



UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA - IM/UFRJ
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE MATEMÁTICA

JEAN-VICTOR PONCELET:
DAS FUNDAÇÕES DO MÉTODO PROJETIVO
À PATRIMONIALIZAÇÃO DE UM PERSONAGEM

JANSLEY ALVES CHAVES

Orientador: Prof. Dr. Gérard Émile Grimberg
Universidade Federal do Rio de Janeiro - PEMAT/UFRJ/BRASIL

Coorientador: Prof. Dr. Philippe Nabonnand
Université Lorraine - UL/FRAÇA

RIO DE JANEIRO
FEVEREIRO DE 2023

JANSLEY ALVES CHAVES

**JEAN-VICTOR PONCELET:
DAS FUNDAÇÕES DO MÉTODO PROJETIVO
À PATRIMONIALIZAÇÃO DE UM PERSONAGEM**

Tese de Doutorado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como requisito parcial para obtenção do título de Doutor em Ensino e História da Matemática e da Física.

Orientador: Gérard Émile Grimberg
Universidade Federal do Rio de Janeiro - PEMAT/UFRJ/BRASIL

Coorientador: Philippe Nabonnand
Université Lorraine - UL/FRANÇA

RIO DE JANEIRO
FEVEREIRO DE 2023

CIP - Catalogação na Publicação

C512j Chaves, Jansley
Jean-Victor Poncelet: Das fundações do Método
Projetivo à Patrimonialização de um personagem /
Jansley Chaves. -- Rio de Janeiro, 2023.
196 f.

Orientador: Gérard Émile Grimberg.
Coorientador: Philippe Nabonnand.
Tese (doutorado) - Universidade Federal do Rio
de Janeiro, Instituto de Matemática, Programa de Pós
Graduação em Ensino de Matemática, 2023.

1. Geometria Projetiva. 2. Patrimonialização. 3.
Poncelet. I. Grimberg, Gérard Émile, orient. II.
Nabonnand, Philippe, coorient. III. Título.

**JEAN-VICTOR PONCELET:
DAS FUNDAÇÕES DO MÉTODO PROJETIVO
À PATRIMONIALIZAÇÃO DE UM PERSONAGEM**

JANSLEY ALVES CHAVES

Tese de Doutorado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como requisito parcial para obtenção do título de Doutor em Ensino e História da Matemática e da Física.

Aprovada em 27 de Fevereiro de 2023

Prof. Dr. Gérard Émile Grimberg
UFRJ (Orientador)

Prof. Dr. Philippe Nabonnand
Université de Lorraine (Coorientador)

Prof. Dr. Thiago Hartz
UFRJ

Prof. Dr. Rogério Monteiro de Siqueira
USP

Prof. Dr. Cleber Haubrichs dos Santos
IFRJ

RIO DE JANEIRO
FEVEREIRO DE 2023

Dedicatória

Quel que soit l'accueil réservé à ce ouvrage, il me survivra... et, afin qu'un souvenir ne soit jamais accordé à mon nom sans que le tien n'y soit associé, je te le dédie...

Beatriz et Bianca Rizzo Ventura Chaves

Agradecimentos

“E aprendi que se depende sempre
De tanta, muita, diferente gente
Toda pessoa sempre é as marcas das
lições diárias de outras tantas pessoas
É tão bonito quando a gente entende
Que a gente é tanta gente
Onde quer que a gente vá.
É tão bonito quando a gente sente
Que nunca está sozinho
Por mais que pense estar...”
(Caminhos do coração – Gonzaguinha).

Agradecer a todos que me ajudaram a construir esta tese não é tarefa fácil. O maior perigo que se coloca para o agradecimento não é decidir quem incluir, mas decidir quem não mencionar, dado que todos de uma forma ou outra contribuíram. Mais do que um trabalho individual, esta tese é o resultado da colaboração e contribuição de várias pessoas num processo que foi tudo, menos solitário. Por esta razão quero expressar os meus sinceros agradecimentos:

À Deus, pela força e sabedoria concedidas durante todo o percurso do meu doutorado.

À minha família, **Beatriz Rizzo Ventura Chaves** e **Bianca Rizzo Ventura Chaves**, pelo amor, incentivo e apoio incondicional ao longo de toda a minha vida, e especialmente durante esta jornada acadêmica.

Ao meu orientador, **Gérard Émile Grimberg**, e ao meu co-orientador, **Philippe Nabonnand**, pela paciência, dedicação, orientação e ensinamentos valiosos que contribuíram de forma significativa para o sucesso deste trabalho. Também agradeço aos demais membros da banca examinadora pela oportunidade de aprendizado e pelos valiosos comentários e sugestões durante a defesa da tese.

Aos professores do programa de pós-graduação PEMAT/UFRJ pelos ensinamentos e formação

acadêmica que recebi ao longo dos anos, em especial à **Maria Darci**.

Agradeço também aos colegas de doutorado, em especial ao meu amigo **Leandro Silva Dias**, pelas discussões enriquecedoras, apoio mútuo e momentos divertidos compartilhados.

Às instituições UFRJ/BR e UL/FR pelo suporte estrutural para a realização desta pesquisa. Meus sinceros agradecimentos a todos que contribuíram de alguma forma para a realização deste trabalho.

Aos meus amigos pelo apoio emocional e psicológico durante o processo de pesquisa, especialmente nos momentos mais difíceis.

À todos aqueles que contribuíram de alguma forma para minha formação acadêmica e profissional, como professores, mentores e colegas de classe.

Por fim, expresso minha gratidão pela oportunidade de estudar e pesquisar na área de Geometria Projetiva Sintética. Reconheço o grande desafio enfrentado, mas o ganho de conhecimentos adquiridos é algo que jamais teria conseguido sem esta experiência e oportunidade.

Eis uma lista de amigos que são muito caros para mim e que eu não poderia deixar de mencionar:

Andreia Krauss de Oliveira

Alexandre Ribeiro Samis

André Bastos Silva

André Luís Tato Luciano dos Santos

Arthur Torres Caser

Catalina

Carlos Augusto Aguilar Júnior

Carlos Eduardo R. Azevedo

Cid de Araújo Moraes

Décio Freitas Júnior

Daniele Dias da Silva

Denilson Fernandes dos Santos

Derek Ronald Freire Charlton

Diego Dias Uzêda

Edinaldo Arantes Pereira

Eudes Bezerra de Santana

Everaldo Dias Vieira

Fábio Ferreira de Araújo

Franduyá Fernandes Pastana Rodrigues

Frederico Doherty Nogueira

Gilberto (Gil) Cordeiro da Hora

Guaracy (Guará) Mendes da Silva

Iury

João Carlos Cataldo

João Jorge Fernandes Chaves

Juliana Ramos Amâncio

Luiz Ricardo Nunes da Silva

Mahugnon Eric Loko

Marcelo Ribeiro de Souza

Marcos Santos da Silva

Marileide Cardoso Silva

Maurício Donner Jorge

Medella

Nilton de Figueiredo Lampert

Paulo Guedes Fontes

Alexandre Medeiros Pardal

Sérgio Antônio da Silva

Wallan David da Silva

Enfim...

À Jean-Victor Poncelet

Marchez, monsieur, marchez, et la foi vous viendra!

Senhor. O dado está lançado: Das Cortes não temos a esperar, senão escravidão e horrores... Decida-se, porque irresoluções e medidas d'água morna, à vista desse contrário que não nos poupa, para nada servem, e um momento perdido é uma desgraça... O momento não comporta mais delongas ou condescendências. Liberta da sujeição à escravidão em que o Brasil se encontra, ou entregue-se como prisioneiro das Cortes e abandone os brasileiros oprimidos, subjulgados pela sórdida cobiça e prepotência de seus tiranos.

(Carta de José Bonifácio de Andrada a Dom Pedro I, em 1822)

Resumo

Este trabalho tem como tema central a contribuição de Jean-Victor Poncelet para a elaboração de uma nova área da geometria que será chamada, anos mais tarde, de geometria projetiva. No início do século XIX, surgiu a necessidade de dar à geometria sintética o mesmo alcance da geometria analítica e, para isso, os novos conceitos de projetividade e continuidade teriam uma força decisiva e restauradora na geometria, tendo a figura como algo central, mesmo que composta por alguns elementos imaginários. Essa nova corrente de pensamento foi possível graças à combinação de fatores surgidos no final do século XVIII, como a recém-criada *École Polytechnique*, a disciplina de Geometria Descritiva de Monge, a Geometria da Posição de Carnot, as obras de Brianchon e Servois, entre outros, e a revista de Gergonne, os *Annales de Mathématiques Pures et Appliquées*, que, ao difundir mais amplamente os novos conceitos, teve forte influência no pensamento geométrico. O objetivo deste trabalho é estudar como Poncelet elaborou seus métodos, e como o conteúdo da obra de Poncelet foi recebido e apropriado pela comunidade matemática francesa, para finalmente ser introduzido nos livros didáticos franceses. A publicação das obras geométricas completas de Poncelet de 1862 a 1866 inaugura uma nova etapa, que chamamos de patrimonialização após a morte de Poncelet, onde a obra de Poncelet é considerada como um todo, um marco do início da geometria moderna e, de certa forma, “tombada” no patrimônio dos matemáticos do final do século XIX.

Palavras-chave: Geometria Projetiva. Patrimonialização. Poncelet.

Abstract

This work has as its central theme the contribution of Jean-Victor Poncelet to the development of a new area of geometry that would later be called projective geometry. In the early 19th century, there arose the need to give synthetic geometry the same scope as analytic geometry, and for this purpose, the new concepts of projectivity and continuity had a decisive and restorative force in geometry, with the figure as a central element, even if composed of some imaginary elements. This new line of thought was made possible thanks to a combination of factors that emerged in the late 18th century, such as the newly created *École Polytechnique*, Monge's Descriptive Geometry discipline, Carnot's Geometry of Position, the works of Brianchon and Servois, among others, and Gergonne's journal, the *Annales de Mathématiques Pures et Appliquées*, which, by disseminating the new concepts more widely, had a strong influence on geometric thinking. The aim of this work is to study how Poncelet developed his methods and how the content of Poncelet's work was received and appropriated by the French mathematical community, to finally be introduced into French textbooks. The publication of Poncelet's complete geometric works from 1862 to 1866 inaugurates a new stage, which we call "patrimonialization" after Poncelet's death, where Poncelet's work is considered as a whole, a landmark of the beginning of modern geometry and, in a way, "enshrined" in the heritage of mathematicians in the late 19th century.

Keywords: Projective geometry. Patrimonialization. Poncelet.

Lista de Figuras

brazil	
Figura 2.1 – Poncelet (1788-1867).	4
Figura 3.1 – Teorema de Monge	22
Figura 3.2 – Invariância	24
Figura 3.3 – Construção apenas com a régua	26
Figura 3.4 – Polo de uma reta em relação à curva de grau dois	27
Figura 3.5 – Quadrilátero inscrito e circunscrito: retas paralelas encontram-se no infinito sobre a reta do infinito.	30
Figura 3.6 – Quadrilátero inscrito e circunscrito: são colineares as intersecções dos prolongamentos dos lados	30
Figura 3.7 – Sequência de circunferência de círculos, pontos limites.	31
Figura 3.8 – Existência dos pontos limites K e L.	32
Figura 3.9 – Elipses e suas cônicas suplementares.	33
Figura 3.10–O ponto é determinado, mesmo na reta exterior.	35
Figura 3.11–As cordas de contato incidem no Polo	41
Figura 3.12–Cône circunscrito à esfera	42
Figura 3.13–O polo como Centro radical	43
Figura 3.14–Ponto O é o centro de Similitude direto	44
Figura 3.15–Eixo radical	45
Figura 3.16–Retas isotrópicas.	46
Figura 3.17–Lugar geométrico dos pontos S .	47
Figura 3.18–As seis cordas comuns a um sistema de circunferências de círculos.	49
Figura 3.19–Ângulo constante	55
Figura 3.20–Raios vetores aos pontos de contato possui o ângulos bissecado.	56
Figura 3.21–Distribuição hamônica	58
Figura 3.22–Ângulo focal é metade do ângulo central do círculo principal.	59
Figura 3.23–Ângulo formado pelos raios vetores terá o dobro da suplementar ao das tangentes.	60

Figura 3.24–Triângulo circunscrito à parábola.	61
Figura 3.25–Ângulos na parábola.	62
Figura 3.26–Ângulo dos raios vetores é o dobro do suplementar.	63
Figura 3.27–Ângulos complementares.	64
Figura 3.28–Quadrilátero inscrito e circunscrito	66
Figura 3.29–Polígono inscrito cujo os lados prolongados passam por pontos fixos.	70
Figura 3.30–Polígono inscrito à cônica com seus lados incidindo em pontos arbitrários	71
Figura 3.31–Tangente traçada pelo ponto T usando a régua somente	73
Figura 3.32–Tangente dos ângulos internos	77
Figura 3.33–Reciprocidade polar	79
Figura 3.34–A polar de O é a reta diretriz da curva polar recíproca.	80
Figura 3.35–cônicas bitangentes.	82
Figura 3.36–Perspectiva de duas cônicas bitangentes: duas circunferências de círculos concêntricas.	83
Figura 3.37–Média geométrica de dois segmentos.	84
Figura 3.38–Cônica suplementar.	85
Figura 3.39–O ponto S pertence ao plano diametral AB	87
Figura 3.40–A sub-contrariante.	88
Figura 3.41–Quadrilátero $abcd$ e $ABCD$ circunscrito e inscrito à cônica respectivamente.	92
Figura 3.42–Traçado da tangente à curva por um ponto exterior utilizando apenas a régua.	93
Figura 3.43–Cônica degenerada em duas retas.	94
Figura 3.44–Solução por projeção central.	94
Figura 4.1 – Primeira edição: 1842.	108
Figura 4.2 – Inscrição e circunscrição de polígono em cônicas	110
Figura 4.3 – A polar de uma cônica é outra cônica	112
Figura 5.1 – Théodore Moutard.	122
Figura 5.2 – Prerspectiva	125
Figura 5.3 – Amédée Mannheim.	129
Figura 5.4 – Reciprocidade Polar	131
Figura 5.5 – corda de contato $\equiv$ <i>polar</i>	132
Figura 5.6 – Transformação geométrica	132
Figura 5.7 – figuras polares recíprocas	133
Figura 5.8 – Homologia	134
Figura 5.9 – ângulos entre as polares e o polo e o centro	134
Figura 5.10–Três retas concorrentes, três pontos colineares	137
Figura 5.11–Métrica de A_1B_1	138
Figura 5.12–Métrica de C_1D_1	139
Figura 5.13–distância de ponto à reta	140

Figura 5.14–Os pontos de intersecção dos lados com as tangentes ao vértice oposto são colineares.	147
Figura 5.15–Figuras homológicas.	148
Figura 5.16–Polar de um ponto quando a cônica degenera à duas retas.	148
Figura 5.17–As retas vão ao infinito.	149
Figura 5.18–Centro e eixo de homologia.	150
Figura 5.19–Transformação por projeção.	151
Figura 5.20–Reta transversal.	153
Figura 5.21–Constância dos produtos das distâncias dos vértices de um quadrilátero circunscrito a uma tangente.	154
Figura 5.22–Inversão.	156
Figura 5.23–Similitude.	158
Figura 5.24–As tangentes pelos pontos anti-homólogos intersectam-se no Eixo radical. .	159
Figura A.1 –Histórico militar	178
Figura A.2 –Histórico militar	179

Lista de Tabelas

brazil	
Tabela 4.1 – Resultados no jornal de Terquem	109

Sumário

brazil

1 – INTRODUÇÃO	1
1.1 Questões da Tese	1
1.1.1 Revisão bibliográfica	2
1.1.2 Estrutura da tese	3
2 – A VIDA DE PONCELET E SUA OBRA: UMA BREVE BIOGRAFIA (1788-1867)	4
2.1 A Vida e a Obra	4
2.2 Conclusão	18
3 – DOS CADERNOS DE SARATOFF À ACADÉMIE DE SCIENCES DE PARIS: A GÊNESE DO TRATADO E OS DEMAIS ARTIGOS DE GEOMETRIA DE PONCELET	20
3.1 Os novos conceitos na Geometria Pura	20
3.1.1 Os Princípios de Projeção Central e o Princípio de Continuidade	35
3.2 Os Manuscritos de Saratoff	41
3.2.1 Os objetos geométricos imaginários nos cadernos de <i>Saratoff</i>	46
3.3 As publicações e manuscritos em Geometria no período de 1817 -1822	50
3.3.1 O terceiro caderno manuscrito de Metz (editado em 1864)	50
3.3.2 O quarto caderno de Metz - Submetido à <i>Académie</i> de Metz em 1821	51
3.3.3 O quinto caderno de Metz - Submetido à <i>Académie</i> de Paris em 1820	51
3.3.4 O sexto caderno de Metz	53
3.3.5 O sétimo caderno de Metz	82
3.3.6 Os objetos imaginários nos cadernos de Metz	82
3.4 O <i>Traité des propriétés projectives des figures</i>	90
3.4.1 Composição do <i>Traité</i> de 1822	90
3.5 As Memórias de 1824	98
3.6 Conclusão	99
4 – A RECEPÇÃO E A APROPRIAÇÃO DA OBRA GEOMÉTRICA DE PONCELET.	101

4.1	Presença de Poncelet no <i>Aperçu</i> de Chasles	102
4.1.1	Chasles passa a avaliar a contribuição de Poncelet no <i>Aperçu</i>	104
4.2	A recepção da obra de Poncelet nos artigos da revista de Terquem (1842-1862)	107
4.3	Recepção de Poncelet nas resenhas de Terquem (1842-1862)	115
4.4	Conclusão	118
5	– A COLETÂNEA DE PONCELET, SEUS COLABORADORES E A PATRIMONIALIZAÇÃO	120
5.1	Contribuições de Moutard e Mannheim	121
5.1.1	Théodore Moutard (1827-1901)	122
5.1.2	Amédée Mannheim (1831-1906)	129
5.1.2.1	Transformações Geométricas: Polo e Polar	131
5.1.2.2	Transformações das propriedades métricas das figuras	133
5.1.2.3	Transformações das propriedades métricas das figuras com a ajuda da teoria da reciprocidade polar	136
5.2	O processo de Patrimonialização	140
5.2.1	Introdução	140
5.2.2	Geometria projetiva na educação matemática: um estudo sobre os livros de geometria analítica após 1870	142
5.2.3	Início da patrimonialização através dos livros	145
5.2.4	Início da patrimonialização através <i>Nouvelles Annales de Mathématiques: journal des candidats aux écoles polytechnique et normale</i>	159
5.3	As noções de Geometria Pura nas obras de ensino.	161
5.4	Prêmio PONCELET	163
5.5	Conclusão	165
	CONSIDERAÇÕES FINAIS	167
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	171
	Anexos	177
	ANEXO A–HISTÓRICO MILITAR DE PONCELET	178

INTRODUÇÃO

1.1 Questões da Tese

Durante o período de 1862 a 1866, Poncelet publicou, com a ajuda de dois revisores - Mannheim e Moutard - um conjunto de seus trabalhos geométricos, que incluíam manuscritos de *Saratoff*, bem como manuscritos escritos por ele durante o período de 1814 a 1822, quando retornou à França, a reedição do seu *Traité* de 1822, além de todos os textos, cartas e artigos que escreveu sobre geometria. Essa compilação levanta duas questões importantes que serão abordadas nesta tese. Primeiramente, é bastante incomum na história da matemática um autor disponibilizar seus manuscritos que são o prelúdio de uma obra editada. Normalmente, esses manuscritos são publicados nas obras completas, como os chamados "Nachlasse". No entanto, no caso em questão, temos acesso a todos esses manuscritos, o que nos permite reconstruir a evolução do tratado de 1822. Portanto, a primeira pergunta que surge é como exatamente esse tratado foi desenvolvido ao longo do tempo. O segundo problema decorrente da publicação tardia desses trabalhos é determinar qual era o objetivo de Poncelet ao escrever o tratado e como sua obra foi recebida pela comunidade matemática da época.

A obra geométrica completa de Poncelet abrange seus trabalhos em Geometria até 1832. Isso nos leva a abordar, como primeira questão em nosso trabalho, a relação entre o autor e sua obra, uma vez que as experiências vividas por Poncelet tiveram influência parcial em suas pesquisas e escritos, além de seu eventual afastamento da geometria. A publicação das obras entre 1862 e 1866 também nos auxilia a compreender como a obra de geometria se encaixa em sua vida.

A questão central da nossa tese pretende analisar como a obra de Poncelet passa, depois de sua elaboração e publicação entre 1817 e 1832, por um processo de recepção que envolve a comunidade matemática francesa. Queremos analisar como esta comunidade se apropria da obra do geômetra, assim como depois da publicação da obra em 1862-1866, a comunidade matemática passa a avaliar a obra de Poncelet. O desfecho deste processo a partir da década de 1870 é que pensamos pertinente chamar de “patrimonialização”.

Para responder nossas duas questões centrais da tese, seguiremos quatro questões que norteiam o nosso trabalho: 1) a relação da vida com a obra de Poncelet; 2) a gênese do tratado de 1822 e dos diversos artigos que ele redigiu até 1832; 3) a recepção, apropriação da obra de Poncelet pela comunidade matemática francesa no período; 4) a publicação da obra completa de geometria e a visão da obra de Poncelet que os matemáticos têm em comum a partir da década de 1870.

1.1.1 Revisão bibliográfica

Para responder as nossas questões, utilizamos diversas referências que podem ser divididas em quatro partes: a) Elementos biográficos b) a própria obra de Poncelet assim como a literatura acadêmica a comenta; c) O *corpus* da revista de Terquem e os diferentes artigos que analisam esta revista; e d) os comentários que seguiram a publicação da obra de Poncelet.

a) Sobre a biografia, além dos discursos pronunciados no funeral de Poncelet em 1867, Rolland (1868), Dupin (1868), Chabaud-Latour (1868) e Dumas (1868), temos que RADAU (1868) publicou um artigo na *Revue des deux Mondes* ; segue Didion (1869) que fez uma notícia nos *Mémoires de l'académie* de Metz. O *Éloge* de Bertrand (1875) na *Académie des Sciences* é uma fonte também preciosa de informação. Enfim a biografia de Poncelet por Tribout (1936) . Todos esses textos nos ajudaram tanto na elaboração da biografia quanto na reconstrução da visão dos matemáticos logo após o falecimento de Poncelet.

b) Sobre a gênese do tratado de 1822 utilizamos os artigos de Belhoste (1998) assim como os diferentes textos reunidos nos dois livros de Nabonnand (NABONNAND, 2006)(NABONNAND, 2015), em particular o artigo de Friedelmeyer (2010), as teses de Lorenat (2015) e Santos (2015). Que fizeram dos trabalhos de Poncelet.

c) Além da revista de Terquem, os artigos de Boucard e Verdier (2015), de Pfeifer-Gispert-Nabonnand (NABONNAND et al., 2015), de Goldstein et al. (2007) que colocam o problema da análise dos artigos de revistas e da comunidade matemática que se identificam em torno da revista.

d) Os elogios, as notícias biográficas e os textos sobre Poncelet (Chasles 1870, Bertrand, etc ...) irão nos ajudar a formar a representação do Geômetra que se constrói a partir da década de 1870. Artigos recentes na historiografia (C Erhart, O. Bruneau e R, D'Enfert, 2022 e referências deste artigo), colocam a questão geral da constituição do patrimônio, sobre o papel das comunidades e a construção dos saber, a questão da divulgação do saber através das revistas, até os livros textos, assim como a questão da herança, ou seja como obras chegam a fazer parte do patrimônio público, se não da humanidade, pelo menos de uma comunidade de saber. Nossa análise da percepção de Poncelet e sua obra depois de 1870 visa questionar o que poderíamos chamar de “patrimonialização” de Poncelet.

1.1.2 Estrutura da tese

O capítulo 2 da obra é dedicado à biografia de Jean-Victor Poncelet, porém, sua vida privada é reduzida a suas sucessivas ocupações profissionais. Poncelet exerceu uma série de cargos ao longo de sua vida, e sua obra é central para sua história pessoal. Pouco se sabe sobre sua vida familiar, uma vez que ele se casou apenas em 1837, aos 49 anos de idade. A partir de então, sua esposa Louise Drouot foi uma importante companheira em sua vida pessoal e profissional. O capítulo busca destacar as principais realizações de Poncelet e seu legado para a matemática e outras áreas do conhecimento.

O terceiro capítulo tem como foco o estudo dos cadernos manuscritos de *Saratoff* e *Metz*, a fim de determinar as etapas que levaram ao Tratado de 1822, bem como a estrutura do tratado e os artigos de geometria que o seguem até 1832. Procuramos examinar os manuscritos, analisando a evolução do pensamento matemático de Poncelet e suas contribuições para a geometria. Além disso, o capítulo explora em detalhes a estrutura do Tratado de 1822 e como seus artigos foram desenvolvidos ao longo do tempo. Em resumo, o capítulo oferece uma análise do processo de criação do Tratado de 1822 e de sua importância na história da geometria.

O quarto capítulo tem como objetivo analisar a recepção da obra de Poncelet pela comunidade matemática entre 1832 e 1862. Procuramos explorar como a obra foi citada e utilizada pelos contemporâneos de Poncelet, bem como o impacto que ela teve no desenvolvimento da geometria no Ensino. Concentramos em entender como a comunidade matemática se apropriou do conteúdo da obra de Poncelet e como isso influenciou a produção intelectual da época. Em resumo, o capítulo oferece uma análise profunda da recepção e apropriação da obra de Poncelet pela comunidade matemática.

O quinto capítulo é dedicado a reconstruir a imagem deixada pela obra e pelo homem após o falecimento de Poncelet em 1867. Além de narrar a publicação da obra organizada por Poncelet, Mannheim e Moutard, o capítulo busca entender a influência que Poncelet teve na geometria e em outros campos. Procuramos analisar a repercussão de suas ideias, a maneira como a obra foi recebida pelos contemporâneos e o legado que Poncelet deixou para as gerações seguintes. O capítulo também se concentra na personalidade de Poncelet e em como ele foi visto por seus contemporâneos, bem como em sua importância para a história da ciência e da matemática. Em suma, o capítulo oferece uma visão abrangente da figura e obra de Poncelet e sua patrimonialização.

A vida de Poncelet e sua obra: uma breve biografia (1788-1867)

2.1 A Vida e a Obra



Figura 2.1 – Poncelet (1788-1867).

Ao escrever a biografia de Poncelet, o objetivo é destacar a relação entre os eventos vivenciados por ele e a elaboração de sua obra. A vida de Poncelet foi marcada por diversas mudanças que influenciaram e caracterizaram sua trajetória na condução e construção de seus trabalhos. Analisando seus primeiros passos, é possível entender as razões que o levaram a

tomar a direção que vemos em sua carreira. Desde os Cadernos de *Saratoff* até o Tratado de 1822, diversas partes de sua obra estão diretamente ligadas às posições e responsabilidades que assumiu ao longo da vida. Por exemplo, a vaga de professor de Mecânica em *Metz* em 1825 mudou o foco de sua pesquisa, enquanto a participação na Exposição Universal de Londres também contribuiu para a evolução de sua obra. Portanto, a biografia de Poncelet não se limita a sua vida privada, mas sim a um relato que mostra como sua trajetória pessoal e profissional se entrelaçaram e influenciaram sua produção acadêmica.

Para o resumo bibliográfico que segue, tomei como referência os seguintes trabalhos:

Os discursos pronunciados no funeral de Poncelet em 1867 por MM. Rolland (1868), Dupin (1868), Chabaud-Latour (1868) e Dumas (1868);

O artigo de RADAU (1868) publicado na *Revue des deux Mondes*;

A notícia de Didion (1869) publicada nas *Mémoires de l'académie* de Metz;

O Éloge de Bertrand (1875) publicada na *Académie des Sciences* de Paris;

O artigo de ??) publicada na revista de *Histoire de l'Education*;

Por fim, o livro de Tribout (1936): *Le général Poncelet*.

A análise de todos esses textos desempenhou um papel fundamental não apenas na elaboração da biografia de Poncelet, mas também na reconstrução da visão dos matemáticos imediatamente após seu falecimento. Ao estudarmos esses registros, somos capazes de obter *insights* valiosos sobre como o legado de Poncelet foi percebido e apreciado pelos colegas de sua época.

Esses textos nos fornecem uma janela para o ambiente intelectual e científico que cercava Poncelet, revelando a reverência e o impacto que suas contribuições tiveram na comunidade matemática. Por meio dessas fontes, podemos compreender melhor o reconhecimento da importância de suas ideias e teoremas, bem como a relevância de sua abordagem na geometria e na matemática em geral.

Além disso, esses textos nos permitem vislumbrar as discussões e os debates que surgiram entre os matemáticos da época, enquanto tentavam assimilar e desenvolver ainda mais as contribuições de Poncelet. Eles oferecem uma visão valiosa sobre as reações, as críticas e as interpretações desses contemporâneos, destacando o impacto que Poncelet teve na comunidade científica do século XIX.

Dessa forma, ao mergulharmos nesses textos, somos capazes de reconstruir a atmosfera matemática e intelectual da época e de compreender a importância duradoura do trabalho de Poncelet. Essas fontes nos permitiram traçar um panorama mais completo e abrangente da influência e do legado desse matemático, fornecendo um contexto valioso para a compreensão de sua posição na história da matemática.

Jean-Victor Poncelet nasceu em Metz em 1º de julho de 1788. Ele teve uma infância um tanto incomum, pois foi criado pela família Olier em Saint-Avold, uma cidade localizada a cerca de 50 km a leste de Metz. Acredita-se que sua condição de filho ilegítimo de Claude Poncelet,

um advogado do parlamento de Metz, tenha influenciado nessa situação. É interessante observar que esse período precede em um ano a Revolução Francesa, o que pode ter gerado instabilidade na carreira de seu pai.

A localização geográfica de Saint-Avold é estratégica, pois fica no centro do tráfego entre a recém-criada República Francesa e os Estados alemães. Isso resultou em uma presença policial intensa na região, tornando as visitas de seus pais muito difíceis. Apesar disso, não faltou afeto por parte da família Olier, que o acolheu e cuidou dele durante sua infância.

No *Éloge Historique*, Joseph Bertrand presta uma merecida homenagem a Poncelet, reconhecendo suas valiosas contribuições para a matemática e a engenharia. É interessante observar o destaque dado por Bertrand à formação acadêmica de Poncelet, que teve a oportunidade de estudar na renomada *École Polytechnique* de Paris, onde se destacou em sua turma de 1810. Essa formação sólida certamente foi fundamental para seu sucesso posterior.

Bertrand também enfatiza a obra principal de Poncelet, o célebre *Traité des propriétés projectives des figures*, publicado em 1822. Essa obra foi um marco no estudo da geometria projetiva e solidificou o nome de Poncelet como um dos grandes matemáticos de sua época. Suas contribuições nesse campo foram significativas e continuam sendo relevantes até os dias de hoje.

Além de suas realizações na matemática, Bertrand destaca as contribuições de Poncelet para a engenharia. Poncelet aplicou seus conhecimentos matemáticos em projetos práticos, como a construção de pontes suspensas. Sua capacidade de integrar teorias matemáticas em projetos reais demonstra sua habilidade excepcional e versatilidade como engenheiro.

É inegável o impacto de Poncelet tanto na matemática quanto na engenharia, e Joseph Bertrand, por meio de seu *Éloge Historique*, reconhece e celebra o legado deixado por esse notável estudioso e profissional.

O *Éloge Historique* de Bertrand é uma bela homenagem a Poncelet, destacando sua genialidade e importância para a história da matemática e da engenharia:

A infância de Poncelet foi como a de d'Alembert, abandonada a uma direção indiferente ao trabalho da inteligência; Como a criança pobre, acolhida pelo fabricante de vidro da rue Michel-Lecomte, nosso colega, favorecido pelos mais raros dons do espírito e marcado com o selo da ciência, mostrou-se no ensino fundamental, superior aos colegas de classe. (BERTRAND, 1875, p.1)

Além de seu interesse pelas ciências exatas, Poncelet também tinha uma predileção pela literatura, revelando assim uma mente versátil e curiosa. Segundo relatos de seus biógrafos Tribout (1936, p.25) e RADAU (1868, p.1046), houve uma ocasião em que Poncelet encontrou um clássico de Racine na casa dos Olier, sua família adotiva, e ficou tão cativado pela obra que acabou lendo-a por completo. Esse encontro fortuito despertou sua curiosidade literária e o levou a explorar outros renomados autores franceses, como Corneille, Boileau e Molière.

A sede de conhecimento de Poncelet foi notada pela sua família adotiva, que reconheceu a importância de cultivar e nutrir sua paixão pelos estudos. Assim, em 1804, eles decidiram enviar Poncelet de volta a Metz para que ele pudesse desenvolver seus estudos de forma mais

abrangente. Foi nessa cidade que Poncelet deu início formalmente aos seus estudos e realizou seus trabalhos mais importantes nas áreas de Geometria e Mecânica.

Essa experiência de retorno a Metz marcou um momento crucial na vida de Poncelet, pois permitiu que ele aprofundasse seus conhecimentos acadêmicos e explorasse plenamente suas habilidades em campos específicos. É fascinante observar como suas raízes literárias, juntamente com seu interesse pela matemática e pela engenharia, se entrelaçaram para moldar sua trajetória e influenciar suas contribuições futuras.

Ao chegar à Metz vindo de Saint-Avold, Poncelet enfrentou uma série de desafios significativos para ingressar na escola preparatória da cidade. Essa transição não foi fácil para ele, como destacado por biógrafos como Tribout (1936, p.28 a 30) e Bertrand (1875). O jovem Poncelet teve que se dedicar intensamente para recuperar o tempo perdido e estar apto a concorrer a uma vaga na renomada *École Polytechnique*, uma vez que havia uma idade máxima para a entrada e a competição era acirrada.

Com muita dedicação e perseverança, Poncelet finalmente obteve a aprovação no Liceu Imperial de Metz no final de 1804. Surpreendentemente, em agosto de 1805, ele já havia se destacado e conquistado diversos prêmios. Sua habilidade excepcional em matemática começou a se manifestar, e em 1806, ele ganhou um segundo prêmio na disciplina, o que lhe permitiu pular uma classe e ingressar diretamente na classe de matemática especial.

O árduo trabalho e o talento natural de Poncelet continuaram a render frutos, pois em agosto de 1807, ele recebeu o cobiçado prêmio de honra, tornando-se o primeiro aluno a ser agraciado com essa honraria. Essas conquistas notáveis foram verdadeiramente excepcionais e destacaram Poncelet como um estudante excepcionalmente talentoso e dedicado.

É importante ressaltar que todas essas realizações foram resultado do esforço imenso e da determinação incansável de Poncelet. Ele superou obstáculos e desafios para se destacar academicamente, estabelecendo um padrão de excelência que o acompanhou ao longo de sua carreira. Esses primeiros sucessos serviram como uma base sólida para os feitos notáveis que ele alcançaria posteriormente em sua vida profissional.

Poncelet tinha um objetivo claro em mente: ingressar na *École Polytechnique*. Para alcançar seu objetivo, ele se dedicou intensamente às Matemáticas, aos Desenhos e ao Latim, áreas que eram requisitadas no concurso de admissão. No final de 1807, aos 19 anos, ele foi aprovado para a *École Polytechnique*, sendo o oitavo colocado em um concurso nacional.

Embora seu pai não o incentivasse a seguir a carreira militar, ele ficou contente ao receber a notícia da aprovação de Poncelet, que foi registrada em um texto oficial do Prefeito de Moselle. Embora a Revolução e o Império tenham criado um sistema educacional meritocrático, ele era elitista, e o custo do curso era coberto pela família, o que não garantia igualdade de oportunidades para todos os jovens. Mesmo assim, essa era ainda a melhor forma de ascensão social em comparação com o antigo regime, no qual praticamente não havia possibilidade de ascensão social. Sobre o concurso de entrada à *École Polytechnique*, ver Santos (2015, p.52)

Durante seu primeiro ano na *École Polytechnique*, em abril de 1808, Poncelet adoeceu

gravemente e precisou se afastar dos estudos. Ele retornou à sua cidade natal de Saint-Avoid, onde as condições climáticas favoráveis permitiram sua rápida recuperação. Durante sua convalescença, Poncelet resolveu alguns problemas de Geometria em um ambiente tranquilo e isolado de tudo. Esses problemas foram publicados no número 3 do segundo volume da *Correspondance sur l'École Polytechnique*¹, uma revista criada e dirigida por Hachette, que apresentava desafios matemáticos para os estudantes. Vários estudantes, incluindo Dupin, Poncelet, Chasles e Brianchon, apresentaram soluções para as questões desafiadoras da revista, o que incentivou o verdadeiro espírito de pesquisa entre os alunos. Após sua recuperação, Poncelet retornou à *École Polytechnique* para continuar seus estudos.

Os estudantes da *École Polytechnique* apresentaram soluções para várias questões desafiadoras da *Correspondance sur l'École Polytechnique*, dirigida por Hachette, entre 1804 e 1816. As soluções foram compiladas em três volumes, sendo que o sétimo caderno do primeiro volume contém as soluções de Brianchon e o terceiro caderno do segundo volume contém as soluções apresentadas por Poncelet. Em sua solução para a tangência a três circunferências de círculos, Poncelet demonstra sua originalidade ao reduzir o raio das circunferências considerando o menor e transformar uma das circunferências em um ponto. Com isso, o problema se torna traçar a tangência a duas circunferências de círculos que passam por um ponto. (HACHETTE, 1813, p.271).

Assim é que ele começa a publicar em Geometria, sempre pautado pela originalidade, que evidencia todo o seu profundo interesse nessa área.

Após concluir seu curso na *École Polytechnique* em 1810, Poncelet ingressa na *École d'Application* de Metz, um dos estabelecimentos de aplicação da formação. No fim do inverno de 1812, concluiu sua formação e foi designado como Tenente de Engenharia para trabalhar nas fortificações em terras Holandesas anexadas à França.

No entanto, em 17 de junho de 1812, Poncelet recebeu ordens para integrar a *Grande-Armée* e seguir para a campanha da Rússia. Durante os três meses seguintes, esteve envolvido na construção de defesas, fortes e pontes. Apesar de seu treinamento em engenharia, a experiência na guerra foi uma mudança significativa em sua vida, e ele teve que se adaptar rapidamente às condições da guerra e às demandas da situação.

Em 18 de novembro de 1812, as tropas francesas enfrentaram uma barreira de artilharia russa na cidade de Krasnoï. Depois de um bombardeio mortal, o exército francês se retirou e o tenente Poncelet, que pertencia ao batalhão de sapadores, tentou inutilmente neutralizar a artilharia russa. Após várias tentativas fracassadas, os sobreviventes ficaram isolados e foram capturados no final do dia 18 de novembro.

No dia seguinte, Poncelet se juntou aos cerca de 1.200 prisioneiros e iniciou uma longa e difícil jornada. Ele teve que percorrer cerca de 1.000 km a pé em pleno inverno russo para chegar

¹ A *Correspondance sur l'École Polytechnique* foi criada e dirigida por Hachette entre 1804 até 1816, havia questões desafiadoras inseridas pelo editor que eram um incentivo ao verdadeiro espírito de pesquisa dos estudantes onde vários deles apresentaram soluções às questões.

ao local de sua prisão: *Saratoff*, uma cidade às margens do rio Volga. Foram quatro meses de caminhada, enfrentando o rigoroso inverno e as condições precárias.

Em *Saratoff*, Poncelet permaneceu até a notificação da paz geral concluída em Paris, em 30 de maio de 1814. Durante esse período, ele teve que enfrentar as dificuldades da vida de prisioneiro e, ao mesmo tempo, encontrar maneiras de manter sua mente ativa e sua paixão pela matemática viva. Apesar de todas as adversidades, ele continuou a estudar e a desenvolver ideias em geometria e outras áreas da matemática, mantendo-se firme em sua determinação de continuar a contribuir para a ciência.

Quando se encontrava em *Saratoff*, Poncelet se dedicou à escrita dos manuscritos que ficaram conhecidos como Os Cadernos de *Saratoff*. Entretanto, o autor o fez em condições precárias, como ele mesmo menciona em suas palavras: "privado de todo tipo de livros e instrumentos de precisão, desprovido de uma biblioteca científica..." (PONCELET, 1862, introdução, ix). Sem recursos à sua disposição, Poncelet teve apenas suas lembranças da *École Polytechnique*, dos trabalhos de Monge, Carnot e Brianchon para ajudá-lo. Além disso, o isolamento que enfrentava provavelmente contribuiu para o desenvolvimento de um pensamento altamente abstrato, algo que teria sido difícil de alcançar enquanto estava na França ou na Holanda, cumprindo suas funções como tenente e com pouco tempo para desenvolver e escrever suas ideias. Foi assim, em completa solidão, que germinaram suas ideias, levando-o a descobrir um novo ramo da matemática.

Curiosamente, essa não foi a primeira vez que Poncelet teve que enfrentar um isolamento forçado. Quando estudante da *École Polytechnique*, devido a problemas de saúde, ele teve que ser isolado em Saint-Avoid. Naquela ocasião, ele escreveu soluções para dois problemas da *Correspondance* de Hachette.

Os Cadernos de *Saratoff* foram uma peça fundamental na jornada de Poncelet rumo à elaboração do seu Tratado. Esses manuscritos foram escritos em condições adversas, em um período de isolamento em que o autor não tinha acesso, como citou, a livros ou instrumentos de precisão. Apesar disso, Poncelet conseguiu utilizar suas lembranças da *École Polytechnique* e dos trabalhos de outros matemáticos renomados para desenvolver ideias que se tornariam parte integrante dos diversos artigos que publicaria no futuro.

Os Cadernos de *Saratoff* foram o ponto de partida para o desenvolvimento do tratado de 1822, que se tornaria a principal obra de Poncelet. As ideias contidas nesses manuscritos foram lapidadas e aprimoradas ao longo dos anos, e Poncelet as utilizou como base para a elaboração de novas teorias e conceitos matemáticos. Dessa forma, é possível afirmar que os Cadernos de *Saratoff* foram o alicerce de uma obra que levaria a formação de um novo ramo na Matemática: A Geometria Projetiva.

Em 7 de setembro de 1814, Poncelet finalmente chega à França, após o acordo de paz, e logo envia uma carta ao Ministro da Guerra francês, Baron de Caux, para relatar os eventos ocorridos durante sua captura pelos russos em 1812. Nessa carta, Poncelet solicita sua permanência na cidade de Metz, sob as ordens do Coronel du Coudrai Tribout (1936, p.48). É

interessante notar que o fato de ele ter solicitado especificamente permanecer em Metz pode ser uma indicação da sua vontade de continuar trabalhando nas fortificações da cidade, onde ele já havia estudado na *École d'Application*. Além disso, essa carta pode ser vista como uma tentativa de Poncelet de mostrar sua lealdade à França e às suas forças armadas, mesmo após ter sido capturado pelos russos. Essa atitude pode ter sido importante para sua carreira futura como tenente de engenharia.

Após seu retorno à França, Poncelet mergulhou em um período de leitura e atualização, relendo textos clássicos e se atualizando com artigos recentes do *Journal* de Gergonne. Durante esse período, ele se reaproximou de outros geômetras, como Brianchon, Terquem e Servois, e suas trocas de correspondências foram favoráveis às ideias de continuidade propostas por ele. Em colaboração com Brianchon, Poncelet publicou um artigo nas *Annales de Gergonne Recherches sur la détermination d'une hyperbole équilatère, au moyen de quatre conditions données*², demonstrando sua vontade de compartilhar suas pesquisas com a comunidade matemática.

É interessante notar que, apesar de já ter escrito os manuscritos dos Cadernos de *Saratoff*, Poncelet continuou a trabalhar em suas ideias, reescrevendo o que já havia escrito e discutindo a teoria dos sinais e as transversais de Carnot. Esse processo de aperfeiçoamento e refinamento é uma característica marcante da prática científica e demonstra o compromisso de Poncelet com a precisão e a clareza de suas ideias.

