theta, \tag{3.8a}$$
$$\frac{\partial\xi_i}{\partial z} \equiv \tau_i \operatorname{sen}\theta, \tag{3.8b}$$
$$\frac{\partial\xi_r}{\partial y} \equiv \tau_r \cos\theta, \tag{3.8c}$$
$$\frac{\partial\xi_r}{\partial z} \equiv -\tau_r \operatorname{sen}\theta, \tag{3.8d}$$
$$\frac{\partial\xi_t}{\partial y} \equiv \tau_t \cos\phi, \tag{3.8e}$$
$$\frac{\partial\xi_t}{\partial z} \equiv \tau_t \operatorname{sen}\phi. \tag{3.8f}$$

Cauchy propõe *sem apresentar qualquer justificativa*, que as tensões T_{11}, T_{21} e T_{31} das eqs. (3.4a), (3.4f) e (3.4e), provocadas pelo movimento dos raios incidente, refletido e refratado na fronteira entre os meios, são contínuas [63, p. 8]. Se forem levadas em consideração apenas as vibrações transversais, as tensões T_{21} e T_{31} levam imediatamente a duas equações de continuidade:

$$k_1(\tau_i + \tau_r)\cos\theta = k_2\tau_t\cos\phi, \tag{3.9a}$$

$$k_1(\tau_i - \tau_r)\,\mathrm{sen}\,\theta = k_2\tau_t\,\mathrm{sen}\,\phi, \tag{3.9b}$$

com k_1, a elasticidade do éter no interior do meio onde se propaga o raio incidente e k_2, a elasticidade no meio onde se propaga o raio refratado. Neste cenário, é fácil perceber que as eqs. (3.9) chegam, quando combinadas, a um resultado similar à lei seno de Fresnel [63, p. 8, eq. (12)]:

$$\frac{\tau_r}{\tau_i} = \frac{\mathrm{sen}\,(\theta - \phi)}{\mathrm{sen}\,(\theta + \phi)}, \tag{3.10}$$

indicando, em princípio, que a direção da oscilação do raio refletido totalmente polarizado é perpendicular ao seu próprio plano de polarização (que é congruente ao plano de incidência), pois, como a elasticidade é linear, τ_r deve estar na mesma direção de ξ_r. Entretanto, este resultado é justamente *o inverso do que Cauchy afirma obter* e, na realidade, contradiz os resultados obtidos por ele em sua "primeira teoria" da birrefração.

Sem embargo, apesar de levar a um plano de oscilação da onda perpendicular ao plano de polarização, não se pode dizer que a "primeira teoria" de Cauchy concorda plenamente com o modelo de Fresnel para a reflexão. Para o leitor ter uma ideia, Cauchy foi um dos primeiros a formular equações que descrevem as direções de vibração transversais das *ondas refratadas* em meios comuns (Fresnel não havia apresentado estas equações específicas) e, se, por um lado, a lei seno é suficiente para definir o plano de oscilação da luz, como comentado no final do capítulo anterior desta tese, por outro, a razão $\frac{\tau_t}{\tau_i}$ obrigou Cauchy a sugerir um outro ponto de discordância em relação às ideias de Fresnel: *a densidade do éter no interior dos meios transparentes deve ser constante* [63, p. 8]. O motivo para isto é muito simples. Se as densidades forem iguais, a eq. (3.9a) pode ser rescrita como:

$$\frac{k_1}{\rho_1}(\tau_i + \tau_r)\cos\theta = \frac{k_2}{\rho_2}\tau_t\cos\phi, \tag{3.11}$$

em que ρ_1 é a densidade do éter no interior do meio onde se propaga o raio incidente e ρ_2, a densidade no meio onde se propaga o raio refratado. Substituindo a eq. (3.10) na equação acima, e considerando a lei de Snell, obtém-se com certa facilidade [63, p. 8, eq. (12)]:

$$\frac{\tau_t}{\tau_i} = \left(\frac{\operatorname{sen}\theta}{\operatorname{sen}\phi}\right)^2 \frac{\operatorname{sen}(2\theta)}{\operatorname{sen}(\theta+\phi)}, \tag{3.12}$$

que, apesar da semelhança, *não é* o resultado experimental aceito para a componente perpendicular ao plano de incidência das vibrações do raio refratado.[7]

3.1.3 Outras "teorias" de Cauchy para a reflexão e para a birrefração

De fato, a contradição entre seus modelos iniciais de birrefração em cristais e de reflexão e refração em meios comuns não passou despercebida aos olhos de Cauchy, levando-o, nos anos seguintes, a reconsiderar suas conclusões anteriores, tanto em relação à direção da oscilação transversal da luz, quanto em relação à constância da densidade do éter. Suas novas pesquisas abriram caminho para uma espécie de "conciliação conceitual" com as proposições de Fresnel, que serão, apenas, brevemente mencionadas nesta subseção, a título de curiosidade, pois, em princípio, não exerceram influência direta nas pesquisas de MacCullagh. Assim, em 1835, em seu *Nouveaux Exercices de Mathématiques* [64], Cauchy propõe uma "segunda teoria" para a reflexão

[7]No caso, o resultado experimental aceito, hoje, para as vibrações do campo elétrico das ondas incidente, $E_i^\perp$, e refratada, $E_t^\perp$, perpendiculares ao plano de incidência é:

$$\frac{E_t^\perp}{E_i^\perp} = \frac{\operatorname{sen}\phi}{\operatorname{sen}\theta}\frac{\operatorname{sen}(2\theta)}{\operatorname{sen}(\theta+\phi)}. \tag{3.B}$$

que resulta em um plano de oscilação perpendicular ao plano de polarização, sugerindo, também sem dar qualquer justificativa, que as condições de continuidade a serem satisfeitas na superfície são as componentes do rotacional do deslocamento, $\vec{\nabla} \times \vec{e}$, e a diferencial $\frac{\partial \zeta}{\partial z}$, se z for a direção normal à superfície [64, p. 204].

No ano seguinte, em seu "Notes de M. Cauchy sur l'optique, adressées à M. Libri" [65], Cauchy propõe uma "terceira teoria" para a reflexão, sugerindo, agora, que a densidade do éter não deveria ser igual no interior dos dois meios. Em relação a isto, ele afirma [65, p. 344]: "Minhas novas pesquisas me levam a crer que esta densidade varia, em geral, quando passa de um meio para outro". Neste mesmo artigo, Cauchy também propõe uma "segunda teoria"para a birrefração que resulta em uma direção de oscilação transversal perpendicular ao plano de polarização. Para chegar a este resultado, ele propõe novas simetrias para os coeficientes da eq. (3.3) [65, p. 342, eq. sem número]:

$$k_9 + k_2 = k_8 + k_3, \tag{3.13a}$$

$$k_7 + k_3 = k_9 + k_1, \tag{3.13b}$$

$$k_8 + k_1 = k_7 + k_2. \tag{3.13c}$$

Entretanto, mesmo diante da falta de evidências experimentais em seu favor, as ondas longitudinais persistiam em todos os modelos de Cauchy. A transversalidade total da luz poderia ser obtida, desde o início, adotando uma divergência nula para o deslocamento das moléculas etéreas logo em sua "primeira teoria" para a birrefração (é isto que MacCullagh fará); mas é incerto se Cauchy percebeu ou, mesmo, desejou esta solução, sobretudo porque, se o éter fosse um sólido elástico convencional, vibrações que ocorrem na direção de propagação deveriam surgir, obrigatoriamente, levando ao problema imediato de como interpretá-las na teoria. Por exemplo, em seu "Mémoire sur la polarisation rectiligne et la double réfraction" [66], que complementa a discussão desenvolvida em sua "segunda teoria", a justificativa de Cauchy para a existência do terceiro raio é que ele, não só não seria luz visível, como também seria especificamente uma onda de "calor" [66,

p. 161], em referência ao infravermelho descoberto algumas décadas antes por William Herschel (1738–1822) [67].

3.2 Solução lagrangiana de Green

Em 1837, Green [68] apresenta à *Cambridge Philosophical Society* seus estudos sobre a reflexão e a refração da luz em meios comuns. Suas motivações são claramente os trabalhos de Cauchy [68, p. 3]:

> Talvez seja apropriado observar que o sr. Cauchy (*Bulletin des Sciences*, 1830) forneceu um método para determinar a intensidade das ondas refletidas na superfície comum de dois meios ["primeira teoria"]. Desde então, ele afirmou (*Nouveaux Exercices des Mathématiques*) que a hipótese empregada naquela ocasião é inadmissível e prometeu, em uma memoir futura [que viria a ser sua "terceira teoria"], fornecer *um novo princípio mecânico* aplicável a esta e outras questões; mas não consegui saber se esta memoir já apareceu. O primeiro método consistia em satisfazer uma parte, e apenas uma parte, das condições pertencentes à superfície de junção [entre os meios], e a consideração das ondas propagadas por vibrações normais [ondas longitudinais] foi totalmente ignorada, embora seja fácil perceber que, em geral, as ondas deste tipo devem ser necessariamente produzidas [Green está errado] quando a onda incidente é polarizada perpendicularmente ao plano de incidência [...] Com efeito, sem introduzir a consideração destas últimas ondas, é impossível [mais uma vez, ele está errado] satisfazer o conjunto das condições devidas à superfície de junção dos dois meios. Mas quando esta consideração é introduzida, todas as condições podem ser satisfeitas [...]

Green, então, explica o motivo pelo qual o método lagrangiano seria o melhor método para satisfazer as condições de continuidade na superfície [68, pp. 1–2]:

> O sr. Cauchy possivelmente foi o primeiro a perceber a plena utilidade de aplicar à Teoria da Luz as fórmulas [equações de onda] que representam os movimentos de um sistema de moléculas que atuam umas sobre as outras a partir de forças mutuamente atrativas e repulsivas; pressupondo sempre que, na ação mútua de duas partículas quaisquer, as partículas podem ser consideradas como pontos animados por forças dirigidas ao longo da linha reta que as une. Esta última suposição [..., no entanto,] parece um tanto

restritiva [...pois,] somos tão completamente ignorantes a respeito dos modos de ação pelos quais os elementos do éter luminífero agem uns sobre os outros que parece um método mais seguro adotar, como base do nosso raciocínio, algum princípio físico geral, em vez de assumirmos determinados modos de ação que, no final, podem ser totalmente diferentes do mecanismo empregado pela natureza; especialmente se esse princípio incluir, como caso particular, aqueles antes usados pelo sr. Cauchy e outros, e levar, também, a um processo de cálculo muito mais simples. O princípio selecionado como base de raciocínio neste artigo é o seguinte: seja qual for a maneira pela qual os elementos de um sistema material qualquer atuem uns sobre os outros, se todas as forças internas exercidas forem multiplicadas pelos elementos de suas respectivas direções, a soma total para qualquer porção considerada da massa será sempre a diferencial exata de alguma função [um potencial]. Mas, conhecida essa função, podemos aplicar imediatamente o método geral dado na *Mécanique Analytique* [método lagrangiano], que parece ser mais precisamente aplicável a problemas relacionados aos movimentos de sistemas compostos por um número imenso de partículas. Uma das vantagens desse método, de grande importância, é que somos necessariamente conduzidos pelo simples processo de cálculo, e com um pouco de cuidado de nossa parte, a todas as equações e condições que são *necessárias* e *suficientes* para a solução completa de qualquer problema a que ele possa ser aplicado.

Neste panorama, Green determina as condições na superfície tomando que o éter é um sólido elástico convencional, de modo que a densidade de potencial, V, do meio isotrópico dependente apenas de duas elasticidades, $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ [68, p. 8, eq. (C)]:

$$2V = \mathcal{A}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{e}\right)^2 + \mathcal{B}\left[\left(\frac{\partial\xi}{\partial y}+\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\xi}{\partial z}+\frac{\partial\zeta}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\eta}{\partial z}+\frac{\partial\zeta}{\partial y}\right)^2\right]- \\ -4\mathcal{B}\left(\frac{\partial\eta}{\partial y}\frac{\partial\zeta}{\partial z}+\frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial\zeta}{\partial z}+\frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial\eta}{\partial y}\right). \tag{3.14}$$

Aplicando o que Green chamou de "princípio de d'Alembert" [68, p. 4], modificado para a Mecânica do Contínuo [68, p. 6, eq. (2)]:

$$\iiint \rho\left(\frac{\partial^2\vec{e}}{\partial t^2}\cdot\delta\vec{e}\right)dxdydz = -\iiint \delta V dxdydz, \tag{3.15}$$

em que dx, dy e dz são as arestas de um paralelepípedo elementar do meio envolvido pelas integrais triplas. As equações para a propagação das ondas luminosas são obtidas diretamente do método lagrangiano e são, em notação moderna [68, p. 11, eqs. (4)]:

$$\frac{d^2\vec{e}}{dt^2} = -\frac{\mathcal{B}}{\rho}\vec{\nabla} \times \left(\vec{\nabla} \times \vec{e}\right) + \frac{\mathcal{A}}{\rho}\vec{\nabla}\left(\vec{\nabla} \cdot \vec{e}\right). \tag{3.16}$$

Nessa perspectiva, a eq. (3.16) torna-se idêntica à equação de onda de Cauchy, eq. (3.5), se $\mathcal{B}$ for igual a k e $\mathcal{A}$ for igual a 2k + K.

Se ξ_i, η_i e ζ_i são as componentes das oscilações da onda incidente, ξ_t, η_t e ζ_t, as componentes das oscilações da onda refratada e V_i e V_t são os respectivos potenciais, o elemento de volume da eq. (3.15) pode ser dividido em dois volumes menores, um em cada meio, de modo que [68, p. 9, eq. (3)]:

$$\begin{aligned} &\iiint \rho_i \left(\frac{\partial^2\xi_i}{\partial t^2}\delta\xi_i + \frac{\partial^2\eta_i}{\partial t^2}\delta\eta_i + \frac{\partial^2\zeta_i}{\partial t^2}\delta\zeta_i\right) dx\ dy\ dz + \\ +&\iiint \rho_t \left(\frac{\partial^2\xi_t}{\partial t^2}\delta\xi_t + \frac{\partial^2\eta_t}{\partial t^2}\delta\eta_t + \frac{\partial^2\zeta_t}{\partial t^2}\delta\zeta_t\right) dx\ dy\ dz = \\ &= \iiint \delta V_i dx\ dy\ dz + \iiint \delta V_t dx\ dy\ dz, \end{aligned} \tag{3.17}$$

onde ρ_i é a densidade do éter colocado em movimento pela onda incidente e ρ_t é a densidade do éter colocado em movimento pela onda refratada. As integrais triplas envolvem os elementos de volume do "fluido etéreo" em cada um dos dois meios transparentes e resulta, também, em termos de superfície, isto é, as integrais triplas fornecem as equações de movimento nos meios, enquanto que as integrais duplas permitem que as condições de contorno a serem satisfeitas na superfície de separação entre eles (neste caso, o plano xy) sejam impostas.

As três primeiras condições de contorno impostas na eq. (3.17) são [68, p. 11, eqs. (5)]:

$$\xi_i = \xi_t, \tag{3.18a}$$

$$\eta_i = \eta_t, \tag{3.18b}$$

$$\zeta_i = \zeta_t, \tag{3.18c}$$

que levam imediatamente a $\delta\xi_i = \delta\xi_t$, $\delta\eta_i = \delta\eta_t$ e $\delta\zeta_i = \delta\zeta_t$. Nestas condições, as condições de contorno adicionais, quando z = 0, são [68, p. 11, eqs. (6)]:

$$\mathcal{B}_i\left(\frac{\partial\xi_i}{\partial z}+\frac{\partial\zeta_i}{\partial x}\right)=\mathcal{B}_t\left(\frac{\partial\xi_t}{\partial z}+\frac{\partial\zeta_t}{\partial x}\right), \tag{3.19a}$$

$$\mathcal{B}_i\left(\frac{\partial\eta_i}{\partial z}+\frac{\partial\zeta_i}{\partial y}\right)=\mathcal{B}_t\left(\frac{\partial\eta_t}{\partial z}+\frac{\partial\zeta_t}{\partial y}\right), \tag{3.19b}$$

$$\mathcal{A}_i\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{e}\right)-2\mathcal{B}_i\left(\frac{\partial\xi_i}{\partial x}+\frac{\partial\eta_i}{\partial y}\right)=\mathcal{A}_t\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{e}\right)-2\mathcal{B}_t\left(\frac{\partial\xi_t}{\partial x}+\frac{\partial\eta_t}{\partial y}\right). \tag{3.19c}$$

Graças à presença de $\vec{\nabla}\cdot\vec{e}$, a eq. (3.19c) leva a resultados que admitem compressões entre as camadas moleculares do éter, conduzindo, mais uma vez, ao problema de como eliminar as ondas longitudinais da teoria. Green [68], por esse motivo, sugere que a razão $\dfrac{\mathcal{A}}{\mathcal{B}}$ deve ser, ou nula, o que elimina a compressão, ou um valor muito grande, advogando em favor da segunda hipótese porque, em um sólido elástico, as ondas longitudinais devem existir e sempre se movem mais rápido do que as ondas transversais [68, p. 2]:

> A presente comunicação é quase inteiramente restrita à consideração de meios não cristalinos; para os quais é provado que a função devida às ações moleculares, em sua forma mais geral, contém apenas dois coeficientes arbitrários, $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$; cujos valores dependem, é claro, da constituição interna desconhecida do meio em questão, e seria fácil mostrar, para o caso mais geral, que qualquer perturbação arbitrária, excitada em uma porção muito pequena do meio, daria origem, em geral, a duas ondas esféricas, uma propagada inteiramente por vibrações normais [longitudinais], a outra inteiramente por vibrações transversais, de modo que se a velocidade de transmissão da primeira onda for representada por $\sqrt{\mathcal{A}}$, a da última seria representada por $\sqrt{\mathcal{B}}$. Mas [...] embora a onda que é propagada por vibrações normais [longitudinais] seja incapaz de afetar o olho, ela seria capaz de dar origem a uma onda ordinária de luz [luz visível] propagada por vibrações transversais, exceto nos casos extremos em que a razão $\dfrac{\mathcal{A}}{\mathcal{B}}$ é zero, ou a razão $\dfrac{\mathcal{A}}{\mathcal{B}}$ é uma quantidade muito grande; que, por uma questão de simplicidade, pode ser considerada como infinita [...] Somos, portanto, compelidos a adotar este último valor da razão e assim admitir que, no éter luminífero, a velocidade de transmissão de ondas propagadas por vibrações normais é muito grande em comparação à da luz ordinária.