Além disso, a disposição de Poncelet em compartilhar suas pesquisas e trocar ideias com outros matemáticos destaca a importância de sua colaboração na produção do conhecimento científico. As correspondências e publicações conjuntas de Poncelet com seus colegas demonstram o seu interesse em divulgar suas descobertas.

Durante os 20 anos que Poncelet passou em Metz, após seu retorno de *Saratoff*, ele teve a oportunidade de dedicar seu tempo à escrita e desenvolvimento de suas ideias matemáticas. Nesse período, ele produziu alguns cadernos de trabalho, que foram submetidos a diferentes instituições. O quarto caderno, intitulado *Considérations philosophiques et techniques sur Le principe de continuité dans Le lois géométriques*, foi submetido à *Société des Lettres, Sciences et Arts* de Metz em 1821. Já o quinto caderno, *Essai sur les propriétés projectives des sections coniques*, foi submetido à *Académie des Sciences* de Paris em 1820. Essas submissões indicam que os trabalhos de Poncelet passaram por um longo processo de maturação, que durou cerca de nove anos, de 1813 até 1822 e culminou com seu *Traité* de 1822. É possível inferir que Poncelet dedicou tempo e esforço significativos para refinar e desenvolver suas ideias matemáticas submetendo-as às instituições acadêmicas.

Em 1819, Poncelet, matemático e engenheiro militar francês, teve um papel fundamental na fundação da *Académie Impériale* de Metz, sendo um dos membros fundadores da *Académie Impériale*, juntamente com outros proeminentes cientistas e intelectuais da época. A instituição foi criada por iniciativa do governador militar da cidade, o marechal Marmont, que reconheceu a importância de apoiar a educação e a cultura para o desenvolvimento da região.

² Annales de Mathématiques, t. XI, p.205; 1821.

Em seu primeiro ano de existência, a *Académie Impériale* de Metz teve como presidente o próprio Marmont. Porém, em 1823, Poncelet assumiu a presidência da instituição, ocupando esse cargo até 1824. Sua liderança contribuiu para o prestígio da instituição e para a formação de uma comunidade científica ativa e dinâmica na região de Metz.

Em 1822, Poncelet publicou seu trabalho mais importante, intitulado *Traité des Propriétés Projectives des Figures*. O livro está organizado em várias seções e demonstra a força do método de Poncelet, que se baseia nos princípios de continuidade e projeção.³

Em 1824, Poncelet apresentou à *Académie des Sciences* de Paris uma invenção sobre a "roda d'água curva", detalhada em seu *Memoire sur les roues hydrauliques verticales à albes courbes*. Essa invenção lhe rendeu o Prêmio de Mecânica da *Académie* no ano seguinte, como forma de reconhecimento por sua contribuição para o progresso da agricultura, artes mecânicas e ciências práticas e especulativas. Essa invenção demonstra o interesse de Poncelet pela mecânica e sua habilidade em aplicar seus conhecimentos matemáticos para solucionar problemas práticos. A "roda d'água curva" é uma melhoria em relação às rodas d'água convencionais, uma vez que as suas pás curvas proporcionam uma maior eficiência na captação de energia hidráulica. Além disso, ao apresentar essa invenção à *Académie* e receber o Prêmio de Mecânica, Poncelet também mostra a sua preocupação em contribuir para o avanço das áreas práticas e teóricas do conhecimento. Neste mesmo ano apresentou outras duas memórias à *Académie*, mas em Geometria pura: *Sur les centres de moyennes harmoniques* e *Sur la théorie générale des polaires réciproques*.

O prêmio de Mecânica

A *Académie des Sciences* tem em seu histórico a concessão de prêmios, cujo fundador é Montyon (MAINDRON, 1881, p.3). Esses prêmios são doações destinadas a premiar trabalhos científicos de destaque. Muitas dessas doações são generosas e são concedidas com o objetivo de incentivar a proposição de questões relevantes. Com isso, a influência positiva que a *Académie* já exercia sobre o progresso da ciência aumentou ainda mais. As obras produzidas pela *Académie* são consideradas hoje como algumas das mais importantes da história da ciência e foram elaboradas por grandes personalidades, que são referências nas ciências da França.

No ano de 1780, Montyon teve a ideia pioneira de criar prêmios para ajudar a divulgar invenções, reconhecendo o potencial da ciência em trazer benefícios significativos para a sociedade. Com esse objetivo em mente, ele estabeleceu três prêmios que visavam projetos capazes de gerar um impacto social positivo, promover a melhoria de condições insalubres em determinadas áreas da arte e avançar no campo da Mecânica.

Uma característica marcante desses prêmios foi o anonimato, uma vez que Montyon acreditava que a produção científica deveria estar isenta de busca por prestígio pessoal e re-

³ O método de Poncelet, desenvolvido ao longo de sua carreira, é uma contribuição importante para a geometria projetiva, área que estuda as propriedades das figuras geométricas que permanecem invariantes quando projetadas em um plano. A estrutura do *Traité des Propriétés Projectives des Figures* é analisada em um capítulo posterior, o que sugere a complexidade e a relevância do trabalho de Poncelet.

conhecimento. Seu foco principal era impulsionar o bem comum através do avanço científico. Essa iniciativa de Montyon contribuiu significativamente para o estímulo à pesquisa científica e tecnológica na França, incentivando a busca por soluções que pudessem melhorar a qualidade de vida da sociedade.

É interessante observar como a criação desses prêmios reflete a crença de Montyon na capacidade da ciência de gerar benefícios tangíveis à sociedade. Além disso, fica evidente que esses prêmios foram projetados para incentivar pesquisas em áreas específicas, como a Mecânica, que eram consideradas de extrema importância na época. Essa estratégia de incentivo pode ter contribuído para o desenvolvimento de inúmeras descobertas e invenções que beneficiaram a sociedade como um todo.

Mesmo durante o período turbulento da Revolução Francesa, em que os recursos financeiros das Academias foram direcionados para fins bélicos, Montyon não desistiu de seus nobres propósitos. Ele criou novamente diversos prêmios, os quais permanecem ativos até hoje.

A iniciativa de Montyon foi seguida por muitos outros, e a *Académie* recebeu diversas doações ao longo do tempo com o objetivo de premiar trabalhos e pesquisas de diversas naturezas, seguindo o nobre exemplo estabelecido por ele. Um exemplo notável é o prêmio Poncelet, que continua a ser concedido até os dias de hoje.

Antes da Revolução Francesa, a gestão das doações pela *Académie* era marcada por uma falta de transparência e regularidade. Não havia requisito de envolvimento do Conselho de Estado ou de um ministro competente, e não era necessário aprovação por decreto para que a *Académie* aceitasse doações. Esse contexto abria espaço para uma administração informal dessas contribuições, aproveitando a generosidade de indivíduos anônimos em prol do progresso científico.

Um exemplo interessante desse sistema informal ocorreu em 1783, quando Condorcet apresentou à *Académie* uma proposta de doação anônima com o objetivo de incentivar a simplificação de processos mecânicos (MAINDRON, 1881). A *Académie*, então, buscou a autorização do Rei para aceitar a doação e estabeleceu o valor do prêmio na área de Mecânica. Esse episódio ilustra como as doações eram tratadas de maneira flexível, aproveitando a generosidade daqueles que preferiam permanecer anônimos, visando impulsionar o avanço científico.

Essa falta de formalidade na gestão das doações pode ter trazido desafios em termos de transparência e regulamentação, mas também permitiu uma certa liberdade e agilidade na obtenção de recursos para o desenvolvimento científico. No entanto, a Revolução Francesa, com sua busca por maior igualdade e transparência, trouxe mudanças significativas para a administração das doações, estabelecendo processos mais estruturados e instituições específicas para lidar com essas contribuições.

O prêmio de Mecânica foi originalmente planejado para ser concedido em 1784, mas acabou sendo entregue somente em 1785. Essa informação sugere que houve possíveis atrasos ou dificuldades no processo de organização e avaliação das propostas, ou até mesmo que o processo de seleção tenha sido rigoroso. No entanto, é interessante observar que esse prêmio foi

estabelecido em um momento de rápido desenvolvimento científico e tecnológico, em que havia uma grande necessidade de reconhecimento e incentivo para avanços nessas áreas. Prêmios como esse desempenharam um papel crucial em estimular a pesquisa e o desenvolvimento tecnológico, resultando em importantes descobertas e inovações que beneficiaram a sociedade como um todo.

Durante o período napoleônico, o prêmio de Mecânica foi interrompido, mas foi retomado em 1819. Nesse contexto, Laplace, renomado cientista e matemático, apresentou uma proposta à Academia, argumentando que trabalhar para o desenvolvimento da indústria e do conhecimento humano é um ato louvável e eficaz de caridade. Ele sugeriu que, caso a *Académie* concordasse com essa ideia, uma pessoa anônima estaria disposta a criar um prêmio anual para reconhecer aqueles que, segundo a *Académie*, merecessem, por inventarem ou aprimorarem ferramentas úteis para o progresso da agricultura, das artes mecânicas e das ciências práticas e teóricas.

Na mesma reunião, a *Académie* aceitou inicialmente a doação de forma provisória e, posteriormente, recebeu autorização por meio de uma Ordem Real datada de 29 de setembro de 1819 para aceitá-la definitivamente.

Embora o prêmio tenha sido inicialmente proposto para ser concedido em 1821, ele acabou sendo entregue somente em 1824. Entre os premiados notáveis, destacam-se Poncelet, em 1825, e Morin, que foi assistente de Poncelet em 1836.

O Curso de Mecânica

Em 1825, por solicitação de François Arago, Poncelet iniciou a criação dos cursos de mecânica na *École d'Application de l'Artillerie et du Génie* de Metz. Esses cursos de Mecânica aplicada passaram por várias versões e foram submetidos à apreciação da *Académie des Sciences* de Paris. Poncelet iniciou uma longa carreira como professor de mecânica a partir da metade da década de 1820 até 1834, quando foi eleito para a *Académie des Sciences* de Paris. O curso de Mecânica Aplicada às Máquinas, cuja primeira edição foi em 1826, foi apresentado à *Académie des Sciences* e recebeu um relatório favorável de M. Dupin em 1827.

Enquanto professor, Poncelet foi apresentado a um programa de curso elaborado por uma Comissão que refletia a forma predominante de se ver as máquinas na época, essencialmente a partir de uma perspectiva descritiva. No entanto, em vez de seguir o parecer da Comissão, Poncelet fez críticas ao projeto que visava enquadrar sua ação, em uma nota datada de 1º de junho de 1824. Ele exigiu várias mudanças significativas no programa de cursos desenvolvido pela instituição e conseguiu que elas fossem implementadas. No final da década de 1820, um colega do corpo de engenheiros, o oficial Joseph-Aymé Lesbros (1790-1860), apoiou Poncelet em uma série de experimentos sobre as leis do fluxo de água por orifícios, cujos resultados foram rapidamente integrados ao ensino de máquinas.

O curso de Mecânica de Poncelet foi publicado pela primeira vez em 1826, seguido de edições em 1831 e 1832. Como professor, ele nunca parou de desenvolver seu ensino e em 1836, uma edição litografada que incorporou quase todos os assuntos abordados por Poncelet durante sua cátedra em Metz foi publicada. Poncelet submetia regularmente as várias versões do curso

ao julgamento da *Académie des Sciences* de Paris, enquanto Morin publicava em 1837 uma memória de mecânica prática baseada fortemente nos ensinamentos de Poncelet. Apesar de ser Morin quem redigiu o curso com base nas notas e resumos escritos por Poncelet, foi Poncelet que às vezes revisava as cópias de seu assistente. Uma segunda edição foi publicada em 1870 por Kretz.

O curso rapidamente se tornou popular nas bibliotecas de outras escolas de engenharia na França. Ele também serviu de inspiração para os professores de mecânica aplicada nessas escolas, muitas vezes politécnicos em contato direto com Poncelet.

Mesmo tendo criado o curso de mecânica, Poncelet ainda se dedicava à pesquisa geométrica. Em março de 1824, apresentou à *Académie* duas memórias ⁴.

Poncelet, ao contrário do que era comum na época em que seu curso de Mecânica Aplicada era destinado apenas aos engenheiros, tinha a vontade de oferecer também um curso para os artesãos de Metz. Assim, de 1827 a 1829, ele ministrou um curso de Mecânica Industrial para artistas e trabalhadores da cidade. Esse movimento seguiu o exemplo de Ch. Dupin em Paris ⁵, que criou um curso de Geometria e Mecânica para indústrias e belas-artes, e Poncelet estabeleceu um curso semelhante em Metz.

Além disso, podemos ver no livro de Dupin a publicação de uma circular do Ministro da Marinha, Le Comte de Chabrol que já indicava o interesse da expansão do curso por toda a França:

Circular de Sua Excelência o Ministro da Marinha e das Colônias, dirigida aos Comandantes, Intendentes e Ordenadores da Marinha.

Paris, 24 de setembro de 1825.

SENHORES,

O sucesso do Curso de Mecânica ministrado pelo Barão Dupin no Conservatório de Artes e Ofícios me sugeriu a ideia de estender os benefícios deste ensino aos principais portos do reino. Eu pensei que um curso semelhante, aberto nos portos onde existem escolas de hidrografia, seria vantajoso para a indústria em geral e rentável para os trabalhadores das profissões marítimas.

Motivado por esses fatores, decidi que os professores das referidas escolas darão duas aulas por semana, com duração de uma hora, sobre geometria e mecânica aplicadas às artes e ofícios, seguindo o Curso do Conservatório de Paris.

Essa aula será realizada à noite, no horário em que geralmente cessam os trabalhos nas oficinas.

Eu enviarei sucessivamente aos professores de hidrografia as lições impressas do Curso do Barão Dupin; eles devem seguir exatamente o método deste acadêmico.

[...]

⁴ Mémoire relatif aux propriétés des centres de moyennes harmoniques e Mémoire relatif à la théorie des polaires réciproques

⁵ Géométrie et mécanique des Arts et Métiers et des Beaux-Arts.

Eu dou grande importância ao sucesso de um ensino tão útil para o desenvolvimento da nossa indústria; minha intenção é que vocês me informem sobre o resultado que ele obterá em sua área marítima.⁶

Signé, LE COMTE DE CHABROL (DUPIN, 1826, prefácio)

Essa determinação do Ministro da Marinha indica a intenção clara de divulgar o curso de Dupin no ensino, que é evidenciada pela propaganda que segue:

Propagação do ensino da Geometria e da Mecânica aplicadas às artes.

O novo ensino teve um grande desenvolvimento desde o início deste ano. Entre os Cursos abertos em 1825, destaca-se o ministrado por M. Prévost em Lyon, no palácio das Artes.

Nas cidades do interior, foram abertos este ano os seguintes Cursos:

[...]

Estamos preparando um relatório geral sobre a instituição desses Cursos e convidamos os professores a nos enviar notas indicativas do número de seus alunos e dos sucessos já alcançados no novo ensino. (DUPIN, 1826, prefácio)

Durante o início de sua carreira docente, Poncelet já possuía um considerável trabalho científico em Geometria e já havia se destacado como inventor mecânico, tendo criado uma ponte levadiça e uma roda d'água que leva seu nome, pelos quais recebeu o prêmio de Mecânica da *Académie des Sciences* em 1825. Ele incorporou grande parte de sua experiência em seu curso e, posteriormente, com todas as suas edições, tornou-se um dos principais atores na reformulação do ensino de Mecânica para engenheiros na França nas décadas de 1820 a 1850.

Em 1828 submeteu ao *Journal de Crelle* a Mémoire apresentada à *Académie des Sciences* em 1824. Publicada no t. III de 1828.

Em 1829, Poncelet publicou um artigo no *Journal de Crelle* que havia sido apresentado à *Académie des Sciences* em junho de 1824, mas cujo relatório só foi divulgado em fevereiro de 1828. Esse trabalho teve início em 1818, no *Annales de Gergonne*, com o artigo intitulado *Solution de deux problèmes de Géométrie analytique, suivie d'une théorie des polaires réciproques et de réflexions sur l'éliminations*, publicado no volume VIII em 1818. Ao ser submetido à *Académie* em 1824, demorou quatro anos para ser publicado, gerando uma polêmica com o editor dos *Annales*. Por isso, Poncelet decidiu publicar o artigo no *Journal de Crelle* em 1829.

Em setembro de 1831, Poncelet submeteu à *Académie* seu trabalho intitulado *Analyse des transversales, appliquée à la recherche des propriétés projectives des lignes et surfaces géométriques de tous les degrés, etc.* Posteriormente, em 1832, este trabalho foi publicado no *Journal de Crelle*, no t. III. No mesmo ano, François Arago convidou Poncelet a se candidatar à cadeira de Geometria na *Académie des Sciences* de Paris, porém, pela segunda vez, ele recusou o convite.

⁶ Circulaire de Son Excellence le Ministre de la Marine et des Colonies, adressée à MM. les Commandants, Intendants et Ordonnateurs de la Marine.
Paris, le 24 septembre 1825

Em 1832, foi publicado no *Correspondance physique et mathématique de Quetelet* no t. VII, p.119, a *Note sur quelques principes de transformation des relations métriques des figures, et spécialement sur la transformation des relations métriques qui sont projectives orthogonalement*.

A partir de 1834, tendo sido eleito à *Académie des Sciences*, Poncelet vai se dedicar exclusivamente à mecânica deixando completamente a geometria pura.

O avanço de Poncelet na área da Mecânica, tanto no *Cours de Mécanique appliquée aux machines* na *École d'Application de l'Artillerie et du Génie* de Metz quanto no *Cours de Mécanique industrielle* para trabalhadores de Metz entre 1827 e 1829, não se restringiu a esta cidade. Louis-Jacques Thenard (1777-1857), professor da Sorbonne e membro permanente do Conselho de Instrução Pública encarregado da educação científica, propôs a criação de uma cadeira de Mecânica com orientação prática na Sorbonne, em um relatório apresentado por uma comissão da Faculdade de Ciências de Paris ao então Ministro da Instrução Pública.

Assim, após três anos desde que ele se tornou membro da *Académie des Sciences* de Paris, a determinação do Ministro da Educação em promover inovações no campo do Ensino levou à instituição da cátedra de *Mécanique physique et expérimentale* na Faculdade de Ciências de Paris em 17 de março de 1834. Por decreto real em 12 de dezembro de 1837, foi criado um curso de Mecânica prática, especialmente para ser ministrada por Poncelet (??, p.113), paralelo ao ensino existente de Mecânica teórica (racional). O objetivo desse novo curso era tornar as ideias sólidas de mecânica acessíveis ao público que frequenta as grandes escolas e disponibilizar os resultados aplicáveis da mecânica racional aos jovens que têm apenas conhecimentos elementares em matemática. Este novo curso iria fornecer aos alunos as grandes noções de mecânica experimental, aquelas que devem fazer parte de uma boa educação, sem se aprofundar nos detalhes do ofício de construtor de máquinas. Desta forma em 1838, Poncelet retorna à docência, neste caso no curso de Mecânica aplicada da Faculdade de Ciências. Depois de dez anos, em 1848, Poncelet deixou a docência (TRIBOUT, 1936, p.122).

Em 1840, apresenta à *Académie des Sciences* sua memória sobre *La stabilité des revêtements et de leurs fondations*. Estas pesquisas haviam ocupado Poncelet por quatro anos e fez a substituições dos cálculos complicados por construções puramente geométricas. Este é um dos poucos momentos no qual Poncelet retoma seus métodos de Geometria pura que havia deixado recalcado após sua última publicação em Geometria no *Journal de Crelle* em 1832. Neste mesmo ano foi eleito presidente da *Académie des Sciences* pelo biênio 40-42.

Em 1844 é conduzido ao posto de coronel de engenharia.

Em 1848, ano de sua possível condução à reserva, pois completaria 60 anos em 1º de julho, será um período conturbado. Em fevereiro eclode a Revolução. Arago torna-se Ministro da Guerra e promove, Poncelet, ao posto de general, nomeando-o em seguida Comandante da *École Polytechnique*⁷. Nesta instituição, na qual deu seus passos iniciais na carreira, realizou o fechamento de um processo: havia iniciado sua carreira em 1807, ao entrar nesta Instituição, e segue à reserva após comandá-la no período de 1848-1850. Como membro da Comissão

⁷ Nomeação ao posto de General em 19 de abril e ao Comando da *École Polytechnique* em 29 de abril.

encarregada de preparar a lei orgânica do Ensino ⁸ por diversas vezes usa da palavra para defender os interesses da *École Polytechnique*. Em 26 de junho foi nomeado *Commandant Supérieur des Gardes Nationale de la Siene*. Em 29 de junho retoma o comando da *École Polytechnique*, promovendo as reformas nesta Instituição.

Em 4 de novembro de 1850 é conduzido à reserva. E em 9 de dezembro é nomeado *Commandeur de la Légion d'Honneur*.

Em 1851 foi nomeado presidente do juri internacional da *Exposition universelle* de Londres sobre máquinas e ferramentas. Após o retorno, será encarregado por Ch. Dupin de fazer o relatório da *Exposition universelle*. Irá dedicar quase sete anos na elaboração de dois livros ⁹ listando as ferramentas mecânicas e suas origens. Este trabalho foi concluído em 1857.

A partir de 1862, com a colaboração de MM. Mannheim e Moutard, e a convite da editora Mallet-Bachelier, Poncelet iniciou a publicação de sua coleção completa de obras Geométricas. Essa coleção consistiria em quatro volumes escritos nos anos de 1862, 1864, 1865 e 1866. Abaixo estão listados os títulos e uma breve resenha de cada um.

Em 1862, Poncelet publicou o primeiro volume intitulado *Applications d'Analyse et de Géométrie, qui ont servi, en 1822, de principal fondement au Traité des Propriétés projectives des figures*. Esse volume é composto pelos sete manuscritos de *Saratoff* durante o período de 1813 e 1814, enquanto ele estava preso na Rússia. Além disso, o volume também inclui outros escritos, notas e adições de Poncelet, bem como acréscimos de seus colaboradores Mannheim e Moutard, que foram antigos estudantes na *École Polytechnique*.

A publicação deste volume é importante porque contém os principais fundamentos do trabalho de Poncelet sobre propriedades projetivas das figuras, que desenvolveu em *Saratoff*.

Em 1864, Poncelet publicou o segundo volume de *Applications d'Analyse et de Géométrie*, que compreendia todos os artigos que ele havia escrito após seu retorno à França até a publicação de seu tratado de 1822. Isso incluía seus artigos publicados no *Annales* de Gergonne, suas memórias submetidas às Academias de Paris e Metz, suas trocas de cartas com Servois, Terquem e Brianchon, além de um exame crítico das opiniões e julgamentos emitidos por Cauchy em seu relatório sobre a memória apresentada à *Académie des Sciences* de Paris. Em outras palavras, este volume era uma compilação abrangente das contribuições de Poncelet à geometria, e também incluía suas críticas às opiniões de outros matemáticos renomados da época.

No ano de 1865, Poncelet publicou a segunda edição de seu famoso livro *Traité des Propriétés projectives des figures*, que havia sido lançado originalmente em 1822. A nova edição incluía algumas adições, como as *Annotations de la seconde édition du Traité*, que apresentavam diversas notas e comentários sobre o livro original. Além disso, um dos destaques dessa nova edição era a inclusão de uma carta enviada por M. Ch. Dupin a Poncelet em 13 de novembro de 1822, logo após o lançamento do livro original. Nessa carta, Dupin fazia um convite para que Poncelet aceitasse a indicação para a cadeira de Geometria da *Académie des Sciences* de Paris.

⁸ Poncelet era o representante do Departamento de Moselle na *Assemblée Constituante* desde 1º de maio de 1848.

⁹ Rapport sur les machines et outils employés dans les manufactures

Em 1866, foi publicado o segundo volume do *Traité des Propriétés projectives des figures* escrito por Poncelet, que contém as duas memórias submetidas à Académie de Paris em 1824¹⁰, abordando temas como a teoria geral das polares recíprocas e a teoria geral dos centros de médias harmônicas. O volume também inclui vários artigos de Geometria Pura publicados após a primeira edição do *Traité* de 1822, bem como relatórios da Académie sobre as duas memórias de 1824, uma nota sobre diversos artigos do *Bulletin des Sciences de Férussac* e uma resposta de Poncelet às reclamações de Plücker.

Em dezembro de 1867 prestes a iniciar a reedição dos seus trabalhos de Mecânica, ele diz:

Minha cabeça está boa e espero poder publicar minha mecânica neste inverno!
¹¹(DIDION, 1870, p.144)

No dia 22 deste mês cai enfermo e vai a óbito.

É notável observar que no Instituto de Paris onde estão registradas as alterações na vida militar de Poncelet consta nesses registros, erroneamente, a data de falecimento como sendo 22 de dezembro de 1857. Na realidade, Poncelet falecerá dez anos após essa data, ou seja, em 22 de dezembro de 1867.¹²

Infelizmente, sua morte interrompeu o projeto que ele pretendia iniciar. Posteriormente, ??, p.273-276)¹³ retomou o projeto e republicou, em 1870, os cursos de mecânica industrial e mecânica aplicada a máquinas que Poncelet havia ministrado em Metz.

O prêmio Poncelet

O Prêmio Poncelet é um prêmio de matemática que é outorgada a um importante contribuição para a geometria projetiva e a matemática aplicada. O prêmio foi estabelecido em 1868 pela *Académie des Sciences* de Paris, com o objetivo de reconhecer realizações notáveis no campo da geometria e mecânica. É concedido a cada dois anos. Abordaremos mais sobre o prêmio ao falarmos sobre patrimonialização, pois nos indica um Poncelet já na história, ou seja, faz parte do processo de patrimonialização.

2.2 Conclusão

Poncelet concentrou seu trabalho científico e técnico em duas áreas distintas, cada uma correspondendo a uma fase diferente em sua carreira, ambas com ênfase na geometria: a Geometria Projetiva e a Mecânica Aplicada. Seu trabalho na Geometria foi o mais notável, com grande produção concentrada no período entre 1813 e 1824, com exceção de alguns artigos publicados posteriormente.

¹⁰ Mémoire relatif aux propriétés des centres de moyennes harmoniques de março de 1824, cujo relatório é de janeiro de 1826 e Mémoire relatif à la théorie des polaires réciproques de junho de 1824 cujo relatório é de fevereiro de 1828

¹¹ Ma tête est bonne et j'espère bien pouvoir cet hiver publier ma mécanique !

¹² No final deste trabalho constam as folhas de alteração militar de Poncelet

¹³ Engenheiro-Chefe das Manufaturas do Estado

O trabalho mais significativo deste período, como mencionado anteriormente, foi o *Traité des propriétés projectives des figures* de 1822.

Poncelet publica em 1832 seus últimos trabalhos, em Geometria Pura, antes das suas coletâneas de 1862. Portanto, são 30 anos de afastamento das publicações em Geometria.

No entanto, este afastamento se deu de forma gradativa. Poncelet, por força da função militar, inicia uma série de trabalhos em represas e estudos sobre quedas d'água. Assim, começa a apresentar alguns trabalhos nesta área e que teve como reconhecimento o prêmio *Montyon de Mécanica* concedido pela *Académie des Sciences* de Paris. Paralelamente, no ano de 1825, passa a ministrar *Cours de Mécanique appliquée aux machines* ministrado na *École d'Application de l'Artillerie et du Génie* de Metz, bem como o *Cours de Mécanique industrielle*, ministrado aos trabalhadores Messianos, de 1827 à 1829. Ao assumir a cadeira de Mecânica da *Académie des Sciences* de Paris, em 1834, afaste-se completamente das pesquisas em Geometria.

Deixando um grande exemplo na ciência francesa onde seu dever de soldado, a responsabilidade de oficial e de administrador é um legado às novas gerações.

Se é possível afirmar que a recepção e a apreciação da obra de um autor ocorre normalmente durante a sua vida, a patrimonialização pode ser entendida como o processo de proteção e homenagem à obra do ilustre escritor. É possível observar diversas homenagens prestadas ao autor através de personagens inspirados em sua figura, ao invés de sua obra escrita. Por exemplo, em Metz, a rua onde o General Poncelet residiu passou a ser chamada de *Général Poncelet*, por decisão do Conselho Municipal.

Dos cadernos de Saratoff à Académie de Sciences de Paris: A gênese do Tratado e os demais artigos de Geometria de Poncelet

Neste capítulo, será apresentado o Tratado que explica o conteúdo de cada capítulo, com o objetivo de obtermos uma compreensão geral da geografia do trabalho. Adicionalmente, iremos discutir dois artigos que foram escritos após o tratado: o primeiro intitulado de *Mémoire relatif aux propriétés des centres de moyennes harmoniques*, de março de 1824, e o segundo intitulado de *Mémoire relatif à la théorie des polaires réciproques*, de junho de 1824, submetidos à *Académie des Sciences* de Paris. Desta forma, acrescidos da análise desses artigos, pretendemos entender a obra geométrica de Poncelet e compreender que o período entre *Saratoff* e sua eleição à *Académie* inclui os fundamentos de sua geometria.

3.1 Os novos conceitos na Geometria Pura

Desde Descartes até o final do século XVIII, a utilização de métodos geométricos sem o auxílio de equações da álgebra perdeu destaque. No entanto, após a Revolução, houve um impulso no ensino desses métodos, liderado principalmente pela Geometria Descritiva de Gaspard Monge. Vários geômetras seguiram seu exemplo, baseados nas ideias de projeção, e estabeleceram novos resultados utilizando métodos geométricos, às vezes superando a análise algébrica. Eles criaram novas noções como transversais, pólos e polares, eixos radicais e figuras ideais ou imaginárias. Os resultados obtidos foram apresentados em obras de Monge, Servois, Carnot, Poncelet, entre outros, e divulgados em periódicos como o *Journal de l'École polytechnique*, a *Correspondance sur l'École Polytechnique* e os *Annales de Mathématiques pures et appliquées*. Esses resultados também apareceram em outros periódicos ao longo do século.

Por sua vez, Poncelet designou todas essas iniciativas que renovam e atualizam a geometria de *Géométrie rationnelle*, observando a ideia principal que permeia os trabalhos dos geômetras neste período: as propriedades projetivas. Isso conduziu o seu principal trabalho que será denominado de *Traité des propriétés projectives des figures* publicado em 1822.

Poncelet, em seu *Traité* de 1822, trabalha predominantemente com Geometria Sintética, em oposição à Geometria Analítica, utilizando novas concepções de processos geométricos percebendo que o princípio de projeção está permeando os trabalhos dos geômetras contemporâneos. A Geometria Sintética é uma abordagem que se baseia em relações entre figuras e propriedades dos objetos geométricos, sem a necessidade de coordenadas ou equações algébricas. Em contrapartida, a Geometria Analítica utiliza coordenadas e equações algébricas para representar figuras geométricas e resolver problemas, daí a denominação, por alguns, de geometria das coordenadas.

Assim, julgamos interessante identificar as contribuições das propriedades projetivas por meio de obras importantes como a *Géométrie Descriptive* de Gaspard Monge, a *Géométrie de position* de Lazare Carnot, as *Solutions peu connues* de Joseph Servois. Pontuando essas propriedades no *Traité des propriétés projectives des figures* de Jean-Victor Poncelet. Essas obras apresentam conceitos inovadores e processos geométricos que se destacam por seu rigor matemático e por uma abordagem mais voltada para as relações do que para as equações. Poncelet, em particular, defende o uso da projeção como recurso sistemático na resolução de problemas geométricos, o que caracteriza a geometria projetiva.

A seguir, abordaremos a presença da geometria racional no ensino, sendo menos comum no ensino tradicional de nível médio e superior, mas mais presente na educação industrial, onde seus elementos são incorporados. Isso sugere a grande praticidade da geometria racional, que encontra sua aplicação direta na Mecânica. É interessante notar que Poncelet, autor do *Traité des propriétés projectives des figures*, recebeu um prêmio da *Académie de Sciences* de Paris por seu trabalho em Mecânica, e posteriormente foi eleito para uma cadeira de Mecânica na mesma instituição, o que não é uma coincidência.

Ao abordarmos algumas das obras anteriores a 1822, que mencionamos acima, nosso objetivo é encontrar os traços das ideias de projeção e exemplificar os novos conceitos introduzidos na Geometria no início do século XIX. Esses trabalhos, escritos por geômetras contemporâneos, representam os novos conceitos na geometria e suas aplicações na resolução de problemas. Com isso, podemos ter uma visão mais ampla e contextualizada do desenvolvimento da geometria projetiva naquela época.

A Geometria Descritiva de Monge

A Geometria Descritiva descreve os processos de representação de projeções de figuras com aplicação direta para artesãos e também como método para descobrir e demonstrar propriedades novas. Os raciocínios utilizados são predominantemente geométricos e baseados na visualização das figuras e movimentos de suas partes no espaço, sem a utilização de álgebra ou métricas. As proposições fundamentam-se na geometria elementar, oferecendo uma abordagem prática e essencialmente geométrica.

Os conceitos de Monge foram amplamente disseminados graças aos seus inúmeros trabalhos de ensino, primeiramente na *École du génie* de Mézières, seguida pela *École Normale*. Posteriormente, suas ideias foram ensinadas na *École Polytechnique*, onde a geometria descritiva seria um tema recorrente ao longo do século XIX (LAURENTIN, 2000).

A Geometria projetiva tem como objetivos fundamentais a representação acurada de objetos tridimensionais em desenhos bidimensionais e a dedução de propriedades desses objetos a partir de descrições precisas. Seu propósito é alcançar a verdade sobre a forma e a posição dos corpos representados. Essa abordagem é uma ferramenta crucial para a análise e compreensão de objetos e fenômenos espaciais, permitindo que sejam visualizados e manipulados com maior clareza e precisão. Na Geometria projetiva, é enfatizada a noção das propriedades projetivas das figuras, ou seja, aquelas que permanecem inalteradas sob projeções geométricas.

Um claro exemplo de propriedades projetivas. A figura abaixo ilustra a projeção de três esferas e os traços de dois planos. O objetivo é traçar um plano tangente às esferas. A aplicação do teorema de Monge, que estabelece que os três pontos de similitude de três pares de esferas são colineares, permite encontrar esse plano tangente de forma precisa. Esse exemplo demonstra claramente a aplicação das propriedades projetivas na resolução de problemas geométricos e evidencia a importância dessa abordagem na Geometria.

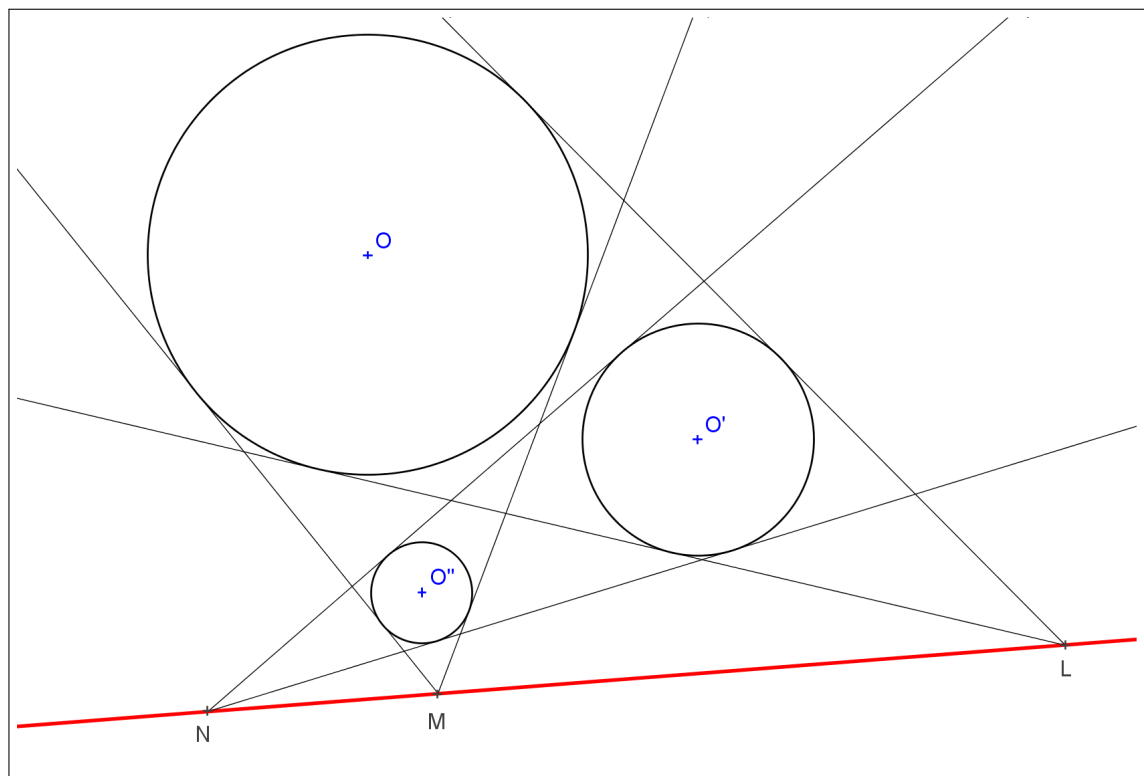


Figura 3.1 – Teorema de Monge

De forma intuitiva, podemos deduzir o teorema de Monge que afirma que o centro de similitude de três circunferências coplanares são colineares. Para isso, podemos seccionar as três esferas pelo plano definido pelos seus três centros e encontrar um plano tangente às três esferas

que também é tangente aos três cones tangentes duas a duas às esferas. Dessa forma, podemos concluir que os três vértices desses cones, que estão na interseção dos dois planos tangentes, são colineares, ou seja, a reta de intersecção dos dois planos tangentes contém os três vértices.

A solução requer um processo de raciocínio geométrico que destaca a importância da propriedade projetiva, que é fundamental para a resolução de problemas que envolvem figuras tridimensionais e sua representação em duas dimensões. Segundo o autor, a solução de problemas geométricos requer um processo de raciocínio que exige uma grande habilidade de visualização da figura, o que nem sempre é possível devido à natureza tridimensional do objeto em questão. Poncelet reconhece que a solução encontrada por Monge envolve o uso da projeção como um meio de representar as figuras tridimensionais em duas dimensões, o que permite a realização de cálculos e análises geométricas com maior facilidade e precisão. Em suma, o conceito de projeção é fundamental na Geometria Descritiva.

A Geometria de Posição de Carnot

Lazare Carnot publicou três obras matemáticas ¹, que tratam sobre as relações de posição entre as partes de uma figura geométrica, resolução de problemas geométricos baseados nessas relações e propostas sobre transversais.

Carnot sustenta que a Análise Algébrica é inadequada para a geometria quando conduz a manipulação de expressões desconectadas da figura, demonstrando sua limitação em certas situações (NABONNAND, 2006). Ele argumenta que a álgebra lida com equações sem conexão com o significado geométrico, como quantidades negativas e imaginárias.

Carnot propõe uma abordagem diferente para tratar a Geometria, onde as relações entre as partes das figuras são divididas em duas categorias principais: relações de grandezas e de posição. As relações de grandezas são aquelas que se referem ao valor absoluto das quantidades, enquanto as relações de posição exprimem a posição relativa dos elementos da figura. Nesse sentido, Carnot argumenta que é possível tratar a Geometria sem se preocupar com a posição relativa dos elementos e figuras geométricas, o que sugere implicitamente a ideia de projeção como uma ferramenta para representar figuras em planos sem perder informações importantes sobre sua forma e estrutura.

Poncelet também defendia a ideia de Carnot de que a Geometria deveria ser tratada sem se preocupar com a posição relativa dos elementos e figuras geométricas. Assim como Carnot, ele fazia uma distinção entre as relações métricas, que envolvem as grandezas, e as relações descritivas, que envolvem a posição relativa dos elementos da figura. Em seu Tratado, Poncelet desenvolveu o estudo das propriedades das figuras que permanecem inalteradas através de projeções.

¹ Carnot, Lazare, *De la corrélation des figures de géométrie*, Paris: Duprat, 1801; Carnot, *Géométrie de position*, Paris : Duprat, 1803; Carnot, *Mémoire sur les relations qui existent entre les distances respectives qui existent entre cinq points quelconques pris dans l'espace, suivi d'un essai sur la théorie des transversales*, Paris : Courcier, 1806.

Em outras palavras, Carnot busca encontrar as condições necessárias para que seu raciocínio geométrico possa ser aplicado a um conjunto de figuras que estão relacionadas a uma figura primitiva. Essas condições incluem a identificação de propriedades que são invariantes em diferentes projeções. Em termos de Poncelet, isso se refere a encontrar propriedades mais abstratas e gerais, que se concentram nas propriedades que permanecem invariantes sob projeções.

A imagem geométrica de Carnot é muito influente para os trabalhos em mecânica e há uma analogia muito forte entre as transformações de uma figura e de um sistema mecânico. Observamos isto em Monge e veremos, também, em Poncelet.

Carnot reconhece que sua geometria se baseia na Geometria elementar e que essa geometria pode ser usada como um meio pedagógico para ensinar rigor e reflexão. Ele também acredita que a Geometria elementar é fundamental para o avanço da Geometria como um todo. (CARNOT, 1803, p. xxx)

Carnot questiona se a "ciência das projeções" deve ser considerada uma parte integral da Geometria elementar. Ele rejeita a ideia de que essa teoria deve ser estudada apenas em aplicações geométricas, pois considera difícil comparar os princípios com as aplicações. Para Carnot, a noção de problema geral em Geometria surge a partir da consideração da organização e da plenitude dos resultados da Geometria elementar. Ele argumenta que, mesmo sendo uma coleção completa de proposições, a Geometria elementar possui áreas negligenciadas que precisam ser preenchidas para que se alcance a solução desse problema geral. Nesse sentido, a "ciência das projeções" é uma dessas áreas negligenciadas que precisam ser estudadas para se compreender a Geometria de forma completa. A analogia com os sistemas mecânicos sugere que ele via a Geometria como uma ciência aplicável em diversas áreas do conhecimento.

Para Carnot, a Síntese era mais iluminada porque permitia trabalhar com objetos matemáticos sem perdê-los de vista, ao contrário da Análise.

Vejamos um exemplo ilustrativo da ideia fundamental que sustenta o conceito de projeção. É importante notar que essa ideia está implícita. Suponha um ponto de projeção no espaço, raios que partem desse ponto e um plano de projeção. Ao deslocar o ponto de projeção, a imagem projetada assume uma nova configuração.

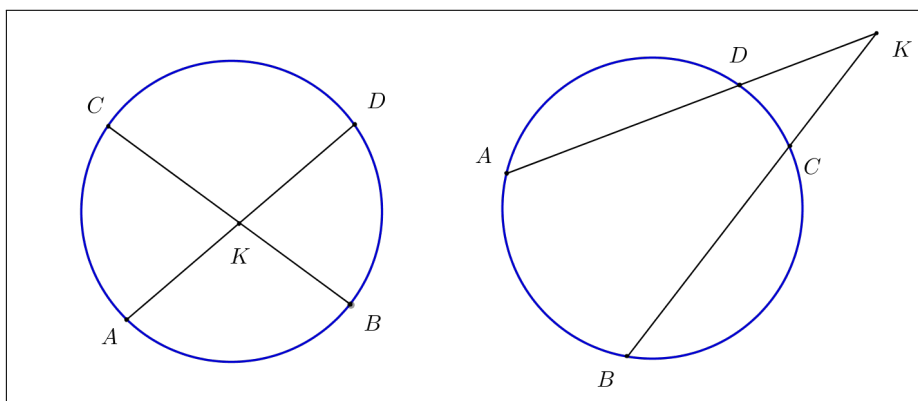


Figura 3.2 – Invariância

Nas figura 3.2 , é verdadeira a relação $KA.KD = KC.KB$. Na Geometria euclidiana, necessita-se de duas provas separadas, uma para cada posição de K , interiormente ou exteriormente à circunferência de círculo. A ideia agora consiste em considerar as duas figuras como correlatas, ou seja, visualizar a segunda figura como uma transformação contínua da primeira figura, através de um movimento contínuo do ponto K . É exatamente isso que Poncelet está investigando em sua obra, examinando a mudança do ponto de projeção central e, conseqüentemente, a permanência de propriedades geométricas.

A ideia de correlação entre figuras geométricas sugere uma nova visão da geometria, na qual os objetos geométricos não são mais considerados isolados, como na concepção euclidiana clássica, mas sim como partes de uma cadeia de figuras continuamente móveis. É possível que essa ideia tenha tido uma influência profunda em Poncelet, como evidenciado na introdução do terceiro caderno de *Saratoff*, no qual ele manifesta.

As soluções pouco conhecidas de Servois

O que torna o trabalho de Servois original é o fato de que, devido às exigências das manobras no campo militar, ele propõe o uso de apenas dois instrumentos para as construções: estacas para efetuar alinhamentos e corda para reportar comprimentos. No prancha, consiste em fazer construções utilizando apenas a régua.

Para exemplificar a ideia proposta por Servois, podemos considerar o seguinte problema: imagine que há uma estrada que começa em um ponto na montanha e queremos descobrir o ponto em que ela termina para garantir que o alinhamento seja mantido e a escavação possa ser iniciada simultaneamente em ambos os lados.

BC são dois pontos na estrada cuja extensão procuramos: em um ponto *A*, fora da reta, e de onde podemos ver *B* e *C*, coloque uma “estaca”. Coloque no segmento *AB* uma “estaca” *D*, depois uma terceira “estaca”, *E*, em *AC*, de modo que o alinhamento *DE* passe sobre o obstáculo *O* que oculta a estrada definida pelos pontos *B* e *C*. Coloque uma quarta “estaca” *F*, interseção dos dois alinhamentos *BE*, *CD*. Coloque uma quinta “estaca” *G* sobre *AF*, depois uma sexta *M* em *BG* e *AB*, depois uma sétima *N* em *DG* e *AC*, finalmente, coloque uma oitava, *H*, em conjunto com os dois alinhamentos *DE* e *MN*. Esta última “estaca” estará na extensão de *BC* (SERVOIS, 1805, p.31)

A justificativa desta construção é deduzida da concorrência das retas *BC*, *DE* e *MN* no ponto *H*.

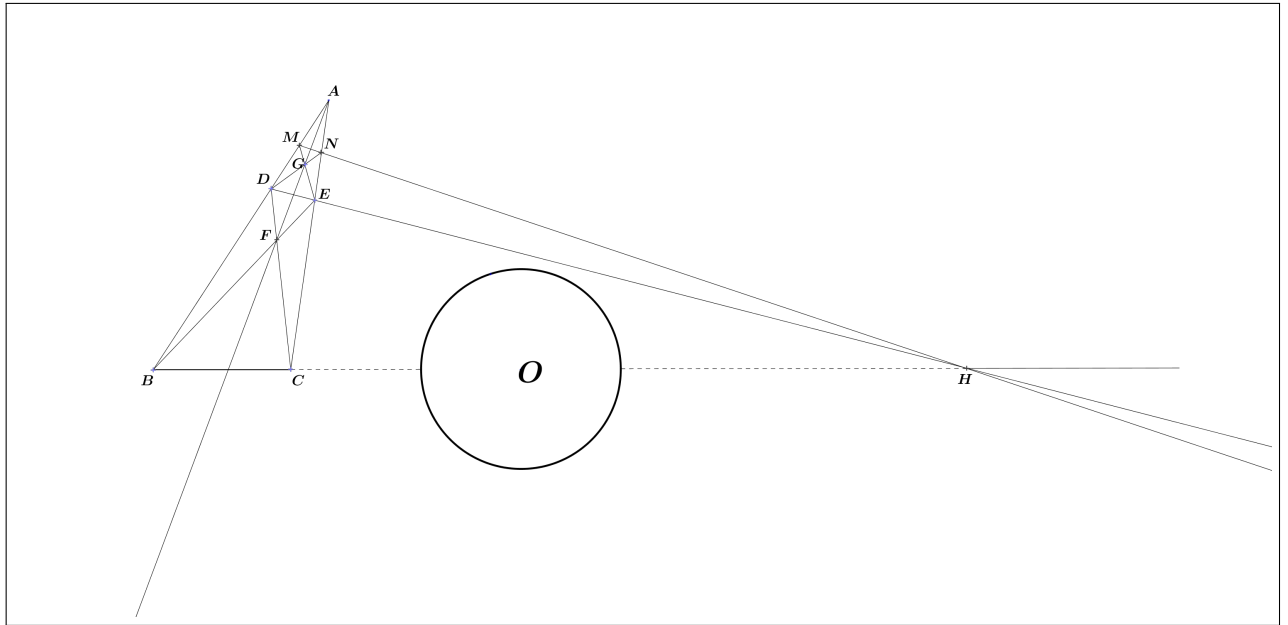


Figura 3.3 – Construção apenas com a régua

No primeiro volume dos *Annales de mathématiques pures et appliquées*, Servois apresenta uma importante contribuição para a Geometria: a ideia de pólo de uma reta em relação a uma cônica. Essa ideia permite uma abordagem mais eficiente para a solução de problemas envolvendo cônicas, como a identificação de pontos de tangência, interseções e outros aspectos geométricos relacionados. Servois mostrou que, por meio do conceito de pólo, é possível converter problemas de cônicas em problemas de retas e vice-versa, simplificando a análise e resolução desses problemas:

Atribuindo-se uma reta e uma curva de segunda ordem, chamo pólo da reta o ponto [...] em torno do qual giram todas as cordas dos pontos de contato dos pares de tangentes à curva dos diferentes pontos da reta. (SERVOIS, 1810, p.337)

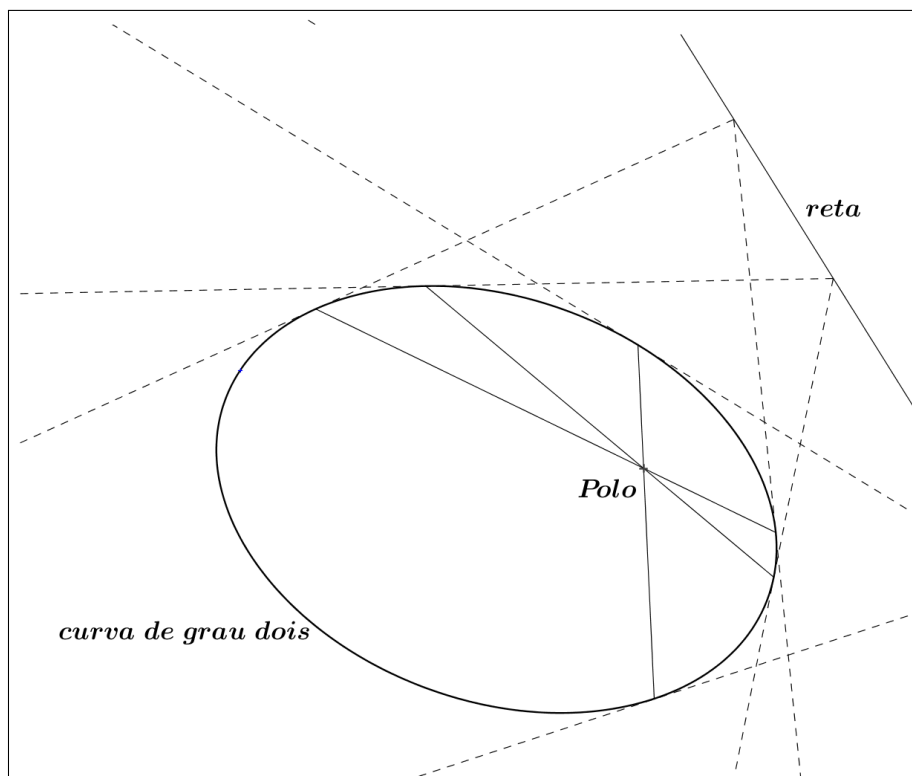


Figura 3.4 – Polo de uma reta em relação à curva de grau dois

O trabalho de Servois destaca a presença da ideia de projeção, o que pode ter sido percebido por Poncelet ao imaginar o movimento do centro de projeção no espaço, causando a rotação das cordas de contato em torno do polo. Em outras palavras, Servois utilizou conceitos de projeção implicitamente para descrever movimentos de objetos geométricos.

Propriedades projetivas das figuras

É relevante ressaltar que, anteriormente neste trabalho, foi mencionado que a geometria que Poncelet desenvolveu em seu tratado é chamada por ele de geometria racional. Essa geometria é amplamente aplicável em Mecânica e, talvez por esse motivo, não seja surpreendente o caminho que Poncelet percorreu ao se afastar gradualmente da pesquisa em Geometria. Ele foi instrutor de Mecânica na Escola de Aplicação de Metz, ocupou a cátedra de Mecânica na Academia de Ciências de Paris e tornou-se professor na Sorbonne, onde ensinou a aplicação da geometria à Mecânica.

Poncelet não considera a análise algébrica superior à geometria, mas sim que "cada uma dessas duas ciências tem meios específicos e não poderia, sem grande prejuízo para o avanço da ciência, cultivar uma sem a outra"(PONCELET, 1817-1818, p.141). Ele descreve as vantagens da análise algébrica em relação à geometria racional:

Enquanto a geometria analítica oferece, por seu próprio curso, meios gerais e uniformes para proceder à solução das questões que surgem, à busca das propriedades das figuras; enquanto ela chega a resultados cuja generalidade é sem limites, a outra [geometria racional] procede por acaso; seu progresso

depende inteiramente da sagacidade de quem o emprega, e seus resultados são quase sempre limitados ao estado particular da figura em questão. Através dos esforços sucessivos dos geômetras, verdades particulares se multiplicaram sem cessar, mas raramente aconteceu que o método e a teoria geral tenham ganhado com isso. (PONCELET, 1822, p.xix)

De acordo com Poncelet, a ampla generalidade dos resultados da análise algébrica decorre do uso de "características que não têm valor por si mesmas", que são essencialmente "seres de razão" e parecem ser uma prerrogativa exclusiva da Álgebra.

Diferentemente de Carnot, que rejeita a validade dessas características nas demonstrações geométricas, Poncelet procura estabelecer noções que possam desempenhar um papel equivalente em Geometria, como os "seres de razão" da Álgebra:

Se fosse possível aplicar-lhe o raciocínio implícito, desconsiderando a figura [...], a Geometria ordinária, sem por isso empregar os cálculos e os sinais da Álgebra, provaria, em muitos aspectos, rival da Geometria Analítica (PONCELET, 1822, p. xxii).

Esse raciocínio implícito é aplicável as noções como pontos no infinito, bem como às novas noções de elementos ideais e imaginários na figura. (FRIEDELMEYER, 2007)

Por exemplo, Poncelet ilustra a eficácia das noções de secante ideal e pontos imaginários utilizando uma curva de segunda ordem C , juntamente com a secante MN e o diâmetro conjugado AB (o lugar geométrico dos pontos médios das cordas de mesma direção). Neste caso, o diâmetro AB intersecta a corda MN em seu ponto médio O , as tangentes à curva em M e N se encontram em um ponto O' do diâmetro e O e O' são conjugados em relação a A e B . Isso implica em uma proporção específica:

$$\frac{O'A}{O'B} = \frac{OA}{OB}$$

Poncelet notou que os pontos O e O' poderiam ser determinados mesmo quando a reta MN não intersecta a curva C . Nesta situação a reta é chamada de secante ideal, em que os pontos de interseção da reta com a curva são considerados imaginários. Esses conceitos são possíveis graças ao princípio da continuidade, que preserva as propriedades do objeto geométrico, e ao princípio de projeção, que permite mover esse objeto por meio do deslocamento do centro de projeção. Aqui fica evidente a importância do conceito de propriedade projetiva.

O método das projeções é uma técnica poderosa na geometria para trabalhar com figuras em perspectiva e relacioná-las a figuras planas, com o auxílio das propriedades projetivas. Embora a geometria tenha outros meios gerais, o método das projeções é considerado direto e uniforme, permitindo a resolução de muitos problemas geométricos. Em outras palavras, as projeções oferecem uma maneira sistemática e unificada de trabalhar com objetos geométricos em diferentes posições espaciais, mantendo suas propriedades invariantes.

Poncelet percebe nos trabalhos de outros geômetras que a ideia do princípio de projeção é utilizada mesmo que implicitamente. Assim, acreditava que existiam duas abordagens igualmente poderosas para melhorar a geometria racional: uma consistia em expandir o escopo das concepções dessa geometria por meio do princípio da continuidade, enquanto a outra utilizava os princípios da doutrina das projeções para avançar de forma rápida e confiante na busca da verdade geométrica.

A doutrina das projeções geométricas supõe um método que se baseia na distinção entre as propriedades das figuras que são preservadas pela projeção. Esse método permite estabelecer propriedades em figuras por meio da análise de suas projeções. Se for possível demonstrar que uma propriedade é válida em todas as projeções da figura, então ela pode ser considerada uma propriedade geral da figura. No entanto, algumas projeções podem ser mais simples do que outras, o que torna a demonstração ou pesquisa proposta mais fácil. Em resumo, as propriedades projetivas é uma ferramenta útil para estudar figuras em perspectiva, permitindo que se trabalhe com figuras mais simples.

Uma das projeções mais comuns é a cônica ou central, que não afeta a correlação, grau ou ordem da figura original. Geralmente, a projeção também não altera as relações gráficas entre as partes da figura, que dependem apenas da direção indefinida das retas, suas intersecções, contatos e assim por diante.

Poncelet apresenta um exemplo para ilustrar como é possível determinar as propriedades de quadriláteros inscritos e circunscritos em uma cônica. Ele começa demonstrando que qualquer figura formada por uma cônica e uma reta pode ser considerada a projeção de um círculo e uma reta do infinito, e em seguida, aplica esse princípio à cônica e à reta que une os pontos de encontro dos lados opostos do quadrilátero inscrito. Com base nisso, ele conclui que o quadrilátero inscrito na cônica tem lados opostos paralelos, o que o torna um retângulo, e que o quadrilátero circunscrito é um losango.

Uma vez estabelecida a figura mais simples, é fácil perceber que as quatro diagonais dos dois quadriláteros se encontram em um único ponto, ou que os lados opostos dos dois quadriláteros são paralelos e se encontram em um ponto da reta no infinito. Como essas propriedades são projetivas, elas também se mantêm verdadeiras para a figura inicial.

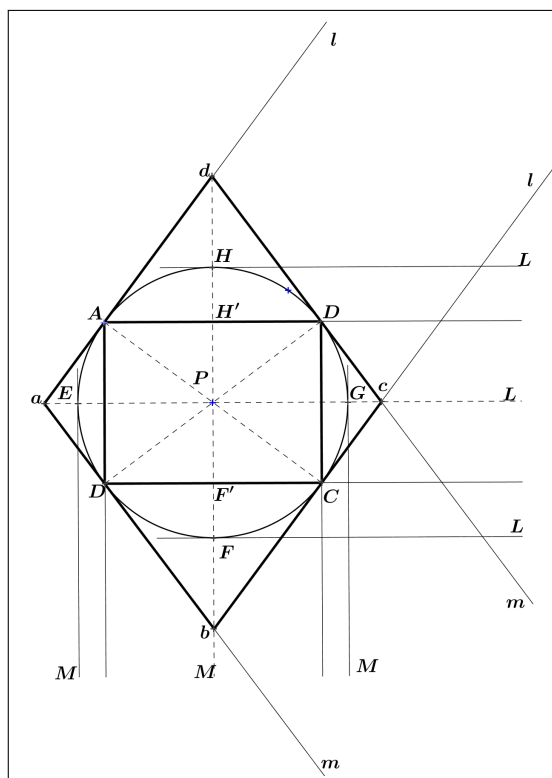


Figura 3.5 – Quadrilátero inscrito e circunscrito: retas paralelas encontram-se no infinito sobre a reta do infinito.

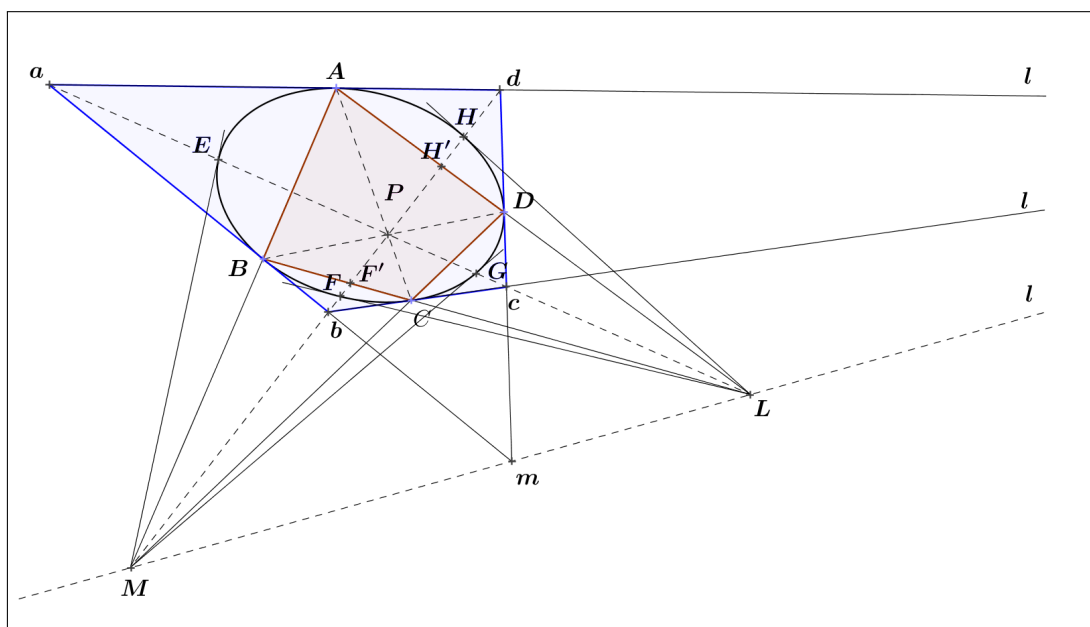


Figura 3.6 – Quadrilátero inscrito e circunscrito: são colineares as intersecções dos prolongamentos dos lados

Ao fazer uso de pontos no infinito e de uma projeção apropriada, Poncelet é capaz de estender as concepções geométricas e, assim, demonstrar as propriedades da figura.

O conceito de projeção foi o principal foco de Poncelet em sua busca pela renovação do método de demonstração em geometria. Ele reconheceu a importância da projeção para aprimorar a geometria, utilizando-a como uma ferramenta poderosa para avançar de forma rápida e sem hesitações na busca de verdades geométricas. Em suas demonstrações, Poncelet frequentemente aplicava o princípio da projeção, utilizando-o para encontrar propriedades de figuras geométricas, como quadriláteros inscritos e circunscritos a uma cônica. Exatamente como a Figura 3.6. Ele buscava sistematicamente as propriedades que são preservadas por projeção, denominadas como propriedades projetivas das figuras. Com essa técnica, ofereceu uma das principais contribuições para a matemática, permitindo um entendimento mais profundo das relações entre as figuras e seus aspectos geométricos. Essa abordagem independe da posição ou orientação das figuras no espaço, tornando a Geometria Projetiva um novo ramo.

Ao adicionar o princípio da continuidade ao princípio de projeção, Poncelet pôde utilizar o conceito de pontos e retas no infinito, bem como pontos e retas imaginárias no infinito. Ele percebeu que os geômetras usavam o conceito de princípio de projeção, às vezes implicitamente. Um exemplo é a polar do centro de uma circunferência, que pode ser entendida como estando no infinito como o exemplo da Figura 3.5 onde o encontro das diagonais é o polo da reta no infinito.

Desta forma, pôde identificar dois princípios fundamentais para estudar propriedades projetivas das figuras: o princípio de projeção, que revela as propriedades invariantes sob perspectiva, e o princípio de continuidade, que permite considerar todas as transformações de uma figura ao variar o ponto de perspectiva simultaneamente. Esses princípios permitem a Poncelet conectar elementos ao infinito, imaginários ou não, à ideia de continuidade.

No estudo de Poncelet sobre um feixe de circunferências são introduzidos pela primeira vez em seu tratado de 1822 os pontos imaginários. (PONCELET, 1822, p.123).

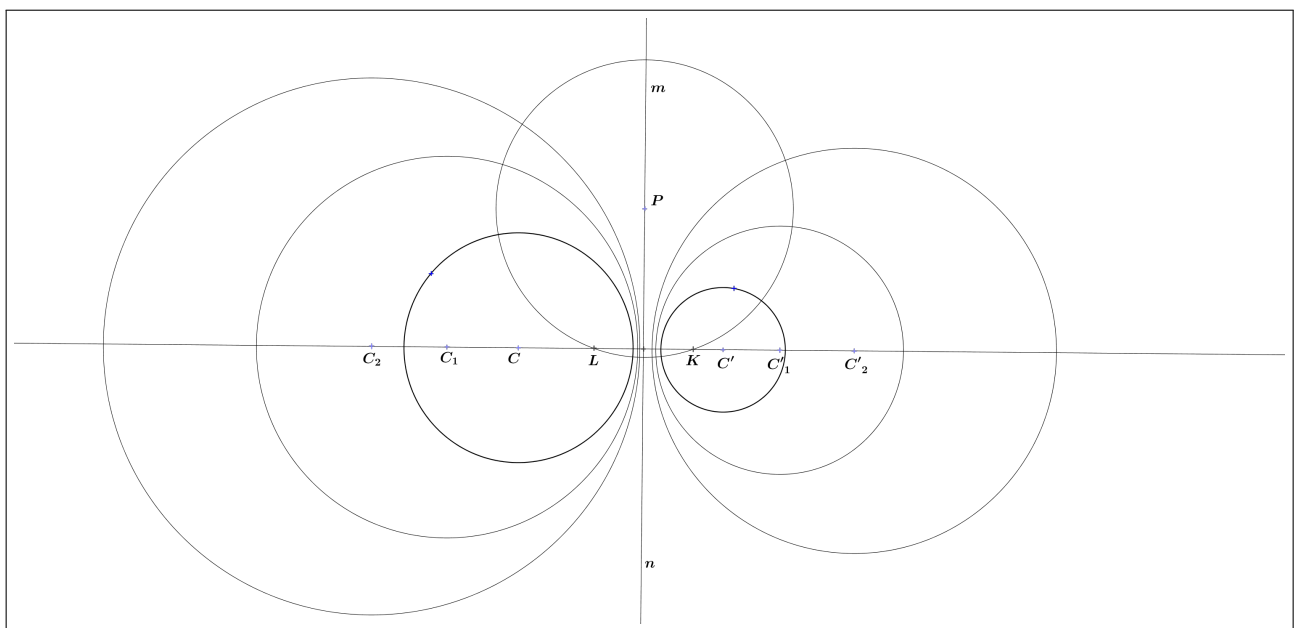


Figura 3.7 – Sequência de circunferência de círculos, pontos limites.

Poncelet está analisando um conjunto de circunferências que compartilham uma mesma reta de centros em relação à reta CC' e que são simétricas em relação à reta mn , conhecida como eixo radical. Ele seleciona um ponto A que não está na reta mn e estuda um conjunto de circunferências P que possuem centros na reta mn e passam por A . Essas circunferências são ortogonais às circunferências com centros na reta CC' . As circunferências da família P têm centros na reta mn e intersectam a sequência de circunferências com centros na reta CC' em dois pontos K e L , que são simétricos em relação à reta mn . A figura 3.7 ilustra essa situação.

Quando a reta mn é uma secante real comum às circunferências de círculos da sequência, os pontos limites K e L tornam-se imaginários, e as relações deixam de ser aplicáveis. Mas, como a curva existe sempre, resulta do princípio de continuidade que ela deverá ser ainda uma seção cônica, com a reta CC' por secante ideal comum a todas as circunferências de círculos de centro P (PONCELET, 1822, p.45).²

Mesmo que os pontos K e L não estejam presentes no diagrama, sua existência é garantida pelas relações envolvendo esses pontos, como a igualdade de potência em relação a uma circunferência: $SA'.SB' = SK.SL$. Aqui, A' é o recíproco de A , B' é o recíproco de B , e consideramos uma reta passando por A e intersectando a circunferência de centro P em B . A reta $A'B'$ é paralela a AB e intersecta a reta CC' em S . Portanto, $SA'.SB' = SK.SL$, o que garante a existência dos pontos K e L , independentemente de a reta CC' ser real ou ideal em relação à circunferência de centro P . Essa relação indica que todos os pontos A' e B' pertencem a uma cônica que também passa por K e L como ilustrado na Figura 3.8.

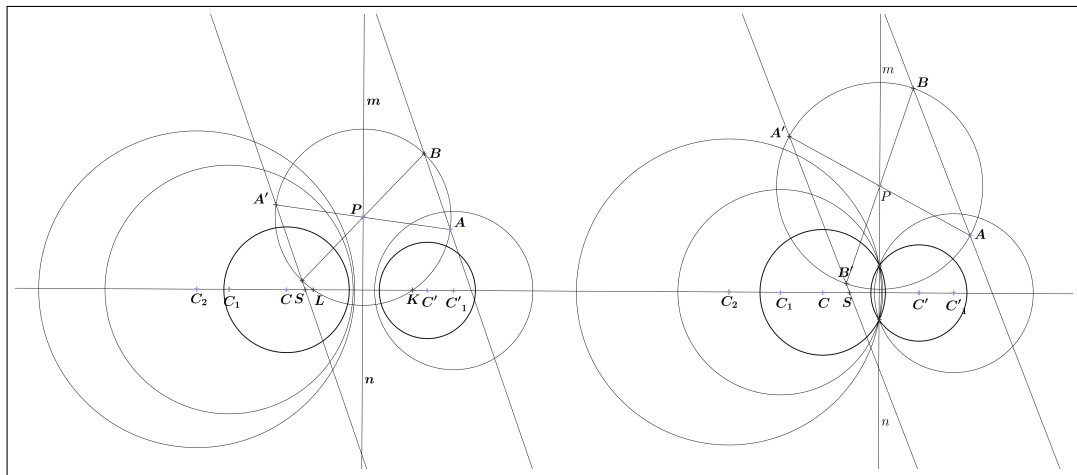


Figura 3.8 – Existência dos pontos limites K e L.

Com isso, Poncelet está apresentando simultaneamente o princípio de projeção e de continuidade. Por exemplo, ao investigar famílias de elipses semelhantes, Poncelet introduz,

² Quand la droite mn est une sécante réellement commune aux cercles de la suite $C, C' \dots$, les points limites K et L deviennent imaginaires, et les raisonnemens qui précèdent cessent d'être applicables ; mais, comme la courbe existe toujours, il résulte du principe de continuité qu'elle devra être encore une section conique, ayant la droite CC' pour sécante idéale commune avec tous les cercles P .

também, a ideia de pontos imaginários. Isso fica evidente ao estudar o caso de uma família de elipses concêntricas e suas hipérboles complementares, como ilustrado na Figura 3.9.

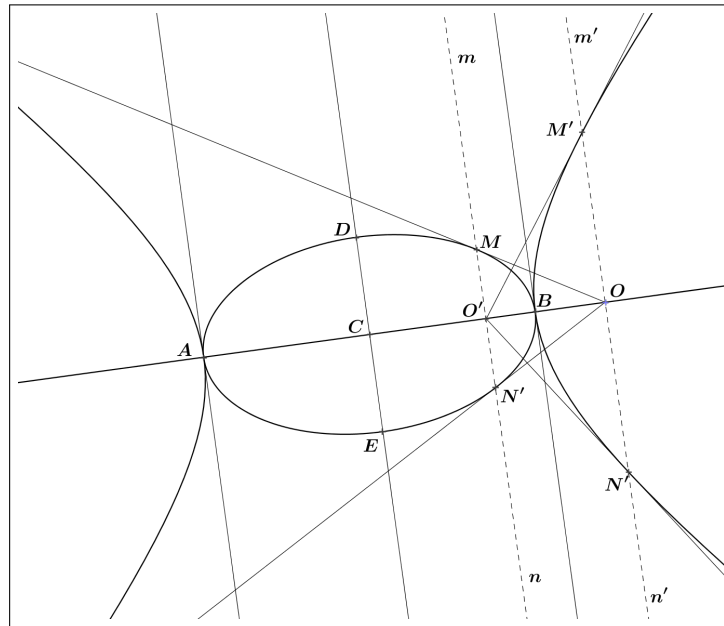


Figura 3.9 – Elipses e suas cônicas suplementares.

Poncelet utiliza a noção de diâmetro conjugado para mostrar que o ponto médio da corda MN (paralela ao diâmetro DE), ou seja, o ponto O' , e o ponto O , intersecção das tangentes à elipse nos pontos de contato da corda MN , estão ambos incidentes no diâmetro AB . Os pontos A, B, O e O' são conjugados harmônicos, o que leva Poncelet a considerar a reta $m'n'$, na qual incide o ponto O e é paralela à reta mn , como uma secante ideal da elipse. Os pontos O e O' são recíprocos, sendo O a intersecção das tangentes reais à elipse e O' a intersecção das tangentes imaginárias à elipse. Similarmente, O é a intersecção das tangentes imaginárias à hipérbole suplementar, enquanto O' é a intersecção das tangentes reais à hipérbole suplementar.

Ao longo das explicações de Poncelet, é possível notar a presença constante da ideia de dinamismo da figura. Isso ocorre porque o centro de projeção está em constante movimento, o que acaba por transformar a projeção da figura (CHAVES; GRIMBERG, 2014).

Poncelet enfatiza a importância dos pontos imaginários, que são pontos cíclicos no infinito, em sua teoria de intersecção de circunferências. Esses pontos são necessários para manter a continuidade do sistema, permitindo a transição contínua de pontos reais para pontos imaginários (NABONNAND, 2016). Embora possam ser mais facilmente justificados por meio de equações, a adição desses pontos à geometria apresenta vantagens significativas.

Em seu Tratado de 1822, Poncelet reconhece este fato (PONCELET, 1822, p.10) e observa que Dupin também considerou esses pontos imaginários em sua *Mémoire sur la description des lignes et des surfaces du second degré* (DUPIN, 1808), apropriando-se das ideias da análise algébrica.

Na verdade, este geômetra habilidoso se baseia nas considerações oferecidas pela Análise Algébrica para justificar esta extensão do caso imaginário, mas ainda resta demonstrar que a Análise tem a singular capacidade de tratar seres de não existência como seres absolutos; e, se essa capacidade vem precisamente porque se admite o princípio da continuidade, não haverá razão alguma para não admitir, nas pesquisas geométricas da mesma natureza, o próprio princípio de uma forma inteiramente direta e sem recorrer à Análise Algébrica. (PONCELET, 1822, p.73, nota).³

No Tratado de 1822, Poncelet rejeita completamente a análise e qualquer justificativa dos princípios por meio da álgebra. Em sua obra *Applications d'Analyse et de Géométrie* t. II, publicada em 1864 e baseada em suas anotações de 1814 a 1822, ele expõe de forma radical sua posição:

Os sinais -1 e $\sqrt{-1}$, considerados isoladamente e sem considerar seus atributos implícitos ou explícitos, têm uma origem puramente algébrica, convencional e analógica; eles não podem ser derivados a priori de qualquer consideração puramente geométrica. [...] é impossível admitir as interpretações gráficas propostas em várias épocas para esses sinais, especialmente a de que o símbolo $\sqrt{-1}$ é o sinal algébrico de perpendicularidade; em uma palavra, como eu disse, essas interpretações devem ser consideradas apenas como o resultado de analogias enganosas, embora sedutoras, relativas à expressão analítica das cordas ou duplas ordenadas imaginárias das cônicas. (PONCELET, 1864, p.592)⁴

Poncelet adota a estratégia de aplicar o princípio de continuidade à geometria pura. Ele argumenta que as propriedades das figuras são preservadas quando seus elementos mudam continuamente de posição uns em relação aos outros, garantindo uma permanência das propriedades. O exemplo da potência de ponto em uma circunferência, utilizado no problema da Figura 3.8, ilustra essa ideia. Poncelet afirma que o princípio de continuidade permite não apenas estender a fórmula $SA'.SB' = SK.SL$ para os casos em que as retas $A'B'$ e CC' intersectam a circunferência, mas também para o caso em que uma das retas não intersecta mais a circunferência, tornando os pontos K e L pontos limites, pontos imaginários finitos.

No exemplo seguinte, Poncelet usa de forma intuitiva o princípio de continuidade e de projeção para apresentar o ponto médio da corda apoiada em uma reta secante a uma circunferência de círculo, mesmo quando esta reta deixa de ser secante e se torna exterior à

³ A la vérité, ce savant géométrie s'appuie sur les considérations offertes par l'Analyse algébrique pour justifier cette extension du cas imaginaire, mais il reste toujours à démontrer que l'Analyse a la singulière faculté de traiter les êtres de non existence comme les êtres absolue ; et, si elle ne lui vient précisément que parce qu'on y admet le principe de continuité, il n'y aura aucune raison de ne pas admettre, dans les recherches géométriques de même nature, le principe lui-même, d'une manière entièrement directe et sans recourir aucunement à l'Analyse algébrique.

⁴ Les signes -1 e $\sqrt{-1}$, considérés isolément et abstraction faite de leurs attributs implicites ou explicites, ont une origine purement algébrique, conventionnelle et analogique; ils ne s'auraient dériver à priori d'aucune considération purement géométrique. [...] il est impossible d'admettre les interprétations graphiques proposées, à diverses époques, pour ces signes, notamment: que le symbole $\sqrt{-1}$ est le signe algorithmique de perpendicularité; en une mot, comme je l'ai dit, ces interprétations ne doivent être considérées que comme le résultat d'analogies trompeuses, quoique séduisantes, relatives à l'expression analytique des cordes ou doubles ordonnées imaginaires des coniques.

curva. O motivo de sempre se obter o ponto médio por meio de uma construção é que os pontos extremos da corda se tornam imaginários conjugados, e seu ponto médio sempre será real. Vamos observar a construção da Figura 3.10.

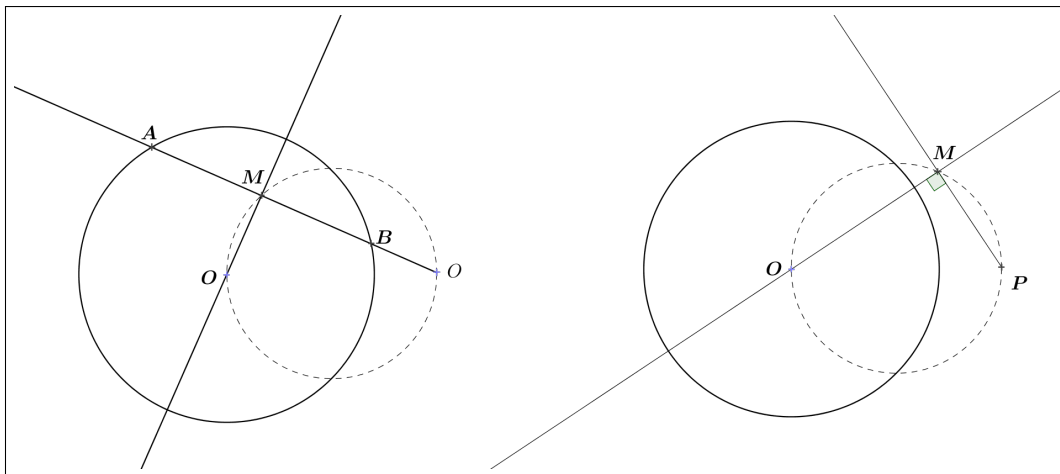


Figura 3.10 – O ponto é determinado, mesmo na reta exterior.

O ponto M é facilmente determinado, mesmo quando a reta de apoio da corda está fora da circunferência. M é sempre o ponto médio dos pontos extremos da corda, que podem ser imaginários conjugados. Geometricamente, M é a interseção da reta externa com a perpendicular ao centro da circunferência. Em resumo, a posição da corda em relação à circunferência não afeta a localização de M como o ponto médio da corda.

O princípio de continuidade complementa o princípio de projeção, permitindo tratar de elementos abstratos como pontos infinitos. A variação contínua do centro de projeção implica um movimento contínuo do objeto e pode resultar na invariabilidade de algumas propriedades, tornando os dois princípios intimamente ligados na geometria projetiva sintética.

3.1.1 Os Princípios de Projeção Central e o Princípio de Continuidade

Poncelet dedica uma parte significativa de sua obra à definição de procedimentos gerais em Geometria pura. No quarto caderno de Metz, intitulado *Considérations philosophiques et techniques sur le principe de continuité dans les lois géométriques*, ele começa observando que "a Geometria Analítica tenha adquirido sobre a Geometria Ordinária uma superioridade e uma generalização que é impossível de se contestar".(PONCELET, 1864, p.296) .

Poncelet busca equiparar a Geometria Ordinária à Geometria Analítica em termos de generalidade. Ele admite que a Geometria Analítica é superior e mais abrangente, e procura incorporar suas técnicas e métodos na Geometria Ordinária, com o objetivo de expandir seu escopo e torná-la capaz de abordar uma ampla gama de problemas geométricos:

fazer passar na Geometria Ordinária a generalidade das concepções da análise algébrica, generalizações que devem necessariamente pertencer à essência da

grandeza da figura, independente de qualquer maneira de raciocinar (PONCELET, 1864, p.297) .

O objetivo de Poncelet é conferir à Geometria Ordinária a mesma generalidade da Geometria Analítica, porém, a generalidade é intrínseca ao objeto de estudo. Isso justifica a busca por métodos gerais em Geometria pura, capazes de lidar com uma maior variedade de problemas geométricos. Poncelet defende que a Geometria pura precisa mudar seu foco de estudo, não se concentrando mais nas propriedades absolutas das figuras particulares, mas nas propriedades gerais da grandeza das figuras. Em outras palavras, ele afirma que as propriedades projetivas, por serem generalistas, devem ser o objeto de interesse dos geômetras.

Poncelet usa com frequência as secantes, que são retas que intersectam duas circunferências, independentemente de as circunferências serem secantes ou não em um ponto finito. Ele as chama de secantes sem fazer distinção, exceto por um adjetivo que as diferencia como reais ou ideais. Poncelet justifica essa generalização invocando o princípio de continuidade, argumentando que podemos transitar de uma situação para outra continuamente sem alterar as propriedades do sistema, ou seja, há uma permanência das propriedades . Ele também usa o princípio de projetividade, que permite obter diversas configurações de figuras projetadas ao deslocar o centro de projeção.

Em resumo, quando duas circunferências exteriores passam a se intersectar, duas tangentes comuns desaparecem e se tornam imaginárias. Quando as duas circunferências se tornam tangentes (seja externa ou internamente), as duas tangentes restantes coincidem. Quando as circunferências se tornam concêntricas, a última tangente desaparece. Em todas essas situações, é importante notar que há um eixo radical, real ou ideal, e dois centros de homotetia.

Quando duas figuras geométricas são assim relacionadas entre elas, as propriedades de uma são diretamente aplicadas à outra, exceto as modificações que podem ocorrer nos sinais de posição, ou na grandeza absoluta das partes; modificações que são sempre possíveis de reconhecer adiante, fazendo uma simples inspeção na figura. Isto é o que constitui de fato o princípio de continuidade, geralmente admitido em todas as buscas que se fundamentam sobre a análise algébrica. (PONCELET, 1822, p.66)

Poncelet está abordando a inclusão de um princípio de continuidade na Geometria pura, da mesma forma que ocorre na Geometria Analítica. Ele defende que esse princípio é fundamental para possibilitar a generalização das leis geométricas a partir de casos específicos.

Poncelet destaca que, ao empregar o princípio de continuidade, é viável generalizar as leis geométricas a partir de casos particulares para situações mais amplas, sem necessidade de realizar demonstrações complicadas para cada caso específico. Isso ocorre porque o princípio de continuidade permite estender as propriedades das figuras geométricas a situações aparentemente distintas, mas que compartilham características em comum.

Poncelet defende a inclusão do princípio de continuidade na Geometria pura como forma de permitir uma generalização mais abrangente das leis geométricas. Para ele, essa

abordagem é fundamental para compreender as propriedades gerais das figuras geométricas e para o desenvolvimento de novos resultados em Geometria.

Além disso, o objetivo desta admissão é exclusivamente introduzir a ideia de continuidade ou permanência indefinida das leis da magnitude figurada, continuidade que, embora muitas vezes fictícia, é capaz de caracterizar e revelar as leis verdadeiras e absolutas desta grandeza.⁵ (PONCELET, 1864, p.345)

Poncelet busca aprofundar o uso do princípio da continuidade para explorar as possibilidades na geometria e alcançar uma compreensão avançada das leis geométricas. Ele acredita que a continuidade pode levar à descoberta de leis verdadeiras e absolutas que regem as grandezas figuradas, mesmo que essa continuidade possa ser imaginária em alguns casos.

Pode-se afirmar que Poncelet não convenceu plenamente seus contemporâneos e, na introdução do *Traité*, ele convida os leitores que possam estar hesitantes a aceitar o princípio de continuidade e a reconhecer seu valor heurístico na Geometria pura. Poncelet argumenta, mais ainda, em defesa da incorporação do princípio de continuidade da seguinte maneira:

No entanto, isso seria realmente necessário e não seria justificado admitir, em toda a sua extensão, o princípio da continuidade na Geometria racional, como foi feito inicialmente no cálculo algébrico e depois nas aplicações desse cálculo à Geometria, se não como um meio de demonstração, pelo menos como um meio de descoberta ou invenção?⁶ (PONCELET, 1822, p.xiv).

Poncelet defende a aplicação das quantidades negativas e imaginárias em Geometria, argumentando que elas são fundamentais para resolver problemas geométricos. Ele relaciona o uso das leis dos sinais com o princípio de continuidade, sem provar explicitamente sua validade. Poncelet compara a Geometria Analítica e Sintética, concluindo que a diferença fundamental é a utilização do princípio de continuidade na primeira.:

As propriedades gráficas encontradas na figura primitiva subsistem em outras alterações das partes, por todas as figuras correlativas que podem ser relacionadas à primeira [...].

As propriedades métricas descobertas na figura primitiva permanecem aplicáveis nas outras alterações de mudança de sinais, a todas as figuras correlativas que podem ser relacionadas à primeira. (PONCELET, 1864, p.318)

A Geometria Analítica é mais difundida que a Geometria Sintética, pois incorpora um princípio fundamental que não é amplamente aceito na última. Poncelet defende que o princípio da continuidade seja um axioma, como na Geometria Analítica, por sua aplicação ser a razão dos resultados mais abrangentes da Geometria Analítica.

⁵ D'ailleurs, le but de cette admission est uniquement d'introduire l'idée de la continuité ou permanence indéfinie des lois de la grandeur figurée, continuité qui, pour être souvent fictive, n'en est pas moins propre à caractériser et à faire découvrir les lois véritables et absolues de cette grandeur.

⁶ Toutefois cela serait-il bien nécessaire, et ne serait-on pas en droit d'admettre, dans toute son étendue, le principe de continuité en Géométrie rationnelle, comme on l'a fait d'abord dans le calcul algébrique, puis dans l'applications de ce calcul à la Géométrie, si ce n'est comme moyen de démonstration, du moins comme moyen de découverte ou d'invention?

A Geometria Analítica permite abstrair o raciocínio explícito e dispensar a constante referência a uma figura específica através da representação em equações. Já o princípio de continuidade possibilita a utilização do raciocínio implícito.