Uma vez estabelecidas as condições de contorno na superfície, o passo seguinte é obter a lei seno de Fresnel. O procedimento é muito similar à demonstração feita para encontrar o erro de Cauchy, em sua "primeira teoria" (Subseção 3.1.2, p. 50). Assim, sendo o eixo x perpendicular ao plano de incidência, as vibrações transversais da luz são descritas apenas por $\xi(y, z, t)$, de modo que as eqs. (3.18a) e (3.19a) resultam em [68, p. 12, eqs. sem número]:

$$\xi_i = \xi_t, \tag{3.20a}$$

$$\mathcal{B}_i \frac{\partial \xi_i}{\partial z} = \mathcal{B}_t \frac{\partial \xi_t}{\partial z}, \tag{3.20b}$$

Na sequência, Green supõe que as elasticidades $\mathcal{B}_i$ e $\mathcal{B}_t$, nos dois meios, são iguais [68, p. 13] (em concordância com Fresnel) fazendo com que as velocidades de propagação das ondas incidente, refletida e refratada dependam apenas de variações na densidade do éter. A oscilação das ondas incidente, ξ_i, e refletida, ξ_r, são, então, consideradas funções espaciais de $(y + z \operatorname{cotg}\theta)$ e $(y - z \operatorname{cotg}\theta)$, respectivamente, enquanto que a oscilação da onda refratada, ξ_t, é função de $(y + z \operatorname{cotg}\phi)$ [68, p. 13, eqs. sem número]. Tomando as eqs. (3.8b) e (3.8d) e substituindo-nas na eq. (3.20b), as eqs. (3.20) tornam-se [68, p. 13, eqs. sem número]:

$$\xi_i + \xi_r = \xi_t, \tag{3.21a}$$

$$(\tau_i - \tau_r) \operatorname{cotg}\theta = \tau_t \operatorname{cotg}\phi, \tag{3.21b}$$

cuja solução leva, segundo Green, à lei seno de Fresnel [68, p. 14, eq. sem número].[8]

Finalmente, se a dedução da lei seno é, por si só, questionável, a dedução da lei tangente pode ser considerada, até mesmo, inadmissível. A demonstração é longa e talvez seja suficiente comentar, apenas, sobre seus pressu-

[8] Além da cotangente ser incluída nos cálculos sem qualquer explicação, a hipótese física que dever ser assumida para resolver o sistema das eqs. (3.21) é que os comprimentos de onda da luz incidente e da luz refratada são iguais, pois τ depende explicitamente de $\frac{2\pi}{\lambda}$ (τ é a diferencial espacial da equação de movimento). Porém, isto claramente não é verdade porque, hoje, sabe-se que o comprimento de onda muda de um meio para outro e o que permanece constante, na refração, é a frequência.

postos e sobre o resultado dos cálculos. Green considera erroneamente que i) é “impossível” satisfazer a condições de contorno na superfície sem assumir que vibrações longitudinais são geradas pela própria reflexão (citação na p. 54) e considera que ii) ondas longitudinais são infinitamente mais rápidas que ondas transversais (citação na p. 57), resultando em uma expressão [68, p. 22, eq. 26] que abrange a lei tangente de Fresnel apenas em uma primeira aproximação. Como consequência, Green considerada [68, p. 3]:

> Os principais resultados obtidos neste artigo referem-se à intensidade das ondas refletidas na superfície comum de dois meios, tanto para a luz polarizada no, quanto perpendicular ao, plano de incidência [...][9] No primeiro caso, os nossos valores concordam precisamente com os dados de Fresnel [questionável]; supondo, como ele fez, que a direção do movimento real das partículas do éter luminífero é perpendicular ao plano de polarização. Mas resulta das nossas fórmulas, quando a luz é polarizada perpendicularmente ao plano de incidência, que as expressões dadas por Fresnel são obtidas apenas em primeira aproximação; e que a intensidade da onda refletida nunca se tornará absolutamente nula, mas apenas atingirá um valor mínimo [...] Este valor mínimo aumenta rapidamente à medida que o índice de refração aumenta e, portanto, a quantidade de luz refletida no ângulo de polarização [lei de Brewster] torna-se considerável para substâncias altamente refrativas, um fato que é conhecido há muito tempo pelos filósofos experimentais [argumento falacioso].

Assim, o modelo de Green resumido nesta seção pode ser considerado uma explicação insatisfatória para o simples caso da reflexão da luz em meios comuns, de modo que o potencial assumido por ele leva a uma solução *incompleta* e *insuficiente* para o problema.

[9] Para recordar o significado do conceito de “polarização” adotado na época, veja a Subseção 2.2.1, p. 19.

Capítulo 4

Modelos dinâmicos de MacCullagh

MacCullagh é, em geral, um autor pouco conhecido entre os físicos atuais (embora seja bem conhecido entre os historiadores da Óptica), o que, possivelmente, torna relevante oferecer ao leitor uma breve biografia desse autor, situando-o na comunidade científica. Um dos mais importantes relatos biográficos de MacCullagh foi feito por Brendan Scaife [69]. MacCullagh nasce em Landahaussy, na atual Irlanda do Norte, em 1809. Filho mais velho de um casal de fazendeiros, muda-se para Dublim por volta dos 15 anos de idade com a intenção de continuar sua educação formal, tendo recebido uma bolsa de estudos no *Trinity College* da Universidade de Dublim. Após concluir seu bacharelado, em 1829, MacCullagh passa a se dedicar aos estudos da Mecânica e, principalmente, da Óptica, aprofundando-se nas principais discussões da teoria ondulatória da luz. Em 1832, torna-se professor assistente de Matemática na Universidade e, no ano seguinte, torna-se membro da *Royal Irish Academy*. Assume o cargo de professor titular de Matemática pouco tempo depois e recebe o título de doutor. Por seu trabalho sobre a reflexão e a refração da luz em cristais recebe, em 1838 e 1842, respectivamente, a medalha Cunningham, outorgada pela *Royal Irish Academy*, e a medalha Copley, outorgada pela *Royal Society*, em Londres. No mesmo ano em que recebe a medalha Copley, deixa o cargo de professor de Matemática e assume

Figura 4.1: Rascunho de MacCullagh feito imediatamente após sua morte, em 1847. Segundo Scaife [69, p. 85], esse rascunho foi feito "de memória" por Frederic Burton (1816–1900). Imagem em domínio público [71].

o cargo de professor titular de Filosofia Natural e Experimental. Em 1880, seus ex-alunos, John Jellett (1817–1888) e Samuel Haughton (1821–1897), publicam uma coletânea de suas obras científicas, o *The collected works of James MacCullagh* [70].

As pesquisas iniciais de MacCullagh em Óptica seguem o mesmo método geométrico adotado por Young e Fresnel e, nas palavras de Humphrey Lloyd (1800–1881) [72, p. 387], MacCullagh encontra uma maneira "simples" e "concisa" de deduzir as superfícies de onda na birrefração, eq. (2.2), p. 30. Essa dedução aparece logo no começo da década de 1830, em seu "Geometrical propositions applied to the wave theory of light" [73, 70, p. 20]. Outra de suas contribuições relevantes, nesses primeiros anos, foi demonstrar que sua nova dedução das superfícies de onda era capaz de explicar o recém descoberto fenômeno da refração cônica, proposto, na teoria, por seu colega sênior no *Trinity College*, William Rowan Hamilton (1805–1865) [74], e verificado experimentalmente por Lloyd [75, 76].[1] O artigo de MacCullagh sobre a refração cônica [77, 70, p. 17] causou um breve desentendimento com

[1]A refração cônica consiste em um pequeno desvio da luz ao redor de um dos eixos ópticos de um cristal biaxial, provocando um cone iluminado. O fenômeno ocorre, tanto quando a luz entra no cristal (refração cônica interior), quanto quando a luz sai (refração cônica exterior).

Hamilton, pois permitia uma interpretação dúbia sobre a prioridade da descoberta teórica do fenômeno, fazendo com que MacCullagh publicasse uma nota de esclarecimento e desagravo [78, 70, p. 19]. No entanto, essa não foi a única vez que os dois tiveram um breve atrito. Cerca de dez anos depois, MacCullagh reivindicou, em uma reunião da *Academy*, que um de seus teoremas, relacionado ao problema da reflexão total da luz em cristais [79, 70, p. 250], teria sugerido a Hamilton a existência dos quatérnions, o que visivelmente o desagradou. Nas palavras de Robert Perceval Graves (1810–1893) [80, p. 463]:

> A reivindicação de uma sugestão de Quatérnions [. . .] foi feita pelo professor MacCullagh, que, ao fazê-la em uma reunião da Royal Irish Academy, usou alguma expressão pela qual Hamilton ficou ofendido. Ele [Hamilton] não escondia esse ressentimento, e seu amigo em comum, [meu] irmão, professor Charles Graves, sentiu-se chamado a agir como mediador entre eles. Esta intervenção provou ser um sucesso; [pois] MacCullagh aceitou a declaração de Hamilton de que não havia recebido tal sugestão e admitiu que o teorema que ele [MacCullagh] supunha ser sua origem não dera a sugestão por si mesma.

Durante sua vida, MacCullagh realizou estudos relevantes a respeito das polarizações circulares e elípticas (Seção 2.3, p. 26) e a respeito da reflexão da luz na superfície de metais, mas foram suas investigações sobre a reflexão e a refração em cristais com polarização fixa (polarização linear) que o consagraram.[2] Estas investigações serão apresentadas nas Seções 4.1 e 4.2, enquanto que, na Seção 4.3, far-se-á uma discussão sobre as possíveis motivações de MacCullagh que o levaram a propor uma dinâmica pioneira para a luz. MacCullagh foi encontrado morto, com a garganta cortada, em seus aposentos, em 24 de outubro de 1847. O caso foi considerado suicídio [69, p. 85]. Por mais que desentendimentos pontuais tenham estremecido suas relações com Hamilton, Hamilton não só reconheceu o "mérito superior" de MacCullagh

[2]Em relação aos trabalhos de MacCullagh sobre polarização circular e elíptica e sobre reflexão na superfície de metais, pouco se pode falar. Se são escassas, as evidências documentais que permitiriam quaisquer tentativas de recriar o passo-a-passo do pensamento de MacCullagh relacionado ao problema da reflexão e da refração em cristais, em relação a esses outros dois problemas, as evidências são praticamente inexistentes.

na ocasião da outorga da medalha Cunningham [80, p. 263] (ele também estava concorrendo ao prêmio), como também ficou "profundamente comovido", segundo Graves [80, p. 594], com sua morte, escrevendo um soneto em sua memória [81, p. 705]:

Da morte do professor MacCullagh

Envoltos em pesada nuvem que espalha
Dor e horror; num momento oprimidos
Por desgosto e pelo temor, atraídos;
De corações plenos, o suspiro falha.

Sob mistério divino, a mente talha,
E, com o gênio da terra, lamentamos.
Em reverência, por um tempo, ficamos
Na presença de MacCullagh, a mortalha.

Ótimo, bom, infeliz! Pela fama da terra natal,
Duro foi seu labor; de cérebro sem cansaço,
No pensamento, a teia de Aracne teceu.

A forma de planeta[3] que amava, a estrutura do cristal,
O trem vibrante de luz,[4] o qual nos ensinou o traço,
No bosque de ciprestes, será símbolo, só seu.

27 de outubro de 1847.

4.1 Estudos iniciais sobre reflexão e refração da luz em cristais

No final de 1834, MacCullagh começa a investigar a peculiar reflexão da luz em cristais, descoberta experimentalmente por Brewster [82], cerca de 15 anos antes, por acreditar que este fenômeno era, do ponto de vista teórico, um

[3] O elipsoide.
[4] As vibrações no éter.

tema completamente inexplorado.[5] Sem saber que Neumann, em Königsberg, também estava estudando o problema, publica seu curto "A short account of some recent investigations concerning the laws of reflexion and refraction at the surface of crystals" [83, 70, p. 55]. Neste artigo, MacCullagh comunica sua intenção de explicar a reflexão da luz em cristais usando dois princípios básicos [83, p. 7, 70, p. 56], desenvolvidos, segundo ele, a partir de seus estudos preliminares sobre a reflexão e a refração em Cauchy. O primeiro princípio, o de continuidade das amplitudes de oscilação da onda na superfície do meio, não era exatamente uma novidade para a época, pois Fresnel, por exemplo, já havia feito algo similar pouco mais de uma década antes (Seção 2.4, p. 34), mas *a preocupação de MacCullagh com o problema será fundamental em seus trabalhos futuros.* Quanto ao segundo princípio, o de conservação da densidade do éter no interior dos meios transparentes, ele é claramente contrário à suposição de Fresnel de que a densidade do meio universal aumenta na proporção quadrática do índice de refração, eq. (2.1), p. 25, e segue a proposta de Cauchy, em sua "primeira teoria" para a reflexão em meios comuns (Subseção 3.1.2, p. 51).

Embora "A short account" não apresente qualquer discussão matemática e apenas comunique que MacCullagh estava desenvolvendo um modelo para explicar o experimento de Brewster, ele é um dos primeiros artigos da época a mencionar que a conclusão de Cauchy para a direção de oscilação transversal da luz, em sua "primeira teoria" para a reflexão, está errada. Como demonstrado na Subseção 3.1.2, p. 51, desta tese, os cálculos de Cauchy resultam, na realidade, em uma vibração perpendicular ao plano de polarização, levando

[5]No experimento, os efeitos da anisotropia do material são perceptíveis, a despeito da grande dominância da *reflexão regular*, que segue as mesmas leis da reflexão na superfície dos meios comuns e está diretamente associada à refração do raio ordinário. Para remover a reflexão regular quase por completo e poder estudar a *reflexão irregular*, que é muito tênue em cristais como a calcita e está associada ao raio extraordinário, Breswter aplica uma fina camada de óleo de cássia (canela-da-china) sobre a superfície do cristal [82, p. 153]. Assim, descobre que a reflexão irregular depende de dois ângulos: i) o ângulo entre o plano de incidência da reflexão regular e o plano de polarização do raio refletido e ii) o ângulo de polarização do raio refletido [82, p. 160, Tabela sem número]. Enquanto a intensidade do raio refletido por reflexão irregular só depende do primeiro ângulo, sendo máxima quando ele igual a 90° e mínima quando ele é igual a 0°, sua direção de polarização varia com os dois ângulos.

MacCullagh a comentar brevemente [83, p. 8, 70, p. 57]:

> Este caso simples [a reflexão em meios comuns] foi considerado pelo sr. Cauchy em um pequeno artigo inserido no *Bulletin Universel*, tom. xiv.; mas não parece ter sido observado por ninguém que sua solução é errônea. Sua equação para a luz polarizada paralelamente ao plano da reflexão [plano de incidência] é aquela que pertence à luz polarizada perpendicularmente ao plano da reflexão, e *vice-versa*.