Poncelet afirma em nota o uso que faz dos termos explícito e implícito:

Pelo raciocínio, fórmulas, etc., explícitas, entendo sempre raciocínios, fórmulas, etc, que dizem respeito a quantidades cuja grandeza é atualmente determinada e conhecida de maneira explícita, seja numericamente, seja geometricamente. Eu atribuo uma significação precisamente contrária às expressões raciocínio, fórmula implícitas, o raciocínio explícito é necessariamente absoluto, o outro pode ser apenas figurado. Além disso, utilizamos essas expressões apenas a fim de encurtar e tornar preciso o discurso, e temos que observar que eles têm sido utilizadas de uma forma um pouco semelhante, pelo autor de *Géométrie de position*. (PONCELET, 1864, p.324-325)

Poncelet sugere seguir um programa na Geometria pura para identificar novas formas de demonstração com base no princípio de continuidade. Ele acredita que as propriedades geométricas aplicáveis a uma configuração particular também se aplicarão às figuras correlatas, exceto por mudanças de sinais correspondentes às mudanças de posição.

É suficiente demonstrar uma propriedade de forma explícita com uma figura real. O princípio da continuidade permite estender essa propriedade a todas as figuras correlatas, mas não garante a existência absoluta dos objetos ou grandezas relacionadas. Poncelet destaca a importância de definir o objeto da Geometria como o estudo das propriedades dos corpos em relação às suas áreas ou configurações, diferenciando-as das propriedades gerais. .

Mas entre estas propriedades, há algumas que dizem respeito menos à grandeza absoluta ou determinada de tais ou tais partes do que às modificações, à relações gerais e indeterminadas, que elas tem em comum ou que pertencem a sua combinação mútua. Essas últimas propriedades só deve ser sujeitas às considerações que seguem: por causa de sua generalidade e imprecisão das grandezas que estão em jogo, essas propriedades contêm implicitamente todas as outras, e isso é suficiente para alcançar este objetivo, de ir do caso geral ao caso particular, atribuindo às grandezas indeterminadas o valor o a relação que as particularizam. (PONCELET, 1864, p.298)

A aplicação do princípio de continuidade está ligada à generalidade dos métodos geométricos e às propriedades que devem ser generalizadas para serem invariantes na correlação das figuras. No entanto, alguns argumentos de Poncelet apresentam circularidade ao utilizar um argumento generalizado, apesar da validade do princípio de continuidade não ser questionada.

Na Geometria Analítica, as propriedades métricas são descritas por meio de equações, enquanto as propriedades gráficas são mais relacionadas às formas dessas equações. Poncelet apresenta em seguida um exemplo de uma circunferência de círculo de centro O e duas secantes AB e CD ; Se o ponto de intersecção S das duas secantes é interior à circunferência de círculo de centro O , é fácil mostrar que:

$$SA.SB = SC.SD$$

Podemos então aplicar esta fórmula (sem mudança de sinal) à figura correlativa obtida quando o ponto S passar ao exterior da circunferência de círculo. Se a correlação entre as figuras tornar-se ideal, ou seja, uma das secantes, por exemplo, CD venha a não mais intersectar a circunferência de círculo e que os pontos C e D tornem-se imaginários, então Poncelet considera que as relações acima continuam, embora possa parecer "a primeira vista contraditória e absurda". De fato, a fórmula $SA.SB = SC.SD$ não permite determinar os pontos C e D . Necessitamos considerar outra relação como:

$$2SK = SC + SD$$

Em uma secante real SC , as fórmulas determinam SC e SD , mas em uma secante ideal, a incompatibilidade das fórmulas é causada pelos pontos imaginários C e D . No entanto, o produto $SC.SD$ e seu ponto médio K permanecem reais. Poncelet usa o princípio de continuidade, a teoria das polares e a projeção para propor uma nova generalização da fórmula, introduzindo a noção de cônicas suplementares. A generalização é válida independentemente da posição da cônica, desde que C e D sejam conhecidos. Poncelet não justifica seu ponto de vista, mas a generalização é fornecida pela consideração das fórmulas associadas a uma figura semelhante.

[...] quando as relações ou propriedades que examinamos são em números suficientes para construir e determinar os objetos aos quais se relacionam, e que podem tornar-se impossíveis na figura correlativa, nunca haverá dificuldade real de interpretá-las ou de admiti-las; pois então elas indicarão, seja separadamente, seja simultaneamente a inexistência de objetos na figura e, servirão assim pela sua incompatibilidade a definir e caracterizar em todos os casos possíveis, o verdadeiro estado da figura. As dificuldades apenas surgem, portanto, quando, perdendo de vista o conjunto das relações que definem diretamente a figura, se considerá-las apenas em si mesma e de uma maneira completamente individual; neste caso apenas, podem parecer ininteligíveis, e conservar apenas uma significação hipotética e ideal. Como os objetos aos quais dizem respeito e que tem perdido a sua existência geométrica. (PONCELET, 1864, p.342)

O princípio de continuidade pode ser aplicado a outro cenário em que determinados elementos de uma figura se tornam irrealis sem se tornarem imaginários. Por exemplo, considere duas retas secantes que se cruzam em um ponto real. Se uma das retas for continuamente rotacionada em torno de um de seus pontos, o ponto de interseção se afastará gradualmente até que, quando as duas retas se tornarem paralelas, os pontos estarão no infinito.

Poncelet discute dois casos em que as retas podem ser secantes ou paralelas. No último caso, ele observa que o ponto de interseção está no infinito. No entanto, ele destaca que, ao afirmar que o ponto de interseção está no infinito, a intenção é manter esse ponto presente na discussão e indicar que a intersecção das retas é ideal.

Uma forma de descrever feixes de retas que passam por um ponto real e feixes de retas paralelas é através do termo "ponto ao infinito". Ao usar esse termo de maneira consistente, é possível chegar a conclusões aparentemente paradoxais, como a ideia de que "os dois extremos de uma reta indefinida se juntam e se confundem no infinito", já que a reta possui um ponto no

infinito. Essa uniformização do termo permite simplificar as noções de retas secantes e paralelas e enriquecer a ideia de geometria.

Poncelet reconhece expressamente no 3º caderno de *Saratoff* que a origem de sua pesquisa sobre projeção central são os trabalhos de Carnot e Brianchon as quais inspirou e o conduziu a sua intuição sobre o princípio de continuidade.

Um método particular de demonstração [...] se aplicado a uma certa ordem de proposições de Geometria Plana, que se relaciona apenas às direções das retas, e nas quais não se considera nenhuma largura absoluta ou relativas a estas retas, nem as grandezas dos ângulos.(BRIANCHON, 1810, p.1)

Brianchon apresentou um método de representação projetiva que relaciona a projeção e o objeto projetado sem considerar medidas de segmentos ou ângulos. Esse método reversível foi usado por Poncelet para desenvolver as propriedades projetivas.

Durante sua pesquisa, Poncelet identificou quatro princípios fundamentais da projeção central. Um desses princípios foi demonstrado por ele utilizando Geometria Descritiva e ele investigou as implicações dessa construção quando a reta PL intersecta a circunferência com diâmetro AB .

O problema consiste em determinar o vértice S de um cone cuja base é a circunferência de círculo C dada, de tal modo que qualquer secção paralela ao plano de S e a reta PL seja uma circunferência de círculo, dito subcontrariante de C . Na épura desenhada por Poncelet na figura 3.17, o plano horizontal é o plano de base do cone e contém PL , e o plano vertical que passa pelo centro c de C é perpendicular à PL , denominamos de plano diametral; O desenvolvimento dessa discussão faremos no 3.2 Os Manuscritos de *Saratoff*.

De acordo com Friedelmeyer (FRIEDELMEYER, 2010, p.70), o resultado analítico que Poncelet buscava no final do segundo caderno de *Saratoff* difere da solução sintética descrita no terceiro caderno. Sua análise demonstra que o centro i das circunferências de círculos conjugados sempre existe, independentemente do raio da circunferência dada, pois o ponto i e o ponto K estão relacionados de forma algébrica e não dependem da posição específica da reta PL . A reta it é dita ser a polar do polo K .

Poncelet, em seguida, ponderou sobre as possibilidades de determinadas construções e concluiu que, para a realização de uma construção geométrica, basta observar as condições que são apresentadas. Quando a impossibilidade é caracterizada por condições contraditórias ou incompatíveis, ela é absoluta e, portanto, não há nada de real, geometricamente falando. Somente no sétimo caderno de *Saratoff*, que foi destinado a ser apresentado à Academia de Ciências de São Petersburgo, é que ele formulou essa ideia de maneira clara e precisa.

Para uma melhor explicação, Poncelet adota um exemplo baseado em um problema de Monge. Quando os vértices de uma superfície cônica, que circunscreve uma curva de segunda ordem, são movidos ao longo de uma reta, as cordas de contato sempre se intersectam em um mesmo ponto.

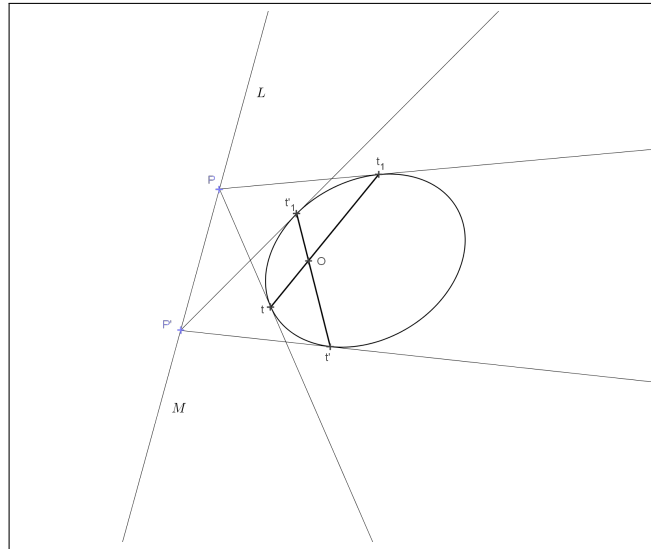


Figura 3.11 – As cordas de contato incidem no Polo

De fato, o ponto O em questão é simplesmente o polo da reta ML ; no entanto, essa noção ainda não foi formalizada por Poncelet em *Saratoff*. Ele observa que, quando o resultado é estabelecido pela Geometria Analítica, é irrelevante se a corda é secante ou não à curva de segunda ordem. Mas, do ponto de vista da Geometria Sintética, não é possível construir o plano tangente à superfície que contém a reta. Mesmo assim, o polo existe, independentemente de a reta ser secante ou não. Portanto, Poncelet irá adotar em seu trabalho a ideia do princípio de continuidade que se uma figura possui uma dessas propriedades de posição, em que as partes que a compõem têm uma disposição específica, então essa figura mantém a mesma propriedade, independentemente da maneira geral como a ordem ou a disposição das figuras se apresenta.

3.2 Os Manuscritos de Saratoff

Durante sua participação na campanha napoleônica na Rússia, Poncelet foi preso por dois anos na cidade de *Saratoff*. Foi neste período que surgiram os famosos manuscritos de *Saratoff*, sete cadernos que serviriam como fundamentos para seu tratado de 1822. Após um afastamento de trinta anos de suas publicações sobre geometria, Poncelet decidiu reagrupar e editar o conjunto de suas obras com a ajuda de Mannheim e Moutard, a convite da casa de Mallet-Bachelier. Em 1862, na Academia de Ciências, ele apresentou suas *Applications d'Analyse et de Géométrie* t.I, que incluíam a íntegra dos manuscritos de Saratoff, após quase 50 anos de sua criação. Esses cadernos, que agora são conhecidos como os Cadernos de *Saratoff* na historiografia, contêm a gênese do pensamento de Poncelet e foram uma importante contribuição para a geometria moderna.

A noção de cordas imaginárias

O 1º caderno de Saratoff - *Lemmes de Géométrie Synthétique: sur lès systèmes de cercles situés dans um même plan*, conhecido como a Memória de abril de 1813 Belhoste (1998)⁷, tem um caráter exclusivamente sintético, onde Poncelet apresenta XIV proposições. Trata das aplicações dos princípios da projeção e do princípio de continuidade

Ao estudar as propriedades de um cone circunscrito a uma esfera, Monge percebeu que, ao movimentar o vértice do cone ao longo de uma reta fixa, o plano determinado pelos pontos de contato com a esfera formava uma circunferência de círculo. Além disso, ele demonstrou que as cordas de contato das tangentes a esta circunferência sempre passam por um mesmo ponto. No entanto, Poncelet observou que essa solução só era válida em casos específicos em que a reta não intersectava a esfera. Para generalizar a solução para qualquer disposição da esfera e da reta, Poncelet afirmou que seria necessário usar a análise matemática.

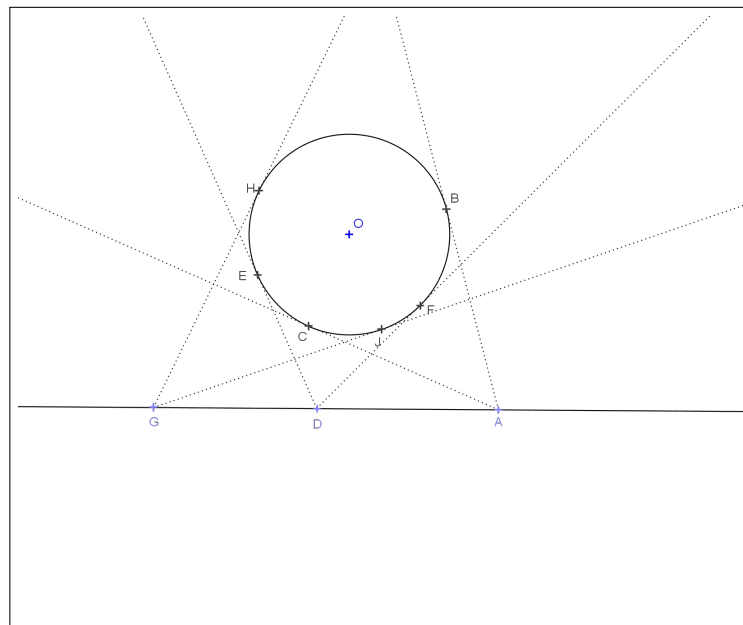


Figura 3.12 – Cône circunscrito à esfera

Poncelet apresenta uma prova relacionada ao polo de uma reta de uma circunferência de círculo em qualquer disposição. Observando que esse polo é o centro da intersecção, conhecido como centro radical, das cordas reais comuns a três circunferências de círculos. Isso significa que Poncelet encontrou uma maneira de generalizar a solução de Monge para qualquer disposição da esfera e da reta, ao usar o conceito de centro radical e a intersecção de três circunferências de círculos.

⁷ Belhoste, 1998, SABIX, nº19

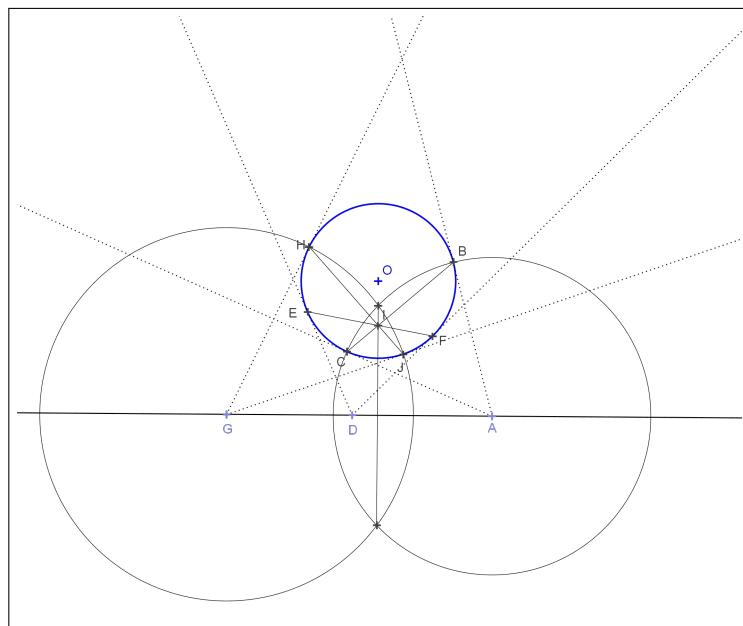


Figura 3.13 – O polo como Centro radical

Poncelet percebeu que a demonstração de Monge sobre o polo de uma reta de uma circunferência de círculo era limitada pela Geometria Sintética, que não conseguia lidar com todas as possíveis disposições da esfera e da reta. Ele viu nesta questão a oportunidade de aplicar o princípio de continuidade da Geometria Analítica à Geometria Sintética, permitindo que esta última pudesse resolver problemas geométricos de forma mais geral e abstrata. Na Geometria Analítica, a continuidade está presente de forma implícita, pois as equações que descrevem as curvas e superfícies permitem uma sucessão contínua dos pontos da curva. Em contraste, na Geometria Sintética, a continuidade não é tão evidente quanto na Análise. Poncelet acreditava que, ao estender o uso da continuidade para a Geometria Sintética, seria possível superar as limitações da Geometria Sintética tradicional e torná-la tão abrangente quanto a Análise.

Eixo radical

Poncelet descreve o lugar geométrico no plano onde as tangentes a certas circunferências têm o mesmo comprimento. Ele usa esse lugar geométrico para resolver problemas, como o das tangentes comuns a três circunferências. Além disso, Poncelet prova que as circunferências de círculos ortogonais a uma sequência de circunferências têm seus centros nesta secante que é comum a ambas, e que ela pode ser real ou ideal. Ele também mostra que a secante é perpendicular à reta que liga os centros das duas circunferências.

Poncelet identifica, quando se trata de três circunferências, três retas do tipo LM . Ele prova que independentemente das circunferências serem secantes ou exteriores, essas três retas se encontram em um único ponto - o centro radical. É nesse ponto que Poncelet introduz o conceito de cordas imaginárias.

A propriedade dos eixos radicais e do centro radical a duas e a três circunferências de círculos, foram publicadas primeiramente por Louis Gaultier de Tours Tours (1813), no *journal*

de l'École Polytechnique. Poncelet chama a atenção deste fato na primeira página do *Traité*:

Começando pelo caso mais elementar e mais fácil, eu havia estabelecido diretamente toda a teoria dos círculos que se cortam ou se tocam em um plano, e assim cheguei a vários dos resultados que o Sr. Gaultier registrou em um belo memorando lido no Instituto em junho de 1812, especialmente aqueles relacionados aos Centros de Similitude e aos Eixos Radicais dos círculos. Já havia partido para a Rússia nessa época e não tive conhecimento deste Memorando, que só foi impresso no ano seguinte, no XVI^o número do *Journal de l'École Polytechnique*. (PONCELET, 1822, prefácio).⁸

No quinto caderno, as propriedades da teoria das circunferências de círculos em um plano são lembradas por meio de um *lemme general*, que estabelece o papel dos centros de similitude O e O' de um par de circunferências quaisquer. Embora Poncelet não use a expressão centro de homotetia, as propriedades descritas no lema se referem a este conceito, que é fundamental para a geometria projetiva.

O centro de similitude é o ponto para o qual convergem todas as retas ou raios de similitude que ligam, de maneira correspondente, os pontos das duas figuras. Esse ponto divide cada uma dessas retas, ou seus prolongamentos, em dois segmentos proporcionais.

(PONCELET, 1822, p.128)

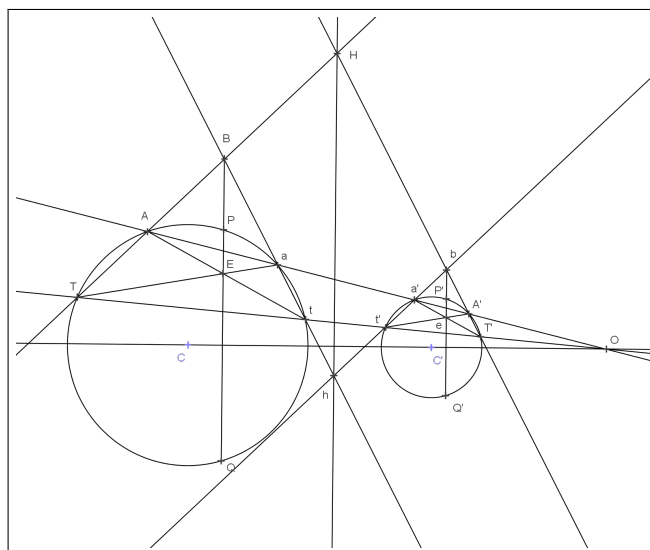


Figura 3.14 – Ponto O é o centro de Similitude direto

Poncelet expandiu o conceito de secante comum para circunferências não concêntricas e disjuntas, utilizando esse lugar geométrico, o princípio de projeção e o princípio de continuidade.

⁸ Abordant d'abord le cas le plus élémentaire et le plus facile, j'avais établi directement toute la théorie des cercles qui se coupent ou se touchent sur un plan, et j'étais ainsi parvenu à plusieurs des résultats que M. Gaultier a consignés dans un beau Mémoire lu à Institut en juin 1812, notamment ceux qui sont relatifs aux Centres de similitude et aux Axes radicaux des cercles. Etant déjà parti pour la Russie à cette époque, je n'avais pu avoir connaissance de ce Mémoire, qui ne fut d'ailleurs imprimé que l'année suivante, dans le XVI^o cahier du Journal de l'École Polytechnique.

Ele provou que essas retas existem independentemente de as circunferências serem secantes ou não. Isso permitiu que ele desenvolvesse teoremas e problemas que antes não eram possíveis de serem resolvidos ou precisava de uma abordagem mais complexa. Essa generalização demonstra a capacidade de Poncelet em utilizar conceitos existentes para avançar em novas direções na geometria.

Considere o exemplo a seguir:

Suponha que C seja uma circunferência de equação $x^2 + y^2 = R^2$ e C' seja outra circunferência de equação $(x - a)^2 + y^2 = r^2$. A interseção entre as duas é uma reta cuja equação é dada por $2ax = R^2 - r^2 + a^2$. É importante notar que essa reta existe independentemente de as duas circunferências se intersectarem.

Isso mostra como Poncelet utilizou a geometria para generalizar conceitos e resolver problemas de forma mais abrangente.

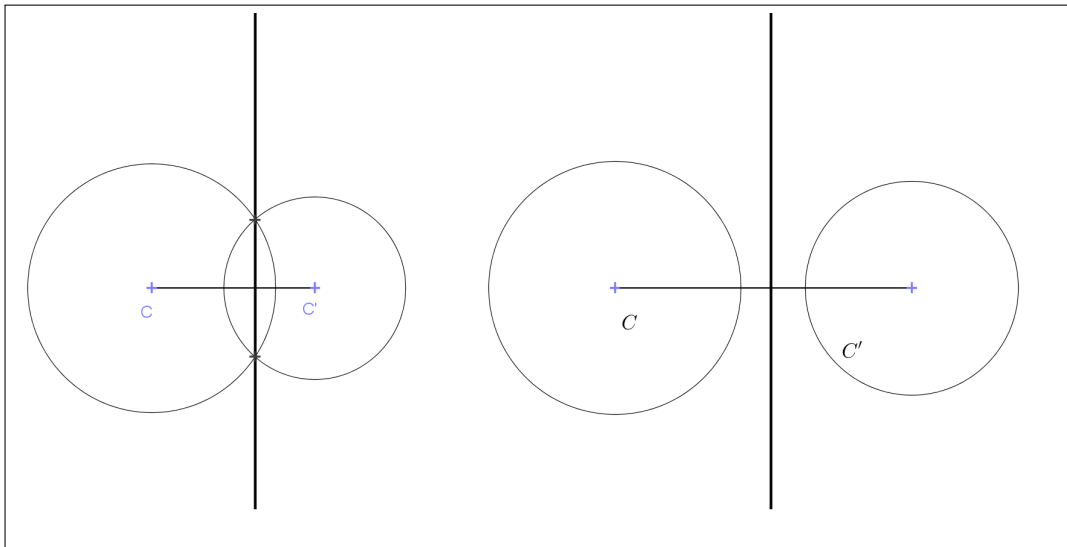


Figura 3.15 – Eixo radical

Poncelet adotou uma abordagem construtiva na Geometria para generalizar os métodos existentes. Enquanto Gaultier usou o eixo radical como inspiração, Poncelet partiu da ideia de corda comum entre duas circunferências, que pode ser real ou imaginária, dependendo da posição das circunferências. A corda comum é a reta que liga dois pontos de interseção entre as duas circunferências. Poncelet generalizou essa noção e provou que mesmo se as duas circunferências não se intersectarem, a corda comum pode ser imaginária e ainda assim existir, permitindo que muitos resultados sejam estendidos para esses casos. A abordagem construtiva de Poncelet enfatizou a importância da geometria pura e da construção de figuras com régua e compasso, em vez de depender apenas de fórmulas algébricas (GRIMBERG et al., 2021).

3.2.1 Os objetos geométricos imaginários nos cadernos de *Saratoff*

Uma maneira de compreender a evolução da ideia de pontos imaginários em circunferências de círculos ou cônicas proposta por Poncelet é examinar os sete cadernos de *Saratoff*. O estudo desses cadernos pode fornecer uma compreensão mais profunda da maneira como Poncelet desenvolveu sua abordagem em relação a esses pontos.

No segundo caderno de Saratoff, encontramos a primeira vez em que Poncelet introduz a ideia de objetos geométricos imaginários. Ele estudou a interseção de um cone e um plano por meio de um sistema de equações e escrevendo a equação da seção cônica na forma $My^2 \pm Nx^2 - Px = 0$, registrado em seu livro (PONCELET, 1862, p.68-78), poderia desenvolver alguns resultados.

Discutindo os valores possíveis do parâmetro, ele examina o caso de M e N positivos e $P = 0$ e a equação se torna: $My^2 + Nx^2 = 0$. Desta maneira ele dá duas interpretações à equação:

- quando $x = y = 0$, caso do ponto isolado.
- quando $y = \pm \sqrt{(-N/M)}x$, caso das retas imaginárias.

Parece que pela primeira vez um matemático conseguiu estudar de forma natural objetos geométricos imaginários na Geometria. Em particular, Poncelet (1862, pp.68-78) analisa o caso de interseção de um cone e de um plano por meio de um sistema de equações. Ele deduz analiticamente que o vértice do cone está localizado na origem do referencial e discute a posição do cone nessa situação. Ele conclui que, exceto pelo vértice, o cone não tem interseção com o plano xy .

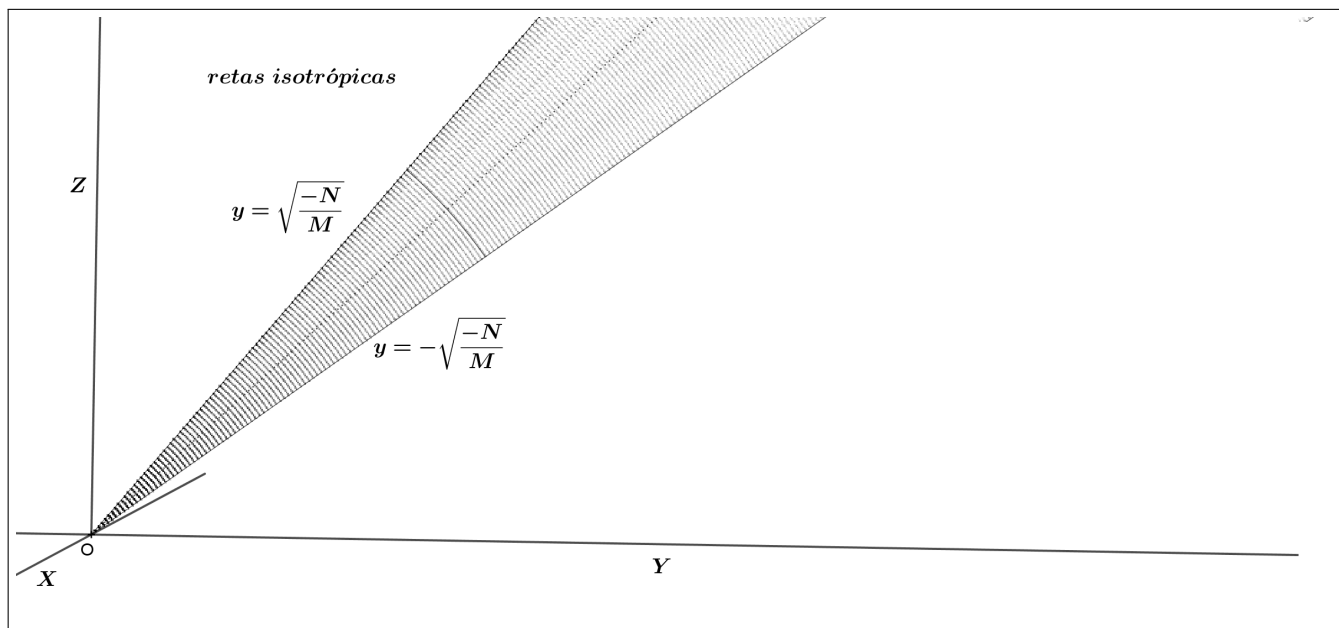


Figura 3.16 – Retas isotrópicas.

É importante notar que esse tipo de desenho representa o objeto em 3D antes de ser

rebatido no processo de construção de figuras na geometria descritiva. De fato, como veremos, Poncelet usa esse mesmo tipo de representação em todas as construções. Essa pode ser a razão pela qual os procedimentos projetivos foram incorporados à geometria descritiva, e por que Clebsch definiu a área da matemática inaugurada por Poncelet como geometria projetiva. O termo "projektiv geometrie" é usado por Clebsch para descrever o trabalho conjunto de Poncelet, Gergonne, Möbius, Steiner, Plücker, entre outros matemáticos no início do século XIX. (LORENAT, 2015, p.25) ⁹.

No terceiro caderno de Saratoff, Poncelet explora o lugar geométrico dos vértices S de um cone, cuja projeção sobre um plano horizontal é uma circunferência de centro c . Para isso, ele considera uma reta PL horizontal e procura o ponto S que satisfaça a condição de o plano da seção subcontrária ser paralelo ao plano definido pela reta PL e pelo vértice S . Quando a reta PL está fora da circunferência de centro C , Poncelet segue os seguintes passos: ele prolonga o diâmetro AB para encontrar a reta PL em K , traça a tangente KT à circunferência de centro C , e mostra que os vértices S estão em um plano perpendicular à reta PL contendo o diâmetro AB (plano diametral), a uma distância de KT (raio) do ponto K .

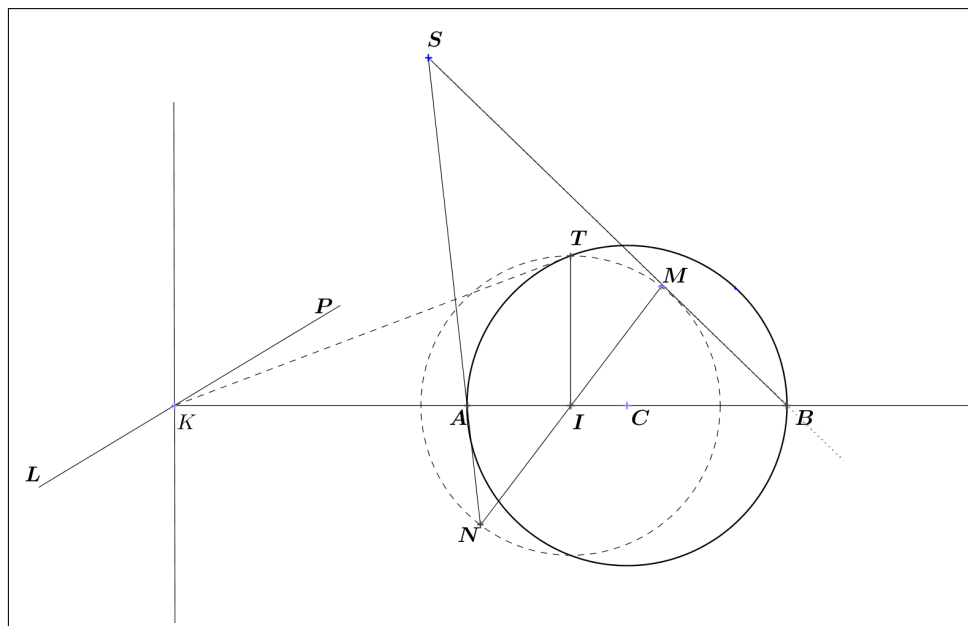


Figura 3.17 – Lugar geométrico dos pontos S .

Vejamos a explicação de Poncelet para determinar o vértice S em um plano diametral e distante KT do ponto K :

Consideremos o ponto S como o centro de projeção e a seção cônica dada de diâmetro AB como a base de um cone oblíquo com vértice em S . Tomemos um plano que contém tanto o ponto S quanto a reta dada PL como o plano projetante para essa reta. Para que exista um plano de projeção que corte a superfície cônica projetante segundo uma circunferência de círculo

⁹ Clebsch used the term "projectives geometry" to describe the collective work of Poncelet, Gergonne, Möbius, Steiner and Plücker among other early nineteenth century geometers. Lorenat, p. 25

e projete a reta PL ao infinito, ou seja, seja paralelo ao plano $S - PL$, as duas condições são incompatíveis se o plano projetante $S - PL$ e a base do cone se intersectarem. Então:

Em primeiro lugar a reta PL deve ser situada fora da seção cônica C , ou seja, ela deve ser uma corda ideal.

Em segundo lugar, se estas condições são satisfeitas em relação a certo plano de projeção, serão, também, por todos os planos paralelos a este plano, pois a reta PL será, sempre, projetada ao infinito.

Este texto é amplamente comentado por Friedelmeyer (2010, pp.55-158) que encontra nele a primeira intuição de Poncelet do princípio de continuidade. Após a realização da construção, é notável a discussão apresentada por Poncelet, na qual ele introduz a ideia de continuidade e projeção, que são fundamentais para a compreensão dos pontos imaginários.

Quando a reta PL [...] encontra o círculo C , a construção precedente se torna impossível; pois o ponto K se encontra então no interior do círculo, e, é impossível, geometricamente também, traçar, por esse ponto, as tangentes a este [o círculo]. Neste caso, precisamente, a análise faz ver, no entanto, que o centro I do círculo conjugado a C não deixa de existir, apesar deste círculo ou seu raio serem tornados imaginários. A razão é que o ponto I está ligado à K por uma relação algébrica que subsiste qualquer que seja a posição da reta PL a respeito do círculo (c) (PONCELET, 1862, p.123).¹⁰

De fato, Poncelet apresenta uma discussão interessante após a realização da construção, na qual ele evoca implicitamente o caso das tangentes imaginárias à circunferência de círculo, caso o ponto K esteja no interior da circunferência. Para isso, ele utiliza as relações algébricas, demonstrando que a análise guia seu raciocínio geométrico. Nas páginas seguintes, Poncelet (1862, pp.124-125) enfatiza ainda mais as relações entre equações algébricas e as propriedades geométricas, observando que, mesmo que certas quantidades se tornem imaginárias, as relações persistem, embora os objetos geométricos não possam ser construídos de fato. Há, para Poncelet, uma analogia com o raciocínio algébrico, pois quando o ponto K se move ao longo da reta AB e está entre os pontos A e B , as tangentes se tornam imaginárias. No entanto, quando K está fora do diâmetro AB , as tangentes podem ser construídas novamente. Com base nisso, Poncelet justifica a introdução do princípio da continuidade, ou seja, a ideia de que as propriedades permanecem invariantes, mesmo que as quantidades correspondentes se tornem imaginárias.

Poncelet parece ter dificuldades em definir, aos escrever seus manuscritos, o papel dos pontos imaginários em sua geometria, ora lhes atribuindo significado geométrico, ora afirmando que não possuem um sentido completo nesse contexto (CHAVES; GRIMBERG, 2020). Essa incerteza sugere que ele não sabe exatamente como tratar os pontos imaginários em relação aos

¹⁰ Lorsque la droite PL (fig. 55) rencontre le cercle (c), la construction précédente devient impossible ; car le point k se trouvant alors dans l'intérieur du cercle, il est impossible géométriquement aussi, de lui mener des tangentes par ce point. Néanmoins, dans le même cas, l'analyse fait voir que le centre i , du cercle conjugué à (c) n'a pas cessé d'exister, quoique ce cercle ou son rayon soit devenu imaginaire. La raison en est que le point i est lié à k par une relation algébrique qui subsiste quelle que soit la position de la droite PL à l'égard du cercle (c).

pontos reais. Por outro lado, Chasles aceita a existência dos pontos imaginários como uma forma de justificar a existência dos pontos reais em sua geometria.

Em seu sétimo caderno Poncelet apresentou uma nova observação:

Um sistema qualquer de círculos em um plano, sempre deve ser considerado como tendo uma corda em comum ao infinito; se supusermos, além disso, que esses círculos tenham uma corda em comum a uma distância finita, é evidente que essas duas cordas serão conjugadas entre si e que as outras cordas que esses círculos têm em comum, falando analiticamente, são todas quatro ilusórias ou imaginárias.(PONCELET, 1862, p.424).¹¹

Para ilustrar o pensamento de Poncelet, podemos usar a figura 3.18 . Nela, os pontos I e J representam pontos imaginários ao infinito presentes em todas as circunferências do plano projetivo. A corda AB , que pode ser ideal, está sempre a uma distância finita. Existem quatro cordas imaginárias: AI , AJ , BI e BJ . A corda comum ao infinito é a que passa pelos pontos cíclicos I e J .

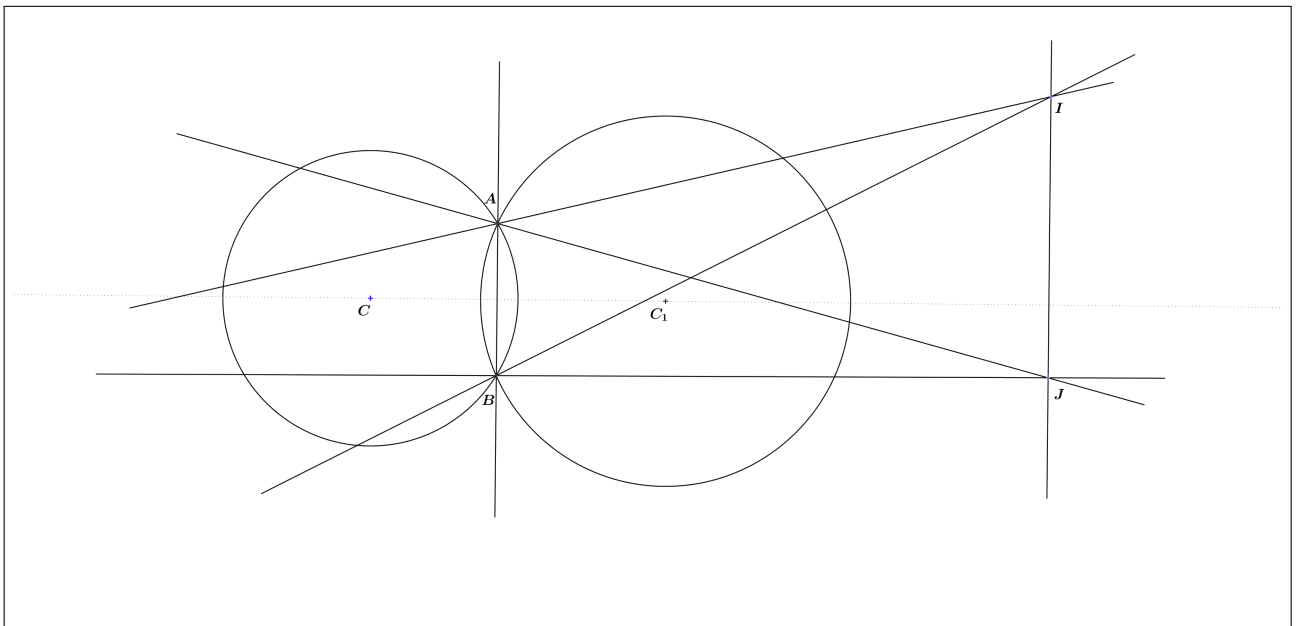


Figura 3.18 – As seis cordas comuns a um sistema de circunferências de círculos.

Poncelet sempre manteve a figura em mente em seu pensamento, mesmo quando ela não podia ser construída geometricamente ou deixava de existir (CHAVES; GRIMBERG, 2018b). Isso se deve ao fato de que seus princípios eram baseados em análise algébrica. De fato, a compreensão da observação de Poncelet só é possível considerando-se os pontos I e J como pontos imaginários ao infinito.

¹¹ Un système quelconque de cercles sur un plan, devant toujours être censé avoir une corde commune l'infini, si l'on suppose, de plus, que ces cercles en aient une commune à distance finie, il est évident que ces deux cordes seront conjuguées entre elles, et que les autres cordes que ces cercles sont en commun, analytiquement parlant, sont toutes quatre illusoires ou imaginaires.

3.3 As publicações e manuscritos em Geometria no período de 1817 -1822

Após seu retorno à França em 1814, Poncelet enfrentou obstáculos para desenvolver suas ideias geométricas devido ao serviço militar como engenheiro e a França estava passando por uma situação conturbada. No entanto, durante os invernos entre 1815 e 1822, Poncelet conseguiu iniciar seus escritos e ter acesso a artigos que não havia visto desde que deixou a França em 1812. Esses escritos foram publicados pela primeira vez em 1817 e, juntamente com suas duas memórias e as correspondências trocadas com outros geômetras, compuseram seu trabalho de 1864. *Applications d'Analyse et de Géométrie*, t. II.

A partir de 1817, Poncelet divulgou suas pesquisas nos *Annales* de Gergonne e apresentou duas memórias às *Académies des Sciences* de Paris e de Metz, em 1820 e 1821, respectivamente. Na memória apresentada à *Académie des Sciences* de Paris, Poncelet expôs suas principais ideias sobre o Princípio de Projeção. A versão original dessa memória, juntamente com a crítica que a *Académie* emitiu, foram publicadas no volume de 1864.

Poncelet elaborou sete cadernos, que nós chamamos de cadernos de Metz em nosso trabalho, desde o período em que retornou à França até a publicação do Tratado de 1822. O terceiro caderno é sucinto e aborda o Princípio de Continuidade, que é de interesse para o nosso trabalho. Os cadernos quatro e cinco foram submetidos às *Académies* de Metz e Paris, respectivamente. O sexto caderno contém artigos publicados nos *Annales* de Gergonne, enquanto o sétimo inclui cartas trocadas com Brianchon, Servois e Terquem, e uma análise crítica do relatório de Cauchy sobre a Memória apresentada à *Académie*.

Muitos comentadores notam que Poncelet não reconheceu plenamente a importância de seu próprio trabalho. Por exemplo, embora ele tenha utilizado a Teoria das Polares Recíprocas para fazer descobertas relevantes, não percebeu sua aplicabilidade mais ampla. No entanto, o trabalho de Poncelet foi um marco significativo no desenvolvimento das teorias fundamentais da Geometria Moderna.

3.3.1 O terceiro caderno manuscrito de Metz (editado em 1864)

Sur la loi des signes de position em Géométrie, la loi et le principe de continuité.

Poncelet aborda o princípio da continuidade e a lei dos sinais de posição na Geometria. Ele questiona interpretações precipitadas da regra dos sinais quando a Álgebra é aplicada à Geometria. Essas refutações datam do inverno de 1815 a 1816 e são principalmente reproduzidas nos terceiro e quarto cadernos. Poncelet explica mais aprofundadamente a aceitação do princípio de continuidade, conforme indicado no primeiro volume de suas *Applications*.

Poncelet admirava muito o trabalho de Carnot, mas também reconhecia que as teorias de Carnot encontraram resistência entre os geômetras devido às contradições e objeções difíceis que ele apresentou às antigas leis dos sinais de posição. Isso sugere que Poncelet via Carnot como

um pensador inovador e corajoso que ousou questionar as ideias estabelecidas, mas também reconheceu que suas teorias enfrentaram desafios devido às suas abordagens contraditórias e pouco convencionais.