Paralelamente, MacCullagh escreve um artigo para o *Philosophical Magazine* [84, 70, p. 75], enunciando, enfim, seu modelo matemático de reflexão em cristais. Esse artigo, embora muito conciso, complementa a discussão qualitativa desenvolvida em "A short account" e revela, sem sombra de dúvidas, que MacCullagh se baseia, tanto na "primeira teoria" de Cauchy para a birrefração (Subeção 3.1.1), quanto na "primeira teoria" de Cauchy para a reflexão e para a refração em meios comuns (Subseção 3.1.2). Talvez, MacCullagh tenha usado o formalismo de Cauchy por ser o método matemático mais sofisticado, disponível na época, para o estudo da dinâmica da luz e, também, por não conhecer o trabalho de Neumann [62], mencionado no capítulo anterior desta tese (Subseção 3.1.1, p. 48), que era bastante similar ao de Cauchy. Porém, ao contrário de seus predecessores, é relevante ressaltar que *MacCullagh abandona, com arrojada convicção, a existência de oscilações longitudinais propagando-se no éter, o que marca mais um importante ponto de ruptura conceitual em relação à "velha" teoria ondulatória de Huygens.*

Se o conceito de componente transversal da luz é mérito de Young e, principalmente, de Fresnel, é MacCullagh que tornará a onda luminosa puramente transversal, como será discutido ao longo deste capítulo. Neste cenário, MacCullagh inicia seu artigo rejeitando a hipótese do "terceiro raio", longitudinal, de Cauchy [84, p. 104, 70, p. 76]:

> [...] a teoria do sr. Cauchy, fundamentada nas seis equações de pressão [tensão] num meio cristalino, implica na existência de um terceiro raio de fraca intensidade, e para os outros dois raios dá uma lei um pouco diferente daquela de Fresnel. Sendo obrigado, para dar conta de seus experimentos [os experimentos de Brewster], a abandonar as ideias físicas de Fresnel e aproximar-me das do sr. Cauchy, fiquei embaraçado com este terceiro raio;

> e desejando livrar-me dele [...] adotei o expediente de alterar as equações da pressão [tensão], de modo a fazê-las fornecerem apenas dois raios [...]

Logo em seguida, MacCullagh redefine as tensões T_{ij} das eq. (3.2), p. 44, de Cauchy para a seguinte forma, adaptada do original [84, p. 104, 70, p. 76, eq. sem número]:

$$T_{11} = -2\left(w_t^2\frac{\partial\eta}{\partial y} + u_t^2\frac{\partial\zeta}{\partial z}\right), \tag{4.1a}$$

$$T_{22} = -2\left(v_t^2\frac{\partial\zeta}{\partial z} + w_t^2\frac{\partial\xi}{\partial x}\right), \tag{4.1b}$$

$$T_{33} = -2\left(u_t^2\frac{\partial\xi}{\partial x} + v_t^2\frac{\partial\eta}{\partial y}\right), \tag{4.1c}$$

$$T_{23} = T_{32} = v_t^2\left(\frac{\partial\eta}{\partial z} + \frac{\partial\zeta}{\partial y}\right), \tag{4.1d}$$

$$T_{31} = T_{13} = u_t^2\left(\frac{\partial\zeta}{\partial x} + \frac{\partial\xi}{\partial z}\right), \tag{4.1e}$$

$$T_{12} = T_{21} = w_t^2\left(\frac{\partial\xi}{\partial y} + \frac{\partial\eta}{\partial x}\right), \tag{4.1f}$$

onde u_t, v_t e w_t são as velocidades de propagação da onda transversal na direção dos três semi-eixos do elipsoide de Fresnel. MacCullagh não explica como obteve as eqs. (4.1), mas é possível verificar que, substituindo essas tensões nas equações propostas por Cauchy para a aceleração sofrida por um elemento de volume do meio elástico, eq. (3.1), p. 43, obtém-se uma solução sem o termo de divergência, como será demonstrado a seguir.

Nos meios comuns (meios isotrópicos), todas as velocidades são iguais a $\sqrt{\frac{\mathrm{k}}{\rho}}$ e simplificam a equação original do sólido isotrópico de Cauchy, eq. (3.5), p. 45, pois fazem $\vec{\nabla}\cdot\vec{e}$ igual a zero. Em notação atual:

$$\frac{\partial^2\vec{e}}{\partial t^2} = -\frac{\mathrm{k}}{\rho}\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{e}) = \frac{\mathrm{k}}{\rho}\nabla^2\vec{e}. \tag{4.2}$$

De fato, é fácil reconhecer que a eq. (4.2) é uma equação de onda que permite, apenas, ondas puramente transversais. Generalizando esta equação para o caso dos meios anisotrópicos, como é o caso dos cristais, é possível identificar, refazendo os cálculos, que MacCullagh provavelmente cumpriu o expediente de estabelecer, nas equações de Cauchy, eqs. (3.2), p. 44:

1. que $k_1 = k_2 = k_3 = 0$, ou seja, as moléculas etéreas são consideradas livres de tensões quando não experimentam oscilações provocadas pela passagem da onda luminosa (Seção 3.1, p. 44);

2. que $k_4 = 3k_7$, $k_5 = 3k_8$ e $k_6 = 3k_9$;

3. que $k_7\dfrac{\partial \xi}{\partial x} + k_8\dfrac{\partial \eta}{\partial y} + k_9\dfrac{\partial \zeta}{\partial z}$ é igual a zero, onde as constantes k_7, k_8 e k_9 são diretamente proporcionais, respectivamente, ao quadrado das velocidades u_t, v_t e w_t.

Outro fato interessante de ser comentado é que essas tensões, eqs. (4.1), levam a vibrações do éter paralelas ao plano de polarização, como Cauchy fizera em sua "primeira teoria" da birrefração em cristais (Subseção 3.1.1, p. 48). Assim, uma vez definido i) que não existem vibrações na mesma direção da propagação, ii) que as oscilações transversais estão contidas no plano de polarização convencional e iii) que a densidade do éter permanece constante quando muda de um meio para outro, MacCullagh propõe mais duas hipóteses para chegar a seu modelo de reflexão em cristais. Estas duas hipóteses foram nomeadas "leis" no artigo [84, p. 105, 70, p. 78]. A primeira "lei" é a continuidade das amplitudes de oscilação da onda na interface entre os meios (já citada em "A short account") e a segunda tem a ver, de algum modo, com as tensões na superfície [84, p. 105, 70, p. 78]:

> [...] Pela segunda lei, *a pressão lateral* [tensão T_{ij}, para $i \neq j$] *sobre a superfície de separação é a mesma em ambos os meios*; sendo a pressão lateral entendida como significando a pressão numa direção perpendicular ao plano de incidência.

Porém, ainda assim, não é possível ter certeza de como ele chega a seu modelo partindo destas "duas leis", pois as evidências documentais são escassas. MacCullagh apenas diz que "levaria muito tempo seguir essas leis em detalhes" [84, p. 105, 70, p. 78].[6]

[6] Como visto na nota de rodapé 5 deste capítulo, a reflexão cristalina depende de

Em 1836, August Seebeck (1805–1849) [85] publica um estudo experimental sobre a reflexão na superfície de cristais contendo medidas mais acuradas do que aquelas realizadas inicialmente por Brewster, demonstrando que não eram perfeitamente compatíveis com as observações, as expressões matemáticas obtidas por MacCullagh para obter o ângulo entre o plano de polarização associado ao próprio raio e o plano de incidência, isto é, o plano onde ocorre a reflexão regular. Segundo Seebeck [85, pp. 281–282], embora os cálculos de MacCullagh coincidissem "muito bem" com suas medidas no que se refere aos ângulos de polarização da calcita, o plano de polarização na reflexão geralmente não coincide com o plano de incidência, o que implica em diferenças consideráveis entre os resultados experimentais e os resultados teóricos.[7] Isso força MacCullagh a revisar suas investigações sobre o tema e marca um ponto crucial em sua obra, pois, não só MacCullagh percebe, no final daquele ano, a importância da conservação da energia na superfície dos cristais, como também passa a fundamentar, de maneira clara, suas ideias nos quatro princípios a seguir [86, p. 43, 70, p. 84]:

1. A densidade do éter é a mesma em todos os meios.
2. As vibrações da luz plano-polarizada são paralelas ao plano de polarização.
3. A *vis viva* [energia cinética] é preservada.
4. As vibrações são equivalentes na superfície em comum entre dois meios.

No pequeno artigo em que esses quatro princípios são enunciados pela primeira vez, "On the laws of crystalline reflexion", MacCullagh apresenta um certo descontentamento com o uso do método dinâmico de Cauchy, pois, por mais que existisse, naquela época, uma preocupação entre os defensores da teoria ondulatória em encontrar uma explicação mecânica para as propriedades da luz, MacCullagh sentiu que, de algum modo, isso o estava

dois ângulos. Nesse contexto, o modelo de MacCullagh é composto por três equações principais. As duas primeiras [84, 70, p. 79, eqs. (2) e (3)] governam o ângulo entre o plano de incidência da reflexão regular e o plano de polarização do raio refletido e a terceira [84, 70, p. 80, eq. (7)], o ângulo de polarização.

[7] Isso significa dizer que as duas primeiras equações de MacCullagh [84, 70, p. 79, eqs. (2) e (3)], mencionadas na nota de rodapé anterior, levam a resultados teóricos incompatíveis com os experimentos, embora a terceira equação [84, 70, p. 80, eq. (7)] esteja correta.

atrapalhando. MacCullagh já compreendia, agora, todos os elementos necessários para chegar a seu objetivo maior de explicar a reflexão da luz nos cristais (embora o leitor ainda não consiga entender quais são), e comenta brevemente sobre o que o estava atrapalhando [86, pp. 42–43, 70, pp. 83–84]:

> [...] Fui, portanto, obrigado [pelos experimentos de Seebeck] a revisar minha teoria e descobri que ela estava viciada pela introdução de uma determinada relação entre quantidades, denominadas pressões [tensões], que, a exemplo do sr. Cauchy, supus estarem relacionadas ao problema. Observei que essa relação era tão marcante no caso dos meios refratores ordinários, que concluí, sem qualquer outro motivo, que ela poderia levar a uma boa generalização [...]
>
> É curioso que, há cerca de um ano e meio, eu tenha empregado esses quatro princípios, exatamente como os enumerei agora, para deduzir as já conhecidas leis de reflexão de Fresnel para os meios comuns; mas, até então, não apliquei a lei da *vis viva* [energia cinética] aos cristais porque minha mente estava preocupada com a noção de que existia alguma relação entre as pressões [tensões...]

Assim, MacCullagh apresenta as equações corretas para a reflexão cristalina [86, pp. 43–44, 70, p. 85, eqs. (a), (b) e (c)] e, quase ao mesmo tempo, apresenta aos membros da *Royal Irish Academy* um novo e ambicioso trabalho, estabelecendo seus objetivos: encontrar um modelo que explique, tanto a intensidade e a direção de oscilação da luz na reflexão em cristais, quanto na birrefração nos mesmos meios.

4.1.1 A solução "geométrica" correta do problema

Nesse novo trabalho, intitulado "On the Laws of Crystalline Reflexion and Refraction" [87, 70, p. 87], MacCullagh explica com mais detalhes como ele usou, em sua primeira tentativa, o método de Cauchy para encontrar as equações da reflexão da luz em cristais [87, p. 35, 70, pp. 91–92]:

> Estas outras hipóteses [os outros três princípios listados acima, exceto o de conservação de energia], retirei-as da leitura de um artigo do sr. Cauchy no Bulletin des Sciences Mathematiques, no qual ele chega, por um processo peculiar [e errado, como MacCullagh mesmo percebeu], à fórmula de Fresnel

> para o caso da reflexão ordinária. As hipóteses que ele emprega são, principalmente, relações entre certas quantidades chamadas pressões [tensões]; e foram essas relações que adotei em vez da lei da *vis viva* [energia cinética]. Supus que, nos limites entre dois meios, a pressão [tensão] na superfície de separação, numa direção perpendicular ao plano de incidência, deveria ser a mesma, quer fosse considerada resultante das vibrações no primeiro meio ou no segundo. Esta hipótese concebi ser verdadeira em geral, porque descobri que ela era verdadeira para os meios comum; mas eu jamais poderia atribuir uma razão melhor que esta.

Ele também explica seu erro anterior, apontado pelos experimentos de Seebeck [87, pp. 36–37, 70, pp. 93–94]:

> Esta fórmula [que governa o ângulo de polarização na reflexão cristalina], como vimos, estava correta; mas aconteceu, de maneira bastante singular, que as expressões para o desvio [MacCullagh chama de *desvio* o ângulo entre o plano de polarização do raio refletido e o plano de incidência], que foram utilizadas na obtenção da fórmula, estavam erradas. É ao sr. Seebeck que sou grato por apontar esta curiosa circunstância. Nos Anais de Poggendorff [*Annalen der Physik*], ele [Seebeck] apresentou um resumo de minha carta a Sir David Brewster e comparou meus resultados com seus numerosos e precisos experimentos, tanto sobre os ângulos de polarização do espato da Islândia [calcita] quanto sobre os ângulos de desvio. Ele [Seebeck] descobriu que minha fórmula representava a primeira classe de experimentos [que determinam o ângulo de polarização] tão bem quanto se poderia desejar; mas os valores teóricos dos desvios não concordavam em nada com as suas medidas experimentais. Estas medidas do desvio ele [Seebeck] publicou nesta ocasião; e, com a ajuda deles, localizei o erro até a sua origem, que era a relação entre as pressões. O princípio da *vis viva* foi, portanto, introduzido, em vez dessa relação, e a teoria tornou-se muito mais simples com a mudança. Obtive agora, para o desvio, uma nova expressão, que concordava com as experiências do sr. Seebeck; mas a fórmula para o ângulo de polarização foi a mesma de antes. Esta correção foi feita no dia 6 de dezembro [de 1836], e foi publicada no Philosophical Magazine no primeiro dia do presente mês [janeiro de 1837].

MacCullagh, agora, é um pouco mais claro. Ele possivelmente chegou, de maneira independente, a algo similar às eqs. (3.9) (Subseção 3.1.2, p. 51) de Cauchy e usou, em sua primeira tentativa de obter as equações da reflexão cristalina, *quatro condições de continuidade na superfície*: as três componentes das vibrações transversais e a tensão perpendicular ao plano de incidência, com esta última sendo substituída (após os experimentos de Seebeck) pela conservação de energia para obter suas novas equações [87, p. 44, 70, p. 102, eqs. (1) a (4)]. No entanto, como MacCullagh não se propõe a explicar, no artigo, a dinâmica do éter na fronteira entre os dioptros, seu novo modelo de reflexão e refração em meios cristalinos é fundamentado, somente, nos quatro princípios citados na p. 69 desta seção. Deste modo, MacCullagh chega com sucesso, à *continuidade nas três direções espaciais* das vibrações transversais da luz, além de obter as equações corretas para as respectivas intensidades. Mais ainda, o novo modelo não é apenas bem sucedido em explicar o comportamento da luz para o caso específico em que só há reflexão irregular e um raio refratado em cristais, mas serve, também, para explicar o que acontece com a luz na fronteira entre os meios comuns, desde que esses meios sejam considerados um caso distinto em que só exista reflexão regular e refração ordinária.[8]

MacCullagh fez uma escolha feliz em colocar de lado suas preocupações com a dinâmica do éter (pelo menos por enquanto) e em se esforçar, sobretudo, em obter uma explicação *ad hoc* para o problema, pois, poucos meses após apresentar suas pesquisas sobre a reflexão e a refração cristalina à *Academy*, descobre, finalmente, que Neumann chegou às mesmas conclusões que ele sobre as propriedades da luz. Graças a essa descoberta, MacCullagh redige, a tempo, uma breve nota de rodapé ao final do artigo completo a ser publicado nos *Transactions of the Royal Irish Academy*, advertindo o leitor que não conhecia previamente os trabalhos de Neumann [87, p. 74, 70, p. 137]:

[8]Como comentado na nota de rodapé 5, p. 65, deste capítulo, a reflexão regular pode ser praticamente removida dos experimentos em cristais de calcita aplicando-se, sobre a superfície do cristal, uma fina camada de óleo de cássia, que possui um índice de refração muito próximo ao índice de refração do raio ordinário da calcita [87, p. 72, 70, p. 134]. Assim, o experimento de Brewster possui quatro raios e as equações de MacCullagh [87, p. 44, 70, p. 102, eqs. (1) a (4)] possuem apenas três (o raio incidente, um raio refletido e um raio refratado), implicando que ele só consiga explicar, por completo, a reflexão e a refração em meios comuns; e não consiga explicar a reflexão cristalina e a birrefração em quais circunstâncias. Essa limitação só será removida em um trabalho futuro (Seção 4.2).

> Dois ou três meses após esta correção [das equações para a reflexão] ter sido publicada no Philosophical Magazine, a notícia sobre ela foi inserida nos Anais de Poggendorff [*Annalen der Physik*], vol. xl. pág. 462. Até então, cria eu, nada havia sido publicado na Alemanha sobre a teoria geral da reflexão cristalina; pelo menos o autor da notícia (que considero ser o sr. Seebeck) não parece ter ouvido falar de qualquer outra teoria, ou de quaisquer outros princípios, além da minha. Mas no número seguinte do Poggendorff, vol. xl. pág. 497, apareceu uma carta do sr. Neumann, na qual o escritor fala de uma teoria própria, fundada em princípios exatamente iguais aos que eu já havia anunciado, e se refere a um artigo que ele comunicou sobre o assunto à Academia de Berlim. O artigo foi impresso nos Transactions daquela Academia do ano de 1835; e por cortesia do autor recebi uma cópia dele, bem a tempo de apresentá-lo aqui. Ao examiná-lo, reconheço várias equações que me são familiares [...] O artigo do sr. Neumann é muito elaborado e substitui, em grande medida, os desígnios que eu tinha de tratar o assunto de forma mais completa durante meu tempo livre; nem posso fazer melhor do que recomendá-lo àqueles que desejam prosseguir as investigações em todos os seus detalhes.

4.1.2 A "teoria" de MacCullagh e Neumann

Seguindo a recomendação de MacCullagh acima, vale a pena dar a conhecer as pesquisas de Neumann. Após publicar seus já citados estudos sobre os aspectos dinâmicos da propagação da luz na birrefração em cristais [62], Neumann também percebe que a explicação teórica da reflexão na superfície dos mesmos meios ainda era um problema sem solução, levando-o a apresentar à *Akademie der Wissenschaften* de Berlim, em 1835, uma detalhada investigação do tema. O trabalho completo de Neumann só é publicado cerca de dois anos mais tarde [88] e se inicia, justamente, com uma critica à dedução das leis seno e tangente feita por Fresnel para os meios comuns, que leva em consideração, apenas, a continuidade das vibrações transversais da luz em duas direções espaciais, como demonstrado no final do Capítulo 2, p. 35, desta tese. Esta crítica leva Neumann a obtê-las de uma maneira diferente de Fresnel (usando os mesmos princípios estabelecidos mais tarde por MacCullagh) e, talvez, os cálculos de Neumann ajudem na compreensão do leitor, pelo menos no caso particular da reflexão e refração em meios comuns.

Para rededuzir as leis seno e tangente, Neumann adota o mesmo expediente proposto por Fresnel de encontrar os volumes de éter deslocados pelas ondas incidente, refletida e refratada em função do seno e do cosseno dos ângulos de incidência e de refração; mas obtém uma nova razão entre as massas associadas a esses volumes, em oposição à eq. (2.6), p. 35, de Fresnel, tomando como princípio: i) que a elasticidade do éter é variável no interior dos dioptros, ii) que a densidade do éter permanece constante nos mesmos meios e iii) que a energia cinética das vibrações transversais é conservada na superfície de separação entre eles. Porém, ao contrário de MacCullagh, Neumann não descarta a possibilidade de ondas longitudinais, embora considere que elas não são "percebidas como ondas de luz", isto é, não são luz visível, o que o faz questionar se existiriam meios totalmente transparentes [88, p. 11]:

> A teoria das intensidades da luz refletida e refratada a ser desenvolvida aqui tem este princípio [de conservação de energia das vibrações transversais] em comum com a teoria de Fresnel. Confesso, porém, que, do ponto de vista teórico, é isso que deve suscitar dúvidas quanto à sua admissibilidade; pois não se entende como uma parte da força viva [energia cinética] da onda plana incidente não deveria ser usada para produzir ondas oscilando longitudinalmente, que não são percebidas como ondas de luz; e uma parte da luz sempre teria que desaparecer porque sua intensidade é medida pela força viva [energia cinética] das ondas planas oscilantes transversalmente, e, na verdade, não existiriam corpos completamente transparentes. Este princípio só pode, portanto, ser aceito com base na experiência de que existem realmente corpos nos quais a intensidade da luz incidente é igual à soma das intensidades com que a luz é refletida e refratada.

Fazendo uma transposição do estudo de Neumann para uma linguagem mais moderna, tem-se que a reflexão e a refração ordinária da luz, quando as oscilações transversais são consideradas paralelas aos respectivos planos de polarização, seguem o esquema mostrado na Fig. 2.4a, p. 19. A relação entre os volumes de éter perturbado pela passagem dos raios incidente e refratado é a mesma da eq. (2.5), p. 35. Se as densidades forem consideradas iguais, a nova razão entre as massas é [88, p. 12, eq. sem número]:

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{\text{sen}\,(\theta)\cos(\theta)}{\text{sen}\,(\phi)\cos(\phi)}. \tag{4.3}$$

A conservação de energia, a proporção entre as massas e a igualdade entre os ângulos de incidência e de reflexão permitem obter uma nova relação entre as componentes perpendiculares ao plano de incidência, tanto da velocidade de oscilação da onda incidente, $v_i^{\perp}$, quanto da velocidade de oscilação da onda refletida, $v_r^{\perp}$, e da onda refratada, $v_t^{\perp}$ [88, p. 12, eq. sem número]:

$$\left[(v_i^{\perp})^2 - (v_r^{\perp})^2\right] \operatorname{sen}(\theta) \cos(\theta) = (v_t^{\perp})^2 \operatorname{sen}(\phi) \cos(\phi). \tag{4.4}$$

Por fim, reutilizando a eq. (2.8), p. 36, de continuidade das componentes perpendiculares ao plano de incidência, obtém-se a lei tangente de Fresnel, eq. (2.11), p. 37, com alguma facilidade.

Por outro lado, Neumann obtém a lei seno de Fresnel, eq. (2.9), p. 36, a partir da *completa continuidade* entre as componentes pertencentes ao plano de incidência, isto é, a continuidade nas três dimensões espaciais. Em notação hodierna, a continuidade das projeções das ondas incidente, $v_i^{\parallel}$, refletida, $v_r^{\parallel}$, e refratada, $v_t^{\parallel}$, i) sobre a direção contida na superfície de separação entre os meios e ii) sobre a direção da normal é, respectivamente [88, p. 13, eq. sem número]:

$$(v_i^{\parallel} - v_r^{\parallel}) \cos\theta = v_t^{\parallel} \cos\phi, \tag{4.5a}$$

$$(v_i^{\parallel} + v_r^{\parallel}) \operatorname{sen}\theta = v_t^{\parallel} \operatorname{sen}\phi, \tag{4.5b}$$

o que permite deduzir a lei seno sem a necessidade de introduzir qualquer hipótese adicional. A única diferença, contudo, é o sinal, pois o sinal negativo da eq. (2.9) indica uma inversão de fase da componente perpendicular ao plano de incidência da onda refletida, em relação à onda incidente, enquanto que o resultado obtido a partir das eqs. (4.5) possui um sinal positivo, indicando que as fases permanecem as mesmas (isto é, a direção da seta de $v_r^{\parallel}$ na Fig. 2.7b, p. 35).[9]

Poucos meses depois de enviar uma cópia do artigo supracitado a MacCullagh, Neumann reclama para si, em carta à *Academy*, lida por Hamilton

[9]De fato, a equação de conservação de energia cinética e as eqs. (2.8), (4.5a) e (4.5b) são praticamente as mesmas quatro equações usadas por MacCullagh para explicar o caso de reflexão e refração em meios comuns [87, p. 44, 70, p. 102, eqs. (1) a (4)].

em 30 de novembro de 1838 [89], a prioridade sobre a descoberta das leis da refração e da reflexão cristalina, alegando que chegou aos resultados corretos para o fenômeno ainda em 1833. Também, Neumann afirma que suas pesquisas foram conduzidas em estreita comunicação com Seebeck, entre outros. Contudo, não só Seebeck [85] não cita Neumann quando de sua verificação experimental do primeiro modelo de MacCullagh, como também o trabalho de Neumann só ficou amplamente conhecido em 1837, quando foi publicado, isso "dois ou três meses" depois da apresentação de MacCullagh à *Academy*, segundo o próprio MacCullagh [87, p. 74, 70, p. 137]. Seja o que for, a nova interpretação sobre as propriedades da luz erigida por ambos ficou, com justiça, conhecida ao longo do século XIX (principalmente no Reino Unido) como a "teoria de MacCullagh e Neumann", embora essa expressão tenha se tornado quase um eufemismo para todos aqueles que não conheciam, de fato, o conteúdo das pesquisas de MacCullagh.[10]

O sucesso de MacCullagh em explicar a reflexão e a refração da luz em cristais e em meios comuns fê-lo receber, como já mencionado no primeiro parágrafo desde capítulo, a medalha Cunningham, outorgada pela *Academy*. John Herschel (1792–1871), em carta a Hamilton em junho de 1838, elogia a maneira pela qual MacCullagh obtém seus resultados partindo de princípios "geométricos" simples, em vez de se prender às discussões sobre as propriedades mecânicas do éter [80, p. 262]:

> A leitura do artigo do sr. MacCullagh referente às leis de reflexão e polarização em cristais, embora muito superficial para me permitir entrar na parte matemática de seu conteúdo, ou para verificar a correção das fórmulas, etc., produziu, porém, na minha mente, uma impressão muito forte de que a teoria da luz está às vésperas de algum aperfeiçoamento considerável, e isso abandonando, por enquanto, o caminho *à priori* ou dedutivo [de um modelo dinâmico de propagação da luz no éter], e procurando, entre os fenômenos [hipótese *ad hoc*], leis mais simples em sua enunciação geométrica, e de aplicabilidade mais ou menos ampla, *sem (por enquanto) nos preocu-*

[10] É muito provável que Cauchy não tenha reclamado, assim como Neumann, uma parte dos créditos na edificação desta nova maneira de interpretar as propriedades da luz exatamente por ter mudado de ideia, a partir de sua "segunda teoria", sobre a direção da oscilação transversal da onda e sobre a constância da densidade do éter no interior dos diferentes meios transparentes.

> *parmos muito em como essas leis podem estar aparentemente de acordo com quaisquer noções preconcebidas*, ou mesmo com o que estamos acostumados a considerar como princípios gerais da Dinâmica [...]

Infelizmente, não foi possível confirmar se as ponderações de Herschel chegaram imediatamente aos ouvidos de MacCullagh, mas, com certeza, MacCullagh não parecia estar satisfeito com o caráter *ad hoc* de suas pesquisas sobre o tema e não parecia estar disposto a postergar as discussões dinâmicas. Com isso em mente, MacCullagh retoma seu projeto inicial de embasar seus estudos sobre a reflexão e a refração da luz nas leis da Dinâmica e essa nova empreitada o levará a seu mais distinto e, certamente, mais controverso trabalho, que suscitará, tanto críticas, quanto elogios entre seus contemporâneos.

4.2 Solução lagrangiana de MacCullagh

Em 9 de dezembro de 1839, MacCullagh apresenta à *Royal Irish Academy* um polêmico ensaio em que desenvolve uma dinâmica para explicar o comportamento da luz em cristais com polarização fixa e em meios comuns, o qual só será publicado, na íntegra, apenas em 1846, sob o título "An essay towards a dynamical theory of crystalline reflexion and refraction" [90, 70, p. 145]. O "Essay" é dividido em seis seções. Na primeira seção MacCullagh enuncia sua motivação: obter uma justificativa dinâmica para os resultados bem sucedidos encontrados "quase três anos antes" [90, p. 17, 70, p. 145]. Para encontrá-la, MacCullagh impõe condições para o movimento da onda e condições para a estrutura do meio universal [90, p. 18, 70, pp. 146–147]:

> As suposições nas quais a teoria se baseia são estas:— *Primeiro*, que a densidade do éter luminífero é uma quantidade constante; no qual está implícito que esta densidade permanece inalterada pelos movimentos que produzem a luz ou pela presença de partículas materiais, de modo que é a mesma no interior de todos os corpos e no espaço livre, e permanece a mesma durante as vibrações mais intensas. *Segundo*, que as vibrações em uma onda plana são retilíneas e que, enquanto o plano da onda se move paralelamente a si mesmo, as vibrações continuam paralelas a uma linha reta fixa, a direção desta linha reta e a direção de uma normal à ondas sendo funções uma da

> outra. Esta suposição é válida para todos os cristais conhecidos, exceto o quartzo, em que as vibrações são elípticas.[11]
>
> Quanto à constituição peculiar do éter, nada sabemos e nada suporemos, exceto o que está envolvido nas suposições anteriores. Mas no que diz respeito à sua condição física em geral, admitiremos, como é bastante natural, que um vasto número de partículas etéreas está contido no elemento diferencial de volume; e, por enquanto, consideraremos que a ação mútua dessas partículas é sensível apenas em distâncias que são insensíveis quando comparadas com o comprimento de uma onda.

Ao final da seção, MacCullagh propõe o uso do formalismo lagrangiano para obter as equações de onda. Para tanto, ele considera que a "densidade etérea" é igual a 1, de modo que as equações do movimento são obtidas por [90, p. 19, 70, p. 148, eq. (1)]:

$$\iiint \left(\frac{\partial^2 \vec{e}}{\partial t^2} \cdot \delta \vec{e} \right) dx\ dy\ dz = \iiint \delta V dx\ dy\ dz, \tag{4.6}$$

em que V é "uma função que depende das ações mútuas entre as partículas", ou seja, é uma densidade de potencial, e as "integrais devem envolver todo o volume do meio vibratório, ou todos os meios, se houver mais de um" [90, p. 19, 70, p. 148]. A grande utilidade do formalismo lagrangiano é que ele dispensa uma descrição detalhada do éter, envolvendo, apenas, o potencial responsável pela deformação que causa o fenômeno da luz. Além disso, a Mecânica Analítica permite: i) esclarecer as continuidades identificadas por MacCullagh na superfície entre os meios (Subseção 4.1.1, p. 71), e ii) sugerir qual deveria ser o comportamento do éter para explicar os fenômenos observados. Talvez, o misterioso fluido universal não fosse um sólido elástico como seus contemporâneos imaginavam e é isso que MacCullagh irá demonstrar, como será brevemente comentado no Capítulo 5.

Na segunda seção, MacCullagh apresenta lemas que serão usados nas seções seguintes, principalmente aqueles que definem transformações de coordenadas por rotação [90, pp. 21 e 23, 70, pp. 149 e 152, *Lemma* II e III].

[11] MacCullagh alerta que essas suposições não são capazes de explicar a atividade óptica presente, por exemplo, nos cristais de quartzo, pois, nestes cristais, o plano da onda gira, no interior do meio, em torno da direção de propagação e não depende, apenas, das condições estabelecidas na superfície. Veja nota de rodapé 18, p. 26, do Capítulo 2.

Segundo Fresnel, as forças elásticas que atuam sobre as moléculas do éter obedecem à concepção usual de elasticidade, dada pela lei de Hooke, em que a força restauradora é diretamente proporcional ao deslocamento transversal, $\vec{e}$, da onda e, consequentemente, o potencial é diretamente proporcional a e^2. Para fins de diferenciação, esta lei é chamada, nesta tese, de elasticidade linear (Seção 2.4, p. 31). Em contrapartida, no "Essay", as acelerações sofridas por um elemento de volume do meio são produzidas por um potencial elástico que depende, em notação modernizada, das componentes de $\vec{\nabla} \times \vec{e}$ [90, p. 21, 70, p. 149, eq. (C)]. Whittaker chama a propriedade desse potencial de "elasticidade rotacional" do éter [1, p. 156, 2, p. 145] e a realização física desse potencial foi muito debatida ao longo do século XIX, embora seu significado só tenha sido corretamente compreendido após o desenvolvimento do Eletromagnetismo (como se verá no Capítulo 5).

Um breve resumo das seções seguintes do "Essay" é oferecido ao leitor. Os detalhes, porém, serão apresentados mais adiante. Na terceira e na quarta seção, a expressão do potencial é obtida e as equações de onda oriundas dele resultam em oscilações transversais, somente, de modo que as vibrações longitudinais da luz que Fresnel, Cauchy, Green e, até mesmo, Neumann não conseguiram eliminar dos cálculos são, enfim, eliminadas. Na quinta seção MacCullagh analisa as condições de contorno na superfície que separa os dois meios. Essas condições conduzem às leis de reflexão em cristais com polarização fixa e em meios comuns e reproduzem os resultados obtidos por ele em seus trabalhos anteriores. Por fim, na última seção do "Essay", MacCullagh discute, entre outras coisas, a conservação de energia na reflexão, concluindo que, embora o potencial encontrado para o movimento da luz no éter fosse diferente de tudo quanto era conhecido, até então, para explicar a propagação de ondas mecânicas na matéria ponderável, um V associado a uma elasticidade rotacional seria a única maneira plausível de explicar o comportamento da luz verificado pela experimentação. Em relação a isto, MacCullagh diz [90, p. 50, 70, p. 184]:

> [...] Nesta teoria [mostrada acima], tudo depende da forma da função V; e vimos que, quando essa forma é devidamente atribuída, as leis pelas quais os cristais agem sobre a luz são incluídas na equação geral da dinâmica.

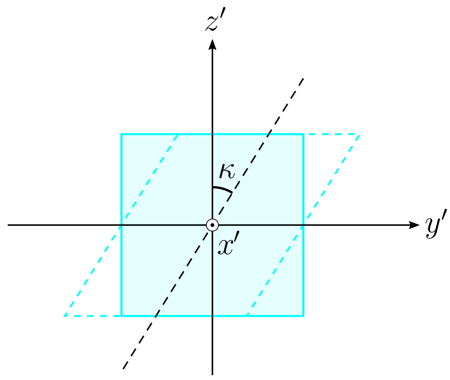


Figura 4.2: Na figura, um paralelepípedo elementar (retângulo azul) é descrito no éter quando o meio luminífero está em repouso. As faces do paralelepípedo, perpendiculares ao eixo z', são, então, deslocadas, cada uma em seu próprio plano, em uma direção paralela ao eixo y', de tal maneira que as arestas inicialmente paralelas ao eixo z' se inclinam em relação ao eixo por um ângulo κ (paralelogramo tracejado) [90, pp. 25–26, 70, pp. 154–155].