3.3.2 O quarto caderno de Metz - Submetido à *Académie* de Metz em 1821

Considérations philosophiques et techniques sur le principe de continuité dans les loi Géométriques.

Foi apresentado à *Académie* de Metz em 1821 e finalizado no inverno de 1818 a 1819, Poncelet apresenta uma abordagem sistemática do princípio de continuidade. Este caderno serve como uma introdução e justificação para as teorias apresentadas no terceiro caderno. O terceiro caderno se baseia na aceitação do princípio de continuidade e destaca a importância de demonstrar a existência e aplicação da Análise Moderna em todas as descobertas relevantes.

Poncelet decidiu apresentar uma cópia das considerações filosóficas do quarto caderno à *Société des lettres, Sciences et Arts* de Metz em 1821, depois de ter suas ideias sobre a continuidade acolhidas por um relator crítico da *Académie* de Metz. Essas considerações foram posteriormente incluídas nos Relatórios dos trabalhos da sociedade publicados em Metz de 1821 a 1822.

A memória de 1821 apresentadas à *Académie* de Metz.

Em 1821, Poncelet submeteu à *Société des Lettres, Sciences et Arts de Metz* a memória intitulada *Considérations philosophiques et techniques sur le principe de continuité dans le lois géométriques*, na qual ele apresenta suas ideias sobre a continuidade nas leis da geometria e a necessidade de generalizar a Geometria Pura para torná-la tão abrangente quanto a Análise. Ele também distingue as propriedades métricas das propriedades gráficas, afirmando que a Geometria Descritiva lida com as propriedades gráficas das figuras, enquanto a Geometria Analítica trata das propriedades métricas.

Diferentemente da crítica recebida em sua memória de 1820 apresentada à *Académie des Sciences* de Paris, a memória de Poncelet de 1821 submetida à *Société des Lettres, Sciences et Arts de Metz* recebeu um parecer favorável do presidente da *Académie*. Nestas produções, podemos identificar o espírito investigativo e criativo de Poncelet e perceber a gênese do seu tratado.

3.3.3 O quinto caderno de Metz - Submetido à *Académie* de Paris em 1820

Essai sur les propriétés projectives des sections coniques.

O quinto caderno que tem por título *Essai sur les propriétés projectives des sections coniques* é exatamente a Memória submetida a Académie das ciências de Paris em 1820. Esta Memória, foi apresentada por Poncelet em 1º de maio de 1820 e contém as ideias fundamentais sobre o princípio de projeção que ele pretendia introduzir na Geometria. No entanto, a versão original da Memória só foi publicada muitos anos depois, em 1864, no segundo volume de *Applications d'Analyse et de Géométrie*. Esse volume também inclui artigos, memórias, correspondências e o relatório da Académie des Sciences de Paris.

Essa Memória é um esboço preliminar do *Traité des Propriétés Projectives des Figures* de 1822, obra de Poncelet sobre as propriedades projetivas. Nessa memória, o autor apresenta novos princípios de projeção através de canais estritamente geométricos e suas aplicações mais compreensíveis para o leitor, bem como novas doutrinas relacionadas às secantes ou cordas ideais e intersecções imaginárias de curvas, por exemplo. Por meio desses novos princípios, é possível resolver inúmeras questões em que as seções cônicas são obrigadas a passar por pontos ou tangenciar retas imaginárias. É notável que essas questões podem ser resolvidas usando apenas régua ou métodos lineares, mesmo no caso de segunda ordem. As soluções encontradas e as consequências resultantes de cada caso mostram as vantagens geométricas da adaptação dos novos princípios de projeção e continuidade.

Apesar do relatório de Cauchy emitido pela Académie de Sciences de Paris ter feito uma crítica ao uso do princípio de continuidade, não foi encontrada nenhuma influência significativa no Tratado de Poncelet. Isso é observado pois Poncelet não realizou nenhuma mudança significativa em sua redação após a publicação do relatório.

A Memória de 1820 consiste em três parágrafos.:

No primeiro parágrafo do texto, Poncelet apresenta 27 artigos que tratam das noções preliminares sobre as secantes ideais das seções cônicas. Ele explora a relação constante existente entre o pólo e a polar e sua relação com a secante ideal das seções cônicas, incluindo sua definição e propriedades gerais que são deduzidas a partir de considerações puramente geométricas. Poncelet destaca que o ponto de intersecção das tangentes a uma seção cônica, pelas extremidades da mesma corda (o pólo dessa secante), é um ponto real, mesmo que as secantes sejam imaginárias. Ele demonstra que a relação é constante e explica como utilizá-la para construir o pólo correspondente a uma corda ideal específica.

O segundo parágrafo é composto por 43 artigos e trata das cordas e secantes ideais em relação à circunferência. Poncelet investiga várias propriedades das cordas ideais, tanto com cordas reais quanto ideais, que são comuns a dois ou mais círculos no mesmo plano. Ele deduz muitas propriedades dessas cordas, que passamos a conhecer como eixo radical. Uma das propriedades mais notáveis é que o círculo descrito com centro no eixo corta ortogonalmente todos os círculos que passam por dois pontos em questão. Neste parágrafo, ele apresenta uma solução elegante para o famoso problema de Apolônio, que consiste em construir uma tangente a três outros círculos.

No terceiro parágrafo, composto por 33 artigos, Poncelet apresenta o princípio da doutrina das projeções. Ele define os princípios de projeção central e mostra como eles podem ser aplicados para estender os teoremas para o caso geral de círculos e seções cônicas. Por exemplo, ao querer demonstrar que as propriedades projetivas de dois círculos no mesmo plano são preservadas em dois seções cônicas quaisquer, Poncelet simplesmente mostra que o primeiro sistema pode ser considerado como a projeção do segundo. Ele também mostra que todos os pontos no espaço podem projetar duas seções cônicas em dois círculos e prova que esses pontos pertencem ao círculo descrito com raios perpendiculares à corda ideal comum a ambas as curvas dadas e igual à metade da corda ideal. Com base nessa solução, ele poderia até determinar todos os pontos no espaço capazes de projetar quaisquer duas curvas do segundo grau em duas outras curvas do mesmo grau, mas semelhantes entre si, para as quais o diâmetro paralelo ao plano das duas primeiras curvas forma com o conjugado a mesma combinação em uma razão dada. Várias outras questões semelhantes são abordadas por Poncelet no terceiro parágrafo e resolvidas de acordo com os mesmos princípios.

3.3.4 O sexto caderno de Metz

Articles divers partiellement entres dans la composition du Traité des Propriétés projectives des figures, extradites des Annales de Mathématiques de Montpellier

O sexto caderno cujo título na edição de 1864 é *Articles divers partiellement entres dans la composition du Traité des Propriétés projectives des figures, extradites des Annales de Mathématiques de Montpellier*.

Esses artigos foram publicados nos *Annales* de Gergonne.

Eu não incluí neste caderno as notas do editor dos *Annales*, que às vezes eram extensas e cuja falta de interesse ou relevância poderia suspeitar das minhas intenções científicas. (PONCELET, 1864, p.455, nota de roda-pé)¹²

Parece que, em seu primeiro artigo intitulado *Théorèmes nouveaux sur les lignes de second ordre et additions*, publicado nos *Annales* de Gergonne¹³, Poncelet não teve a intenção de romper com a Geometria tradicional. No entanto, considerando que passou quase dois anos em cativeiro e isolado do contato científico em uma prisão em Saratov, é razoável pensar que a ideia de abandonar os caminhos tradicionais e se tornar inovador seja natural, como ele próprio afirmou. Neste artigo, Poncelet não apresentou a originalidade de suas ideias.

1º Artigo. Géométrie des courbes. *Théorèmes nouveaux sur les lignes du second ordre.*

¹² Je n'ai point rapporté dans ce Cahier les notes du rédacteur des *Annales*, quelquefois étendus, et dont le manque d'intérêt ou d'à-propos aurait pu faire suspecter mes intentions scientifiques.

¹³ *Annales de Mathématiques pures et appliquées*, tome 8 (1817-1818), p. 1-14

O objetivo deste artigo, publicado no t. VIII, nº 1 em 1º de julho de 1817, é apresentar as propriedades das curvas que estão relacionadas exclusivamente aos ângulos. Poncelet observa que é notável que o assunto dos ângulos inscritos em uma circunferência já era conhecido há algum tempo, mas não havia sido discutido em relação às cônicas. O artigo é dividido em doze itens, sendo que o último item contém cinco subitens. É interessante notar que Poncelet utiliza a unidade gradus para medir os ângulos, em vez de graus, mas mantém a notação de graus. Isso pode levar o leitor desatento a cometer erros, como quando Poncelet se refere a um ângulo suplementar de um ângulo β qualquer, que ele anota como $200^0 - \beta$.

Poncelet diz:

Deve-se lamentar que o M. Carnot, a quem a geometria deve tantas melhorias felizes, não tenha dado mais extensão e desenvolvimento à ideia luminosa que ele expõe no início da seção IV de sua Geometria de posição, a respeito das figuras nas quais se pode determinar os ângulos sem a intervenção de quantidades lineares ou trigonométricas. (PONCELET, 1817b, p.2) ¹⁴

É possível verificar a constância dos ângulos inscritos em uma circunferência de círculo quando eles abrangem o mesmo arco ou a mesma corda. As circunferências de círculo possuem diversas propriedades em relação aos ângulos.

Poncelet apresenta a proposição que credita à M. Mclaurin e que foi exposta por Prony.

¹⁵ Em um artigo de Gergonne nos *Annales*¹⁶, é creditado à M. Prony, “É nisso que o teorema de M. Prony consiste” (GERGONNE, 1814, p.51):

Se um dos lados de um esquadro passa constantemente por um dos focos de uma seção cônica e o seu vértice percorre a circunferência descrita sobre o primeiro eixo como diâmetro, se for uma elipse ou hipérbole, ou uma tangente no vértice, se for uma parábola, o outro lado da esquadro será constantemente tangente à curva. (PONCELET, 1817b, p.4) ¹⁷.

¹⁴ On doit regretter que M. Carnot, à qui la géométrie est redevable de tant de perfectionnements heureux, n’ait pas donné plus d’extension et plus de développement à l’idée lumineuse qu’il expose au commencement de la section IV de sa Géométrie de position, touchant les figures dans lesquelles on peut déterminer les angles, sans l’intervention des quantités linéaires ou trigonométriques.

¹⁵ Xº caderno do *Journal de l’École polytechnique*

¹⁶ *Annales des Mathématiques pure et appliquées*, T. 5 de 1814

¹⁷ Si l’un des côtés d’une équerre passe constamment par l’un des foyers d’une section conique, et que son sommet parcourt la circonférence décrite sur le premier axe comme diamètre, s’il s’agit de l’ellipse ou de l’hyperbole, ou une tangente au sommet, s’il s’agit de la parabole, l’autre côté de l’équerre sera constamment tangent à la courbe.

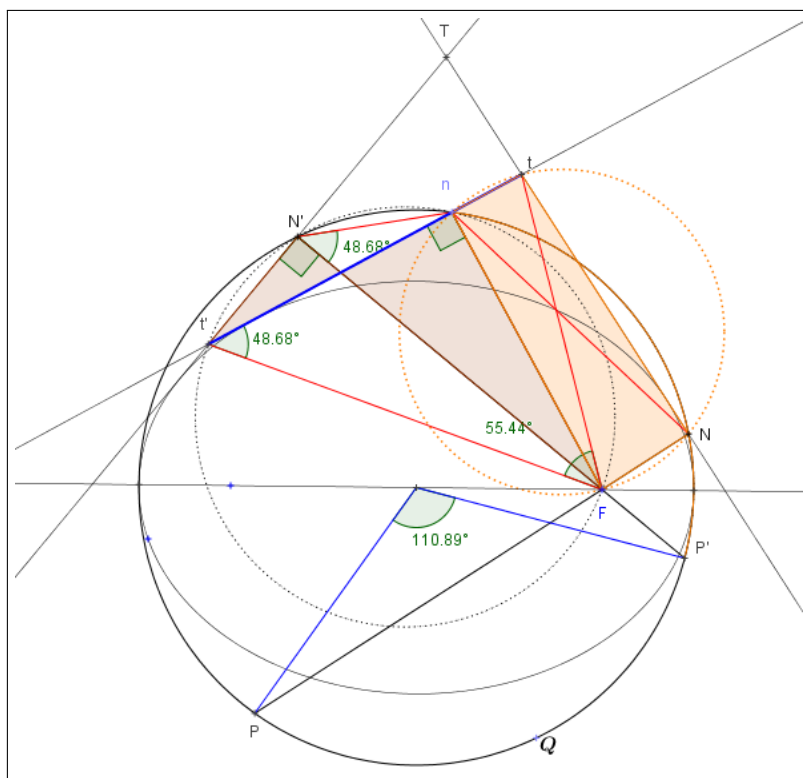


Figura 3.19 – Ângulo constante

O ângulo constante formado entre uma tangente móvel e duas tangentes fixas de uma seção cônica, a partir de um dos focos, permanece inalterado. Especificamente, quando a seção cônica é uma parábola, o ângulo constante é o suplemento do ângulo formado pelas duas tangentes fixas. E Poncelet anuncia o item I:

O ângulo sob o qual se vê, de um dos focos de uma seção cônica, a parte de uma tangente móvel interceptada entre duas tangentes fixas é sempre constante, para todas as posições desta primeira tangente. No caso particular da parábola, esse ângulo constante é o complemento do ângulo formado pelas duas tangentes fixas. (PONCELET, 1817b, p.4) ¹⁸

Vejamos algumas das numerosas consequências desta constante. No item II, Poncelet afirma que:

Se, de um dos focos de uma seção cônica, traçarmos retas tanto para o vértice do ângulo formado por duas tangentes quaisquer à curva quanto para os pontos de contato dos dois lados desse ângulo com ela, a primeira dessas duas retas dividirá em duas partes iguais o ângulo formado pelas outras duas. (PONCELET, 1817b, p.5). ¹⁹

¹⁸ L'angle sous lequel on voit, de l'un des foyers d'une section conique, la partie d'une tangente mobile interceptée entre deux tangentes fixes est toujours constant, pour toutes les positions de cette première tangente. Dans le cas particulier de la parabole, cet angle constant est le supplément de l'angle formé par les deux tangentes fixes.

¹⁹ Si, de l'un des foyers d'une section conique, on mène des droites tant au sommet de l'angle formé par deux tangentes quelconques à la courbe qu'aux points de contact des deux côtés de cet angle avec elle, la première de ces deux droites divisera en deux parties égales l'angle formé par les deux autres.

Esta afirmação é válida mesmo que os pontos estejam a uma distância infinita. Por exemplo, se o ponto T for conduzido ao infinito as tangentes serão paralelas e seus pontos de contato com a cônica serão os extremos de um diâmetro e a reta que foi conduzida do foco ao ponto T será perpendicular ao diâmetro e paralela às tangentes determinando os dois ângulos retos.

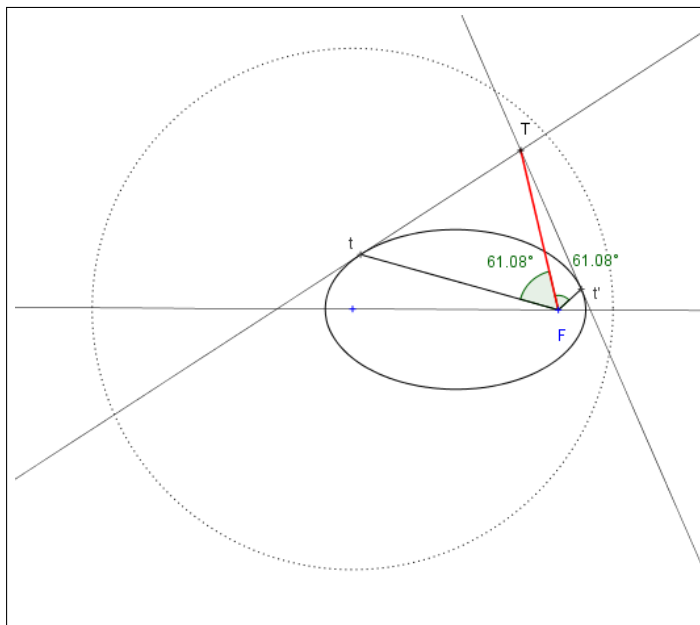


Figura 3.20 – Raios vetores aos pontos de contato possui o ângulos bissecado.

Poncelet afirma que é possível ter como dado o ângulo tFt' , ao invés da tangente móvel tt' , e as consequências serão as mesmas. Com isso, ele afirma:

Se, em um plano com um ângulo fixo dado, girarmos ao redor de um ponto arbitrário e fixo, tomado como vértice, um ângulo qualquer e invariável em tamanho, e depois traçarmos, para cada uma de suas posições, as duas retas que suportam tanto o ângulo fixo quanto o móvel, cada uma das duas séries formadas por essas retas envolverá, em particular, uma única e mesma seção cônica, tendo precisamente como foco o vértice fixo do ângulo móvel e os dois lados do ângulo fixo como tangentes. Além disso, se traçarmos perpendiculares do foco até os dois lados do ângulo fixo e até todas as outras tangentes pertencentes à mesma série, os pés dessas perpendiculares estarão em uma mesma circunferência tendo o primeiro eixo da curva como diâmetro. (PONCELET, 1817b, p.5).²⁰

Cinco retas quaisquer coplanares determinam unicamente uma seção cônica. E é determinável, utilizando apenas a régua e o compasso, seus focos e, portanto, todos os seus elementos. Então, se considerarmos duas destas retas tangentes fixas e as outras três variáveis, como as

²⁰ Si, sur le plan d'un angle fixe donné, on fait tourner autour d'un point arbitraire et fixe, pris pour sommet, un angle quelconque, invariable de grandeur; et qu'on trace ensuite, pour chacune de ses positions, les deux droites qui soutiennent à la fois l'angle fixe et mobile; chacune des deux séries, formées par ces droites, enveloppera, en particulier, une seule et même section conique, ayant précisément pour foyer le sommet fixe de l'angle mobile; et les deux côtés de l'angle fixe pour tangentes. En outre, si l'on abaisse du foyer des perpendiculaires, tant sur les deux côtés de l'angle, fixe que sur toutes les autres tangentes, appartenant à une même série; les pieds de ces perpendiculaires seront sur une même circonférence ayant le premier axe de la courbe pour diamètre.

explicações acima, resolve-se o problema de construção por régua e compasso que seria muito difícil atacando de forma direta.

Poncelet apresenta o Item *IV* em forma de uma pergunta:

Encontrar o ponto a partir do qual se vê no mesmo ângulo as partes de três retas dadas no mesmo plano, interpostas entre outras retas também dadas neste plano? (PONCELET, 1817b, p.6).²¹

Este problema é análogo ao que M. Carnot resolveu em sua *Géométrie de position* (CARNOT, 1803, p.381, art327). Este problema também poderia ser dito: “Encontrar os focos de uma seção cônica inscrita em um pentágono dado”²²

Quatro pontos, B, H, C, D , incidentes arbitrariamente sobre uma reta dada, encontrar fora desta reta um ponto A , tal que traçados as retas AB, AH, AC, AD , os três ângulos formados BAH, HAC, CAD sejam iguais (CARNOT, 1803, p.381)²³

É preciso encontrar, incidente à reta dada, um ponto H' tal que $\frac{BH}{BH'} = \frac{CH}{CH'}$, e outro ponto C' tal que $\frac{HC}{HC'} = \frac{DC}{DC'}$, em seguida sobre HH' e CC' como diâmetros, construímos duas circunferências de círculos. O ponto de intersecção das duas construções determinará o ponto A procurado, como tratam-se da intersecção de duas circunferências de círculos há duas soluções reais. E a justificativa desta solução é simples, estamos diante de duas distribuições harmônicas e sabemos que as bissetrizes internas e externas de um determinado ângulo de um triângulo possuem seus pontos de intersecção com o lado oposto e com o prolongamento do lado oposto, respectivamente, e os vértices deste lado oposto distribuídos harmonicamente sobre a reta que apoia este lado. Portanto, a circunferência de círculo HAH' é o lugar geométrico de todos os pontos tais que podemos sempre ter $BAH = HAC$, e a circunferência de círculo CAC' é o lugar geométrico de todos os pontos tais que podemos sempre ter $HAC = CAD$. Assim, o ponto de intersecção terá $BAH = HAC = CAD$.

²¹ Trouver le point duquel on verrait sous le même angle les parties de trois droites données sur un même plan, interceptées entre de autres lignes droites aussi données sur ce plan.

²² Trouver directement les foyers d’une section conique inscrite à un pentagone donné ?

²³ [dots] quatre points, B, H, C, D , étant pris à volonté sur une droite donnée, trouver hors de cette droite un point A , tel qu’en menant les quatre droites AB, AH, AC, AD , les trois angles BH, HC, CD soient égaux.

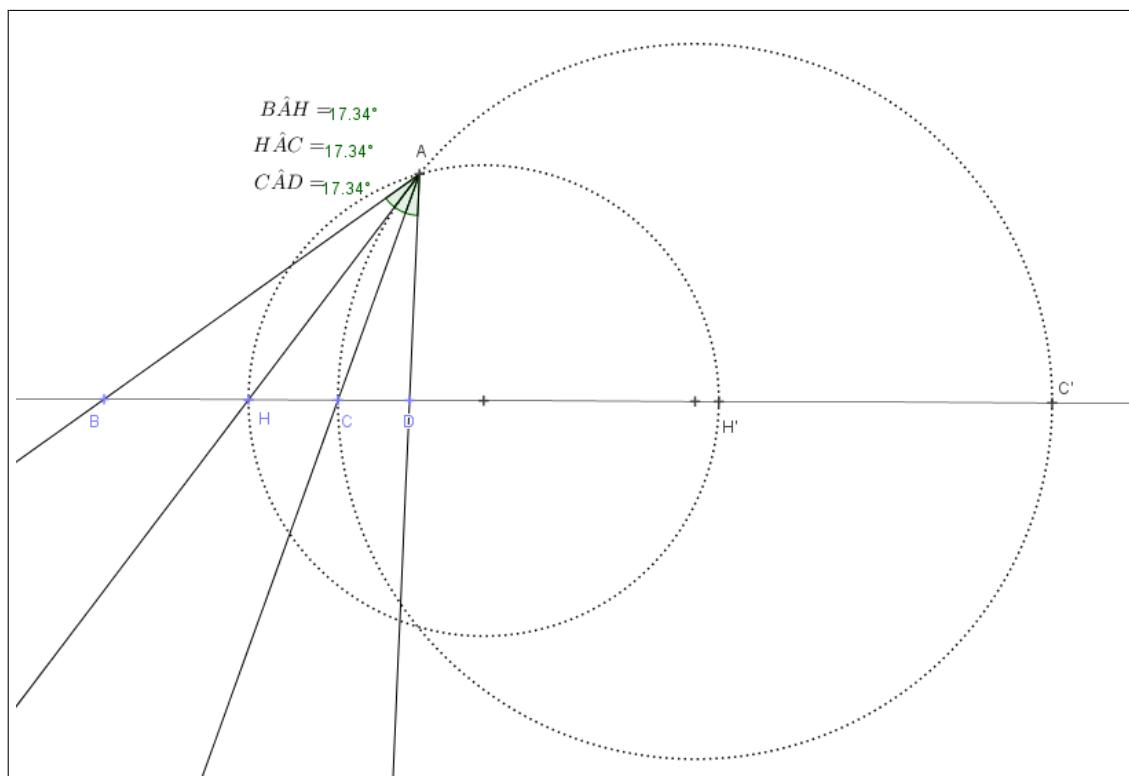


Figura 3.21 – Distribuição hamônica

É possível, também, avaliar a situação do segundo foco, pois é evidente que as mesmas propriedades que incidem em um dos focos das cônicas bifocais, conforme analisamos até o momento, incidem ao outro. Vejamos então, conforme a figura 3.22, as consequências.

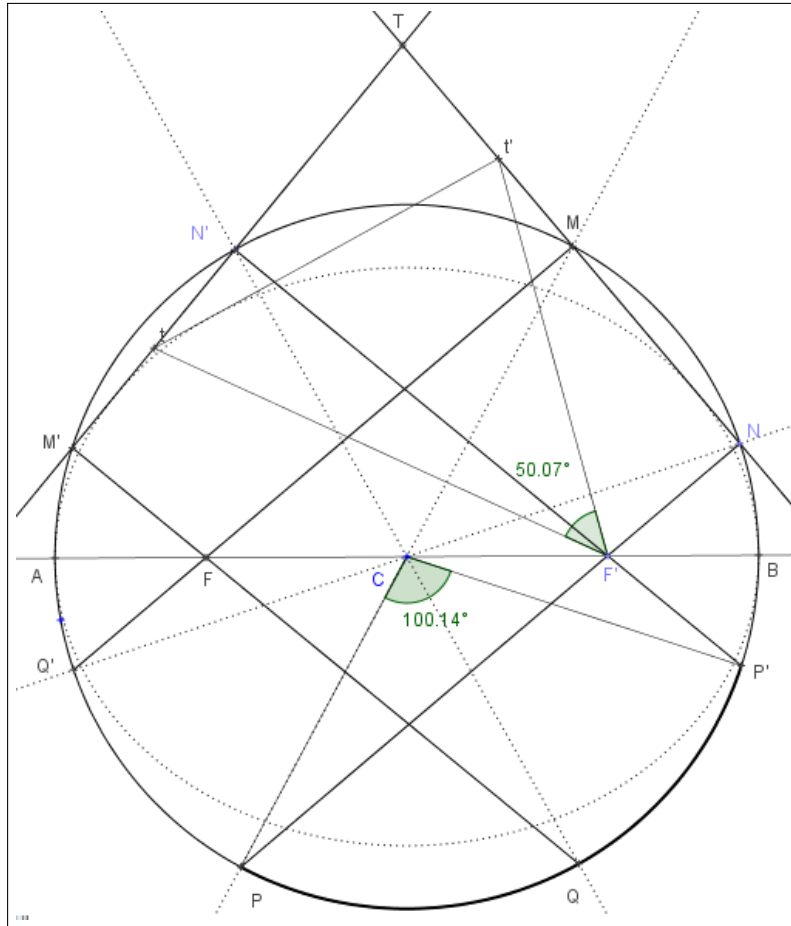


Figura 3.22 – Ângulo focal é metade do ângulo central do círculo principal.

Observando os ângulos vetores dos dois focos, Poncelet destaca o seguinte teorema que apresenta no item *V*:

Quando uma tangente a uma seção cônica termina em duas outras tangentes à mesma curva, a soma dos ângulos vetoriais dessa primeira tangente, na elipse, e sua diferença na hipérbole, é constante e igual ao complemento do ângulo das duas tangentes fixas (PONCELET, 1817b, p.8) ²⁴.

É evidente que quando a cônica é uma parábola e, portanto, um dos seus focos tende ao infinito, o ângulo vetor do foco finito é suplementar ao ângulo formado pelas duas tangentes. Observe a figura 3.23, onde o quadrilátero $Tt'Ft$ é inscritível, justificando os ângulos opostos serem suplementares.

E quando a cônica se torna uma circunferência de círculo, teremos os dois focos coincidentes ao centro e, portanto, o dobro do ângulo vetor é que será o suplemento do ângulo formado pelas duas tangentes.

²⁴ Lorsqu'une tangente à une section conique se termine à deux autres tangentes à la même, courbe, la somme des angles vecteurs de cette première tangente, dans l'ellipse, et leur différence, dans l'hyperbole, est constante et égale au supplément de l'angle des deux tangentes fixes.

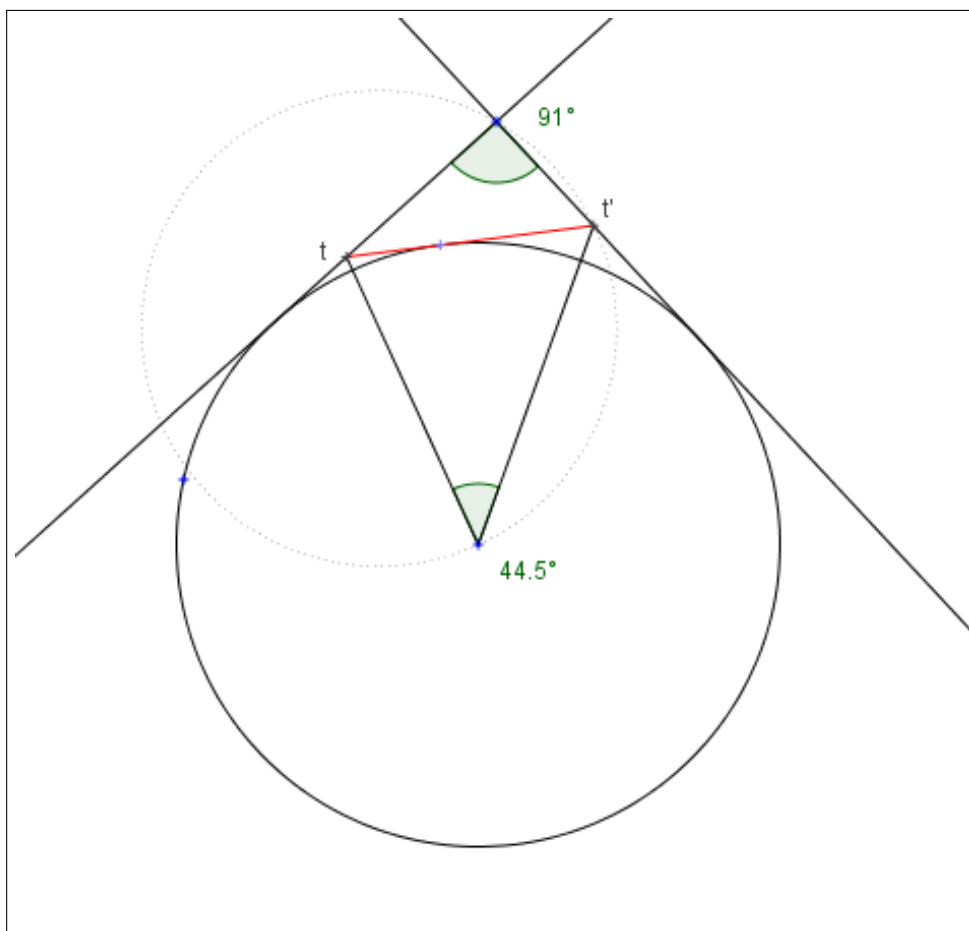


Figura 3.23 – Ângulo formado pelos raios vetores terá o dobro da suplementar ao das tangentes.

Poncelet passa a examinar o caso particular da parábola.

E segue deste raciocínio o item VI:

Um triângulo sendo circunscrito a uma parábola; se circunscrevemos, por sua vez, a circunferência de um círculo ao triângulo, ela passará necessariamente pelo foco da curva (PONCELET, 1817b, p.9).²⁵

²⁵ Un triangle étant circonscrit à une parabole ; si on lui circonscrit, à son tour, une circonférence de cercle, elle passera nécessairement par le foyer même de la courbe. Toutes les paraboles inscrites à un même triangle quelconque ont leurs foyers sur la circonférence d'un même cercle, circonscrit à ce triangle.

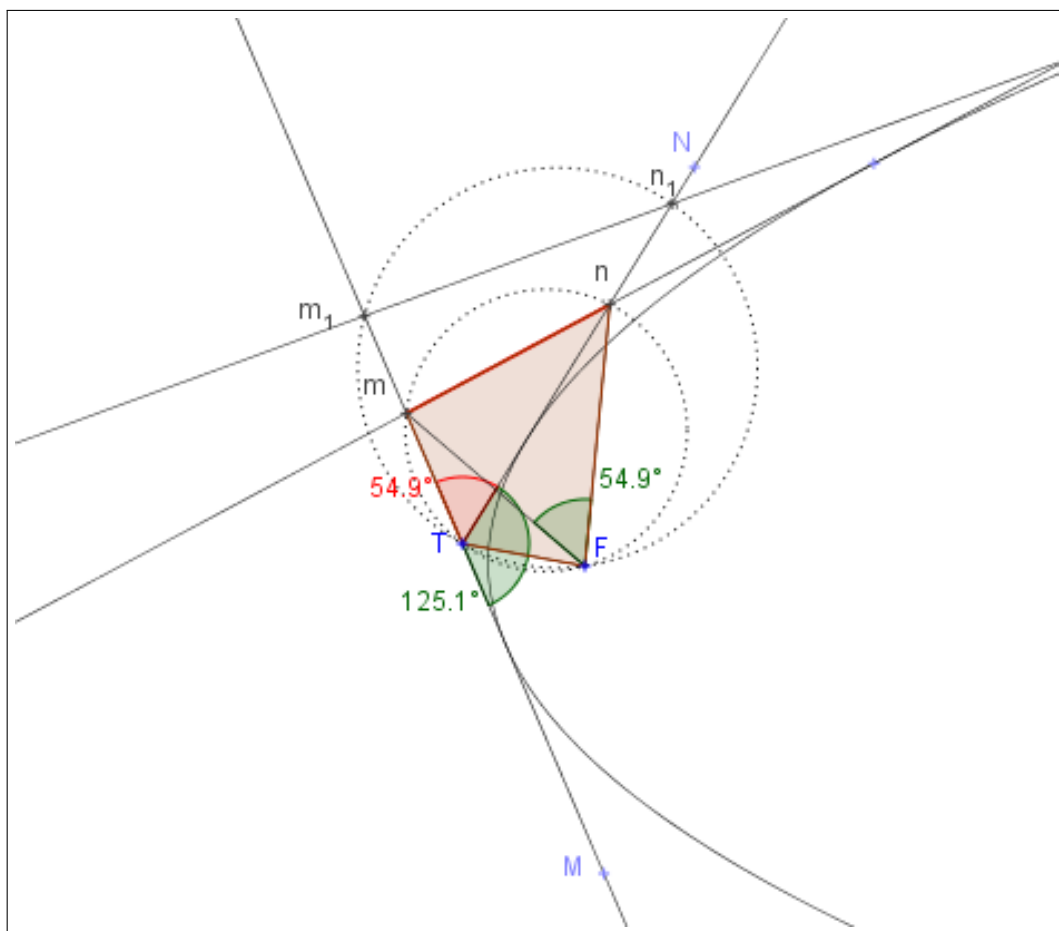


Figura 3.24 – Triângulo circunscrito à parábola.

Portanto, para determinar os elementos de uma parábola bastam traçar quatro tangentes. As circunferências de círculos circunscritas aos dois triângulos, formados pelas tangentes, terão duas intersecções e uma delas será o foco da parábola. Podemos verificar esta construção na figura 3.24. Uma circunferência de círculo passa pelo vértice do quadrilátero $FTmn$ e a outra pelo quadrilátero FTm_1n_1 , tendo o ponto F, foco da parábola, como um dos pontos em comum.

Poncelet continua apresentando os itens em seu artigo e no X^o ele menciona:

Todas as parábolas inscritas no mesmo triângulo têm seus focos na circunferência do mesmo círculo, circunscritas por esse triângulo (PONCELET, 1817b, p.10).²⁶

Assim, cada ponto da circunferência de círculo pode ser considerado como foco de uma nova parábola inscrita ao triângulo que por sua vez é inscrito a mesma circunferência de círculo, conforme a figura 3.24.

²⁶ Toutes les paraboles inscrites à un même triangle quelconque ont leurs foyers sur la circonférence d'un même cercle, circonscrit à ce triangle.

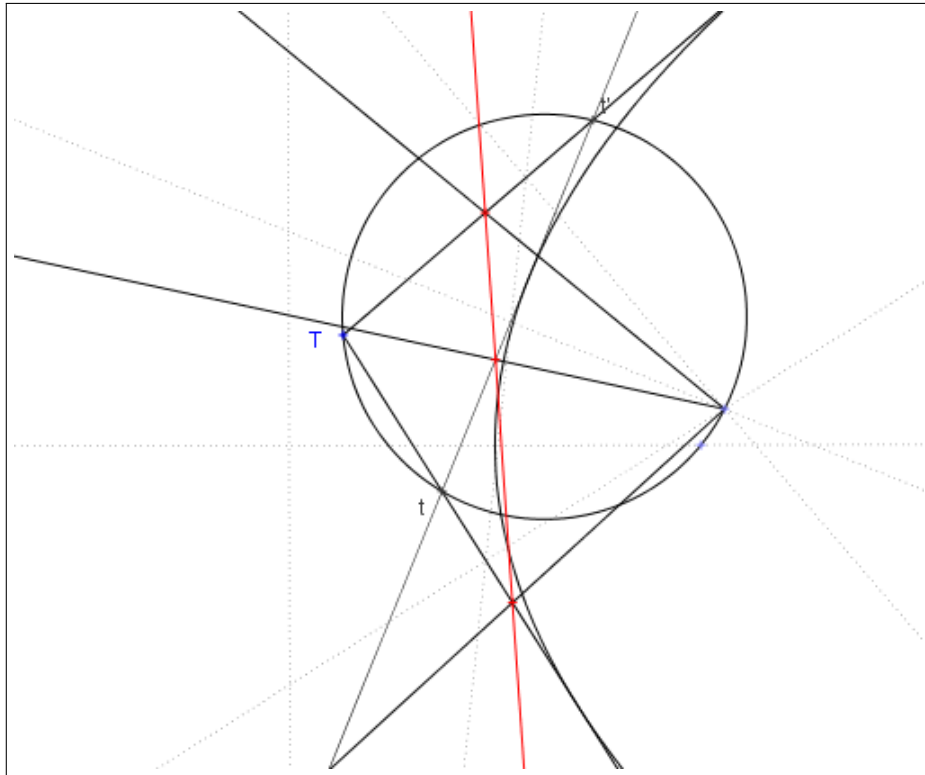


Figura 3.25 – Ângulos na parábola.

Poncelet explica que embora tenha abordado algumas propriedades das seções cônicas anteriormente, ele considera importante explorar mais a fundo as propriedades dessas curvas que não se relacionam apenas com os ângulos formados pelas retas que as atravessam. Ele ressalta que muitos geômetras negligenciaram esse ponto, mas que o assunto é tão rico que ele decidiu apresentar mais algumas pesquisas sobre o assunto, especialmente em relação à parábola. Ele destaca a analogia entre as propriedades da parábola e as propriedades dos polígonos regulares inscritos e circunscritos a uma circunferência. Em resumo, Poncelet está defendendo a importância de explorar as propriedades das seções cônicas em sua totalidade, não apenas aquelas relacionadas aos ângulos formados pelas retas.

Assim, seja F o foco de uma parábola $MNOPQ$, sendo BO e BN duas tangentes quaisquer a esta parábola, tangenciando nos pontos O e N . Traçando os raios vetores FO , FN , correspondentes a estes pontos, e a reta FB , segmento que possui como extremos o foco e o ponto de intersecção das duas tangentes. Conforme os teoremas *II* e *V*, supracitados, os ângulos BFN , BFO são iguais entre si e suplementar ao ângulo NBO , de onde segue NFO é o dobro deste suplementar, ou seja, $NFO = BFN + BFO$. Portanto, no quadrilátero $NBOF$ teremos,

$$F = 2(2r - B)$$

E como

$$O + N + B + F = 4r$$

Temos,

$$O + N = B$$

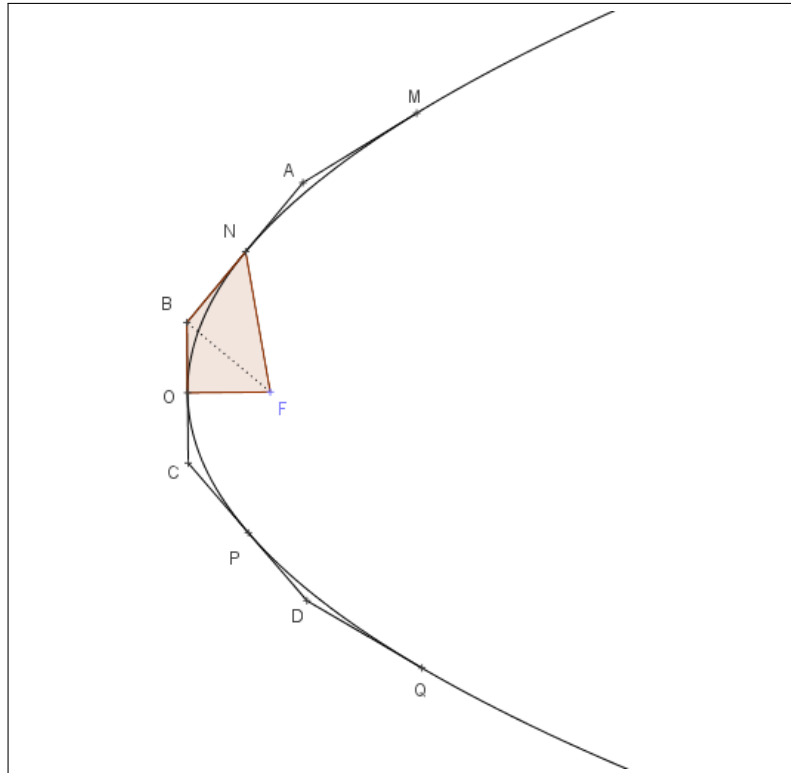


Figura 3.26 – Ângulo dos raios vetores é o dobro do suplementar.

Supondo que $ABCD...$ seja um polígono circunscrito à parábola (Elipse), e que todos os ângulos sejam iguais, ou seja um polígono equiângulo; traçando os raios vetores aos vértices $A, B, C, D, \dots$ e aos pontos de contato $M, N, O, P, Q, \dots$; resultará nos subitens do item XII que Poncelet apresenta neste artigo:

1º Que o raio vetorial direcionado para cada vértice dividirá em duas partes iguais o ângulo daqueles que terminarão nos dois pontos de contato entre os quais esse vértice é entendido.

2º Que o raio vetorial direcionado para cada ponto de contato também se dividirá em duas partes iguais, o ângulo formado por aqueles que serão direcionados para os dois vértices entre os quais esse ponto de contato se encontra compreendido.

3º Que, consequentemente, todos os ângulos formados ao redor do foco (centro) pelos raios vetoriais consecutivos são iguais entre si; daí resulta que cada um desses ângulos deve ser igual a quatro ângulos retos divididos por seu número, quando o polígono é fechado (PONCELET, 1817b, p.12).²⁷

Apresento a figura 3.27 com um polígono inscrito e circunscrito a uma circunferência de círculo para que possamos fazer a analogia ao qual se refere Poncelet. Observe os três subitens supracitados.

²⁷ 1º Que le rayon vecteur dirigé vers chaque sommet divisera en deux parties égales l'angle de ceux qui se termineront aux deux points de contact entre lesquels ce sommet se trouve compris. 2º Que le rayon vecteur dirigé vers chaque point de contact divisera aussi en deux parties égales, l'angle formé par ceux qui se termineront aux deux sommets entre lesquels ce point de contact se trouve compris. 3º Que, par conséquent, tous les angles formés autour du foyer, par les rayons vecteurs consécutifs sont égaux entre eux ; d'où il suit que chacun de, ces angles doit être égal à quatre angles droits divisés par leur nombre, lorsque le polygone est fermé.

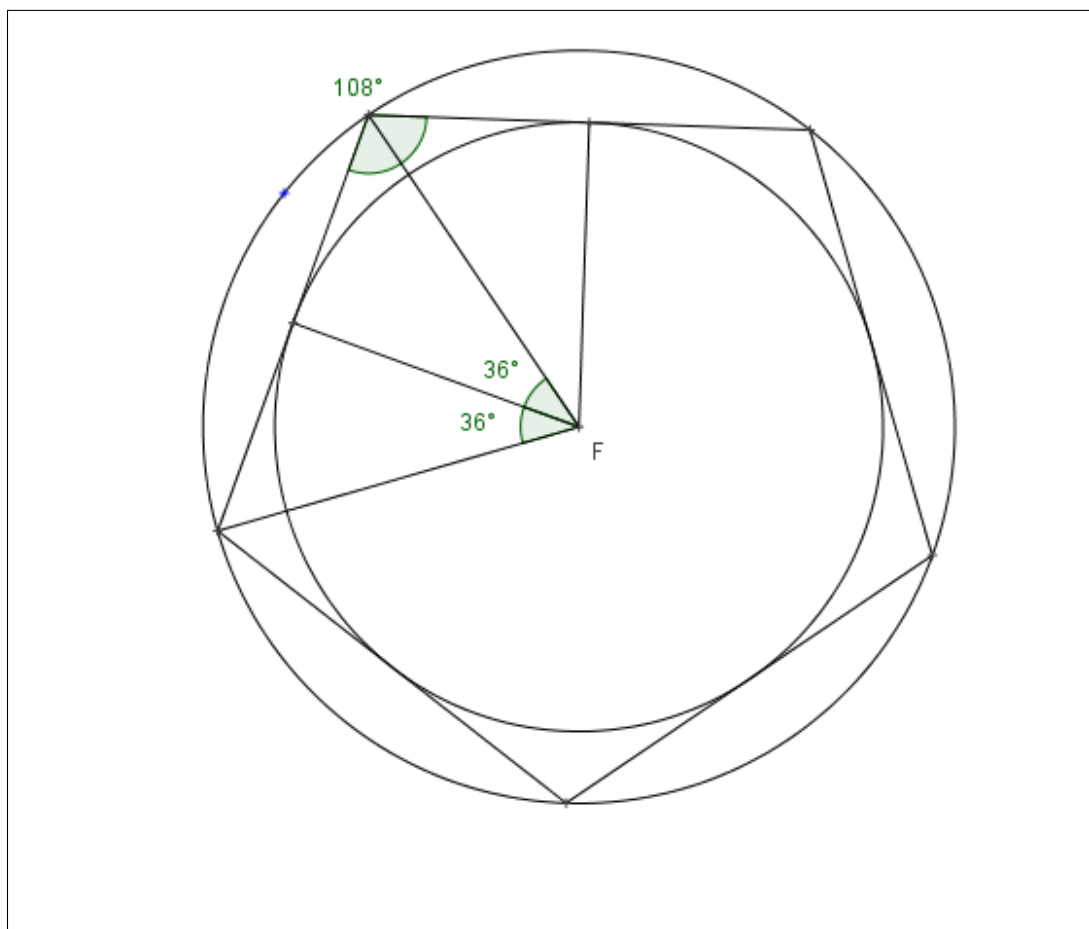


Figura 3.27 – Ângulos complementares.

Poncelet lembra em seu artigo que há uma demonstração desta proposição realizada pelo Marquês de l'Hôpital em *Traité analytique des sections coniques* (L'HOSPITAL, 1776, p.249).

A sequência de vértices móveis de um ângulo de magnitude determinado e constante, circunscrita a uma parábola, forma uma e a mesma seção cônica, cujo foco é precisamente confundido com o da parábola (PONCELET, 1817b, p.13).²⁸

E que há uma demonstração desta proposição por M. Brianchon no *Xº* caderno do *Journal de l'École polytechnique* (BRIANCHON, 1810, p.14).

Se o vértice de um ângulo móvel e variável estiver sujeito a percorrer uma primeira seção cônica e seus lados estiverem sujeitos a tocar uma segunda, a corda de contato envolverá uma terceira (PONCELET, 1817b, p.13).²⁹

2º Artigo Correspondance. Lettre de M. Poncelet.

²⁸ La suite des sommets mobiles d'un angle de grandeur donnée et constante, circonscrit à une parabole, forme une seule et même section conique, dont un des foyers se confond précisément avec celui de la parabole

²⁹ Si le sommet d'un angle mobile et variable est assujetti à parcourir une première section conique, et que ses côtés soient assujettis à en toucher une seconde, la corde de contact avec celle-ci en enveloppera une troisième.

Este artigo é uma carta de 18 de outubro 1817, composta de 4 páginas (PONCELET, 1817a, p.68)³⁰, dirigida ao Editor dos *Annales* para retificação do artigo anterior. Poncelet havia dito parábola, já no final do artigo, quando queria se referir à elipse.

Eu disse, no final deste artigo, que se podia provar, a priori, que os lados do polígono inscritos na parábola da figura 4 e que correspondem a ângulos vetoriais iguais, tangenciando a parábola, diferente da primeira: é um erro de palavras, que eu vi quase logo que minha carta foi enviada e que eu teria corrigido imediatamente, como faço agora, se tivesse tido oportunidade então. A curva em questão é obviamente uma elipse, tendo como o ponto f por foco (PONCELET, 1817b, p.68).³¹

O editor Gergonne coloca na edição da carta um comentário em nota de rodapé,

Aproveitamos esta oportunidade para pedir desculpas ao leitor pelo fato de que, na figura 4 do memorando citado, a curva da parábola foi omitida. Felizmente, o erro pode ser facilmente corrigido à mão. (PONCELET, 1817b, p.71).³²

Ao longo de todos os artigos publicados por vários autores nos *Annales* de Gergonne, é evidente que o editor sempre exerce uma intervenção. Essa intervenção pode resultar em divergências entre os autores e o editor, e até mesmo entre os próprios autores, devido a essas mudanças realizadas.

Poncelet cita ao final da carta de retificação, que envia ao editor, o seguinte:

Se unirmos, por linhas retas, cada um dos vértices do polígono circunscrito com o foco comum acima mencionado, essas linhas conterão precisamente os pontos de contato dos lados correspondentes do polígono inscrito com a seção cônica que esse polígono envolve. (PONCELET, 1817b, p.69).³³

Essa citação é exatamente o que apresentamos na Figura 3.28. Poncelet termina aqui suas observações sobre o artigo anterior. E continua apresentado outras proposições.

Se, em torno de um ponto escolhido a vontade no plano de uma seção cônica, fizermos um ângulo reto cujo vértice esteja neste ponto e, em seguida, traçarmos sucessivamente todas as cordas da seção cônica que subentende esse ângulo, o sistema dessas cordas envolverá uma única e mesma seção cônica, que se reduzirá a um ponto quando o polo fixo for colocado no próprio perímetro da seção cônica dada. (PONCELET, 1817b, p.70).³⁴

³⁰ Lettre de M. Poncelet. Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 8 (1817-1818), p. 68-71

³¹ J'ai dit, vers la fin de cet article, qu'on pouvait prouver, à priori, que les côtés du polygone inscrit à la parabole de la figure 4, et qui correspondent à des angles vecteurs égaux, touchaient tous une seule et même parabole, différente de la première : c'est une erreur de mots, que j'ai aperçue presque aussitôt que ma lettre a été partie, et que j'aurais rectifié de suite, comme je le fais à présent, si j'en avais eu le loisir alors. La courbe en question ; est visiblement une ellipse, ayant toujours le point f pour foyer.

³² Nous saisissons cette occasion pour demander pardon au lecteur de ce que, dans la figure 4 du mémoire cité, le tracé de la parabole a été oublié. L'erreur peut heureusement se réparer à la main avec beaucoup facilité.

³³ Si l'on joint, par des lignes droites, chacun des sommets du polygone circonscrit avec le foyer commun ci-dessus, ces droites renfermeront précisément les points de contact des côtés correspondants du polygone inscrit, avec la section conique que ce polygone enveloppe.

³⁴ Si, autour d'un point pris à volonté, dans le plan d'une section conique, on fait mouvoir un angle droit, dont le sommet soit en ce point, et qu'on trace ensuite successivement toutes les cordes de la section conique qui soutiennent cet angle ; le système de ces cordes enveloppera une seule et même section conique, qui se réduira à un point, quand le pôle fixe sera pris sur le périmètre même de la section conique donnée.

Neste trecho, Poncelet semeia a ideia que será mais tarde desenvolvida de maneira precisa em relação à reciprocidade polar. É interessante notar que o ponto (polo) relacionado com sua corda (polar), ao se mover sob um ângulo fixo - neste caso, um ângulo reto - irá condicionar a corda e determinar uma única cônica. Posteriormente, veremos que esse ponto (polo) irá se mover sobre a cônica em questão. Poncelet afirma que tais proposições se aplicam claramente aos casos em que a seção cônica é substituída por uma circunferência, e observa que, nesse caso particular, há várias circunstâncias notáveis a serem observadas.

Se um quadrilátero é, ao mesmo tempo, inscrito em um círculo e circunscrito a outro, as cordas que unem os pontos de contato dos lados opostos se cruzam em ângulos retos e precisamente no ponto de intersecção das duas diagonais. Quando deformamos esse quadrilátero, ele não deixará de permanecer inscrito e circunscrito aos dois círculos em questão; e o ponto em que as diagonais e as cordas que unem os pontos de contato opostos se cruzam permanecerão invariáveis em posição (PONCELET, 1817b, p.71).³⁵

Com base nessa citação, é possível afirmar que a figura 3.28 pode ilustrar de maneira adequada a propriedade mencionada por Poncelet.

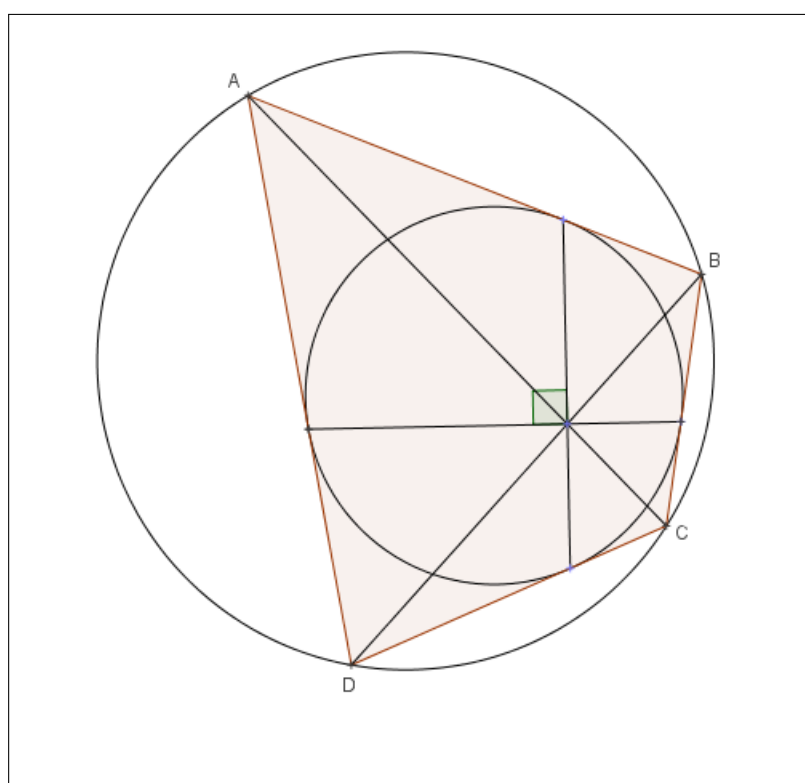


Figura 3.28 – Quadrilátero inscrito e circunscrito

³⁵ Si un quadrilatère est, en même temps, inscrit à un cercle et circonscrit à un autre, les cordes qui joindront les points de contact des côtés opposés se couperont à angle droit, et précisément au point d'intersection des deux diagonales. Quand l'on viendra ensuite à déformer ce quadrilatère, il ne cessera pas de rester inscrit et circonscrit aux deux cercles dont il s'agit ; et le point où se coupent à la fois les deux diagonales et les cordes qui joignent les points de contact opposés demeurera invariable de position.

Poncelet, data e assina esta carta em 18 de dezembro de 1817, na cidade de Metz. Neste período ele encontra-se como capitão em um batalhão nesta cidade. essa informação pode contribuir para uma compreensão mais completa do contexto em que Poncelet trabalhava e das circunstâncias que influenciaram seu trabalho e pensamento. O fato de ele ser um capitão em um batalhão durante sua estadia em Metz pode indicar que ele estava envolvido em questões militares na época e que talvez tenha enfrentado desafios e dificuldades relacionados a isso. Além disso, o fato de ele ter escrito essa carta enquanto ocupava uma posição militar sugere que ele era capaz de equilibrar suas responsabilidades militares com seu trabalho acadêmico, o que demonstra sua dedicação e capacidade de multitarefa. Isso nos diz muito sobre Poncelet.

3º Artigo. Philosophie mathématique. Réflexions sur l'usage de l'analyse algébrique dans la géométrie; suivies de la solution de quelques problèmes dépendant de la géométrie de la règle.

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 8 (1817-1818), p. 141-155

Neste artigo, que foi publicado no mesmo t.VIII dos *Annales* de Gergonne em novembro de 1817, Poncelet apresenta uma avaliação original em oposição a um conceito de Geometria desenvolvido por Gergonne em um número anterior. Embora Poncelet não apresente o resultado de seus trabalhos, nem mesmo um resumo de suas principais ideias, ele faz algumas reflexões sobre o uso da análise algébrica na geometria ao longo das 15 páginas do artigo. Ele defende que a geometria pura tem soluções tão simples quanto a análise e resolve algumas questões com o uso apenas da régua, com a clara intenção de demonstrar a simplicidade dessas soluções diante da geometria analítica.

Poncelet escreve ao editor para discordar do artigo deste último, que, em seu parágrafo inicial, afirma ter a intenção de apresentar o famoso problema de Apolônio sobre tangências de maneira mais simples e elegante usando geometria analítica, em oposição às soluções puramente geométricas.

Há cerca de três anos, a *Académie* de Turim quis tornar público, por meio da impressão, um artigo que eu lhe havia enviado. Nele, com o objetivo de vingar completamente a geometria analítica da acusação que com frequência se faz a ela de não poder competir com a geometria pura na resolução de problemas, eu tentava provar que a geometria analítica, manejada adequadamente, oferecia as soluções mais diretas, elegantes e simples de dois problemas há muito tempo célebres e considerados difíceis: refiro-me ao problema de descrever um círculo que toque três círculos dados e ao problema de descrever uma esfera que toque quatro esferas dadas. (GERGONNE, 1817b, p.289).³⁶

³⁶ Il y a environ trois ans que l'académie de Turin voulut bien rendre public, par la voie de l'impression, un mémoire que je lui avais adressé, et où, dans le dessein de venger complètement la géométrie analytique du reproche qu'on ne lui fait que trop souvent de ne pouvoir rivaliser avec la géométrie pure, pour la construction des problèmes, j'essayais de prouver que cette géométrie analytique, convenablement maniée, offrait les solutions les plus directes, les plus élégantes et les plus simples de deux problèmes dès-long-temps célèbres, et qui passent pour difficiles: je veux parler du problème où il s'agit de décrire un cercle qui touche trois cercles donnés et de celui où il est question de décrire une sphère qui touche quatre sphères données.

Poncelet escreve ao editor para fazer reflexões sobre o uso da análise algébrica na geometria pura e apresentar soluções utilizando apenas a régua. O objetivo é mostrar que o editor estava equivocado ao afirmar que as soluções com geometria analítica são mais simples e elegantes. Segue um trecho:

Você não encontrará indiscutivelmente, sem dúvida, a liberdade que tomo para lhe dirigir algumas queixas sobre a comparação que você faz entre os resultados da geometria pura e os da geometria analítica. A imparcialidade que você professa é uma garantia de que tudo o que pode tender a esclarecer a parte filosófica das ciências exatas deve, independentemente de suas opiniões pessoais e de sua maneira particular de considerar as coisas, encontrar um acesso livre em seu jornal, principalmente destinado, ao que parece, reunir as discussões que possam surgir entre os geômetras sobre a estima relativa que deve ser concedida aos vários métodos de ampliar o domínio da ciência (PONCELET, 1817b, p.141).³⁷

Poncelet concorda com o editor sobre a geometria pura dos antigos, mas discorda se ela se limita apenas à geometria sem coordenadas. Ele acredita que a geometria moderna, que usa noções de infinitamente grande e pequeno e propriedades do espaço tridimensional, pode oferecer soluções tão simples e elegantes quanto a geometria analítica. Além disso, Poncelet acredita que a geometria moderna pode fornecer soluções superiores àquelas deduzidas da geometria analítica em certos problemas, por meio da intuição.

Poncelet afirma em sua carta que não busca apresentar soluções para demonstrar a superioridade da geometria pura, mas sim evoca as ideias de M. Dupin (DUPIN, 1813, p.238)³⁸ que acredita que ambas as áreas têm meios próprios e que não se deve cultivar uma em detrimento da outra.

Poncelet menciona que possui vários artigos fornecidos pelo editor, incluindo um último artigo no qual usa considerações geométricas preliminares para simplificar a questão. Ele observa que uma construção que pode ser feita com a régua para uma seção cônica é aplicável a todas as outras. Em seguida, apresenta problemas e soluções que foram escritos quatro anos antes, enquanto ainda era prisioneiro em *Saratoff*, e que foram apresentados aos autores dos *Annales*, MM. Français e Servois autores já conhecidos dos *Annales*.

Poncelet analisa as possibilidades iniciando com um polígono de três vértices inscrito na cônica e generalizando até M vértices. Ele afirma que para resolver o problema basta determinar um vértice, independentemente do número de vértices do polígono, pois traçando a reta que apoia o lado do polígono e passa pelo ponto arbitrário no plano, é possível determinar a intersecção com a curva e, assim, construir o polígono procurado.

³⁷ Vous ne trouverez pas indiscrète, sans doute, la liberté que je prends de vous adresser quelques réclamations touchant la comparaison que vous établissez entre les résultats de la géométrie pure, et ceux de la géométrie analytique. L'impartialité dont vous faites profession m'est un garant assuré que tout ce qui peut tendre à éclairer la partie philosophique des sciences exactes doit, indépendamment de vos opinions personnelles et de votre manière particulière d'envisager les choses, trouver un libre accès dans votre journal, principalement destiné, à ce qu'il paraît, à recueillir les discussions qui peuvent s'élever entre les géomètres sur l'estime relative que l'on doit accorder aux diverses méthodes propres à agrandir le domaine de la science.

³⁸ Développements de géométrie, 1^a partie, p. 238.

Poncelet apresenta dois problemas e observa que o primeiro é exatamente o problema geral que o editor tratou na página 325 do VII volume, e por isso ele espera que o editor aprecie a solução sintética que ele apresenta. Ele é um pouco irônico neste ponto. No segundo problema, Poncelet afirma que, embora os problemas sejam de natureza diferente, é possível, usando a teoria dos pólos, passar da solução de um problema para a solução do outro usando apenas retas simples. Aqui, Poncelet já apresenta a base de sua teoria da Reciprocidade Polar, que será motivo de uma disputa ³⁹com o editor alguns anos mais tarde.

PROBLEMA I. Em uma dada seção cônica, traçada sobre um plano, inscreva um polígono de m vértices, cujos lados prolongados, se necessário, passam respectivamente pelo mesmo número de pontos dados, colocados arbitrariamente no mesmo plano; usando apenas a régua?

PROBLEMA II. Em uma dada seção cônica, traçada sobre um plano, circunscreva um polígono de m lados, cujos vértices se apoiam respectivamente sobre o mesmo número de retas dadas, traçadas arbitrariamente neste plano, usando apenas a régua? (PONCELET, 1817c, p.145).⁴⁰

Poncelet se atem ao primeiro problema e faz algumas considerações combinatórias para expor os possíveis números de soluções, apresentando uma nova leitura do problema quando a ordem dos pontos aos quais passarão os lados, quando prolongados, se for o caso, for levada em consideração. Desta forma Poncelet reescreve o primeiro problema:

buscar qual é o número e a espécie de polígonos verdadeiramente diferentes, em relação à sucessão dos lados, que é possível formar, sujeitando esses mesmos lados a passar por um número m de pontos dados? (PONCELET, 1817c, p.146)
⁴¹

Poncelet diz que apresentará duas soluções inteiramente geométricas para o problema mencionado anteriormente, e destaca que são notáveis por sua simplicidade e generalidade. Na primeira solução, ele começa com o caso particular do triângulo e depois passa para o caso geral, usando o método de indução. Ele observa que o problema se resume a encontrar um dos vértices do polígono, pois traçando uma reta do vértice encontrado ao ponto arbitrário dado no plano, encontramos na interseção com a curva outro vértice. Repetindo esse procedimento, encontramos mais vértices e, em dado momento, teremos traçado todo o polígono.

Vamos analisar a construção do triângulo proposta por Poncelet:

Por três pontos dados p, p', p'' , inscreva, à vontade, na seção cônica, uma parte do polígono de três lados, onde o primeiro lado ab passa por p , o segundo

³⁹ A disputa entre o editor e Poncelet foi bem registrada na tese de Santos (2015).

⁴⁰ PROBLÈME I. A une section conique donnée, et tracée sur un plan, inscrire un polygone de m sommets, dont les côtés, prolongés, s'il le faut, passent respectivement par un même nombre de points donnés, placés arbitrairement sur le même plan ; en ne faisant usage que de la règle seulement ?

PROBLÈME II. A une section conique donnée, et tracée sur un plan, circonscrire un polygone de m côtés, dont les sommets s'appuient respectivement sur un même nombre de droites données, tracées arbitrairement sur ce plan, en ne faisant usage que de la règle seulement ?

⁴¹ rechercher quel est le nombre et l'espèce des polygones réellement différents, quant à la succession des côtés, qu'il est possible de former, en assujettissant ces mêmes côtés à passer par un nombre m de points donnés ?

lado bc passa por p' e o terceiro lado cd passa por p'' . Trace a polar de um dos dois pontos extremos, p ou p'' , por exemplo, e conduza uma reta que passa pelos outros dois pontos, p e p' , que intersecta essa polar em q . Trace, a partir de q e c , uma secante que intersecta novamente a curva em r . Por fim, trace rd intersectando a polar em P' e ra intersectando a outra reta em P . Em seguida, traçando PP' , cada uma das interseções dessa reta com a curva pode ser considerada como o vértice procurado.

(PONCELET, 1817c, p.148).⁴²

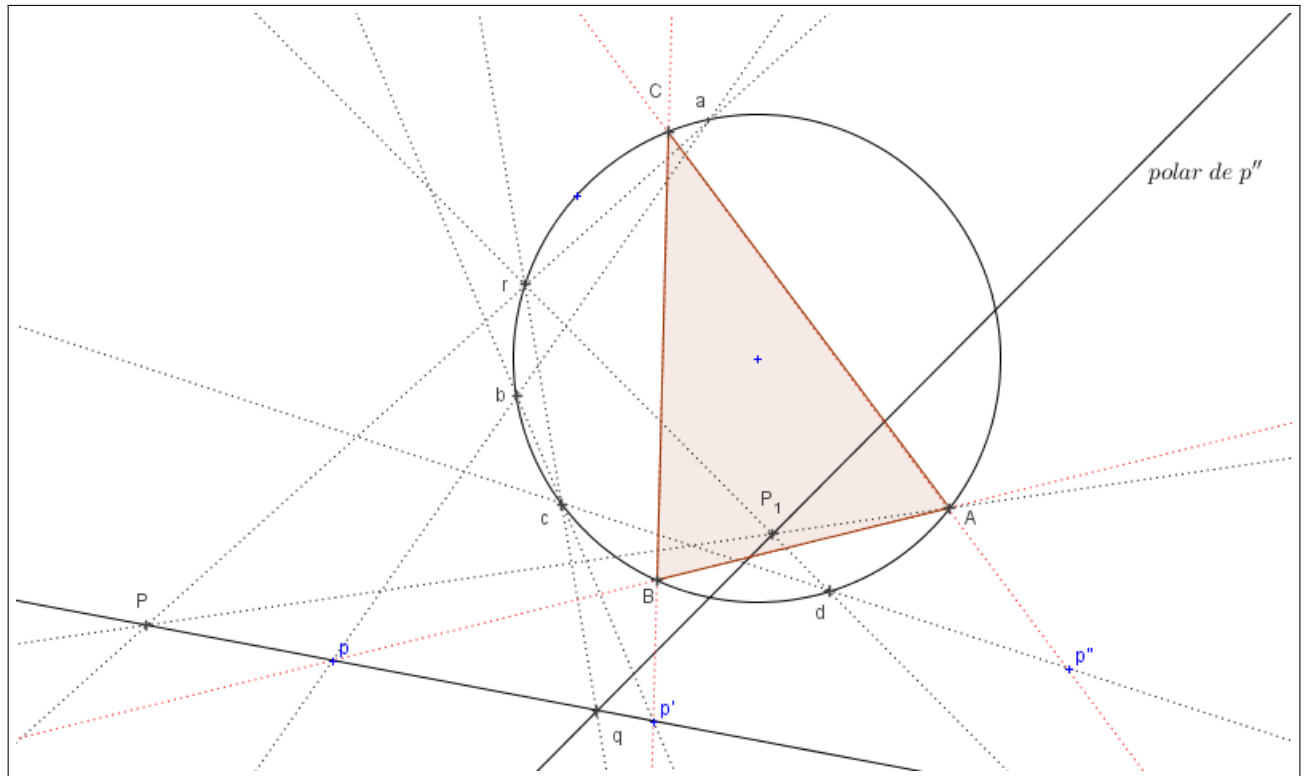


Figura 3.29 – Polígono inscrito cujo os lados prolongados passam por pontos fixos.

Dois pontos devemos observar para melhor entendimento e compreensão do que faz Poncelet. O primeiro é que há um erro tipográfico, do editor, no artigo, exatamente da descrição da construção acima. Onde se lê *re* (nota de rodapé) deve-se ser lido *rd*. Faço essa observação, pois estamos baseando nosso trabalho nas construções e tal erro tipográfico conduz o leitor à impossibilidade de tal construção. Toda “experiência” deve ser permitida sua repetição, senão, sua solução terá sido mero acaso. Para que possamos entender melhor o que Poncelet fez, há dois pontos que devem ser observados. O primeiro é que há um erro tipográfico no artigo, mais precisamente na descrição da construção mencionada acima. Onde está escrito *re*, deve ser lido

⁴² Pour trois points donnés p, p', p'' . Inscrivez, à volonté, à la section conique, une portion de polygone de trois côtés, dont le premier ab passe par p , le second bc passe par p' , et le troisième cd par p'' . Tracez la polaire de l'un quelconque des deux points extrêmes p, p'' , de p'' par exemple ; et menez par les deux autres p, p' , une droite qui viendra couper cette polaire en q . Menez, par q et c , une sécante, coupant de nouveau la courbe en r . Menez enfin re coupant la polaire en P' et ra coupant l'autre droite en P . Alors menant PP' , chacune des Intersections de cette droite avec la courbe pourra être prise pour le sommet cherché.

rd. É importante fazer essa observação porque estamos baseando nosso trabalho nas construções e esse erro tipográfico pode levar o leitor a pensar que a construção é impossível. É essencial que possamos repetir a construção para que a solução não seja apenas um acaso. A segunda observação é uma comparação com a solução sintética que Gergonne apresenta (GERGONNE, 1817a, p.333). O leitor poderá verificar, por comparação, a elegância da solução de Poncelet.

A seguir, apresentamos a solução sintética proposta pelo geômetra analítico Gergonne:

Sejam S, S', S'' os três vértices desconhecidos, P em $S'S''$, P' em $S''S$ e P'' em SS' . Sejam construídas as polares dos pontos P, P', P'' ; representemo-las respectivamente por C, C', C'' ; C' e C'' se intersectam em E , C'' e C em E' , C e C' em E'' . Sejam traçadas $PE, P'E', P''E''$, intersectando respectivamente C, C', C'' em B, B', B'' , então a curva será intersectada respectivamente em S por $B'B''$, em S' em $B''B$, em S'' por BB' . (GERGONNE, 1817a, p.333)⁴³

Vejamos sua construção:

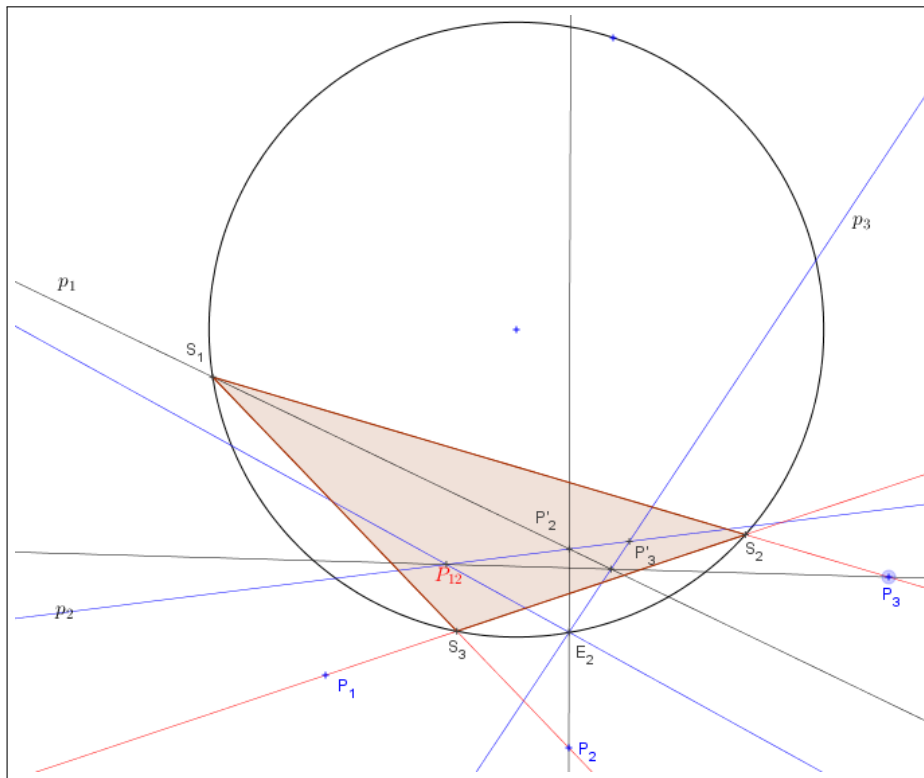


Figura 3.30 – Polígono inscrito à cônica com seus lados incidindo em pontos arbitrários

Poncelet acredita ser suficiente os exemplos apresentados, mas ainda assim, apresenta outros dois, pois acredita que foram simples os exemplos e que os dois serão de um interesse maior ao editor.

⁴³ Soient S, S', S'' ; les trois sommets inconnus, P devant se trouver sur $S'S''$, P' sur $S''S$, et P'' sur SS' . Soient construites les polaires des points P, P', P'' ; représentons-les respectivement par C, C', C'' ; C' et C'' se coupant en E , C'' et C en E' , C et C' en E'' . Soient menées $PE, P'E', P''E''$, coupant respectivement C, C', C'' en B, B', B'' ; alors la courbe sera coupée respectivement en S par $B'B''$, en S' par $B''B$, en S'' par BB' .

Acredito, senhor, que esses exemplos são suficientes para o objeto que eu tinha em vista. Mas, para fixar ainda mais atenção de uma maneira mais particular; acho que devo observar que os problemas que acabei de resolver talvez não sejam os mais difíceis daqueles com os quais consegui lidar em geometria pura e sem a ajuda do cálculo. Entre os vários exemplos que eu poderia citar, vou me limitar aos dois seguintes, os quais, por seu interesse, parecem se recomendar de uma maneira mais especial (PONCELET, 1817b, p.154).⁴⁴

Apresentaremos ao leitor o segundo problema que Poncelet sugere ao final deste artigo.

Em um ponto dado de uma curva geométrica qualquer sobre um plano, traçar uma tangente a essa curva, usando apenas a régua? (PONCELET, 1817b, p.154).⁴⁵

A seguir, apresenta-se a construção:

Suponha que temos a cônica β , por exemplo, uma elipse, e incidente a ela o ponto T , pelo qual desejamos passar a tangente à cônica. Colocamos no mesmo plano o ponto P e construímos a sua polar p em relação à cônica. Passamos por P e T uma semirreta de origem P que será secante à cônica em T e em T' . Denotamos por I o ponto de intersecção da semirreta e da polar. Tracemos outra semirreta, de origem P , secante à cônica. Denotemos por A e B os pontos de intersecção. Tracemos as retas BI e AI , elas irão intersectar a cônica, respectivamente, nos pontos D e C . Os pontos P , D e C são colineares. Isto porque, os triângulos BIC e APD estão em perspectiva, ou seja, obedecem ao teorema de Desargues. A reta BC irá intersectar a polar p em Q . Q é incidente sobre a polar p , portanto, a polar de Q passará por P . E os pontos P , T , I e T' estão distribuídos harmonicamente sobre a polar de Q . Assim, a reta TQ é a solução, ou seja, é a reta tangente à cônica no ponto T .

⁴⁴ Je crois, Monsieur, ces exemples suffisants pour l'objet que j'avais en vue. Mais, pour fixer encore l'attention d'une manière plus particulière ; je crois devoir observer que les problèmes que je viens de résoudre ne sont peut-être pas les plus difficiles de ceux que je suis parvenu à traiter par la géométrie pure, et sans le secours du calcul. Entre les divers exemples que j'en pourrais citer, je me bornerai aux deux suivants qui, à raison de l'intérêt qu'ils présentent, semblent se recommander d'une manière plus spéciale.

⁴⁵ En un point donné d'une courbe géométrique quelconque tracée sur un plan, mener une tangente à cette courbe, en ne faisant usage que de la règle seulement ?

um bastão inclinado em uma direção, pensa, com razão, em conseguir atingir seu objetivo apenas dobrando o bastão na direção oposta (GERGONNE, 1817a, p.156).⁴⁶

Possivelmente a academia a qual Gergonne se refere quando menciona um fato ocorrido "em uma sessão pública de uma academia provincial" é a Academia du Gard, da qual ele é membro.⁴⁷ . Nesta Academia Gergonne foi designado relator dos *Éléments géométrique et d'analyse algébriques* de M. Lhuilier⁴⁸ .

E é neste relatório que M. Gergonne destaca a superioridade dos métodos modernos sobre aqueles pelos quais apresenta M. Lhuilier. Embora apresente uma grande habilidade com o assunto, M. Gergonne não compartilha de todas as ideias apresentadas pelo autor. Por exemplo, M. Lhuilier, acredita ser inteiramente impróprio que às vezes nos permitamos considerar a reta como uma parte de uma circunferência cujo raio é infinito e, conseqüentemente, o plano como uma porção de superfície esférica também com um raio infinito. As ideias de M. Lhuilier é sobrecarregada de uma Geometria antiga o que nos conduz ao entendimento da crítica do relator, ou seja, lendo o relatório que M. Gergonne apresenta à *Académie du Gard*, sobre o trabalho de M. Lhuilier, observamos que sua crítica, ao defender a superioridade da Geometria Analítica, é diretamente ligada à Geometria antiga. Portanto, o questionamento que Poncelet fará é facilmente compreendido, ou seja, para ele tal comparação não faz sentido se considerarmos as ferramentas "modernas" da Geometria Sintética.

M. Gergonne tenta sutilmente inverter o ônus da prova, dizendo que ao afirmar que seria necessário abandonar completamente a geometria pura, a fim de lidar exclusivamente com a geometria analítica capaz de fornecer, aos problemas que dizem respeito ao escopo, soluções elegantes e simples, tudo o que se poderia concluir, das críticas sobre seu posicionamento, é que deveria ter feito bom uso da doutrina do M. Lhuilier. Para Gergonne a Geometria Analítica oferece vantagens do ponto de vista da generalidade e da uniformidade dos processos. Embora diga reconhecer belos exemplos aos quais os geômetras da antiguidade, e os modernos, que seguiram seus passos, tenham deixado, diz ter vários desses problemas cedendo sem esforço aos processos de cálculo e esses processos levarem às construções incomparavelmente mais simples e elegantes do que qualquer coisa que tínhamos conhecido até então.

Gergonne afirma ter enviado soluções analíticas dos problemas de Viète e Fermat para a *Académie* de Turim há quatro anos, demonstrando sua fidelidade à doutrina da geometria analítica como sendo mais simples e elegante. No entanto, o que não fica claro em sua afirmação é o seu conceito de simplicidade e elegância. Ele acredita que a geometria analítica ainda tem mais a

⁴⁶ Il y a environ dix-huit mois que, dans une séance publique d'une académie de Province, un homme d'un mérite très-distingué entreprit de consacrer un discours à l'apologie de l'exagération. Il observait, entre autres choses, que, dans un grand nombre de circonstances, il importe beaucoup moins de frapper juste que de frapper fort ; et il comparait très-ingéieusement l'exagérateur à l'homme qui, voulant redresser un bâton courbé en un sens, pense, avec raison, ne pouvoir parvenir à son but qu'en courbant ce bâton en sens inverse.

⁴⁷ Supprimée en 1793 et pour la durée de la période révolutionnaire, comme toutes les académies d'Ancien Régime, elle est recréée en 1801 sous le nom de Lycée du Gard, puis elle prend l'intitulé d'Académie du Gard en 1802. En 1878, elle retrouve son nom d'Académie de Nîmes.

⁴⁸ M. Lhuilier professeur de mathématiques à Genève.

oferecer e que, se ainda não apresenta as soluções mais simples, é porque não foi adequadamente empregada. Segundo ele, se usada com mais habilidade, a geometria analítica pode produzir construções que não são inferiores às da geometria antiga em termos de simplicidade e elegância.

Poncelet é provocativamente questionado.:

[...] se ele conhece, em particular, os problemas de Viète e Fermat, algumas construções mais diretas, mais gerais, mais elegantes e mais simples do que aquelas para as quais somos movidos diretamente pela geometria analítica, empregada da maneira que concebo (GERGONNE, 1817a, 159).⁴⁹

Poncelet defende a Geometria pura e afirma que essa área do conhecimento é capaz de fornecer soluções simples para problemas complexos. Além disso, ele acredita que a Geometria pura tem sido muito mais desenvolvida nos últimos vinte anos do que nos últimos vinte séculos. A afirmação de Poncelet reflete uma visão otimista em relação à Geometria pura, destacando sua capacidade de inovação e desenvolvimento e que essa Geometria criou nos últimos vinte anos mais desenvolvimento do que foi realizado nos últimos vinte séculos.

Se atualmente me pedem minha opinião sobre a geometria pura, pedirei por minha vez que faça uma distinção. É a geometria de Archimède, Euclides, Apolônio e todos os modernos que, como Viviani, Halley, Viète e Fermat, seguiram seus passos? Vou admitir francamente, o que quer que alguém pense, que não estou entusiasmado com isso. Se, pelo contrário, desejamos falar daquela geometria que, nascida, por assim dizer, das meditações do ilustre Monge, fez um progresso tão imenso nas mãos de seus muitos discípulos, sempre me encontrarei disposto a prestar-lhe uma homenagem mais brilhante e reconhecer que nos fez descobrir em vinte anos mais propriedades de extensão do que se poderia descobrir nos vinte séculos que as precederam (GERGONNE, 1817a, 159).⁵⁰

É interessante observar a atitude crítica e reflexiva do autor em relação à geometria pura, bem como sua disposição em reconhecer o valor da geometria que surgiu de uma nova abordagem. Isso parece pavimentar o caminho da sua colocação seguinte que é induzir M. Poncelet a apresentar suas soluções,

Para chegar agora ao objeto particular da carta de M. Poncelet, apresso-me a reconhecer a superioridade de seus métodos e declaro que, sem ousar afirmar que a geometria analítica não pode chegar a esse ponto, me parece pelo menos muito duvidoso que possa chegar lá de uma maneira fácil. Assim, podemos apenas desejar que a autora, depois de ter despertado a curiosidade dos leitores,

⁴⁹ [...] s'il connaît, en particulier, pour les problèmes de Viète et de Fermat quelques constructions plus directes, plus générales, plus élégantes et plus simples que celles auxquelles on est directement conduit par la géométrie analytique, employée de la manière que je conçois.

⁵⁰ Si présentement on me demande mon opinion sur la géométrie pure, je demanderai à mon tour de faire une distinction. S'agit-il de la géométrie d'Archimède, d'Euclide, d'Apollonius, et de tous ceux d'entre les modernes qui, comme Viviani, Halley, Viète et Fermât, ont marché sur leurs traces ? J'avouerai franchement, quelque opinion que l'on puisse en prendre de moi, que je n'en suis pas enthousiaste. Que si, au contraire, on veut parler de cette géométrie qui, née, pour ainsi dire des méditations de l'illustre Monge, a fait de si immenses progrès entre les mains de ses nombreux disciples, on me trouvera toujours disposé à lui rendre le plus éclatant hommage, et à reconnaître qu'elle nous a fait découvrir en vingt années plus de propriétés de l'étendue qu'on n'en avait pu découvrir dans les vingt siècles qui les avaient précédées.

queira finalmente satisfazê-la. completamente, divulgando as teorias nas quais se baseiam suas engenhosas e elegantes construções. Nós devemos desejar, além disso, que M. Poncelet não limita sua pesquisa lá; e que também cresce antes de serem suscetíveis às especulações de que já obteve um sucesso tão notável (GERGONNE, 1818, 161).⁵¹

Ao termino deste artigo-resposta à M. Poncelet, o editor diz que continuará a buscar soluções das aplicações de Análise à Geometria, no entanto, diz acreditar que a diversidade dos métodos não fará nascer outra rivalidade entre eles que deva ser o zelo ao avanço da ciência.

5º Artigo. Questions résolues.

Solution du dernier des deux problèmes de géométrie proposés à la page 36 de ce volume ; suivie d'une théorie des polaires réciproques, et de sur l'élimination

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 8 (1817-1818), p. 201-232

Este artigo contém 32 páginas e apresenta a solução de dois problemas⁵² contidos no mesmo volume na página 36 seguidos da teoria das polares recíprocas e reflexões sobre eliminação. Foi dividido em partes numeradas por algarismos romanos de *I* ao *XX*.

Os problemas apresentados na página 36 consistem em duas questões geométricas, que exigem habilidades e conhecimentos específicos da geometria. Vejamos:

I. Qual é a curva envelopada, em seu movimento, por uma corda de comprimento constante, perpetuamente inscrita na mesma seção cônica? Qual é o lugar do vértice do ângulo variável, circunscrito à mesma curva, da qual essa linha é a corda de contato?

II. Qual é o lugar do vértice de um ângulo móvel, invariável, perpetuamente circunscrito à mesma seção cônica? Qual é a curva envelopada pela corda de contato, de tamanho variável, desse ângulo móvel? (GERGONNE, 1818, 36).⁵³

O artigo faz menção à parte II:

Qual é o lugar do vértice de um ângulo móvel, invariável, circunscrito a uma seção cônica?

⁵¹ Pour en venir présentement à l'objet particulier de la lettre de M. Poncelet, je m'empresse de reconnaître la supériorité de ses méthodes et de déclarer que, sans oser affirmer que la géométrie analytique ne puisse parvenir jusque-là, il me paraît au moins très-douteux qu'elle puisse y atteindre d'une manière facile. On ne peut donc que faire des vœux pour que l'auteur, après avoir aussi vivement piqué la curiosité des lecteurs, veuille bien enfin la satisfaire complètement, en faisant connaître les théories sur lesquelles reposent ses Ingénieuses et élégantes constructions. On doit désirer, en outre, que M. Poncelet ne borne point-là ses recherches ; et qu'il pousse aussi avant qu'elles en seront susceptibles des spéculations desquelles il a déjà obtenu un succès aussi remarquable.

⁵² Há outra solução neste mesmo volume. Abonné p. 368-380.

⁵³ I. Quelle est la courbe qu'enveloppe dans son mouvement une droite de grandeur constante, perpétuellement inscrite à une même section conique ? Quel est le lieu du sommet de l'angle variable, circonscrit à la même courbe, dont cette droite est la corde de contact ? II. Quel est le lieu du sommet d'un angle mobile, de grandeur constante, perpétuellement circonscrit à une même section conique ? Quelle est la courbe qu'enveloppe dans son mouvement la corde de contact, de grandeur variable, de cet angle mobile ?