> Este fato é plenamente comprovado por investigações anteriores. Porém, o raciocínio usado para explicar a forma da função é indireto e, do ponto de vista mecânico, não pode ser considerado suficiente. É, no entanto, o único tipo de raciocínio que podemos empregar, pois a constituição do meio luminífero é totalmente desconhecida.

4.2.1 O potencial elástico rotacional

Na terceira seção do "Essay", MacCullagh demonstra que existe um sistema de coordenadas, o sistema de coordenadas dos eixos principais do cristal, ou eixos de elasticidade na nomenclatura introduzida por Fresnel (Seção 2.4, p. 30), no qual a densidade de potencial tem a forma [90, p. 26, 70, p. 156, eq. (2)]:

$$V = \frac{1}{2}(u_t^2\mathrm{X}^2 + v_t^2\mathrm{Y}^2 + w_t^2\mathrm{Z}^2), \tag{4.7}$$

onde u_t, v_t e w_t são as três velocidades principais de propagação da luz e X, Y e Z são as componentes de $\vec{\nabla} \times \vec{e}$ no sistema de coordenadas dos eixos de elasticidade. A forma do potencial não é arbitrária, mas resulta de um raciocínio matemático sofisticado e elegante. MacCullagh considera um elemento diferencial de volume de éter na forma de paralelepípedo (retângulo azul na Fig. 4.2), quando o meio luminífero está livre de ações externas [90, p. 25, 70, p. 154]. As faces do paralelepípedo são paralelas, respectivamente, a um sistema de coordenadas x', y' e z'. Esse é o chamado sistema de coordenadas da onda.

A incidência de *um raio de luz puramente transversal*, que se propaga, por exemplo, na direção de z', sobre esse elemento de volume provoca, nele, uma deformação tal que as faces do paralelepípedo original perpendiculares a z' são deslocadas, cada uma em seu próprio plano, em uma direção paralela ao plano $x'y'$. Nestas condições, as faces inicialmente paralelas ao eixo z', então, inclinam-se em relação a este eixo por um ângulo κ (paralelogramo tracejado na Fig. 4.2). Na sequência, como a passagem da luz causa uma deformação infinitesimal das faces do paralelepípedo, MacCullagh identifica, "naturalmente" [90, p. 25, 70, p. 155], que o potencial deve depender, apenas, das variáveis que posicionam essas faces no espaço e do ângulo de deformação κ. É um cálculo longo, porém, mostrar que a dependência de V em relação ao deslocamento (elasticidade linear) em qualquer sistema de coordenadas pode ser substituída por uma dependência em relação às componentes de $\vec{\nabla} \times \vec{e}$, sem perda de generalidade. Também, tomando κ um ângulo muito pequeno, o potencial V pode ser expandido em série de potências até segunda ordem [90, pp. 25–26, 70, pp. 155–156], sendo uma tecnicalidade identificar que as constantes de cada termo da série estão associadas a cada uma das velocidades principais de propagação, u_t, v_t e w_t.

4.2.2 As equações de onda

Na quarta seção, MacCullagh define a maneira pela qual a luz se propaga, obtendo, assim, as leis da birrefração de Fresnel, as equações da superfície de onda, etc. Esses resultados não são diferentes daqueles demonstrados por MacCullagh em trabalhos anteriores, a não ser pelo fato de que são apresentadas ao leitor, pela primeira vez, as forças que atuam sobre a luz (em 1836, ele não mostrou as forças diretamente, mas, sim, as tensões). Aplicando os métodos do formalismo analítico lagrangiano, às equações de movimento, as acelerações sofridas pelo elemento de volume ao se deformar são obtidas a partir do potencial V e são [90, p. 28, 70, p. 158, eqs. (5)]:

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} = w_t^2\frac{\partial \mathrm{Z}}{\partial y} - v_t^2\frac{\partial \mathrm{Y}}{\partial z}, \tag{4.8a}$$

$$\frac{d^2\eta}{dt^2} = u_t^2\frac{\partial \mathrm{X}}{\partial z} - w_t^2\frac{\partial \mathrm{Z}}{\partial x}, \tag{4.8b}$$

$$\frac{d^2\zeta}{dt^2} = v_t^2\frac{\partial \mathrm{Y}}{\partial x} - u_t^2\frac{\partial \mathrm{X}}{\partial y}. \tag{4.8c}$$

onde x, y e z são as coordenadas dos eixos de elasticidade do cristal. Para escrever estas equações na forma usual de equação de onda, MacCullagh faz uma engenhosa e extremamente elegante demonstração (que envolvem transformações de coordenadas para o sistema de coordenadas da onda), mas, para os propósitos desta tese, talvez seja mais esclarecedor interpretá-las no cenário das discussões feitas na seção anterior deste capítulo, afim de estabelecer conexões entre a dinâmica desenvolvida no "Essay" e os trabalhos precedentes de MacCullagh.

Primeiro, no caso particular dos meios comuns (meios isotrópicos), em que as velocidades u_t, v_t e w_t são iguais, é muito fácil perceber que as equações de movimento acima levam a uma equação de onda usual, eq. (4.2), onde não há vibrações longitudinais. Segundo, as equações das forças que atuam sobre o elemento de volume do meio, eqs. (4.8), podem ser obtidas, sem dificuldades, substituindo as eqs. (4.1), das tensões, nas eqs. (3.1), p. 43, de Cauchy, indicando que MacCullagh possivelmente já conhecia estas forças, pelo menos, desde de 1836. Por último, MacCullagh defende que as vibrações transversais obtidas a partir das eqs. (4.8) levam a resultados opostos àqueles propostos por Fresnel, pois coincidem com oscilações contidas no plano de polarização, em vez de oscilações perpendiculares ao plano. Para verificar este resultado, é "fácil inferir", nas palavras de MacCullagh [90, p. 30, 70, pp. 160–161], que, quando o plano da onda é paralelo a um dos três eixos principais do elipsoide, a velocidade de propagação pode ser u_t, v_t ou w_t; mas, para Fresnel a onda que se propaga, por exemplo, com velocidade u_t deveria oscilar na direção x, eq. (2.3a), p. 32, enquanto que as eqs. (4.8b) e (4.8c) mostram justamente o contrário: ela deve oscilar perpendicular a x. Uma vez que MacCullagh identifica a direção ao longo da qual a onda luminosa oscila, para obter as equações de onda na sua formal usual, todo o restante da seção é dedicada à discussão geométrica do movimento da luz no interior dos meios diáfanos com polarização fixa, sejam eles cristalinos ou não.

4.2.3 As condições de contorno na superfície

Se as equações de propagação em dioptros já eram conhecidas por MacCullagh em seus trabalhos precedentes, o mesmo acontece na maior parte da seção seguinte do "Essay", dedicada ao estudo do movimento quando a luz passa de um meio para outro; exceto que, finalmente, MacCullagh irá esclarecer as continuidades na superfície. Somadas ao seu desígnio de obter ondas luminosas puramente transversais, as continuidades na superfície constituem os pilares de seu pensamento, como mostra a seção anterior deste capítulo, e o formalismo lagrangiano oferece um modo analítico imediato para aplicar condições de contorno. Talvez estes foram os motivos pelos quais MacCullagh abandonou o método de Cauchy (p. 69). Nesse contexto, uma apresentação dos cálculos de MacCullagh, adaptados do original, é mostrada a seguir. Se ξ_i, η_i e ζ_i são as componentes das vibrações da onda incidente, ξ_t, η_t e ζ_t são as componentes das vibrações da onda refratada e V_i e V_t são os respectivos potenciais, o elemento de volume da eq. (4.6) pode ser dividido em dois volumes menores, um em cada meio, resultando em [90, p. 36, 70, p. 167, eq. (17)]:

$$\begin{aligned}
&\iiint \left(\frac{\partial^2 \xi_i}{\partial t^2} \delta\xi_i + \frac{\partial^2 \eta_i}{\partial t^2} \delta\eta_i + \frac{\partial^2 \zeta_i}{\partial t^2} \delta\zeta_i \right) dx''\, dy''\, dz'' + \\
+ &\iiint \left(\frac{\partial^2 \xi_t}{\partial t^2} \delta\xi_t + \frac{\partial^2 \eta_t}{\partial t^2} \delta\eta_t + \frac{\partial^2 \zeta_t}{\partial t^2} \delta\zeta_t \right) dx''\, dy''\, dz'' = \\
= &\iiint \delta V_i dx''\, dy''\, dz'' + \iiint \delta V_t dx''\, dy''\, dz'',
\end{aligned} \tag{4.9}$$

onde dx'', dy'' e dz'' são as arestas do elemento de volume atravessado, tanto pelo plano tangente à superfície, quanto pelo plano de incidência. O sistema de coordenadas x'', y'' e z'' é o sistema de coordenadas da reflexão.

Uma integração por partes da eq. (4.9) resulta em termos que, somados, envolvem todo o elemento de volume e resulta, também, em termos de superfície. No “Essay”, a superfície corresponde ao plano $x''y''$ e os meios são, em geral, um meio comum e um cristal [90, p. 37, 70, p. 169]. A presença do cristal complica demasiadamente os cálculos e para facilitar a discussão, esta tese irá considerar apenas o caso particular em que os dois meios são meios comuns, pois, conquanto uma parte considerável da elegância matemática do pensamento de MacCullagh seja perdida, o ganho de clareza é inegável. Ademais, a discussão geral inclui o caso particular. Por esse motivo, os termos de superfície para o caso particular em que os dois meios são meios comuns podem ser obtidos da equação geral usada por MacCullagh e assumem a forma [90, p. 37, 70, p. 169, eq. (18)]:

$$\iint (\mathrm{Y}_i \delta\xi_i - \mathrm{X}_i \delta\eta_i)\, dx''\, dy'' - \iint (\mathrm{Y}_t \delta\xi_t - \mathrm{X}_t \delta\eta_t)\, dx''\, dy'' = 0, \tag{4.10}$$

em que Y_i e X_i são as componentes do rotacional das vibrações da onda incidente e Y_t e X_t, as componentes do rotacional das vibrações da onda refratada.

As condições de contorno impostas são [90, pp. 37–38, 70, p. 169, eqs. (20) e (21)]:

$$\xi_i = \xi_t, \tag{4.11a}$$

$$\eta_i = \eta_t, \tag{4.11b}$$

$$\mathrm{X}_i = \mathrm{X}_t, \tag{4.11c}$$

$$\mathrm{Y}_i = \mathrm{Y}_t, \tag{4.11d}$$

e MacCullagh comenta [90, p. 38, 70, pp. 169–170]:

> Assim, para encontrar as relações que subsistem entre as vibrações incidentes, refletidas e refratadas, na superfície comum entre dois meios, temos quatro condições, expressas pelas equações (20) e (21) [eqs. (4.11)]; e essas condições são suficientes para determinar as vibrações refletidas e refratadas, quando a vibração incidente é dada. Mas, embora, pela natureza da questão, apenas quatro condições sejam necessárias para sua solução, resta outra condição que deve ser satisfeita [. . .]

Esta quinta condição de contorno é [90, p. 38, 70, p. 170, eq. (22)]:

$$\zeta_i = \zeta_t, \text{ quando } z'' = 0, \tag{4.12}$$

e ele complementa [90, p. 38, 70, p. 170]:

> [...] Esta condição é aparentemente independente das demais; mas não pode realmente ser assim, se a teoria anterior for consistente consigo mesma. Veremos, portanto, a seguir, que a última condição está incluída nas outras quatro; o que é uma circunstância notável e uma confirmação singular da teoria.

A discussão que se segue é bastante longa e o resultado leva às equações da reflexão e da refração obtidas por MacCullagh em seu premiado trabalho de 1837 (Subseção 4.1.1), mas com algumas diferenças importantes. A primeira é que, ao contrário do que foi mencionado na p. 71 da seção anterior deste capítulo, agora, MacCullagh demonstra que são *cinco condições de contorno a serem satisfeitas na superfície*, pois as novas equações obtidas por ele [90, pp. 41 e 45, 70, pp. 174 e 178, eqs. (31) e (34)] possuem quatro raios e exigem cinco equações para descreverem completamente os experimentos de Brewster a respeito da reflexão cristalina. A segunda diferença é que a conservação de energia decorre dessas equações [90, p. 47, 70, p. 181, eq. (42)]. Finalmente, os resultados obtidos em 1837 são apenas um caso particular das novas equações [90, p. 48, 70, p. 182, eq. (43)].

4.3 Controvérsias, na historiografia, sobre as motivações de MacCullagh no "Essay"

Como o "Essay" foi apresentado apenas dois anos após Green propor o uso do formalismo analítico para resolver os mesmos problemas (Seção 3.2), Whittaker sugere, sem apresentar provas, que o trabalho de Green teria "estimulado", de alguma maneira, MacCullagh [2, p. 142]. Segundo Scaife [69, p. 73], existe uma notícia, contendo um resumo do que foi apresentado na seção da *Academy* de 9 de dezembro de 1839, que poderia fundamentar a suposição de Whittaker.[12] A notícia foi publicada no *Philosophical Magazine* no mês seguinte, em janeiro de 1840, e, ao final do texto, comunica [91, p. 232]:

> [...] A primeira tentativa de tratar o tema da reflexão e da refração dessa maneira [isto é, usando a Mecânica Analítica] foi feita pelo sr. Green em um artigo notável, impresso na Cambridge Transactions, vol. vii. parte 1 [...], [mas a dificuldade na] determinação da função v [o potencial], da qual essencialmente depende o sucesso da investigação, não foi superada pelo sr. Green, levando-o, consequentemente, a muitos resultados errados, inclusive para o caso simples dos meios *não-cristalinos*, os quais suas pesquisas se restringem. Deste modo, a teoria do sr. MacCullagh confirma as bem conhecidas fórmulas de Fresnel, uma das quais [a lei tangente] o sr. Green obtém de maneira imprecisa [...] A presente teoria [de MacCullagh] aplica-se, com igual facilidade, a todos os meios, cristalinos ou não, e se distingue pela singular elegância e simplicidade de seus detalhes analíticos; uma circunstância que o autor [MacCullagh] considera como uma forte indicação de sua veracidade.

A suposição de Whittaker (que parece ter sido confirmada por Scaife) não pode ser considerada, contudo, uma unanimidade entre os historiadores. Schaffner, por exemplo, defende que MacCullagh não conhecia o trabalho de Green porque não encontrou "qualquer evidência a esse respeito" [3, p. 61]. A conclusão de Schaffner parece ser bem fundamentada, pois, não só não existe qualquer citação a Green no *Collected works* de MacCullagh [70], como também a notícia mencionado acima não apresenta evidências decisivas: o trabalho de Green, de 1837 [68], só foi publicado nas *Cambridge Transactions* em 1842, ou seja, mais de dois anos após a apresentação de MacCullagh à *Academy*. Portanto, quem for que tenha escrito a notícia, contendo o resumo de todas as apresentações feitas à *Academy* naquele dia, possuía a informação privilegiada de onde o artigo de Green seria publicado. MacCullagh, por outro lado, nunca demonstrou ter acesso antecipado a informações de outros pesquisadores na área e, muito provavelmente, quem escreveu o relato citou o trabalho de Green com o único propósito de alertar o leitor, com base em informações atualizadas, sobre sua primazia no uso do método lagrangiano

[12] Este resumo também é citado por Todhunter e Pearson [55, p. 496], que são anteriores a Whittaker. Darrigol supõe que este relato foi, "provavelmente" [4, p. 152], escrito por Hamilton, que presidiu a seção da *Academy* naquele dia.

na Óptica.[13]

[13]Na verdade, o primeiro a propor o método lagrangiano no estudo de ondas mecânicas propagando-se em sólidos elásticos foi Navier, conforme mencionado na nota de rodapé 1, p. 41, do Capítulo 3 desta tese. A "Mémoire" de Navier sobre as leis de equilíbrio e do movimento de corpos sólidos elásticos [54] e a "Mémoire" de Fresnel sobre a birrefração [52] foram publicadas no mesmo volume, v. 7, do *Mémoires de l'Académie des Sciences*. MacCullagh com certeza teve acesso a este volume e, se for relevante insistir em algum tipo de referência externa para o uso do método lagrangiano no "Essay", não haveria a necessidade de outra que não fosse o próprio Navier.