Qual é a curva envelopada pela corda de contato, variável em tamanho, desse ângulo de movimento? (PONCELET, 1817d, 201)⁵⁴

Poncelet começa a análise do problema com uma abordagem estruturada, dividindo-o em duas partes e priorizando a resolução do primeiro por considerá-lo mais fácil. Para isso, ele parte de uma situação inicial da curva, como uma elipse, que está tangente a um dos eixos cartesianos e apoiada sobre o outro, com um dos vértices na origem. A partir dessa condição, ele busca encontrar uma equação geral que permita avaliar todos os casos do problema. Essa abordagem sistemática demonstra a habilidade de Poncelet : $y^2 + Ax^2 + Bx = 0$. Denominando as coordenadas do ângulo circunscrito por (α, β) e denotando por m , m' e k as tangentes dos ângulos internos do triângulo formado pelas retas tangentes à curva e o eixo X . Desta forma, teremos:

$$(m - m') = k(1 + m.m').$$

Isso fica bem exemplificado na figura 3.32.

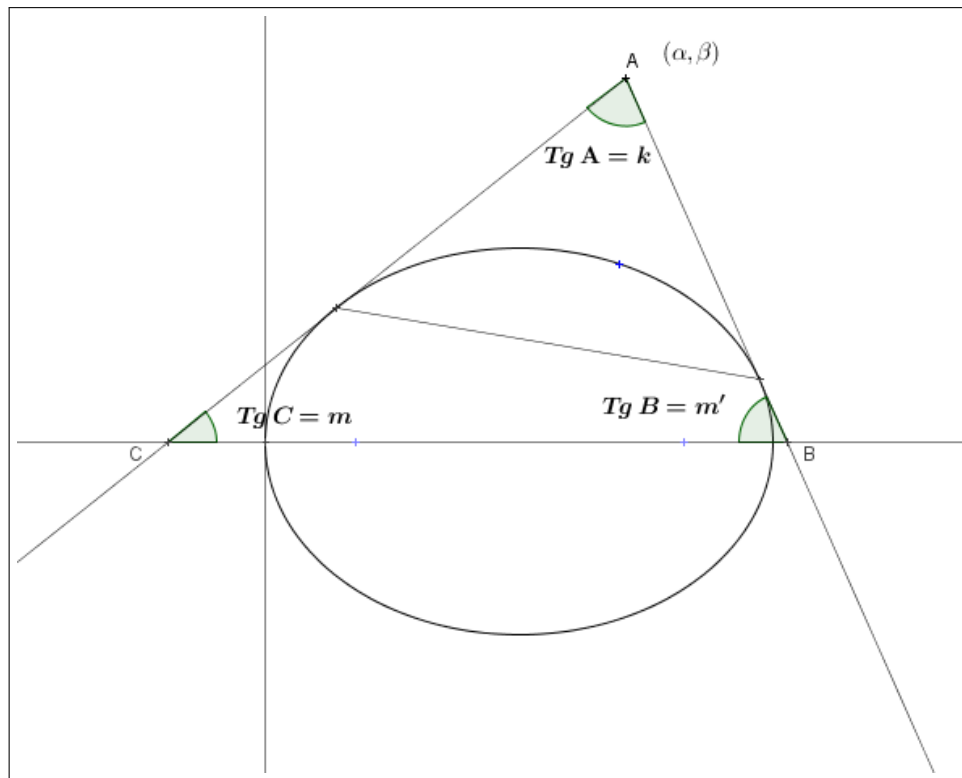


Figura 3.32 – Tangente dos ângulos internos

As duas tangentes que incidem no ponto A possuem equações:

$$y - \beta = m(x - \alpha) \text{ e } y - \beta = m'(x - \alpha)$$

Poncelet explica de maneira clara que cada reta secante a uma curva terá apenas um ponto de interseção, que será tangente à curva.

⁵⁴ Quel est le lieu du sommet d'un angle mobile, de grandeur invariable, perpétuellement circonscrit à une section conique ? Quelle est la courbe enveloppe de la corde de contact, variable de grandeur, de cet angle mobile ?

Durante sua investigação analítica para determinar o lugar geométrico, Poncelet se depara com uma equação de quarta ordem concêntrica com a curva dada. No entanto, ele expressa a intenção de simplificar a busca pelo lugar geométrico nos casos em que as equações são reduzidas à segunda ordem, representadas por curvas cônicas. Para isso, ele faz algumas considerações, incluindo notas de rodapé do editor, supondo o ângulo raso ou nulo. Em seguida, ele varia a curva dada para obter novas equações de segundo grau. Por fim, ele assume que o leitor está familiarizado com o artigo de Gergonne sobre a teoria analítica dos pólos.⁵⁵

Ao adentrar na segunda parte do problema, Poncelet se depara com a questão de determinar qual curva será envelopada pela corda. Contudo, ao realizar os cálculos necessários para chegar a uma solução analítica, ele percebe que as equações obtidas teriam graus muito elevados.

Para consultar apenas o grau de cada uma dessas equações, vemos que a equação final pode subir para o trigésimo segundo grau; e, supondo que a equação linear (6) se comporte apenas como uma equação de primeiro grau, o que é bastante provável, vemos que essa equação ainda aumentaria para o décimo sexto grau (PONCELET, 1817d, 211)⁵⁶

Poncelet reconhece que seria um trabalho árduo e demorado realizar a eliminação completa das variáveis envolvidas na segunda parte do problema, devido à grande quantidade delas. Ele admite que não teve coragem de fazê-lo, apesar de sua boa vontade. No entanto, ele considera a questão muito interessante e promete continuar pesquisando para tentar, pelo menos parcialmente, compensar o leitor pela atenção dedicada ao esboço incompleto que apresentou.

A partir da página 211, Poncelet começa a abordar a teoria da reciprocidade polar. Ele apresenta o conceito e, em seguida, anuncia um primeiro teorema sobre a teoria dos polos.

Isso indica uma mudança de tema no texto, mas podemos notar que o primeiro teorema já mostra a profundidade do conhecimento de Poncelet nesse assunto, demonstrando sua habilidade em aplicar e desenvolver a teoria matemática:

Se um determinado ponto está sobre uma reta, traçada no plano de uma seção cônica, sua polar passará através do polo dessa mesma reta (PONCELET, 1817d, 211)⁵⁷

Talvez fique melhor esclarecido com a figura 3.33, aliás, o leitor já deve ter percebido, e assim já me referi nas notas, que neste trabalho sempre que possível irei recorrer às figuras, para melhor esclarecimento. Afinal, estamos tratando de uma Geometria Projetiva Sintética.

⁵⁵ Théorie analytique des pôles. TIII, p.293, Annales de Gergonne.

⁵⁶ A ne consulter que le degré de chacune de ces équations, on voit que l'équation finale pourrait s'élever jusqu'au trente-deuxième degré ; et, en supposant que l'équation linéaire (6) ne se comporte que comme une équation du premier degré, ce qui est assez probable, on voit que cette équation monterait encore au seizième degré.

⁵⁷ Si un certain point est situé sur une ligne droite, tracée dans le plan d'une section conique, sa polaire passera par le pôle de cette même ligne droite.

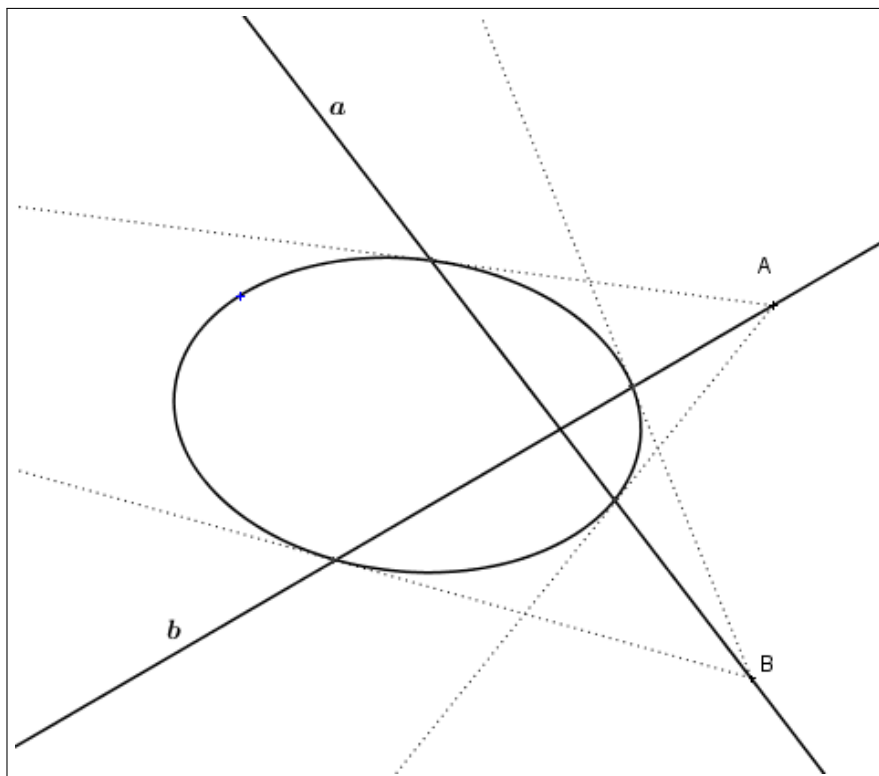


Figura 3.33 – Reciprocidade polar

As argumentações de Poncelet têm como base a ideia de continuidade e projetividade, arranjadas sobre uma boa dose de intuição que são características da escola de Monge. Por isso, a intuição também é um traço marcante na abordagem de Poncelet. Vamos agora tentar entender o teorema apresentado por ele.

Suponha que uma reta a percorra uma curva cônica diretriz e que o polo A desta reta esteja sobre a curva. Se A se desloca um pouco de sua posição inicial, mas ainda está sobre a curva, sua polar também se deslocará um pouco. Dessa forma, a polar envelopará tangencialmente outra curva. O importante aqui é notar que a mudança na posição do polo A é muito pequena, e por isso, a polar se move de forma contínua e tangencialmente a outra curva.

Poncelet se baseia principalmente na ideia de reciprocidade para entender essas curvas. Isso significa que as duas curvas são recíprocas uma da outra em relação à curva diretriz. Como cada curva pode ser vista como o local dos pólos e polares dos elementos de sua recíproca, elas podem ser chamadas de curvas polares recíprocas. Essa denominação permite expressar de maneira abreviada as consequências das observações anteriores. Portanto, a afirmação mais precisa de Poncelet é:

A polar recíproca de uma dada curva, no plano de uma seção cônica, é ao mesmo tempo o lugar dos pólos de todas as tangentes a essa curva, e o envelope do espaço percorrido pelas polares destes pontos desta mesma curva (PONCELET, 1817d, 212)⁵⁸

⁵⁸ La polaire réciproque d'une courbe donnée, sur le plan d'une section conique, est à la fois le lieu des pôles de toutes les tangentes à cette courbe, et l'enveloppe de l'espace parcouru par les polaires des points de cette même

De maneira simplificada, Poncelet está afirmando que quando um ponto percorre uma curva coplanar a uma seção cônica, a polar deste ponto irá tangenciar outra seção cônica. Ou seja, a polar do ponto descreverá uma seção cônica formada pelas tangentes que são as polares dos pontos da curva. Isso significa que há uma relação de reciprocidade entre essas duas seções cônicas, que são chamadas de curvas polares recíprocas. Dessa forma, Poncelet está estabelecendo uma importante propriedade entre essas curvas, que permite descrever seu comportamento e suas interações de maneira mais precisa e abreviada. Podemos exemplificar com a figura 5.13:

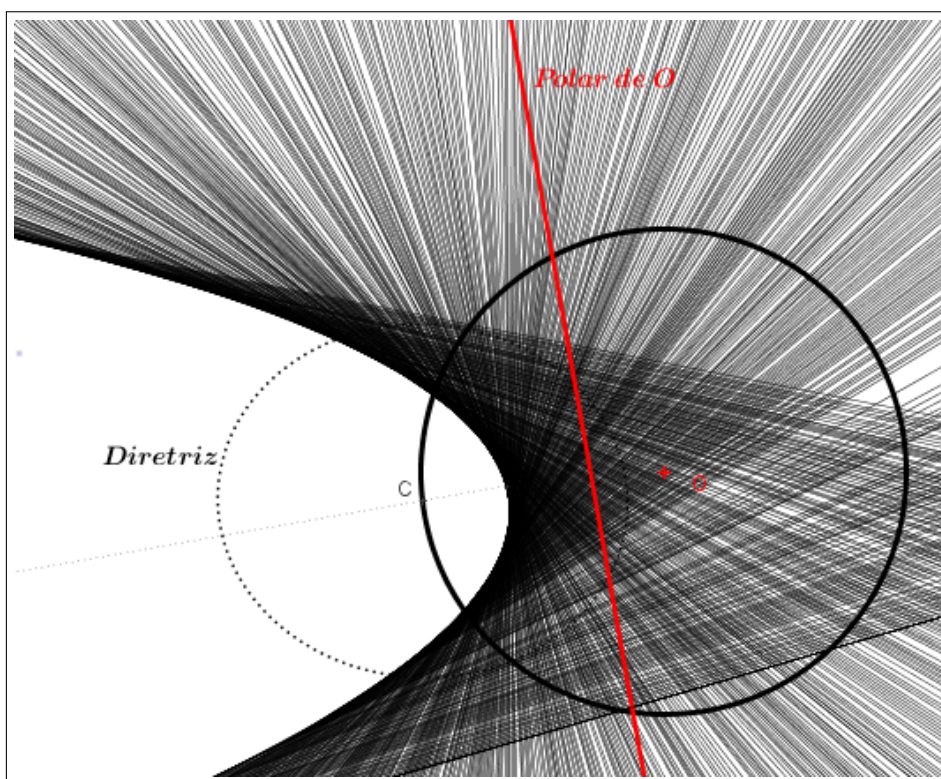


Figura 3.34 – A polar de O é a reta diretriz da curva polar recíproca.

A questão que Poncelet levantará em seguida é qual o grau da curva polar recíproca de uma curva dada. Para tanto, fará a seguinte análise: suponha que seja traçado uma reta qualquer coplanar à curva dada. Esta reta intersectará à curva em tantos pontos que sejam seu grau. Sendo pontos reais ou imaginários. Cada um destes pontos é polo de uma tangente, que estamos imaginando envelopará à curva polar recíproca. Assim, a questão para Poncelet passa a ser:

De um ponto arbitrário no plano de uma curva qualquer, quantas tangentes podemos traçar a essa curva?(PONCELET, 1817d, 213)⁵⁹

Supondo uma curva algébrica e designando por m o grau da curva, Poncelet nos mostra, neste artigo, que o número máximo de tangentes traçadas à curva dada deste ponto é de $m(m-1)$

courbe.

⁵⁹ Combien, d'un point donné arbitrairement, sur le plan, d'une courbe quelconque, peut-on mener de tangentes à cette courbe ?

, ou seja, se a curva for uma cônica, há dois pontos de intersecção, e, portanto, poderemos traçar duas tangentes reais no máximo. Poncelet faz um raciocínio heurístico. Supõe a situação vista sob perspectiva e imagina o ponto dado no infinito e observa que a curva dada não modifica seu grau, mas as tangentes tornam-se paralelas. Ora, as tangentes à curva, de grau m , terão, por um raciocínio diferencial simples de derivação, o grau $m - 1$. Logo, a curva polar recíproca terá o grau de $m - 1$. Assim, pelo teorema de Bézout, podem-se traçar $m(m - 1)$ tangentes à curva recíproca polar. Poncelet diz que se utiliza de uma ideia de perspectiva, mas que poderia usar a álgebra. Isso conduziria a alguns cálculos que prefere poupar o leitor. A obra de Santos (2015) fornece uma explicação mais detalhada e completa sobre o assunto em questão.

No ponto X apresenta relações entre uma curva e sua recíproca polar, dentro da ideia de um teorema da reciprocidade polar:

1 - que os pontos de inflexão de um correspondem aos pontos de cúspide do outro, e reciprocamente; 2 - os pontos situados no infinito de um correspondem aos pontos de contato do outro com as tangentes a partir do centro da seção cônica; 3 - esses pontos de contato são precisamente os pólos das assíntotas do primeiro; e essas mesmas tangentes aos pontos polares no infinito, essas assíntotas tocam nele; 4 - quando o proposto tem um ou mais ramos parabólicos, ou seja, um ou mais ramos cujas assíntotas são inteiramente infinitas, o recíproco tem o mesmo número de ramos passando pelo centro da seção cônica principal; 5 - esse recíproco é aberto ou fechado, de acordo com o qual, a partir deste centro, é possível ou não levar tangentes à curva em questão; e o número de seus ramos infinitos é exatamente igual ao número dessas possíveis tangentes; 6 - os múltiplos pontos da curva dada são os pólos das tangentes comuns a ambos os ramos do recíproco e precisamente a um número de ramos, marcados pela ordem de multiplicidade dos pontos em questão. Os pontos de contato desses tipos de tangentes são pontos singulares bastante marcantes nas curvas, em geral; e vemos que aqui esses pontos de contato são os pólos das tangentes nos múltiplos pontos da curva primitiva (PONCELET, 1817d, 217)⁶⁰

Poncelet afirma que essas consequências decorrem dos pontos apresentados acima neste artigo. No item XI diz que terminará o que havia se proposto a dizer sobre às curvas polares recíprocas, apresentando, por meio de um exemplo particular, bastante notável, a parte que pode ser extraída dela, para a pesquisa ou à demonstração geométrica.

⁶⁰ 1° que les points d'inflexion de l'une correspondent aux points de rebroussement de l'autre, et réciproquement. 2° les points situés à l'infini sur l'une correspondent aux points de contact de l'autre avec les tangentes partant du centre de la section conique directrice ; 3° ces points de contact sont précisément les pôles des asymptotes de la première ; et ces mêmes tangentes les polaires des points situés à l'infini on ces asymptotes la touchent : 4° quand la proposée a une ou plusieurs branches paraboliques, c'est-à-dire, une ou plusieurs branches dont les asymptotes sont entièrement à l'infini, la réciproque a un même nombre de branches passant par le centre de la section conique directrice ; 5° cette réciproque est ouverte ou fermée, suivant que de ce centre on peut ou on ne peut pas mener des tangentes à la courbe dont il s'agit ; et le nombre de ses branches infinies est précisément égal au nombre de ces tangentes possibles ; 6° les points multiples de la courbe donnée, sont les pôles des tangentes communes à la fois à plusieurs branches de la réciproque, et précisément à un nombre de branches, marqué par l'ordre de multiplicité des points dont il s'agit. Les points de contact de ces sortes de tangentes sont des points singuliers très-remarquables dans les courbes, en général ; et l'on voit qu'ici ces points de contact sent les pôles des tangentes aux points multiples de la courbe primitive ;

3.3.5 O sétimo caderno de Metz

O sétimo caderno contém correspondências importantes de Poncelet com outros geômetras, que demonstram sua metodologia criativa e a evolução de suas ideias ao longo do tempo. As trocas de cartas com Terquem, Servois e Brianchon em 1818 foram fundamentais para que Poncelet apresentasse suas primeiras ideias sobre o princípio de continuidade e a lei dos sinais de posição. Posteriormente, no início de 1819, Poncelet enviou um texto aos mesmos geômetras, que acabou sendo o quarto caderno, onde aborda sistematicamente o princípio de continuidade na Geometria. É importante destacar que seu trabalho como engenheiro militar afetou sua produção matemática, pois ele pretendia publicar sobre as propriedades projetivas das seções cônicas em 1819, mas isso não foi possível.

3.3.6 Os objetos imaginários nos cadernos de Metz

Os sete manuscritos que Poncelet escreveu quando retornou a França e antes da publicação de seu tratado, período compreendido entre 1814 a 1822, denominamos, em nosso trabalho de Cadernos de Metz. Poncelet irá publicar em 1864 em seu *Applications d'Analyse et de Géométrie* com toda documentação relativa a este período (artigos, cartas, memórias, ...).

No primeiro caderno, Poncelet aborda as propriedades descritivas de polígonos cujos vértices variam sob certas condições. Na Proposição *XXI*, ele examina duas cônicas bitangentes e um triângulo ABC inscrito em uma delas. Um dos lados desse triângulo, BC , é tangente à segunda cônica e o lado AB passa por um ponto fixo P . Poncelet deseja demonstrar que, quando os pontos A e C se movem sobre a cônica externa O , o lado AC envolve uma terceira cônica que também é tangente à cônica O .

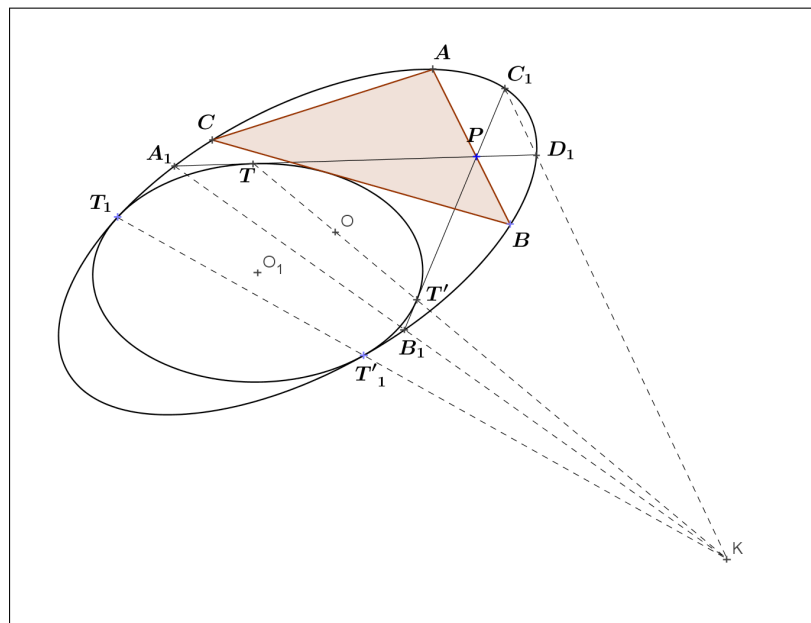


Figura 3.35 – cônicas bitangentes.

Para comprovar esta proposição, Poncelet percebe que duas cônicas bitangentes são projeções de duas circunferências de círculos concêntricos. Assim, ele conclui que é suficiente provar esta propriedade apenas para o caso de duas circunferências concêntricas. Após a demonstração, ele enfatiza que os pontos em comum das duas cônicas são as projeções dos pontos imaginários ao infinito.

Pode-se notar que as três retas BB' , TT' e CD (AB , tt' e CD) são paralelas entre si e, assim vão concorrer ao infinito sobre a corda comum aos dois círculos concêntricos (O) e (o) (Princípios de projeção, t.I.) (PONCELET, 1862, p.116).

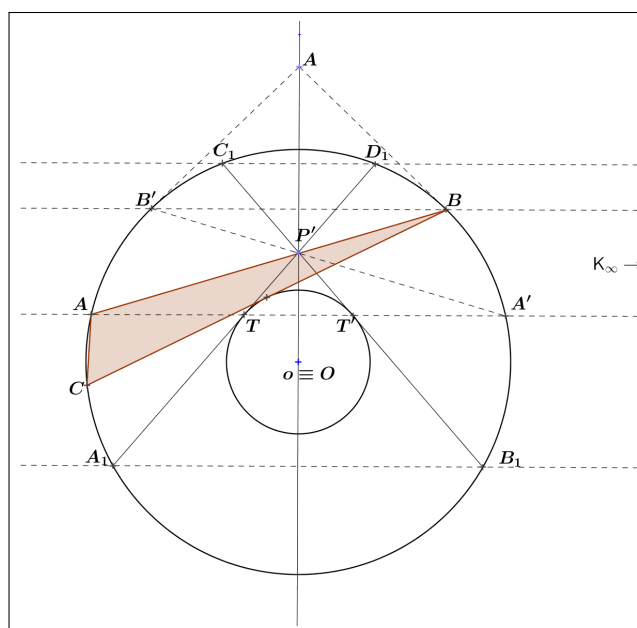


Figura 3.36 – Perspectiva de duas cônicas bitangentes: duas circunferências de círculos concêntricas.

No terceiro caderno, artigo 64, Poncelet considera as construções possíveis da média geométrica de duas quantidades Ax e xB , sendo x uma variável situada entre A e B . Este problema já havia sido analisado por Carnot (CARNOT, 1801, p.181-185)

⁶¹ On peut remarquer aussi que les trois droites AB , tt' , CD sont parallèles entre elles, et qu'ainsi elles vont concourir à l'infini sur la corde commune aux deux cercles concentriques (O) et (o) (Principes de projection, t. I)

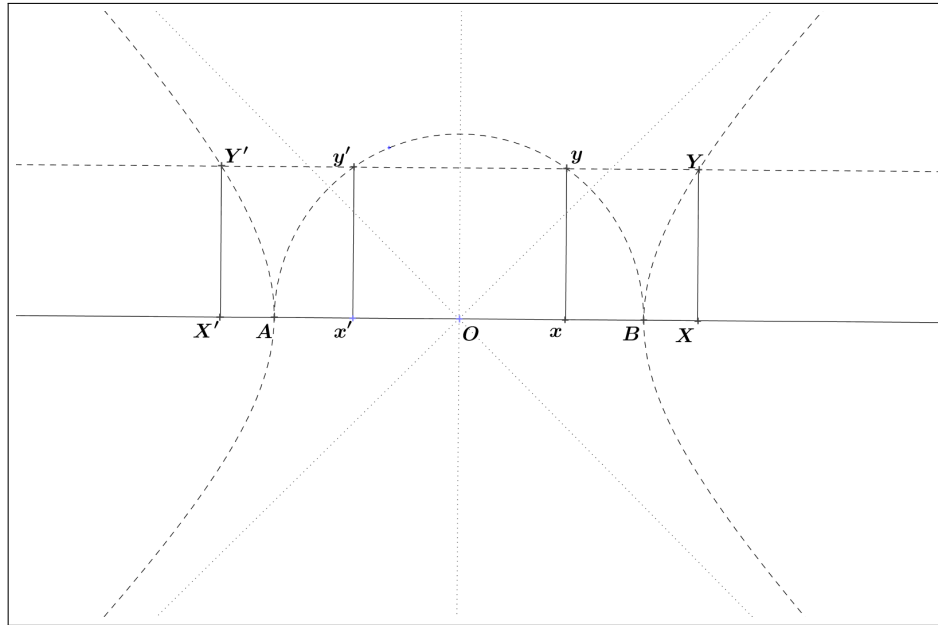


Figura 3.37 – Média geométrica de dois segmentos.

Poncelet segue aqui a construção de Euclides, traçando uma circunferência de círculo de centro O e de diâmetro AB , sendo as soluções, simétricas em relação ao eixo perpendicular ao diâmetro em O , e verificando $Ax.xB = (xy)^2 = k^2$. A interseção da circunferência de círculo e da reta de equação $y = k$ determina as soluções xy do problema. Poncelet constata que se procurarmos as soluções do problema se x está exterior ao segmento AB , as quantidades Ax e xB se tornam de sinais contrários, e portanto a equação a ser considerada é $Ax.xB = -(xy)^2 = -k^2$, e a construção dessas soluções sendo a interseção da reta $y = k$ com a hipérbole equilátera de equação $x^2 - y^2 = r^2$, com $r = AB/2$. Mas, a simetria das construções respectivas se explica segundo Poncelet, pelo fato de a hipérbole equilátera estar em correlação complexa com a circunferência de círculo. A correlação complexa de Carnot consiste em substituir na equação da circunferência de círculo a variável y por iy . Podemos observar que Poncelet sabe e utiliza os números complexos para entender as relações geométricas. Já, implicitamente, surgem as propriedades geométricas da relação entre circunferência de círculo e hipérbole, através desta correlação complexa, as assíntotas imaginárias da circunferência de círculo se tornam assíntotas reais da hipérbole.

Poncelet volta a considerar uma correlação complexa no caso da construção de tangentes a uma circunferência de círculo (PONCELET, 1864, p.237). Assim, por um ponto exterior a uma circunferência de círculo, há duas tangentes em T e T' . Se o ponto S é interior à circunferência de círculo, Poncelet observa que os pontos de contato T e T' se tornam imaginários. Aqui Poncelet não chega a falar de tangentes imaginárias à circunferência de círculo, mas, utilizando a correlação complexa, os pontos T e T' se tornam pontos de tangência da hipérbole equilátera suplementar, o que nos leva ao ponto de tangência ao infinito.

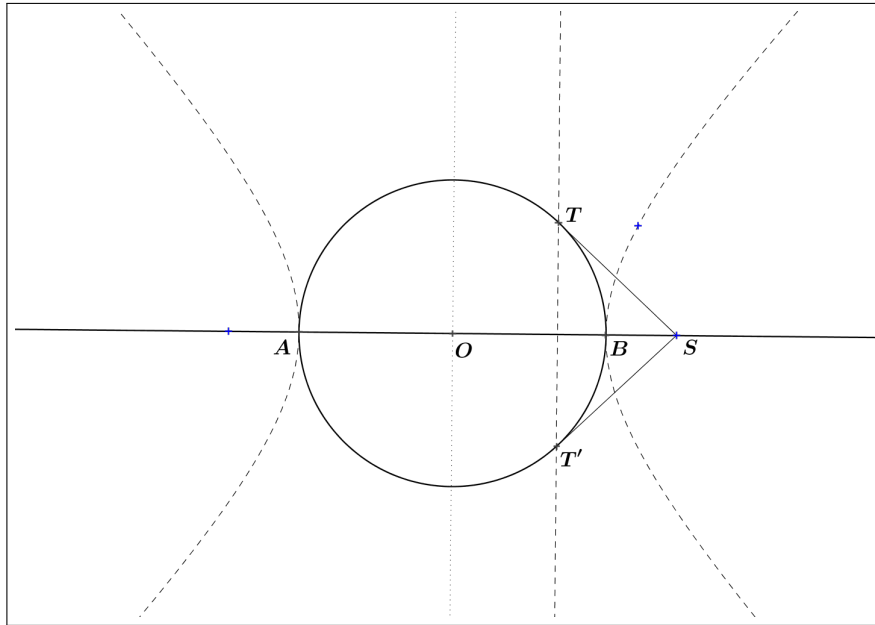


Figura 3.38 – Cônica suplementar.

No final do quarto caderno, Poncelet (PONCELET, 1864, p.348) define, de uma maneira mais precisa, a noção de ponto e reta situados ao infinito, assim como, no caso do espaço, a noção de planos e pontos ao infinito.

Poncelet acrescenta uma nota enfatizando que, em casos de interseção vazia entre uma reta e uma curva no plano real, os pontos de interseção se tornam imaginários. Além disso, se essa reta for a reta dos pontos ao infinito, esses pontos imaginários se tornam pontos imaginários ao infinito.:

Embora os pontos no infinito realmente deixem de existir de maneira geométrica, é essencial não confundir aqueles que eram, a princípio, reais com aqueles que, ao contrário, eram imaginários. Os primeiros distinguem-se dos outros porque ainda retêm algo das propriedades que pertencem a pontos geométricos e absolutos. Para não criar um novo termo, dizemos que são pontos reais ao infinito e que os outros, ao contrário, são pontos imaginários ao infinito (PONCELET, 1864, p.350, nota 1818).⁶²

Este comentário indica que, para Poncelet, os pontos reais no infinito e os pontos imaginários no infinito têm o mesmo status de objetos geométricos legítimos que os pontos do plano real. Essa visão é semelhante àquela defendida por Chasles anos mais tarde, ou seja, a existência dos pontos reais depende da existência dos pontos imaginários.

Poncelet passa a discutir, após sua análise sobre os números de pontos de interseção reais ou imaginários de uma reta e de uma curva de grau m , especialmente quando a reta intersecta a curva ao infinito, as curvas de grau 2.:

⁶² Quoique les points à l'infini cessent véritablement d'exister d'une manière géométrique, il est pourtant essentiel de ne pas confondre ceux qui d'abord étaient réels avec ceux qui, au contraire, étaient imaginaires. Les premiers se distinguent des autres en ce qu'ils retiennent encore quelque chose des propriétés qui appartiennent aux points géométriques et absolues. Pour ne pas créer un nouveau terme, nous disons que ce sont des points réels à l'infini et que les autres, au contraire, sont des points imaginaires à l'infini.

De acordo com essas noções, as curvas do segundo grau podem ter, no máximo duas assíntotas; assim, eles podem oferecer apenas esses três caracteres distintos: duas assíntotas reais ou dois pontos distintos e reais ao infinito, duas assíntotas imaginárias ou dois pontos imaginários ao infinito, finalmente duas assíntotas unidas em uma ao infinito ou dois pontos coincidentes ao infinito (PONCELET, 1864, p.353)

Neste caderno, podemos notar os resultados das reflexões que Poncelet fez nos cadernos de Saratoff. Ele descreve que uma elipse, em particular uma circunferência, possui duas assíntotas imaginárias e dois pontos imaginários no infinito; uma hipérbole tem duas assíntotas reais e dois pontos reais no infinito; a parábola tem apenas um ponto duplo no infinito, sendo que a reta do infinito é tangente a este ponto.

O quinto caderno, intitulado *Essai sur les propriétés projectives des sections coniques*, foi submetido à *Académie des Sciences* de Paris e apresenta os dois princípios fundamentais: o Princípio da Projeção e o Princípio da Continuidade. Neste caderno, encontramos uma variedade de desenvolvimentos desses princípios, incluindo o teorema *IX*, que é um exemplo clássico da interação entre eles. Este teorema trata de encontrar o lugar geométrico dos vértices de um cone oblíquo de base cônica, quando uma reta MN , coplanar à base, é projetada ao infinito enquanto a sub-contrariante é projetada como uma circunferência de círculo. Na figura 3.40, é possível visualizar mais detalhes sobre esse teorema e suas propriedades.

Uma reta e uma seção cônica coplanares podem ser geralmente consideradas como a projeção de uma outra, tal que a reta é enviada inteiramente ao infinito e a seção cônica torna-se um círculo [...] (PONCELET, 1822, p.53).⁶³

Para demonstrar este Princípio de uma maneira completa, Poncelet reformula o problema:

São dados uma seção cônica C e uma reta MN sobre o plano, encontrar o centro de projeção e um plano de projeção tal que a reta dada MN seja projetada ao infinito sobre este plano e que a seção cônica seja ao mesmo tempo projetada sobre uma circunferência de círculo (PONCELET, 1822, p.54).⁶⁴

⁶³ 8 Une figure plane quelconque, où entrent une certaine droite et une section conique, peut, en général, être regardée comme la projection d’une autre, pour laquelle la droite est passé entièrement à l’infini, et la section conique est devenue une circonférence de cercle [...]

⁶⁴ Étant données une section conique C , et une droite mn , située à volonté sur son plan, trouver un centre et un plan de projection tels, que la droite donnée mn soit projetée à l’infini sur ce plan, et que la section conique C y soit en même temps représentée par un cercle.

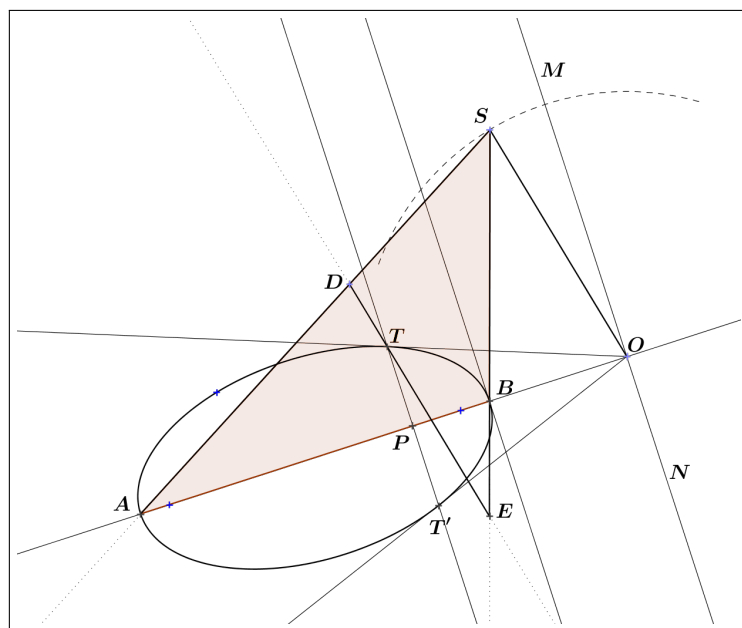


Figura 3.39 – O ponto S pertence ao plano diametral AB .

Considerando que o problema tenha sido resolvido, o centro de projeção sendo S , Poncelet passa a analisar o cone oblíquo que teria sua base a seção cônica dada e o vértice em S . A projeção dessa curva seria uma superfície cônica, e ao considerar um plano que passa pela reta MN e pelo ponto S , temos o plano projetante dessa reta. Dependendo da condição do problema, existe um plano de projeção que corta a superfície cônica em uma circunferência de círculo, chamada subcontrariante, e faz com que a reta MN se torne uma reta ao infinito.

Então:

- 1- A reta dada MN não deverá intersectar a secção cônica dada, ou seja, MN é uma secante ideal.
- 2- Os planos paralelos ao plano projetante da reta MN seccionam a superfície cônica segundo uma circunferência de círculo, dita, sub-contrariante ou conjugada da cônica dada.

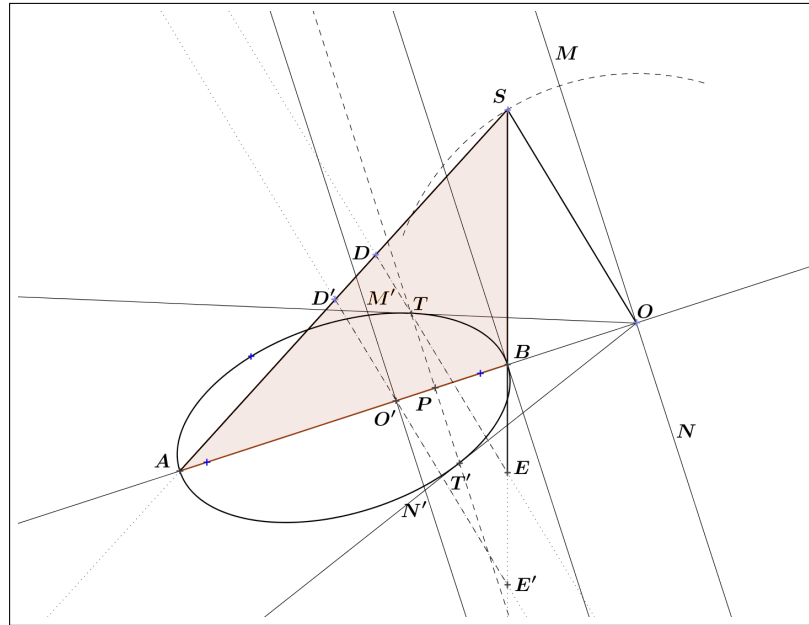


Figura 3.40 – A sub-contrariante.

Estudemos a construção: considere um plano por SAB , conforme a figura 3.40, este plano chamaremos de diametral. Observa-se que ele secciona os diâmetros das sub-contrariantes ao meio e contém o vértice S . A circunferência de círculo de centro O e raio OT contida no plano diametral é o L.G. (Lugar Geométrico)⁶⁵ dos pontos S procurados. De fato, o traço SO é paralelo à $D'E'$ e são ambos perpendiculares ao diâmetro AB no ponto O e O' respectivamente, assim o traço SO é também perpendicular à corda ideal MN no ponto O .

Podemos observar que o centro S deve estar localizado na reta SO , que é perpendicular à corda ideal MN pelo ponto O . Como há infinitas retas perpendiculares à corda MN que passam pelo ponto O , todas elas pertencentes ao plano diametral, o centro S deve estar sobre uma circunferência de centro O e raio OT que está no plano diametral.

Sejam AS e SB arestas da superfície cônica situadas no plano diametral. $D'E'$ o traço deste plano sobre a seção circular $M'N'$. Este traço é um diâmetro da secção circular $M'N'$ (sub-contrariante), perpendicular à corda $M'N'$ no ponto O' . De tal forma que:

$$(O'M')^2 = O'D' \cdot O'E'$$

Mas, as retas $D'E'$ e SO são paralelas, os triângulos $AO'D'$, AOS são semelhantes, assim como os triângulos $BO'E'$, BOS , e por consequência:

⁶⁵ Lugar Geométrico é o lugar do plano ou do espaço que possui determinada propriedade e que é exclusiva aos pontos que a incidem

$$SO : AO :: O'D' : O'A$$

,

$$SO : OB :: O'E' : O'B$$

Multiplicando os termos,

$$(SO)^2 : OA.OB :: O'D'.O'E' : O'A.O'B$$

,

Por fim,

$$(SO)^2 : OA.OB :: (O'M')^2 : O'A.O'B :: B^2 : A^2$$

,

A e B são semi-diâmetros conjugados da direção da secante ideal MN .

Os enunciados mais precisos e progressivos refletem a intenção de Poncelet em descrever minuciosamente os princípios que norteiam seu método: o Princípio de Projeção e o Princípio de Continuidade. Poncelet acrescenta:

Como não há nenhuma outra condição a ser preenchida, podemos concluir que existem uma infinidade de posições do centro auxiliar S , que satisfazem os dados da questão proposta; mas, para isso, é necessário que a reta dada MN , sem deixar de possuir uma situação geral e indeterminada em relação à curva, seja, todavia, da espécie da qual temos chamado cordas ideais, isto é, ela não deve intersectar a curva; no caso contrário, com efeito, o raio SO , e por consequência, a circunferência, que contém o centro de projeção, tornar-se-iam inteiramente imaginários (PONCELET, 1864, p.436).⁶⁶

Se a reta MN corta a cônica, então o ponto O estará no interior da cônica, e as tangentes a esta cônica desenhadas a partir do ponto O serão impossíveis de construir, tornando-se tangentes imaginárias. Fica claro ao longo do raciocínio apresentado por Poncelet que os princípios de projeção e continuidade envolvem objetos geométricos como pontos imaginários ao infinito, pontos ao infinito, retas ao infinito e retas imaginárias ao infinito.

⁶⁶ Comme il n'y a aucune autre condition à remplir, on peut conclure qu'il existe une infinité de positions du centre auxiliaire S , qui satisfont aux données de la question proposée; mais, pour cela, il faut que la droite donnée MN , sans cesser d'avoir une situation générale et indéterminée à l'égard de la courbe, soit pourtant de l'espèce de celles que nous avons nommées cordes idéales, c'est-à-dire qu'elle ne doit pas rencontrer cette courbe; autrement, en effet, le rayon SO et, par suite, la circonférence qui renferme le centre de projection deviendraient entièrement imaginaires.

3.4 O *Traité des propriétés projectives des figures*

3.4.1 Composição do *Traité* de 1822

Possui 4 seções que são divididas em 3 capítulos cada uma. E por fim, um Suplemento.

Seção I: Princípios Gerais.

É composta pelos capítulos:

Capítulo I: Noções preliminares sobre projeção central.

Capítulo II Noções preliminares sobre as secantes e as cordas ideais das seções cônicas.

Capítulo III: princípios relativos à projeção das figuras planas umas nas outras.

A seção I é baseada no trabalho de Poncelet intitulado *Essai sur les propriétés projectives des sections coniques*, apresentado à *Académie des Sciences* de Paris em 1820, e é considerado um trabalho fundamental para o seu *Traité des propriétés projectives des figures*, publicado em 1822.

Poncelet introduz no trabalho o conceito de cordas ideais em seções cônicas, que são segmentos de reta que ligam pontos ideais no infinito, para estudar as propriedades projetivas das seções cônicas. Essas propriedades são invariantes após a curva ser projetada em um plano e são usadas para provar importantes resultados sobre as seções cônicas, como a relação entre as cordas ideais e as tangentes da curva.

Poncelet emprega as cordas ideais para investigar a projeção das seções cônicas em planos que não passam pelo centro do cone. Ele cria um método para determinar a projeção dessas curvas nesses planos, que se baseia na preservação das relações projetivas entre pontos e retas.