Capítulo 5

Debates a respeito de MacCullagh na segunda metade do século XIX

Como visto ao longo do capítulo anterior, o sucesso de MacCullagh em explicar os experimentos de reflexão e refração da luz em meios comuns e em cristais com polarização fixa (polarização linear) é inegável; mas a dinâmica desenvolvida por ele no "Essay" foi muito debatida por seus contemporâneos e dividiu opiniões, sobretudo no que tange aos principais problemas da teoria ondulatória da época, apresentados nas pp. 7 e 26 do Capítulo 2 e na p. 39 do Capítulo 3, isto é: i) a determinação da direção da oscilação transversal da luz, ii) a questão colocada pela ausência de efeitos atribuídos a vibrações longitudinais nos fenômenos ópticos e iii) as dúvidas sobre a densidade do éter. Uma boa síntese da natureza dessas discussões, em especial em relação aos dois primeiros problemas, é oferecida por William Macquorn Rankine (1820–1872) em seu "General view of an oscillatory theory of light" [92], de 1853, como se verá a seguir.

Segundo Rankine, a incompressibilidade do éter proposta por Fresnel (p. 40 do Capítulo 3) seria incapaz de responder a uma das mais importantes críticas de Newton (Seção 2.2, p. 15) contra a teoria ondulatória da luz [92, p. 404]:

> [. . .] A fim de explicar a transmissão desse tipo de vibrações transversais [da luz], supõe-se [até o momento] que o meio luminífero possua uma espécie de elasticidade que resiste à distorção de suas partes, como aquela presente em um sólido elástico; e a fim de explicar o não aparecimento, em casos ordinários, de efeitos que podem ser atribuídos a vibrações longitudinais, foi necessário supor, ainda, que este meio resiste à compressão com uma [segunda espécie de] elasticidade imensamente maior do que aquela com a qual resiste à distorção; a última espécie de elasticidade sendo, no entanto, suficientemente grande para transmitir um dos mais poderosos tipos de energia física através do espaço interestelar com uma velocidade apreciável em comparação com a dos planetas mais rápidos do nosso sistema [. . .]
>
> Parece impossível reconciliar essas suposições com o fato de que o meio luminífero no espaço interestelar não oferece resistência sensível ao movimento dos corpos celestiais.

Em seguida, Rankine ressalta que o modelo matemático de elasticidade rotacional de MacCullagh é um passo importante rumo à solução do problema colocado pelas vibrações longitudinais [92, p. 404]:

> Um passo rumo à solução desta dificuldade foi dado pelo sr. MacCullagh. As equações que ele usou para expressar as leis da propagação da luz, quando interpretadas fisicamente, denotam a condição de um meio cujas moléculas tendem a se ordenar em linhas retas [paralelas entre si] e, quando perturbadas, a retornar a essas linhas com uma força que depende da curvatura das linhas da qual foram movidas [elasticidade rotacional]. Porém, mesmo esta hipótese requer a suposição de que a elasticidade do meio luminífero para resistir à compressão é imensamente maior do que a elasticidade que transmite vibrações transversais.
>
> A dificuldade que acabamos de citar surge de uma comparação entre a hipótese das vibrações transversais e os fenômenos observados no mundo. [Isto é, a comparação entre o éter e os sólidos elásticos convencionais.]

Entretanto, apesar do elogio de Rankine a MacCullagh, Rankine faz alusão a novas e, em suas palavras, "cruciais" evidências experimentais (obtidas no final da década de 1840) que pareciam indicar que as oscilações transversais da luz deveriam ser perpendiculares àquelas propostas por MacCullagh, em concordância com Fresnel [92, p. 405], a saber: os experimentos conduzidos por Jules Célestin Jamin (1818–1886) sobre a interferência da luz polarizada refletida na superfície de materiais diversos (inclusive metais) [93] e os experimentos de George Gabriel Stokes (1819–1903) sobre a difração da luz que atravessa pequenos orifícios feitos em lâminas muito finas [94]. Essa aparente contradição agravou ainda mais o intricado debate sobre as propriedades ondulatórias da luz e levou um grupo importante de físicos da época, incluindo Stokes, a criticar MacCullagh, sobretudo no que diz respeito à ideia de que o meio luminífero se comportaria como se fosse um sólido elástico. Uma coletânea dessas críticas será apresentada na Seção 5.1. Finalmente, este complicado cenário no qual se encontrava a Óptica do período só pôde ser esclarecido de maneira adequada com o desenvolvimento do Eletromagnetismo, de modo que, na Seção 5.2, será oferecido ao leitor um breve resumo dos esforços de James Clerk Maxwell (1831–1879) em explicar a reflexão e a refração da luz sob um ponto de vista *puramente eletromagnético* (isto é, independente de considerações mecânicas sobre o meio). Também, será apresentada, nesta seção, a crucial interpretação eletromagnética das equações de MacCullagh, obtida por George Francis FitzGerald (1851–1901) no final da década de 1870.

5.1 Críticas à obra de MacCullagh

Stokes era notadamente defensor da ideia de que o éter deveria se comportar como qualquer outro sólido elástico (cujo comportamento dinâmico era bem compreendido na época), e só se manifesta a respeito da dinâmica proposta por MacCullagh em um artigo submetido à *British Association for the Advancement of Science* e publicado em 1863. O artigo em questão, intitulado "Report on double refraction" [95], versa exclusivamente sobre a birrefração em cristais porque Stokes admite que "os materiais para um relatório completo sobre a Óptica Física, que a British Association pediu que eu fizesse, ainda não foram coletados e digeridos" [95, p. 253]. Isto faz com que Stokes ignore o erro de Green na obtenção da lei tangente de Fresnel (Seção 3.2, p. 58) e, é claro, leva-o a negligenciar o modelo completo de MacCullagh para a reflexão e a refração, tanto em cristais, quanto em meios comuns.[1] Mesmo assim, Stokes faz uma dura crítica a MacCullagh, embora *não consiga negar que o tratamento matemático de MacCullagh funcione de fato*, comentando que o "raciocínio de MacCullagh parece ser tão correto que o levou a equações corretas [para a birrefração], embora através de uma forma de V [o potencial] que pode, creio eu, ser demonstrada como inadmissível" [95, nota de rodapé na p. 267]. De maneira semelhante, Stokes conclui [95, p. 279]: "A descoberta de tais leis [matemáticas de MacCullagh] dificilmente deixará de ser uma grande ajuda para o futuro estabelecimento de uma teoria mecânica completa" para os fenômenos ópticos.

Neste contexto, Stokes faz duas críticas principais a MacCullagh. A primeira é relacionada aos tensores obtidos por MacCullagh em 1836, eqs. (4.1), p. 67, e a segunda, à forma do potencial V proposto por ele no "Essay", eq. (4.7), p. 80. Na primeira crítica, Stokes identifica o óbvio, como parece ficar claro na Seção 4.1 desta tese: MacCullagh parte de um "processo de tentativa" e erro [95, p. 268] que envolve uma espécie de "indução matemática" [95, p. 279] para obter uma divergência nula para o deslocamento do éter e, assim, eliminar a onda longitudinal dos cálculos [95, p. 266]. A segunda crítica, porém, não parece, em um primeiro momento, tão "frívola", nas palavras de Howard Stein [97, p. 315], quanto a primeira, pois Stokes considera que o potencial V necessário para explicar a reflexão e a refração da luz é "obscuro" e "envolve uma falácia" [95, p. 266] por levar a "consequências absolutamente divergentes dos princípios da dinâmica" assumidos na teoria de sólidos elásticos [95, p. 268]. Para Stokes, esse potencial rotacional implica, de algum modo, em "tensões tangenciais" (T_{ij}, para $i \neq j$) assimétricas, o que, se o éter se comportasse como um sólido elástico, levaria a uma violação

[1] Em algum momento entre o final de 1860 e o início do ano seguinte, Stokes escreve a Brewster perguntando, ao que parece, se ele poderia lhe enviar dados experimentais precisos para a reflexão em cristais com o objetivo de confirmar ou refutar os cálculos de MacCullagh. Entretanto, infelizmente, essa carta não pôde ser localizada e seu conteúdo só pode ser inferido de maneira indireta, a partir da resposta enviada por Brewster. Como resposta [96, pp. 153-154], Brewster diz que "abandonou" esse assunto nas "mãos"de MacCullagh, não só por "falta de tempo" e de um "bom instrumento", como também porque MacCullagh mandou construir, em Dublim, um "excelente instrumento" para ele com o propósito de investigar o assunto.

do princípio de ação e reação entre as partes que constituem o meio e a uma violação do princípio de conservação de momento angular [95, p. 279]. Contudo, para resolver este problema, bastaria supor que o éter, se existir, *precisaria ser um outro tipo de meio*, seja ele qual for.

Em 1871, por sua vez, John William Strutt (Lord Rayleigh, 1842–1919) [98] propõe um novo argumento contrário ao modelo de MacCullagh, sugerindo que o princípio de constância da densidade do éter na "teoria de MacCullagh e Neumann" (Seção 4.1, item 1, p. 69) deveria levar a ângulos de polarização incompatíveis com os experimento para a luz refletida na interface entre dois meios transparentes [98, p. 93]. Esta conclusão, porém, é causada por um *erro grosseiro* de análise, pois Strutt não leu MacCullagh e só ficou sabendo, mais ou menos, do que tratava as pesquisas desses dois autores de maneira indireta, a partir de uma fonte secundária [98, p. 84]: o *Lectures on the wave-theory of light* [99], publicado por Lloyd em 1856. Neste livro de Óptica básica, Lloyd não apresenta qualquer discussão de origem mecânica para as propriedades da luz e não faz qualquer menção ao "Essay" de MacCullagh, limitando-se a mostrar que, no caso particular da reflexão e da refração em meios comuns, os princípios de MacCullagh, presentes também nos trabalhos de Neumann, implicam em vibrações da luz paralelas ao plano de polarização [99, a partir da p. 29]. Isso leva Strutt inadvertidamente a aplicar este princípio, não às equações, obtidas por MacCullagh, de um meio dotado de elasticidade rotacional, eq. (4.7), mas sim às equações do sólido elástico obtidas por Green, eq. (3.14), p. 55, pois Strutt também acreditava que o éter se comportava como um sólido elástico convencional. Como os termos de superfície nos dois modelos são completamente diferentes, não é difícil compreender o porquê Strutt chega a equações equivocadas e incompatíveis com os experimentos de reflexão da luz [98, p. 93, eq. (19)].

Mesmo assim, William Thomson (Lord Kelvin, 1824–1907) aceita o inaceitável e admite, em princípio, a maneira pela qual Strutt demonstra a inconsistência do modelo de MacCullagh, pois, ao que parece, o último crítico de MacCullagh a realmente fazer uma leitura prévia de alguma de suas obras foi Stokes. Em suas *Baltimore lectures and modern theoretical physics* [100], de 1884, Thomson diz [100, p. 169]:

> A literatura matemática tem sido carregada com muitos escritos ruins sobre esse assunto [a reflexão e a refração da luz]. Um grande número de investigações e afirmações chamadas teorias foram feitas, nas quais uma parte do trabalho dinâmico é realizada; e, então, uma condição é introduzida arbitrariamente; e isso é chamado de teoria de Cauchy, e a outra é chamada de teoria de Neumann e a outra é chamada de teoria de MacCullagh. Talvez eu tenha cometido injustiça nesta afirmação aos possuidores desses três nomes, que fizeram grandes coisas. Eu me apoio, no entanto, para fazer estas declarações na leitura de algumas linhas do artigo de Lord Rayleigh [William Strutt] sobre a reflexão da luz na matéria transparente [...]

Por conta disto, Thomson dispara [100, p. 180]:

> [...] ainda assim as pessoas têm trabalhado nisso [no problema das condições de continuidade na superfície de separação entre os meios] por 50 anos e o deixaram em uma condição muito tristemente confusa, com exceção dos claros, acurados e muito compreensíveis artigos de Green e Rayleigh. O que introduziu [contudo] a dificuldade [...] é a onda de pressão [onda longitudinal]. A onda de pressão, de fato, tem sido a *bète noir* [besta negra] desse problema. Não sei como Cauchy trata o animal. De alguma maneira, ele introduz termos falaciosos envolvendo consumo de energia. MacCullagh e Neumann [por outro lado] mataram o animal com maus tratos...

Assim, Thomson arremata, fazendo referência à solução equivocada de Strutt, sem saber que ela era absurda [100, p. 204]:

> [...] MacCullagh é um homem muito inteligente e capaz, mas ignorou de maneira vital a dinâmica nas partes mais peculiares de seu trabalho...

5.2 O resgate do trabalho de MacCullagh no Eletromagnetismo

No início da década de 1860, Maxwell possivelmente não conhecia em detalhes os trabalhos de MacCullagh, mas faz uma breve menção à "teoria de MacCullagh e Neumann" em sua série de publicações intituladas "On physical lines of force" [101, 102, 103, 104, 105]. Nesta obra, Maxwell obtém as equações do Eletromagnetismo supondo a existência de um meio com elasticidade rotacional capaz de transmitir perturbações eletromagnéticas à distância e apresenta uma primeira tentativa, de sua parte, de estabelecer uma conexão teórica entre luz, eletricidade e magnetismo. Contudo, o meio proposto por Maxwell, embora fosse um meio rotacional, *não era idêntico ao meio de MacCullagh*, ou melhor, não era idêntico ao meio necessário para realizar a dinâmica apresentada por MacCullagh no "Essay" (afinal, MacCullagh, em si, nada disse sobre o éter, como mostra a Seção 4.2, p. 78). As diferenças são complicadas de explicar nesta tese e levam a discussões intermináveis, mas a diferença crucial entre eles é que, para Maxwell, as vibrações (elétricas) são perpendiculares ao plano de polarização [104, p. 24], enquanto que, para MacCullagh, as vibrações estão no plano de polarização. Neste panorama, a questão colocada, na qual MacCullagh é mencionado sem qualquer referência bibliográfica, não se refere à iniciativa de explicar a reflexão e a refração da luz e nem se refere às propriedades rotacionais do meio (que Maxwell obteve de maneira independente), mas, de algum modo, conecta-se ao problema da densidade, pois a densidade do meio luminífero deveria ser ou proporcional ao quadrado do índice de refração, como defendera Fresnel, ou constante, como defendera MacCullagh e Neumann [105, p. 94].

Em maio de 1864, Maxwell finalmente manifesta interesse na reflexão e na refração da luz e escreve a Stokes pedindo por algum "bom artigo" sobre o assunto. Em carta, Maxwell diz [106, p. 24]:

> Não estou inclinado e não acho que sou capaz de fazer a teoria dinâmica de reflexão e refração sob diferentes hipóteses: e a menos que eu veja algum bem em erguê-la, prefiro colher o resultado de homens que se aprofundaram no assunto.

Stokes, então, envia a Maxwell um artigo de segunda mão, de Jamin [107], sobre as diferenças entre os modelos de reflexão de Fresnel (Seção 2.4.1) e de MacCullagh e Neumann (Seção 4.1.2). Porém, o artigo de Jamin não apresentava qualquer discussão dinâmica sobre o tema e, principalmente, *não apresentava as condições de contorno na superfície* identificadas por MacCullagh no "Essay", eqs. (4.11) e (4.12), p. 84, que são muito claras. Maxwell, possivelmente por este motivo, revela que não é capaz de se "satisfazer sobre as condições a serem cumpridas na superfície" entre os meios, "exceto, é claro, a condição de conservação de energia", demonstrando um certo incômodo com a insistência de Jamin em considerar "a igualdade do movimento, tanto horizontal, quanto vertical, nos dois meios" [106, p. 25].[2]

Mais uma vez, em 15 de outubro de 1864, Maxwell pede a ajuda de Stokes [106, p. 25]:

> Você [já] escreveu qualquer coisa sobre as teorias rivais da reflexão? ou você pode me dizer alguma coisa com a qual concorda ou eminentemente discorda a respeito desse assunto? Acho que você me disse uma vez que o assunto era difícil [até mesmo] para os mais habilidosos em ondulações.

A resposta de Stokes não é conhecida, mas é notório que ele foi um grande crítico a MacCullagh, como mostra a seção anterior. De qualquer maneira, doze dias depois, em 27 de outubro, Maxwell submete um novo artigo sobre o Eletromagnetismo, intitulado "A dynamical theory of the electromagnetic field" [109], em que se limita a discutir o problema da determinação do plano de oscilação da onda, em diferentes hipóteses, *apenas na birrefração em cristais*. As hipóteses propostas são [109, p. 503]: i) constantes elétricas iguais em todas as direções e constantes magnéticas diferentes e ii) constantes magnéticas iguais em todas as direções e constantes elétricas diferentes.[3] Na primeira hipótese, o "deslocamento elétrico" $\vec{D}$ é perpendicular ao plano de polarização e a "força magnética" $\vec{H}$ é paralela ao plano. Na segunda hipótese, o $\vec{H}$ é perpendicular ao plano de polarização e $\vec{D}$ é paralelo ao plano.

[2]Para saber como Maxwell tenta fazer as cálculos para obter a reflexão da luz, veja "Notes on the explanation of the reflection and refraction of light by the electromagnetic theory of light" [108, pp. 182–185]. Maxwell, de fato, não chega, nem mesmo, a uma demonstração eletromagnética para as leis seno e tangente de Fresnel.

[3]No "On physical lines", Maxwell obtém a velocidade de propagação dos distúrbios eletromagnéticos transversais (isto é, das ondas eletromagnéticas) em termos de duas constantes [104, p. 22, eq. (135)]: i) o "coeficiente que depende da natureza" do meio, de caráter elétrico, e ii) o "poder indutivo magnético" do meio. Segundo ele, estas constantes são respectivamente relacionados à elasticidade e à densidade em um formalismo de sólidos elásticos [104, pp. 18 e 22, eqs. (108) e (133)]. No "A dynamical theory", porém, Maxwell faz algumas modificações nestas constantes elétricas e magnéticas [109, pp. 498 e 500, eqs. (69) e (78)], embora elas ainda não sejam exatamente iguais à permissividade elétrica e a permeabilidade magnética do meio no Eletromagnetismo atual.

Neste mesmo artigo, Maxwell apresenta explicitamente, pela primeira vez, as equações de onda puramente transversais das pertubações eletromagnéticas [109, pp. 498 e 500, eqs. (69) e (78)] e, ao contrário do que fez em "On physical lines", finalmente abandona qualquer tentativa de caracterizar o meio, mantendo a formulação matemática da teoria sem se comprometer em dar-lhe qualquer explicação mecânica [109, p. 487]:

> Em uma ocasião anterior [o "On physical lines"], tentei descrever um tipo particular de movimento e um tipo particular de tensão, arranjados de modo a explicar os fenômenos [eletromagnéticos]. No presente artigo, [porém,] evito qualquer hipótese desse tipo; e ao usar palavras como momento elétrico e elasticidade elétrica em referência aos fenômenos conhecidos de indução de correntes e polarização de dielétricos, desejo apenas direcionar a mente do leitor para fenômenos mecânicos que o ajudarão a entender os fenômenos elétricos. [Ou seja,] Todos esses termos, no presente artigo, devem ser considerados como ilustrativos, não explicativos.

Após a correspondência com Stokes, Maxwell aparentemente permanece mais de uma década sem tocar no assunto da reflexão e, no início de 1879, recebe a tarefa de revisar, segundo Darrigol [4, p. 158], um artigo pioneiro de FitzGerald, que é o primeiro a chamar a atenção para o significado puramente eletromagnético da dinâmica obtida por MacCullagh no "Essay". No artigo, intitulado "On the electromagnetic theory of the reflection and refraction of light" [110], FitzGerald diz que as equações de MacCullagh simplificam "maravilhosamente" o "extremamente complicado problema" da reflexão e da refração cristalina [110, p. 699] e pode ser facilmente compreendido se:

1. O meio for "isotrópico" no que diz respeito à "indução magnética" [110, p. 691], isto é, se a permeabilidade magnética do meio for considerada constante;[4]

[4] Esta é a solução para o *problema da densidade*, pois a explicação eletromagnética derradeira para este problema é dada pelo próprio Maxwell, em seu livro, o *A treatise on Electricity and Magnetism* [111], de 1873. No *Treatise*, Maxwell relaciona a elasticidade do meio ao inverso de sua "capacidade dielétrica" (ele não usa o termo permissividade elétrica), enquanto que a densidade do meio se relaciona à sua "permeabilidade", ou "capacidade magnética" [111, p. 385]. Em seguida, Maxwell identifica, possivelmente por razões experimentais, que não "existem meios transparentes cuja capacidade magnética se difere daquela do ar mais do que por uma fração muito pequena" [111, p. 388]. Assim,

2. O deslocamento transversal $\vec{e}$ e seu rotacional forem, no S.I. [110, pp. 692–693, eqs. sem número]:

$$\vec{e} = \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}, \tag{5.1a}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{e} = \vec{D}, \tag{5.1b}$$

onde $\vec{D}$ é o "deslocamento elétrico" e $\vec{H}$ é a "força magnética" do Eletromagnetismo de Maxwell.

Em geral, as considerações de Maxwell sobre o artigo de FitzGerald são bastante positivas, embora Maxwell avalie que FitzGerald "deveria tornar mais explícitas as diversas afirmações de seus pressupostos" [106, p. 40], sobretudo em relação às condições de contorno na superfície de separação entre os meios. Na sequência, Maxwell comenta que o mesmo tema foi resolvido pelo jovem Hendrik Antoon Lorentz (1853–1928), em sua tese de doutorado [112], o qual, segundo Maxwell, apresenta as condições de contorno na superfície "um pouco mais explicitamente" [106, p. 41]. Entretanto, Lorentz, ao que tudo indica, não conhecia MacCullagh naquele momento (ele cita apenas Neumann) e desenvolve uma explicação puramente eletromagnética para a reflexão em meios comuns de maneira independente, argumentando que as componentes do "deslocamento elétrico", $\vec{D}$, e da "força magnética", $\vec{H}$, deveriam ser contínuas na superfície [112, p. 84, eqs. (9) e (10)]. Mais ainda, como a divergência de $\vec{H}$ é nula na teoria de Maxwell, a componente de $\vec{H}$ perpendicular à superfície também deveria ser contínua [112, p. 84, eq. (12)]. Oras, estas nada mais são que as condições de contorno de MacCullagh, eqs. (4.11) e (4.12), p. 84, quando interpretadas pelas eqs. (5.1) de FitzGerald.

---

a hipótese de constância da densidade do éter usada por MacCullagh é correta porque ela se refere ao fato de que a velocidade de propagação da luz, ao passar de um meio a outro, não depende da permeabilidade magnética do meio, pelo menos em uma primeira aproximação.

Capítulo 6

Considerações Finais

A Óptica do século XIX possuía diversos desafios. A teoria ondulatória, por exemplo, embora despontasse, na primeira metade do século, como a melhor explicação mecânica para os fenômenos ópticos, enfrentou dificuldades para explicar a existência de um éter capaz de propagar apenas ondas transversais. Ademais, como a reflexão e a refração da luz polarizada dominou parte significativa das discussões do período, três problemas adicionais destacaram-se nos debates: i) determinar a direção das oscilações transversais das ondas, ii) compreender a ausência de vibrações longitudinais na superfície entre os meios e iii) compreender como a densidade do éter varia, se é que varia, quando penetra a matéria ponderável. Entretanto, soluções diferentes, e até mesmo conflitantes, foram propostas para estes problemas e MacCullagh foi quem melhor soube resolvê-los, pois removeu, de maneira adequada, as vibrações longitudinais da teoria desde o início, obtendo equações de onda sem o termo de divergência. Poucos anos depois, MacCullagh obteve as condições de contorno corretas para a reflexão e a refração em cristais e em meios comuns usando o método lagrangiano, que dispensa considerações sobre as interações partícula a partícula do meio e se concentra nas propriedades de um potencial que produz o efeito físico esperado.

Historiadores da Ciência reconhecem a importância de MacCullagh para a Óptica (pp. 1 e 2 na Introdução), apesar de MacCullagh não estar "associado a nenhuma descoberta importante" e ser "desconhecido da maioria dos físicos atuais", segundo Darrigol [4, p. 133]. Stein, por sua vez, apresenta a questão de maneira um pouco diferente [97, p. 315]:

> Em suma, MacCullagh descobriu um sistema de suposições a partir do qual as leis da óptica seguem um raciocínio dinâmico [clássico]; mas essas suposições pareciam [...] irrealizáveis por qualquer sistema dinâmico material. Fitzgerald, entretanto, descobriu que o campo eletromagnético de Maxwell (mais exatamente, o campo 'livre') é um sistema que satisfaz exatamente as suposições de MacCullagh.

Neste cenário, a associação com as equações do eletromagnetismo só foi possível devido ao modo como MacCullagh formulou o problema. Ele não fez suposição sobre a constituição do meio, mas se concentrou nas propriedades de um potencial que eliminasse as vibrações transversais. A suposição física imposta por MacCullagh para obter o potencial elástico é que a onda causa um cisalhamento das faces de um paralelepípedo infinitesimal do éter que, basicamente, dá origem a rotações. Esta mesma hipótese de meio rotacional foi posteriormente feita, de maneira independente, por Maxwell, em "On physical lines of force", para descrever a propagação da luz em dielétricos, de modo que a passagem das ondas causam um cisalhamento infinitesimal dos "vórtices" que formam o éter de Maxwell [113, pp. 3 e 4].

Entretanto, MacCullagh foi duramente criticado por pesquisadores renomados da segunda metade do século XIX, como Stokes, Strutt (Lord Rayleigh) e Thomson (Lord Kelvin), por ir contra a ideia de que o éter seria um meio com as mesmas propriedades de um sólido elástico. FitzGerald, em certa medida, responde a essas críticas, resgatando a "elasticidade rotacional" no contexto do eletromagnetismo, como observado por Stein. A partir da década de 1890, Joseph Larmor (1857–1942) tentou reabilitar MacCullagh como um nome importante da Óptica e, em 1928, recorda-se do impacto dessas críticas, afirmando que o "trabalho de MacCullagh caiu em quase completo descrédito" no final do século XIX [114, nota de rodapé na p. 415]. Para Larmor, a crítica de Stokes a MacCullagh, em particular, foi bastante "destrutiva" [114, nota de rodapé na p. 415] e as pesquisas de MacCullagh perderam-se nos debates da Óptica da primeira metade do século XIX, não contribuindo diretamente para o desenvolvimento do Eletromagnetismo.

Referências primárias

[6] G. Galilei, *Discorsi e dimostrazioni Matematiche, intorno à due nuove scienze, Attenenti alla Mecanica & i Movimenti Locali* (Apresso gli Elsevirii, Leida, 1638) (ver pp. 5, 6).

[8] R. Hooke, *Micrographia, or some Physiological Descriptions of minute bodies made by magnifying glasses. With observations and inquiries thereupon* (John Martyn e James Allestry, printers to the Royal Society, London, 1665) (ver pp. 8, 14, 17).

[9] C. Huygens, *Traité de la lumière, Où font expliquées les causes de ce qui luy arrive dans la reflexion, & dans la refraction. Et particulierement dans l'estrange refraction du cristal d'Islande* (Pierre vander Aa, Marchand Libraire, Leide, 1690) (ver pp. 8–12).

[11] F. M. Grimaldi, *Physico-mathesis de lumine, coloribus, et iride, Allisque sequenti pagina indicatis* (Typographia Heredis Victorii Benatii, Bononiæ, 1665) (ver p. 8).

[12] O. C. Rømer, "Démonstration touchant le mouvement de la lumière trouvé par M. Roemer de l'Académie des sciences", Le Journal des Sçavans **1676**, 233–236 (1676) (ver p. 9).

[13] R. Bartholin, *Experimenta crystalli islandici disdiaclastici quibus mira & insolita refractio detegitur* (Danielis Paulli Reg. Bibl., Hafniæ, 1669) (ver p. 11).

[14] I. Newton, "New Theory about Light and Colors", Philosophical Transactions of the Royal Society **6**, 3075–3087 (1672) (ver p. 13).

[16] I. Newton, *Opticks, or, a treatise of the reflexions, refractions, inflexions and colours of light*, 1ª ed. (Sam. Smith e Benj. Walford, London, 1704) (ver pp. 13, 14).

[17] I. Newton, *Opticks, or, a treatise of the reflexions, refractions, inflexions and colours of light*, 2ª ed. (W. e J. Innys, London, 1718) (ver pp. 14, 15).

[18] J. Bradley, “A letter from the Reverend Mr. James Bradley Savilian Professor of Astronomy at Oxford, and F. R. S. to Dr. Edmond Halley Astronom. Reg. &c. giving an account of a new discovered motion of the fix’d stars”, Philosophical Transactions of the Royal Society **35**, 637–661 (1728) (ver p. 16).

[19] P. L. M. de Maupertuis, “Accord de différentes loix de la nature qui avoient jusqu’ici paru incompatibles”, em Histoire de l’Académie Royale des Sciences, Avec les mémoires de mathématique & de physique, pour la même année, vol. Anée DCCXLIV. (1748), pp. 417–426 (ver p. 16).

[20] P. S. de Laplace, *Traité de Mécanique Céleste*, vol. 4 (Courcier, Paris, 1805) (ver p. 17).

[21] P. S. de Laplace, “Sur le mouvement de la lumière dans les milieux diaphanes”, Mémoires de physique et de chimie de la Société d’Arcueil **2**, 111–142 (1809) (ver p. 17).

[22] E. L. Malus, “Sur une propriété de la lumière réfléchie”, Mémoires de physique et de chimie de la Société d’Arcueil **2**, 143–158 (1809) (ver p. 17).

[23] E. L. Malus, “Sur une propriété de la lumière réfléchie par les corps diaphanes”, Nouveau Bulletin des Sciences **1**, 266–269 (1809) (ver p. 17).

[25] E. L. Malus, *Théorie la double réfraction de la lumière dans les substances cristallisées, Mémoire couronné par l’Institut, dans la séance publique du 2 janvier 1810* (Baudouin, Paris, 1810) (ver p. 18).

[27] M. Faraday, “Experimental researches in electricity.—Nineteenth series”, Philosophical Transactions of the Royal Society **136**, 1–20 (1846) (ver p. 18).

[28] J. B. Biot, *Précis élémentaire de physique expérimentale*, 2ª ed., vol. 2 (Libraire Deterville, Paris, 1821) (ver p. 18).

[29] J. B. Biot, “Sur de nouveaux rapports qui existent entre la réflexion et la polarisation de la lumière des corps cristallisés”, em *Mémoires de la classe des sciences mathématiques et physiques de l’Institut National de France*, Année 1811 (Chez Firmin Didot, Paris, 1812), pp. 135–280 (ver pp. 18, 19).

[30] D. F. J. Arago, "Sur une modification remarquable qu'éprouvent les rayons lumineux dans leur passage à travers certains corps diaphanes, et sur quelques autres nouveaux phénomènes d'optique", em *Mémoires de la classe des sciences mathématiques et physiques de l'Institut National de France*, Année 1811 (Firmin Didot, Paris, 1812), pp. 93–134 (ver pp. 19, 25, 26).

[31] J. B. Biot, "Phénomènes de polarisation successive, observés dans les fluides homogènes", Bulletin des Sciences par la Société Philomatique de Paris, 190–192 (1815) (ver pp. 19, 26).

[33] D. Brewster, "On the laws which regulate the polarisation of light by reflexion from transparent bodies", Philosophical Transactions of the Royal Society **105**, 125–159 (1815) (ver p. 20).

[34] L. Euler, "Nova theoria lucis & colorum", em *Opuscula varii argumenti* (Haude & Speneri, Berolini, 1746), pp. 169–244 (ver pp. 22, 23).

[35] T. Young, "Outlines of experiments and inquiries respecting sound and light", Philosophical Transactions of the Royal Society **90**, 106–150 (1800) (ver p. 23).

[36] T. Young, "The Bakerian Lecture, Experiments and calculations relative to physical optics", Philosophical Transactions of the Royal Society **94**, 1–16 (1804) (ver p. 23).

[38] A. J. Fresnel, "Mémoire sur la double réfraction", Mémoires de l'Académie Royale des Sciences de l'Institut de France **5**, 339–475 (1826) (ver p. 24).

[41] A. J. Fresnel, "Sur l'influence du mouvement terrestre dans quelques phénomènes d'optique", Annales de Chimie et de Physique **9**, 57–66 (1818) (ver p. 24).

[42] A. H. L. Fizeau, "Sur les hypothèses relatives à l'éther lumineux, et sur une expérience qui parait démontrer que le mouvement des corps change la vitesse avec laquelle la lumière se propage dans leur intérieur", Comptes Rendues de l'Académie des Sciences **33**, 349–355 (1851) (ver p. 25).

[43] A. A. Michelson e E. W. Morley, "Influence of motion of the medium on the velocity of light", American Journal of Science, 3ª sér. **31**, 377–385 (1886) (ver p. 25).

[45] A. J. Fresnel, "IIe Note sur la Coloration des lames cristallisées", Annales de Chimie et de Physique **17**, 267–296 (1821) (ver pp. 25, 26).

[46] A. J. Fresnel, "De la Lumière", em *Supplément à la traduction française de la cinquième édition du Système de Chimie par Th. Thomson*, ed. por J. Riffault (Libraire Méquignon-Marvis, Paris, 1822), pp. 1–137, 535–539 (ver pp. 25, 26).

[47] J. B. L. Foucault, "Sur les vitesses relatives de la lumière dans l'air et dans l'eau", Doutorado em Ciências Físicas (Faculté des Sciences de Paris, Paris, abr. de 1853) (ver p. 27).

[48] J. V. Boussinesq, "Théorie nouvelle des ondes lumineuses", Journal de Mathématiques Pures et Appliquées **13**, 323–339 (1868) (ver p. 27).

[49] J. V. Boussinesq, "Théorie nouvelle des ondes lumineuses", Journal de Mathématiques Pures et Appliquées **13**, 425–438 (1868) (ver p. 27).

[50] W. H. Wollaston, "On the oblique refraction of Iceland crystal", Philosophical Transactions of the Royal Society **92**, 381–386 (1802) (ver p. 27).

[51] D. Brewster, "On the laws of polarisation and double refraction in regularly crystallized bodies", Philosophical Transactions of the Royal Society **108**, 199–273 (1818) (ver p. 28).

[52] A. J. Fresnel, "Mémoire sur la double réfraction", Mémoires de l'Académie Royale des Sciences de l'Institut de France **7**, 45–176 (1827) (ver pp. 28–33, 40, 87).

[53] J. B. Biot, "De l'élasticité", em *Traité de physique expérimentale et mathématique*, vol. I (Libraire Deterville, Paris, 1816) cap. XXIII, pp. 466–528 (ver p. 31).

[54] L. M. H. Navier, "Mémoire sur les lois de l'équilibre et du mouvement des corps solides élastiques", Mémoires de l'Académie Royale des Sciences de l'Institut de France **7**, 375–393 (1827) (ver pp. 32, 41, 45, 87).

[56] A. J. Fresnel, "Mémoire sur la loi des modifications que la réflexion imprime à la lumière polarisée", Mémoires de l'Académie Royale des Sciences de l'Institut de France **11**, 393–433 (1832) (ver pp. 34–37).

[57] A. L. Cauchy, "Recherches sur l'équilibre et le mouvement intérieur des corps solides ou fluides, élastiques ou non élastiques", Bulletin des Sciences, par la Société Philomathique de Paris, 9–13 (1830) (ver p. 42).

[58] A. L. Cauchy, *Exercices de Mathématiques*, vol. Seconde Année (Chez de Bure Frères, Paris, 1827) (ver p. 42).

[59] A. L. Cauchy, *Exercices de Mathématiques*, vol. Troisième année (Chez de Bure Frères, Paris, 1828) (ver pp. 42–45).

[60] S. D. Poisson, "Mémoire sur l'équilibre et le mouvement des corps élastiques", Mémoires de l'Académie Royale des Sciences de l'Institut de France **8**, 357–570, 623–627 (1829) (ver p. 45).

[61] A. L. Cauchy, "Mémoire sur la théorie de la lumière", Mémoires de l'Académie Royale des Sciences de l'Institut de France **10**, 91–110 (1831) (ver pp. 46, 47).

[62] F. E. Neumann, "Theorie der doppelten Strahlenbrechung, abgeleitet aus den Gleichung der Mechanik", Annalen der Physik **101**, 418–454 (1832) (ver pp. 48, 66, 73).

[63] A. L. Cauchy, "Sur la réfraction et la réflexion de la lumière", Bulletin des Sciences Mathématiques, Physiques et Chimiques **14**, 6–10 (1830) (ver pp. 49–52).

[64] A. L. Cauchy, *Nouveaux Exercices de Mathématiques* (Chez Jean Spuniry, Prague, 1835) (ver pp. 52, 53).

[65] A. L. Cauchy, "Notes de M. Cauchy sur l'optique, adressées à M. Libri", Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences **2**, 341–349 (1836) (ver p. 53).

[66] A. L. Cauchy, "Mémoire sur la polarisation rectiligne et la double réfraction", Mémoires de l'Académie Royale des Sciences de l'Institut de France **18**, 153–216 (1842) (ver p. 53).

[67] W. Herschel, "Experiments on the refrangibility of the invisible rays of the sun", Philosophical Transactions of the Royal Society **90**, 284–292 (1800) (ver p. 54).

[68] G. Green, "On the laws of reflexion and refraction of light at the common surface of two non-crystallized media", Transactions of the Cambridge Philosophical Society **7**, 1–24 (1842) (ver pp. 54–59, 86).

[72] H. Lloyd, "Report on the progress and present state of Physical Optics", em Report of the fourth meeting of the British Association for the Advancement of Science (1835), pp. 295–413 (ver p. 62).

[73] J. MacCullagh, "Geometrical propositions applied to the wave theory of light", Transactions of the Royal Irish Academy **17**, 241–263 (1831) (ver p. 62).

[74] W. R. Hamilton, "Third supplement to an essay on the theory of systems of rays", Transactions of the Royal Irish Academy **17**, v–x, 1–144 (1830) (ver p. 62).

[75] H. Lloyd, "On the phænomena presented by light in its passage along the axes of biaxal crystals", The Philosophical Magazine, 3ª sér. **2**, 112–120 (1833) (ver p. 62).

[76] H. Lloyd, "Further experiments on the phænomena presented by light in its passage along the axes of biaxal crystals", The Philosophical Magazine, 3ª sér. **2**, 207–210 (1833) (ver p. 62).

[77] J. MacCullagh, "Note on the subject of conical refraction", The Philosophical Magazine, 3ª sér. **3**, 114–115 (1833) (ver p. 62).

[78] J. MacCullagh, "Additional note on the subject of conical refraction", The Philosophical Magazine, 3ª sér. **3**, 197–197 (1833) (ver p. 63).

[79] J. MacCullagh, "On the subject of total reflexion", em Proceedings of the Royal Irish Academy, vol. 3 (1847), pp. 49–51 (ver p. 63).

[81] W. R. Hamilton, "Sonnet on the death of Professor MacCullagh", Dublin University Magazine **30**, 705 (1847) (ver p. 64).

[82] D. Brewster, "On the action of crystallized surfaces upon light", Philosophical Transactions of the Royal Society **109**, 145–160 (1819) (ver pp. 64, 65).

[83] J. MacCullagh, "A short account of some recent investigations concerning the laws of reflexion and refraction at the surface of crystals", em Report of the fifth meeting of the British Association for the Advancement of Science (1836), pp. 7–8 (ver pp. 65, 66).

[84] J. MacCullagh, "On the laws of reflexion from crystallized surfaces", The Philosophical Magazine, 3ª sér. **8**, 103–108 (1836) (ver pp. 66–69).

[85] A. L. F. W. Seebeck, "Bemerkungen über die Polarisirung des Lichtes durch Spiegelung, besonders an doppeltbrechenden Körpern, nebst einem Auszuge aus Hrn. Mac-Cullagh's Abhandlung über denselben Gegenstand", Annalen der Physik **114**, 276–282 (1836) (ver pp. 69, 76).

[86] J. MacCullagh, "On the laws of crystalline reflexion", The Philosophical Magazine, 3ª sér. **10**, 42–45 (1837) (ver pp. 69, 70).

[87] J. MacCullagh, "On the Laws of Crystalline Reflexion and Refraction", Transactions of the Royal Irish Academy **18**, 31–74 (1839) (ver pp. 70–72, 75, 76).

[88] F. E. Neumann, “Theoretische Untersuchung der Gesetze, nach welchem das Licht an der Grenze zweier vollkommen durchsichtigen Medien reflectirt und gebrochen will”, Mathematische Abhandlungen der Königlichen Akademie der Wissenschaften zu Berlin. Aus dem Jahre 1835, 1–160 (1837) (ver pp. 73–75).

[89] W. R. Hamilton, “November 30”, em Proceedings of the Royal Irish Academy, vol. 1 (1848), pp. 229–234 (ver p. 76).

[90] J. MacCullagh, “An essay towards a dynamical theory of crystalline reflexion and refraction”, Transactions of the Royal Irish Academy **21**, 17–50 (1846) (ver pp. 77–85).

[91] Royal Irish Academy, “Proceedings of Learned Societies”, The Philosophical Magazine, 3ª sér. **16**, 224–235 (1840) (ver p. 86).

[92] W. J. M. Rankine, “General view of an oscillatory theory of light”, The Philosophical Magazine, 4ª sér. **6**, 403–414 (1853) (ver pp. 89, 90).

[93] J. C. Jamin, “Mémoire sur la réflexion a la surface des corps transparents”, Annales de Chimie et de Physique, 3ª sér. **29**, 263–304 (1850) (ver p. 91).

[94] G. G. Stokes, “On the dynamical theory of diffraction”, Transactions of the Cambridge Philosophical Society **9**, 1–62 (1856) (ver p. 91).

[95] G. G. Stokes, “Report on double refraction”, em Report of the thirty-second meeting of the British Association for the advancement of Science, Held at Cambridge in october 1862 (1863), pp. 253–282 (ver pp. 91–93).

[98] J. W. Strutt, “On the reflection of light from transparent matter”, The Philosophical Magazine, 4ª sér. **42**, 81–97 (1871) (ver p. 93).

[99] H. Lloyd, *Lectures on the wave-theory of light* (Andrew Milliken, Dublin, 1856) (ver p. 93).

[101] J. C. Maxwell, “On physical lines of force, Part I.—The Theory of Molecular Vortices applied to Magnetic Phenomena”, The Philosophical Magazine, 4ª sér. **21**, 161–175 (1861) (ver pp. 94, 100).

[102] J. C. Maxwell, “On physical lines of force, Part II.—The Theory of Molecular Vortices applied to Electric Currents”, The Philosophical Magazine, 4ª sér. **21**, 281–291 (1861) (ver p. 94).

[103] J. C. Maxwell, "On physical lines of force, Part II.—The Theory of Molecular Vortices applied to Electric Currents [Concluded from p. 291]", The Philosophical Magazine, 4ª sér. **21**, 338–348 (1861) (ver p. 94).

[104] J. C. Maxwell, "On physical lines of force, Part III.—The Theory of Molecular Vortices applied to Statical Electricity", The Philosophical Magazine, 4ª sér. **23**, 12–24 (1862) (ver pp. 94–96).

[105] J. C. Maxwell, "On physical lines of force, Part IV.—The Theory of Molecular Vortices applied to the Action of Magnetism ou Polarized Light", The Philosophical Magazine, 4ª sér. **23**, 85–95 (1862) (ver pp. 94, 95).

[107] J. C. Jamin, "Note sur la théorie de la réflexion et de la réfraction", Annales de Chimie et de Physique, 3ª sér. **59**, 413–426 (1860) (ver p. 95).

[109] J. C. Maxwell, "A dynamical theory of the electromagnetic field", Philosophical Transactions of the Royal Society **155**, 459–512 (1865) (ver pp. 96, 97).

[110] G. F. FitzGerald, "On the electromagnetic theory of the reflection and refraction of light", Philosophical Transactions of the Royal Society **171**, 691–711 (1880) (ver pp. 97, 98).

[111] J. C. Maxwell, *A treatise on Electricity and Magnetism*, vol. II (The Clarendon Press, Oxford, 1873) (ver p. 97).

[112] H. A. Lorentz, "Over de theorie der terugkaatsing en breking van het licht", Doutorado em Matemática e Física (Hogeschool Leiden, Arnhem, dez. de 1875) (ver p. 98).

[114] J. Larmor, *Mathematical and physical papers*, vol. 1 (Cambridge University Press, Cambridge, 1928) (ver p. 100).

Referências secundárias

[1] E. T. Whittaker, *A History of the Theories of Aether and Electricity, From the age of Descartes to the close of the nineteenth century* (Longmans, Green, Co. e Figgis, & Co., Ltd., London, New York, Bombay, Calcutta e Dublin, 1910) (ver pp. 1, 79).

[2] E. T. Whittaker, *A History of the Theories of Aether and Electricity, The classical theories*, Ed. Revista e Extendida, vol. 1 (Thomas Nelson e Sons Ltd, London, Edinburgh, Paris, Melbourne, Toronto, New York, 1951) (ver pp. 1, 25, 79, 85).

[3] K. F. Schaffner, *Nineteenth-century aether theories*, 1ª ed. (Pergamon Press, Oxford, New York, Toronto, Sydney, Braunschweig, 1972) (ver pp. 1, 2, 86).

[4] O. Darrigol, "James MacCullagh's ether: An optical route to Maxwell's equations?", The European Physical Journal H **35**, 133–172 (2010) (ver pp. 1, 2, 86, 97, 100).

[5] O. Darrigol, *Les équations de Maxwell, de MacCullagh à Lorentz* (Éditions Belin, Paris, 2005) (ver p. 2).

[7] P. Tannery e C. Henry, ed., *Oeuvres de Fermat*, vol. 2 (Gauthier-Villars et Fils, Paris, 1894) (ver p. 6).

[10] R. de Andrade Martins, ed., *Tratado sobre a luz, de Christiaan Huygens*, vol. Suplemento 4 (Cadernos de História e Filosofia da Ciência, Campinas, 1986), pp. 1–99 (ver p. 8).

[15] J. de Mendonça, "A luz", Jornal do Domingo **1**, 18–19 (1881) (ver p. 14).

[24] E. Mach, *The principles of Physical Optics, an historical and philosophical treatment*, trad. por J. S. Anderson e A. F. A. Young (Dover Publications, Inc., New York, 1953) (ver p. 17).

[26] R. Torretti, “Getting rid of the Ether, Could Physics have achieved it sooner, with better assistance from Philosophy?”, An International Journal for Theory, History and Foundations of Science **22**, 353–374 (2007) (ver p. 18).

[32] M. Born e E. Wolf, *Principles of Optics, electromagnetic theory of propagation, interference, and diffraction of light*, 60th anniversary (Cambridge University Press, Cambridge, 2019) (ver p. 20).

[37] J. Z. Buchwald, “The quantitative ether in the first half of the nineteenth century”, em *Conceptions of ether, Studies in the history of ether theories 1740–1900*, ed. por G. N. Cantor e M. J. S. Hodge (Cambridge University Press, Cambridge, 1981) cap. 7, pp. 215–238 (ver p. 23).

[39] E. Frankel, “Corpuscular Optics and the Wave Theory of Light, The science and politics of a revolution in Physics”, Social Studies of Science **6**, 141–184 (1976) (ver pp. 24, 25).

[40] O. Darrigol, *A History of Optics, From Greek Antiquity to the Nineteenth Century* (Oxford University Press, Oxford, 2012) (ver pp. 24, 25).

[44] G. Peacock, ed., *Miscellaneous works of the late Thomas Young, M.D., F.R.S., &c, and one of the eight foreign associates of the National Institute of France*, vol. 1 (John Murray, London, 1855) (ver p. 25).

[55] I. Todhunter e K. Pearson, ed., *A History of the Theory of Elasticity and of the strength of materials from Galilei to the present time*, vol. 1 (Cambridge University Press, Cambridge, 1886) (ver pp. 32, 42, 86).

[69] B. K. P. Scaife, “James MacCullagh, M.R.I.A., F.R.S., 1809–47”, em Proceedings of the Royal Irish Academy. Section C, Archaeology, Celtic Studies, History, Linguistics, Literature (1990), pp. 67–106 (ver pp. 61–63, 85).

[70] J. H. Jellett e S. Haughton, ed., *The collected works of James MacCullagh, LL.D., fellow of Trinity College, and professor of Natural Philosophy in the University of Dublin* (Dublin University Press, Dublin, 1880) (ver pp. 62, 63, 65–72, 75–86).

[71] F. W. Burton, *James MacCullagh*, Acesso: 25-09-2023, `https://pt.wikipedia.org/wiki/James_MacCullagh#/media/Ficheiro:James_MacCullagh.png` (ver p. 62).

[80] R. P. Graves, *Life of Sir William Rowan Hamilton, Knt., LL.D., D.C.L., M.R.I.A., Andrews professor of Astronomy in the University of Dublin and Royal Astronomer of Ireland, etc. etc.* Vol. 2 (Dublin University Press, Dublin, 1885) (ver pp. 63, 64, 76).

[96] J. Larmor, ed., *Memoir and scientific correspondence of the late Sir George Gabriel Stokes, Bart., Sc.D., LL.D., D.C.L., Past Pres. R.S., KT prussian order Pour le Mérite, for. assoc. Institute of France, etc. master of Pembroke College and lucasian professor of mathematics in the University of Cambridge*, vol. 1 (Cambridge University Press, Cambridge, 1907) (ver p. 92).

[97] H. Stein, "'Subtler forms of matter' in the period following Maxwell", em *Conceptions of ether, Studies in the history of ether theories 1740–1900*, ed. por G. N. Cantor e M. J. S. Hodge (Cambridge University Press, Cambridge, 1981) cap. 10, pp. 309–340 (ver pp. 92, 100).

[100] R. Kargon e P. Achinstein, ed., *Kelvin's Baltimore lectures and modern theoretical physics, Historical and Philosophical Perspectives* (The MIT Press, Cambridge, Massachusetts, 1987) (ver pp. 93, 94).

[106] J. Larmor, ed., *Memoir and scientific correspondence of the late Sir George Gabriel Stokes, Bart., Sc.D., LL.D., D.C.L., Past Pres. R.S., KT prussian order Pour le Mérite, for. assoc. Institute of France, etc. master of Pembroke College and lucasian professor of mathematics in the University of Cambridge*, vol. 2 (Cambridge University Press, Cambridge, 1907) (ver pp. 95, 96, 98).

[108] P. M. Harman, ed., *The Scientific Letters and Papers of James Clerk Maxwell*, vol. II, 1862-1873 (Cambridge University Press, Cambridge, 1995) (ver p. 96).

[113] P. M. C. Dias e R. F. Morais, "Os fundamentos mecânicos do eletromagnetismo", Revista Brasileira de Ensino de Física **36**, 3601 (2014) (ver p. 100).