Esses resultados foram fundamentais para o desenvolvimento do *Traité des propriétés projectives des figures* de 1822.

Seção II: Propriedades fundamentais das retas, das seções cônicas e dos círculos.

Capítulo I: Geometria da régua e as transversais.

Capítulo II: Continuação do mesmo assunto. Figuras inscritas e circunscritas as seções cônicas, questões que se relacionam. Teoria dos polos e polaridades recíprocas.

Capítulo III: Do centro de Semelhança em geral, et de dos círculos em particular.

Na seção II, Poncelet começa abordando as propriedades fundamentais das retas, seções cônicas e círculos. Ele inicia o primeiro capítulo com a geometria da régua e das transversais, considerando a base essencial de todas as propriedades projetivas a compreensão das propriedades das transversais. A geometria da régua, ou teoria dos pontos de concorrência, trata das

propriedades descritivas, enquanto a teoria das transversais trata das relações métricas relativas às figuras. Ambas são compostas por retas indefinidas que, no caso das transversais, intersectam as figuras por retas ou curvas, denominadas transversais. Poncelet também demonstra a relação interessante dos quadriláteros completos, onde suas três diagonais se intersectam em uma divisão harmônica. Ele verifica que as relações do quadrilátero aplicada a uma nova configuração é projetiva, considerando três vértices de um quadrilátero (um triângulo) e o quarto vértice como um ponto qualquer.

Poncelet conclui que os teoremas relacionados às configurações dos quadriláteros completos podem ser demonstrados usando a propriedade de um triângulo intersectado por uma transversal ou por meio de uma figura projetada em um novo plano. Isso mostra a relação entre o teorema das transversais e a projeção central. Além disso, ele observa que, em um hexágono inscrito em duas retas em um plano, os pontos de intersecção dos prolongamentos dos lados opostos estão todos em uma mesma reta.

Poncelet reconhece que Desargues teve um papel importante ao estabelecer a proposição de que um quadrilátero inscrito em uma seção cônica e intersectado por uma transversal apresenta os seis pontos de intersecção em involução. Ele apresenta e explora as ideias dos trabalhos de Desargues, Brianchon e Carnot, e argumenta que a aplicação da doutrina das projeções pode levar, de uma maneira simples, às principais relações da teoria das transversais por meio das figuras inscritas nas seções cônicas. O objetivo de Poncelet é mostrar como a doutrina das projeções pode ser usada para obter diversas consequências dessa teoria.

Poncelet ilustra seu raciocínio inscrevendo um quadrilátero $ABCD$ em uma seção cônica e, em seguida, circunscrevendo outro quadrilátero $abcd$ cujos lados tangenciam a curva nos vértices dos quadriláteros inscritos. A partir dessa construção, ele obtém diversas relações geométricas:

- 1º As quatro diagonais destes dois quadriláteros intersectam-se em um mesmo ponto P .
- 2º Os pontos de intersecção, L e M , l e m , dos lados opostos dos quadriláteros inscritos e circunscritos são todos os quatro colineares na reta polar de P .
- 3º As diagonais do quadrilátero circunscritos irão concorrer respectivamente aos pontos L e M onde se intersectam, dois a dois, os lados opostos do quadrilátero inscrito.
- 4º Cada um destes últimos pontos é o polo da reta, ou diagonal, que passa pelo outro e pelo ponto P ; ou, este o que é o mesmo, é o ponto de concurso das tangentes que correspondem a esta diagonal.

5º Qualquer reta, passando pelo ponto P e terminando na seção cônica ou em dois lados opostos de um quadrilátero, é harmonicamente dividida nesse mesmo ponto e onde a reta encontra sua polar LM ; e o mesmo ocorre em relação aos pontos L , M em relação às retas PM

e PL das quais são pólos.

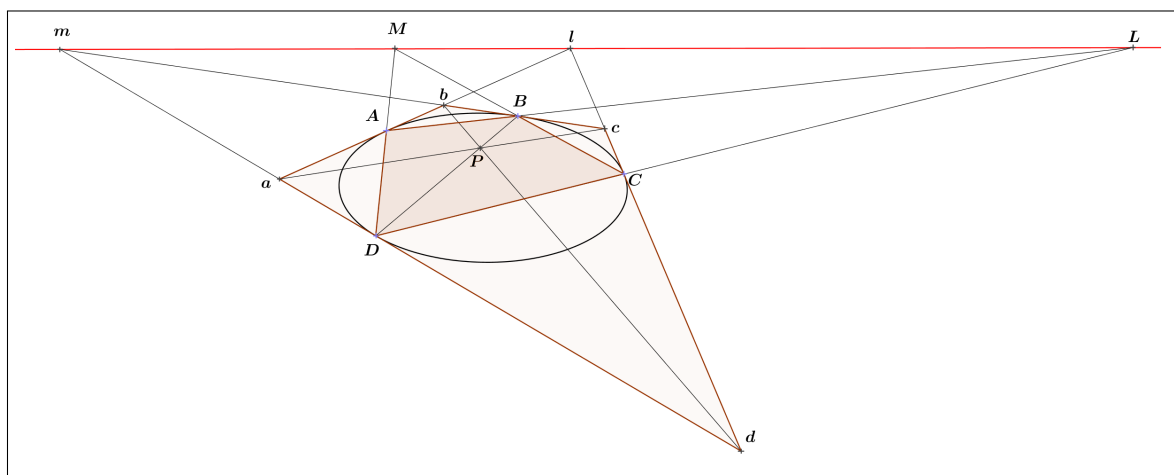
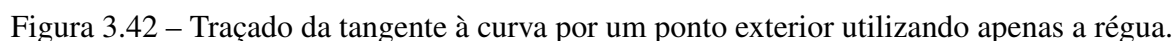


Figura 3.41 – Quadrilátero $abcd$ e $ABCD$ circunscrito e inscrito à cônica respectivamente.

Poncelet faz uso dos princípios de projeção e continuidade em suas construções, demonstrando implicitamente o uso de pontos imaginários.

A figura 3.42 indica os meios de determinar o polo e a polar, empregando apenas a régua e, também utilizando-se de uma maneira puramente linear de traçar, de um ponto exterior à seção cônica, as duas tangentes à curva. Isto porque, os pontos de contato são as intersecções da polar do ponto exterior e a curva. Por exemplo, querendo traçar, de um ponto M , as tangentes ME e MG à curva, iremos apenas traçar as secantes arbitrárias MBA, MCD por este ponto. Determinando em seguida, as intersecções das retas DB e AC , BC e AD nos pontos P e L respectivamente. A reta PL é a polar de M , e sua intersecção com a curva são os pontos de tangência traçados de M .



1º Todos os pontos que são, em relação as cordas, o quarto conjugado harmônico do ponto P , serão incidentes sobre uma mesma reta, polar de P .

3º O mesmo ocorre com todos os pontos de intersecção dos pares de tangentes traçadas dos extremos das cordas , ou seja, serão incidentes à polar do ponto P .

Podemos observar, além disso, que os pontos 1º e 2º, citados acima, se aplicam ao caso particular, onde a seção cônica se degenera em duas retas MA e MB 3.43. A reta polar de P intersecta as retas MA e MB no ponto M e formam um feixe harmônico. Estas propriedades do feixe harmônico fornecem uma solução bem simples a seguinte questão:

Por um ponto L , traçar a reta de intersecção ao ponto de concurso de duas retas dadas, usando apenas a régua.

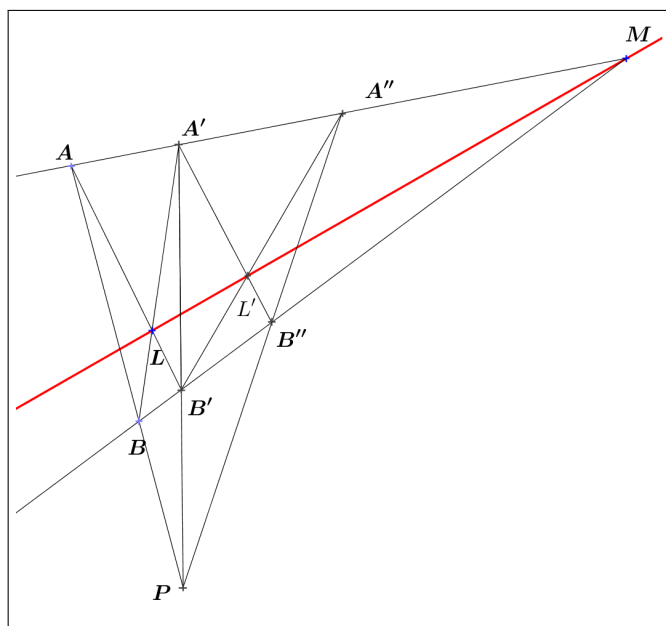


Figura 3.43 – Cônica degenerada em duas retas.

A reta LM mesmo se o ponto M fosse inacessível, poderia ser traçada. E conduz a um outro problema que iremos apresentar abaixo, que será solucionado utilizando-se as propriedades projetivas. Sobre um plano de um paralelogramo $ABCD$, traçar, com a régua, uma paralela a reta EF situada no mesmo plano.

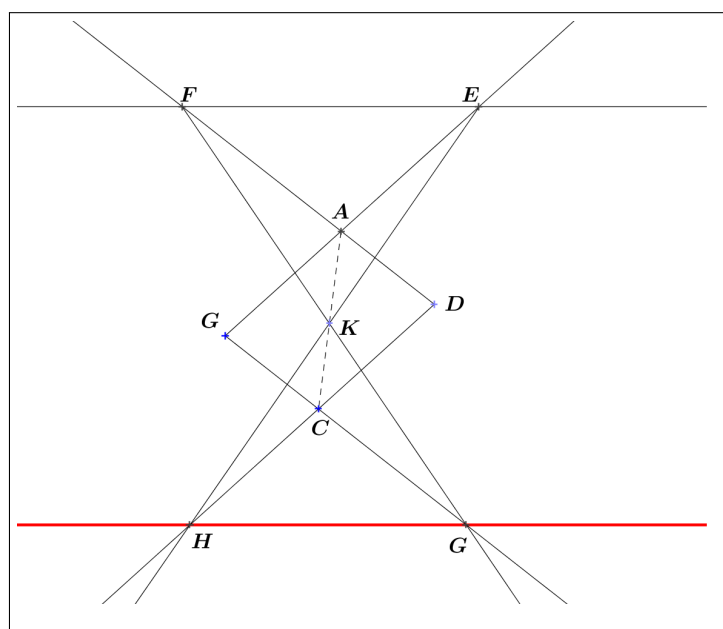


Figura 3.44 – Solução por projeção central.

Poncelet afirma que em todo hexágono inscrito a uma cônica, os pontos de intersecção dos lados opostos são colineares, usando o princípio de continuidade. Para isso, ele prolonga os lados opostos e os projeta ao infinito, tornando o hexágono regular.

Poncelet afirma que a propriedade da colinearidade dos pontos persiste em qualquer projeção, mesmo com a degeneração da cônica em duas retas. Pascal foi o primeiro a enunciá-la em seu *Essai sur les Coniques*, e desde então, vários matemáticos a reproduziram em diferentes formas, como Brianchon, que estabeleceu toda a teoria dos polos e polares das seções cônicas e superfícies de segundo grau. (BRIANCHON, 1806, p.297)

Em um trecho de seu tratado, Poncelet deixa claro o que, dez anos depois, foi anunciado por Steiner (1796-1863)⁶⁷ e ficou conhecido por teorema de Steiner:

[...] vou me contentar em concluir, em termos gerais, que qualquer problema quadrático que tenha sido resolvido até agora ou que poderia ser resolvido com a régua e a compasso em um plano, [...], deve, por isso mesmo, poder ser resolvido apenas com a régua, ou por simples alinhamentos por meio de marcadores, sempre que, entre os dados, houver uma circunferência de um círculo, cujo centro será conhecido e o perímetro traçado.⁶⁸(PONCELET, 1822, p.189)

Seção III: Dos sistemas de seções cônicas.

Capítulo I: Do centro de homologia ou de projeção das figuras planas em geral, et das seções cônicas em particular.

Capítulo II: Propriedades e construções do sistema completo das secantes e das tangentes comuns a duas seções cônicas situadas sobre um plano. Dos sistemas de seções cônicas que têm secantes e tangentes comuns, etc.

Cap. III: Teoria dos contatos duplos de seções cônicas e soluções de problemas relacionados.

O centro de homologia ou de projeção é um conceito fundamental na geometria projetiva. Ele é usado para definir a homologia ou a projeção de figuras planas em geral, bem como para estudar as propriedades e construções do sistema completo das secantes e das tangentes comuns a duas seções cônicas situadas em um plano. Assim, ao tratar de homologia, Poncelet está usando o princípio de projeção.

A teoria dos contatos duplos de seções cônicas é uma área importante da geometria projetiva que envolve o estudo de soluções de problemas relacionados a seções cônicas. A teoria dos contatos duplos é usada, por exemplo, para estudar a construção de curvas cúbicas com propriedades especiais, como curvas que tangenciam a quatro retas dadas.

Seção IV: Dos Ângulos e dos polígonos.

Cap. I: Dos ângulos constantes ou variáveis seguindo certas leis, cujo vértice se apoia no foco, no perímetro da seção cônica, ou em um ponto qualquer do seu plano.

Cap. II: Dos polígonos inscritos e circunscritos a outro polígono ou à seção cônica.

⁶⁷ Jakob Steiner, matemático suíço.

⁶⁸ je me contenterai de conclure, d'une manière générale, que tout problème du second degré qu'on a jusqu'ici résolu ou qu'on pourrait résoudre avec la règle et le compas sur un plan, ou avec une chaîne et un graphomètre sur le terrain, devra, par là même, pouvoir se résoudre avec la règle seulement, ou par de simples alignements au moyen de jalons, toutes les fois que, parmi les données, se trouvera une seule circonférence de cercle dont le centre sera connu et le périmètre tracé.

Cap. III: Extensão das teorias precedentes no caso onde as diretrizes são curvas de ordem qualquer, e onde certos ângulos são constantes. Aplicação das mesmas teorias à solução de alguns problemas que se relacionam.

No Capítulo I, Poncelet explora os ângulos que têm vértice no foco, no perímetro da seção cônica ou em um ponto qualquer de seu plano. Ele estuda como esses ângulos variam e seguem certas leis, o que é útil para entender as propriedades das seções cônicas.

O Capítulo II aborda os polígonos inscritos e circunscritos às seções cônicas e a outros polígonos. Poncelet demonstra propriedades interessantes desses polígonos, como a colinearidade dos pontos de interseção dos lados opostos em um hexágono inscrito.

No Capítulo III, Poncelet estende as teorias dos capítulos anteriores para o caso em que as diretrizes são curvas de ordem qualquer e para quando certos ângulos são constantes. Ele usa essas teorias para solucionar alguns problemas relacionados, explorando as propriedades das seções cônicas em situações mais complexas.

SUPLEMENTO Sobre as propriedades projetivas das figuras no espaço.

A intenção de Poncelet é de estender ao espaço as ideias que desenvolveu no plano, ou seja, abordar de maneira secundária as propriedades projetivas do espaço, mencionando alguns teoremas relacionados às figuras planas.

Como no campo da geometria projetiva, uma figura é definida por suas propriedades projetivas, ou seja, as propriedades que permanecem invariantes quando a figura é projetada em uma superfície plana. Quando se trata de figuras no espaço tridimensional, as propriedades projetivas são ainda mais complexas do que no plano.

O estudo das propriedades projetivas das figuras no espaço assume grande relevância na geometria descritiva, que é a base para muitas aplicações da geometria em diversas áreas em que as figuras são representadas em três dimensões.

No estudo das propriedades projetivas das figuras no espaço, são utilizados conceitos como projeções perspectivas, seções planas e seções cônicas. O objetivo é entender as propriedades invariantes da figura que permanecem inalteradas por projeções, o que permite obter soluções precisas para problemas complexos de geometria no espaço.

O TRATADO

O Tratado de 1822 possui como base de escrita os manuscritos de *Saratoff*. Na Introdução, Poncelet diz que são considerações sobre os meios de aperfeiçoar o método geométrico, sobre a lei de continuidade, sobre a doutrina de projeção, etc.

De acordo com o autor, a obra foi o resultado de suas pesquisas iniciadas em 1813, enquanto estava preso na Rússia. Apesar da falta de recursos, ele descobriu os teoremas fundamentais necessários para elaborar este trabalho. Começando com problemas simples, ele desenvolveu toda a teoria de circunferências que se intersectam ou tangenciam em um plano,

chegando a alguns resultados que M. Gaultier já havia apresentado à *Académie des Sciences* em 1812.

Abordando primeiro o caso mais fácil e elementar, tenho estabelecido toda a teoria dos círculos que se intersectam ou se tangenciam sobre um plano, e tenho assim provado vários resultados que M. Gaultier tem consignado em uma bela memória no instituto em 1812, notadamente estes são relativos aos centros de similitude e aos eixos radiais dos círculos. Nesta época, eu já havia partido para a Rússia e, portanto, não tive conhecimento desta memória, que também foi impressa no ano seguinte no *XV* caderno do *journal da École Polytechnique*. (PONCELET, 1822, p.V).

Algumas partes desta pesquisa foram publicadas nos *Annales* de Gergonne, em 1817, no volume VIII. O título do artigo era *Réflexions sur l'usage de l'analyse algébrique dans la géométrie ; Suivies de la solution de quelques problèmes dépendant de la géométrie de la règle*. Além disso, o autor apresentou uma *Mémoire* sobre as propriedades projetivas das seções cônicas à *Académie des Sciences* em 1820, que compõe a Seção I do *Traité* de 1822. Essas obras formam a primeira parte do *Traité* de 1822 e contêm princípios fundamentais.

Após a apresentação da *Mémoire* de 1820 à *Académie des Sciences*, um relatório foi expedido por uma comissão de membros da *Académie* entre eles Cauchy. Esse relatório foi publicado integralmente no Volume *XI* dos *Annales* e posteriormente reproduzido no *Traité* de 1822. A inclusão desse relatório no *Traité* é um indicativo da sua importância para a obra como um todo, uma vez que oferece uma análise crítica e uma validação dos princípios fundamentais estabelecidos na *Mémoire*. Poncelet pretende com isso induzir o leitor a uma reflexão da importância de se fazer uso do princípio de continuidade na Geometria. Desta forma, deixa a crítica de Cauchy para o leitor tirar suas próprias conclusões. Ele acredita que a admissão da Continuidade na Geometria leva naturalmente às interpretações de noções abstratas e metafísicas.

Na introdução de seu *Traité des propriétés projectives des figures*, Poncelet afirma que diversos geométricos, incluindo o ilustre Monge, reconheceram a importância da doutrina das projeções para a pesquisa e demonstração das propriedades das figuras. Ele cita vários geométricos, como Pascal, De Lahire, Lambert, Carnot, Gergonne, Servois, Ferriot, Durrande, Hachette, Roche e Chasles, que usam os conceitos de projeção para estender ideias geométricas. Poncelet menciona uma memória apresentada por Brianchon (1810) no *Xº* caderno do Jornal da *École Polytechnique*, que foi a fonte de inspiração para o seu trabalho.

Em sua obra, Poncelet faz uma distinção entre a Geometria Analítica e a Geometria Sintética na Introdução. Na Geometria Sintética, não há perda da figura, e o raciocínio é realizado sobre grandezas.

De acordo com Poncelet, ao se admitir a continuidade como princípio nas pesquisas geométricas, é inevitável encontrar verdadeiros paradoxos. No entanto, ele ressalta que esses paradoxos não são exclusivos da geometria, mas também podem ser encontrados na análise algébrica. Isso sugere que a continuidade é uma característica fundamental da matemática e que a resolução de paradoxos é um dos desafios enfrentados pelos matemáticos ao longo da história.

Ao reconhecer essa questão, Poncelet destaca a importância de se estabelecer princípios sólidos e coerentes para orientar a pesquisa matemática.

Sobre a ideia de projeção, Poncelet inicia o assunto sobre como os geômetras têm usado desse princípio para obter inúmeras propriedades interessantes. Esta transformação, que Monge irá usar retas projetantes paralelas, pode ser usada por condições muito mais gerais, ou seja, considerando as retas projetantes concorrendo em um ponto finito. Neste caso o ponto será denotado por centro de projeção. Portanto, para Poncelet, não mais uma projeção cilíndrica de retas paralelas, mas uma projeção cônica ou central.

3.5 As Memórias de 1824

A Mémoire sur les centres de moyennes harmoniques

Esta memória foi escrita por Poncelet em 1824 e serve como uma introdução à teoria geral das propriedades projetivas de curvas e superfícies geométricas. Foi apresentada à *Académie des Sciences* na sessão de 8 de março de 1824 e aprovada em 22 de janeiro de 1826, por uma comissão composta por Legendre, Ampère e Cauchy (relator), foi publicada no jornal de Crelle, t. III, em 1828. Poncelet afirma que a memória foi redigida em 1823 e enviada a Arago no final de novembro, em Metz. Nos *Annales* de Gergonne, t. XVI, p.349, há o relatório da *Académie des Sciences*, cujo relator foi Cauchy.

A memória discute a noção de centro de média harmônica e suas propriedades.

Apresenta a definição de um conceito geométrico chamado "média harmônica". Maclaurin definiu a média harmônica como o segmento compreendido entre um ponto fixo e um ponto M na curva, enquanto Poncelet chamou esse ponto de "centro das médias harmônicas" dos pontos $A, B, \dots$, em relação ao ponto fixo. Poncelet demonstrou que, quando o ponto fixo está no infinito, o ponto M se torna o centro das médias distâncias dos outros pontos.

O centro de média harmônica é uma importante noção da geometria projetiva o artigo é um sequência ao Tratado de 1822. Poncelet apresenta várias propriedades interessantes desse centro, como a sua invariância em relação as propriedades projetivas, a sua relação com o centro de projeção e a sua aplicação em diversas situações, como na determinação de tangentes. A noção de centro de média harmônica é uma das principais ferramentas da geometria projetiva como na teoria das transformações projetivas.

A Mémoire sur la théorie générale des polaires réciproques

Esta memória foi lida à Académie des Sciences, em 12 de abril de 1824 e aprovada em 18 de fevereiro de 1828, por uma comissão composta por Legendre, Poinot e Cauchy (relator), foi publicada no jornal de Crelle, t. IV, 1829. Nesse espaço de 4 anos, surgiu o artigo de Gergonne Gergonne (1825). A teoria geral das polares recíprocas é um importante conceito na geometria projetiva, que relaciona pontos e retas em um espaço de projeção. A memória apresenta a teoria

de forma clara e detalhada, e é considerada uma das contribuições mais significativas de Poncelet à geometria projetiva. A referida memória de Poncelet teve um papel importante na disputa pela primazia de seus princípios com Gergonne, bem refletida no texto de Santos (2015).

A Academia demorou cerca de quatro anos para publicar um relatório desta memória, e isto foi, indiretamente, o pontapé inicial da fase mais aguda da polêmica entre Gergonne e Poncelet. Apenas em 1829, depois dos diversos mal entendidos, é que a Memória de Poncelet vai ser finalmente publicada no Journal de Crelle. (SANTOS, 2015, p.207)

A partir da leitura da introdução da memória, é possível inferir que o autor já havia trabalhado anteriormente com a teoria da reciprocidade polar. Entretanto, ele deseja agora desenvolver essa teoria de maneira mais ampla e sistemática, apresentando uma teoria geral sobre o tema. Isso sugere que Poncelet busca aprimorar sua compreensão e apresentação da teoria, demonstrando um comprometimento com a produção de conhecimento matemático consistente e coerente. A extensão e a organização do texto, com a divisão em cinco partes numeradas, também indicam a preocupação com a clareza e a estruturação de seu argumento.

3.6 Conclusão

Poncelet apresenta na introdução do seu Tratado de 1822 dois princípios gerais, o da Continuidade e o da Projetividade, que podem aperfeiçoar a Geometria racional. Ele destaca que tais princípios são igualmente potentes e aplicáveis em todas as projeções da figura, o que leva ao nome de Propriedades Projetivas. Assim, o objetivo de Poncelet em seu trabalho é buscar e demonstrar as propriedades projetivas das figuras. A abordagem apresentada pelo autor é interessante, pois busca ampliar e aperfeiçoar a Geometria através de princípios gerais que são aplicáveis em diversas situações.

Poncelet observa que as propriedades projetivas são um meio poderoso para estudar as figuras geométricas e que um tratado completo sobre essas propriedades abarcaria todas as propriedades particulares e gerais de extensão. Ele enfatiza a importância dessas propriedades, que subsistem por todas as projeções da figura, e por isso as chama de propriedades projetivas. Poncelet percebe que muitos problemas clássicos da geometria, como o Porisma de Euclides, usam essas propriedades projetivas. Portanto, ele decide concentrar seus esforços em buscar e demonstrar as propriedades projetivas das figuras, a fim de expandir o objeto de conceito da Geometria racional e aperfeiçoar sua compreensão sobre as figuras geométricas.

Poncelet então cita que o trabalho de Pascal *Essai pour les Coniques* de 1640 faz uso de considerações da projeção central e este faz um grande elogio ao trabalho de Desargues. Pascal ainda será comentado por Poncelet, sobre as pesquisas dos *Contacts des sections coniques, Lieux plans e Perspective*. Após os trabalhos de Desargues e Pascal irá aparecer, na França, o trabalho de St. Vicent sobre *Moyenne et extreme raison proportionnelle*. Em De Lahire irá aparecer o

Théorème des pôles et des polaires des lignes du second ordre. O *Traité des sections coniques* de Simon de 1750, onde podemos encontrar várias propriedades projetivas que se ocuparam Desargues, Pascal e Mac-Laurin. Por fim, o *Traité de perspective* de Lambert de 1774 estabelece considerações gerais da teoria que pertencem à Geometria da régua.

Então ele cita alguns geômetras que estão ocupados com questões de projeção. Por exemplo:

Monge irá apresentar as principais propriedades da teoria dos polos das retas e das superfícies. Carnot em sua *Géométrie de position* apresentará toda a generalidade da teoria das transversais as quais, segundo Poncelet, devemos à Euclides, Desargues e Pascal.

Servois apresenta *Solutions peu connues de différents problèmes de Géométrie pratique*, publicada em 1805, que possui as primeiras aplicações da teoria das transversais à *Géométrie de la Règle*.

Assim, muitos geômetras são ocupados das mesmas questões e das mesmas teorias. Um exemplo de questão que envolve o princípio de projeção: Descrever uma seção cônica por retas tangentes ou por pontos incidentes. Tal é então, o conjunto de descobertas geométricas que se relacionam às propriedades projetivas das figuras.

Poncelet pretende verdadeiramente uma exposição histórica e científica deste ramo da Geometria.

Os resultados apresentados por Poncelet em suas investigações sobre geometria projetiva foram de extrema importância para o desenvolvimento do seu famoso livro, o *Traité des propriétés projectives des figures* de 1822. Nessa obra, Poncelet consolidou as suas teorias e estabeleceu os fundamentos da geometria projetiva moderna, influenciando profundamente a matemática e a física do século XIX.

O Tratado de Poncelet apresentou uma abordagem inovadora para o estudo da geometria projetiva, que se baseava na utilização de princípios simples de projeção e continuidade. Esses princípios permitiram a Poncelet derivar uma série de resultados importantes, como a fórmula para a interseção de uma reta com uma cônica, bem como a definição precisa de pontos e retas situados ao infinito.

Esses resultados foram fundamentais para a compreensão de conceitos como a reciprocidade polar entre pontos e retas e a noção de invariantes projetivos, que se tornaram fundamentais para o desenvolvimento posterior da geometria projetiva e para a sua aplicação.

Assim, pode-se afirmar que o trabalho de Poncelet foi uma das principais contribuições para a evolução da geometria projetiva e que o seu *Traité des propriétés projectives des figures* é considerado uma obra fundamental à matemática do século XIX.

A Recepção e a apropriação da obra Geométrica de Poncelet.

Neste capítulo, nosso objetivo é investigar a recepção da obra de Poncelet de 1822 pela comunidade matemática, bem como sua apropriação e divulgação no ensino. Para tanto, é fundamental analisar o trabalho do matemático Michel Chasles, que em sua obra de 1837 realiza uma apreciação histórica da Geometria, incluindo, é claro, a chamada Geometria Moderna. Entendemos que a obra de Chasles é de grande importância para compreendermos como a geometria de Poncelet foi recebida e difundida no contexto da época. Ao longo das próximas páginas, serão apresentadas algumas reflexões acerca das contribuições de Chasles e da relevância de sua obra para o estudo da geometria e sua história.

Michel Chasles foi um matemático francês que estudou na *École Polytechnique* em 1819 e iniciou sua carreira como professor no *Lycée Louis-le-Grand* em 1826. Em 1837, publicou o *Aperçu historique*, uma obra de apreciação histórica da Geometria, que inclui a geometria moderna, e que será relevante para a verificação de como a obra de Poncelet foi recebida pela comunidade. Chasles foi eleito para a *Académie des Sciences* em 1837 e, em 1841, tornou-se professor de geometria descritiva e de mecânica racional na *École Polytechnique*. Em 1846, foi nomeado professor de matemática superior na Sorbonne, onde permaneceu até sua aposentadoria em 1870. Durante sua carreira, Chasles fez importantes contribuições à geometria, especialmente na teoria dos espaços projetivos. Seu trabalho é fundamental para a compreensão do desenvolvimento da geometria ao longo do século XIX e sua influência no ensino e na pesquisa matemática.

Também Poncelet, durante sua vida, fez importantes contribuições para a geometria, especialmente na área de geometria projetiva. No entanto, em 1832, ele parou de publicar trabalhos em geometria sendo, dois anos depois, eleito à de mecânica na *Académie des Sciences* de Paris. Embora Poncelet tenha parado de publicar em geometria, seu trabalho continuou sendo estudado e analisado por vários matemáticos. Alguns citavam diretamente seus teoremas e conceitos, outros, por razões duvidosas, não o mencionavam.

Diante desse contexto, tornou-se relevante investigar como o trabalho de Poncelet foi recebido na França. Para isso, serão examinados três aspectos: o primeiro será a obra de Chasles, que buscou traçar a história da geometria e pode ter importantes reflexões sobre a obra de Poncelet. O segundo será a análise do periódico de Terquem, que pode indicar como a obra de Poncelet era compreendida e avaliada por um público amplo na área de ensino. Por fim, as resenhas de livros presentes no periódico de Terquem serão examinadas para entender como a obra de Poncelet foi integrada aos livros didáticos da época.

É interessante notar que, apesar de ter parado de publicar em geometria, a obra de Poncelet continuou sendo estudada e reconhecida por muitos anos. Isso demonstra a importância e a relevância de seu trabalho na geometria projetiva. Além disso, a investigação sobre como seu trabalho foi recebido pode fornecer informações valiosas sobre a história da geometria e como as ideias matemáticas eram disseminadas e apropriadas na época.

Em resumo, trata-se da análise da recepção da obra geométrica de Poncelet na França, destacando que mesmo após ele parar de publicar trabalhos em geometria e se dedicar a outra área, sua obra continuou sendo estudada por vários matemáticos.

4.1 Presença de Poncelet no Aperçu de Chasles

O livro de Chasles menciona 33 vezes a obra de Poncelet e dividindo-a em duas abordagens: a perspectiva histórica da geometria proposta por Poncelet e as referências diretas à obra do autor. É interessante notar que a visão histórica de Chasles é amplamente baseada na perspectiva histórica de Poncelet, apresentada no prefácio de seu *Traité* de 1822.

A conexão entre as perspectivas de Chasles e Poncelet é importante para entendermos como as ideias matemáticas são construídas e difundidas ao longo do tempo, e como a influência de um autor sobre outro, mesmo que indiretamente, pode moldar a forma como determinada área do conhecimento é percebida e estudada. É interessante observar como a obra de Poncelet influenciou o pensamento de Chasles, um dos principais matemáticos franceses do século XIX. Além disso, a análise das referências diretas à obra de Poncelet no livro de Chasles pode fornecer *insights* sobre como a obra de Poncelet foi compreendida e avaliada por seus contemporâneos.

Em suma, a conexão entre as perspectivas de Chasles e Poncelet nos mostra como as ideias matemáticas são influenciadas e moldadas ao longo do tempo, e como o estudo da história da matemática nos permite compreender melhor as origens e evolução das teorias matemáticas que hoje fazem parte do nosso repertório.

O *Aperçu* de Chasles (1837) é o primeiro trabalho de história da matemática que tenta retratar as diferentes etapas da evolução da geometria, desde a geometria grega, levando em consideração os últimos avanços da pesquisa em geometria nas três décadas do século XIX.

Esses avanços colocam em perspectiva diversas obras, como a Coleção de Pappus sobre os Porismas de Euclides, no século XVII, as obras de Desargues, Pascal e De La Hire, e no século XIX, as obras de Monge, Carnot, Brianchon e Poncelet.

Essa conexão entre as obras já é evidente no prefácio do *Traité* de 1822 de Poncelet. Portanto, não nos surpreende que Chasles mencione os períodos históricos do desenvolvimento da Geometria alinhados com as ideias expostas por Poncelet no prefácio de seu *Traité*. Além disso, é importante ressaltar a influência de Poncelet na abordagem de Chasles, pois as ideias de Poncelet sobre a geometria certamente tiveram um impacto significativo em sua obra.

No primeiro período, as citações de Poncelet e de outros geômetras do século XIX aparecem essencialmente na parte onde Chasles trata do comentário de Pappus sobre os Posrismas de Euclides. Chasles (1837, p.33-34) mostra como a invariância pela projeção central do que ele próprio chama de razão anarmônica, é demonstrado na obra grega e como é retomada, entre outros, por Poncelet no caso de uma razão harmônica, destacando que esse conceito é fundamental também em seu próprio trabalho, esboçado no §33, na nota IX (p. 302) e nota XV (p. 334).

No segundo período, depois de ter descrito vários resultados da obra de Desargues, e mencionado que Desargues foi chamado por Poncelet como “Monge do seu século”, resalta a importância de Apolônio por ter sido o primeiro a utilizar o que Chasles denomina deformação homográfica, que foi retomado por Newton e De la Hire. Posteriormente aplicado por Poncelet em três dimensões (CHASLES, 1837, p.90).

No terceiro período, ao comentar trabalhos de De la Hire e de Poivre, Chasles (1837, p.134-135) reconhece os primeiros passos da teoria de Poncelet das figuras homológicas.

No quinto período, Chasles (1837, p.215) dedica apenas 10 linhas à descrição do Tratado de 1822, enquanto escreve mais sobre a teoria das figuras homológicas ou da teoria das polares.

Poncelet em seu *Traité des propriétés projectives des figures* de 1822, apresenta uma análise da evolução da geometria, sob a ótica dos princípios de continuidade e projetividade desde os antigos gregos até a geometria moderna. Ele procura estabelecer uma conexão entre os trabalhos dos geômetras e os princípios em suas obras. Ele mostra, segundo seus argumentos, que o princípio de projeção têm raízes em trabalhos antigos. Neste aspecto é uma posição discordante de Chasles, por exemplo, pois esse não acreditava em traços da Geometria Projetiva nos trabalhos dos gregos.

Poncelet na introdução do seu Tratado de 1822 inicia por discutir com seu leitor as vantagens do uso do princípio de continuidade e em seguida começa por discutir o princípio de projeção. Aliás, é o princípio das propriedades projetivas que ele têm a pretensão de mostrar que todos os geômetras que cita desde a antiguidades fazem uso de uma forma ou outra. Assim, por exemplo para Poncelet o Porisma de Euclides é devido a um princípio de projeção, as transversais de Carnot, para citar um autor contemporâneo, utiliza o mesmo princípio.

Para Poncelet, a teoria das transversais é a teoria das coordenadas tomada sobre uma reta. Ele também considera que a geometria da régua é a geometria das transversais. A teoria das transversais já tinha sido mencionada em trabalhos de Pappus e no Porisma de Euclides. Ptolomeu usava em seu trabalho de astronomia o princípio fundamental da teoria das transversais esféricas. Desargues foi, para Poncelet, o primeiro entre os modernos que visualizou a geometria sob um

ponto de vista geral. Após Desargues apresentar seu trabalho em 1639, no ano seguinte, Pascal escreveu seu *Essai pour les Coniques*. Nesse trabalho, Pascal faz considerações sobre perspectiva. Interessante que é neste trabalho que consta o teorema de Pascal sobre o hexágono, o qual a propriedade é atribuído a Desargues por Descartes. Lambert, em seu *Traité de Perspective* de 1774, fala sobre a geometria da régua. Carnot, por sua vez, expõe pela primeira vez e com toda a generalidade o Teorema das Transversais e Monge apresenta o fechamento da ideia de projeção com sua Geometria descritiva.

Todos esses trabalhos, e outros mais, possuem de forma explícita ou não o uso do princípio de projeção.

4.1.1 Chasles passa a avaliar a contribuição de Poncelet no *Aperçu*

Chasles faz uma crítica em relação à abordagem de Brianchon e Poncelet na geometria projetiva. Chasles observa que Brianchon desenvolveu uma teoria em sua *Mémoire sur lignes du second ordre* (BRIANCHON, 1817, p.7), que foi citada por Poncelet em seu *Traité des propriétés projectives des figures* (PONCELET, 1822, p.12). No entanto, Chasles argumenta que os dois matemáticos fizeram pouco uso da teoria em questão, concentrando-se apenas no caso particular em que as quatro retas formam um feixe harmônico. Ele argumenta que a falta de exploração das implicações gerais da teoria pode ter limitado o avanço da geometria projetiva. Nesse sentido, ele ressalta a importância de buscar soluções gerais e explorar diferentes abordagens para impulsionar o desenvolvimento da matemática. Em resumo, a crítica de Chasles destaca a necessidade de um pensamento mais amplo e aberto para o progresso da geometria projetiva.

Embora Poncelet tenha abordado no prefácio de seu Tratado o assunto sobre Porisma que Pappus apresentou, é ao longo do seu Tratado que, como uma generalização do Porisma de Euclides, apresenta um belo teorema relacionado à deformação de um polígono cujos lados passam por pontos dispostos em uma reta, enquanto seus vértices, exceto um, percorrem linhas traçadas arbitrariamente. O texto indica que o teorema em questão foi objeto de generalizações e rivalidades entre geômetras ilustres no século XVIII, o que sugere que pode haver aspectos adicionais que merecem exploração. Portanto, é possível, segundo Chasles, que Poncelet tenha perdido a oportunidade de avançar na compreensão do teorema ao restringir-se apenas ao escopo de seu tratado. Assim, É importante considerar se ele realmente explorou todas as implicações do teorema e se sua abordagem foi equilibrada entre teoria e aplicação prática.

Chasles e Poncelet têm divergências quanto à origem dos novos conceitos da geometria pura. Enquanto Poncelet atribui aos Porismas de Euclides a presença de indícios de projetividade, Chasles acredita que é somente com Desargues e Pascal que esses novos conceitos surgem. Para Chasles, a abordagem de Desargues e Pascal baseava-se nos princípios da perspectiva, que não foram usados na escola grega. No entanto, Chasles reconhece o mérito de Poncelet ao afirmar que as propriedades das cordas e dos diâmetros cortados harmonicamente, juntamente com os

teoremas que constituem a teoria dos polos, estão intimamente ligados. Ele argumenta que esse fato pode ser justificado pelo teorema do hexágono, que contém toda a teoria dos polos e foi deduzido por Pascal de seu hexagrama.

Em outras palavras, Chasles reconheceu a importância do trabalho de Poncelet na conexão entre diferentes teoremas da geometria projetiva, mas discordou da origem dos novos conceitos da geometria pura. Ele atribuiu esses conceitos a Desargues e Pascal, que aplicaram o método da perspectiva à teoria das cônicas. No entanto, Chasles admitiu que a questão da origem desses novos conceitos ainda era objeto de debate entre os geômetricos e que uma análise mais profunda e ampla precisava ser realizada.

No início de seu *Traité*, Poncelet destaca o reconhecimento tardio do gênio matemático Desargues, admirado por Descartes, Pascal e Fermat, mas ignorado por muitos. Chasles observa que Poncelet foi o primeiro a reconhecer o verdadeiro valor de Desargues e chamá-lo de "Monge de seu século", um dos fundadores da Geometria moderna.

Chasles afirma (CHASLES, 1837, p.90) que o *Traité* de Poncelet foi o primeiro a apresentar a teoria das figuras homólogas, que possuem diversas propriedades. Ele também observa que Poncelet destaca os métodos de transformação de curvas na Geometria pura, que foram injustamente negligenciados no passado. Chasles menciona que De La Hire e Newton desenvolveram esses métodos e alcançaram objetivos semelhantes aos da teoria das figuras homólogas de Poncelet. Ao analisar dois matemáticos anteriores a Poncelet que também abordaram esses métodos, torna-se evidente que a intenção por trás disso era desafiar a primazia de Poncelet. Mais ainda, tinha o objetivo de questionar ou diminuir a importância e originalidade do trabalho de Poncelet. Isso pode indicar uma rivalidade acadêmica. O contexto histórico e as relações entre os matemáticos envolvidos podem fornecer uma perspectiva mais completa sobre as motivações por trás dessas abordagens. Esses métodos são corolários do princípio geral de deformação homográfica e suas aplicações são numerosas e notáveis. Poncelet é mencionado como uma importante referência na teoria das figuras homólogas e suas aplicações na resolução de problemas geométricos envolvendo cônicas e circunferências. Apresentando que as soluções para questões sobre a construção de uma cônica podem ser deduzidas das questões análogas sobre o círculo sujeito a três condições usando a teoria das figuras homólogas.

Monge nos deu, em seu Tratado de Geometria Descritiva, os primeiros exemplos da utilidade da aliança íntima e sistemática entre as figuras tridimensionais e as figuras planas. Foi por meio de tais considerações que ele demonstrou, com uma elegância rara e uma evidência perfeita, os belos teoremas que constituem a teoria dos polos nas curvas do segundo grau; a propriedade dos centros de similitude de três círculos tomados dois a dois, cujos centros estão em linha reta três a três; e diversas outras proposições de Geometria plana. Desde então, os alunos de Monge cultivaram com sucesso essa Geometria, de um tipo verdadeiramente novo, e à qual frequentemente se deu, com razão, o nome de escola de Monge, e que consiste, como acabamos de dizer, em introduzir na Geometria plana considerações de Geometria tridimensional. (CHASLES, 1837, p.91) ¹

¹ Monge nous donna, dans son *Traité de Géométrie descriptive*, les premiers exemples de l'utilité de l'alliance

Um dos geômetras que primeiro percebeu todo o potencial desse método foi M. Brianchon, que apresentou novas e extensas reflexões sobre o assunto em um artigo publicado no décimo terceiro número do *Journal de l'école polytechnique* (ano de 1810), e que, como M. Poncelet nos informa, deu a primeira ideia das belas e numerosas pesquisas geométricas contidas em seu tratado sobre propriedades projetivas. A escola de Monge também deve muito a M. Gergonne, que a serviu com seus próprios trabalhos, sempre marcados por visões filosóficas profundas, e por dar as boas-vindas às produções dos antigos alunos da *école polytechnique* em seus *Annales de Mathématiques*.

Chasles diz que Poncelet apenas recentemente abordou o assunto sobre continuidade.

Apenas recentemente, M. Poncelet abordou francamente a questão do Princípio de Continuidade, que merecia ser aprofundada, e que ele relacionou a um ponto importante da doutrina da Geometria Racional.(CHASLES, 1837, p.199)²

A afirmação de que Poncelet abordou o tema da continuidade apenas recentemente, como mencionado por Chasles em seu *Aperçu* de 1837, não é precisa. Isso ocorre porque Poncelet já havia enviado um *Mémoire* contendo o princípio de continuidade à *Académie des Sciences* em 1820. Portanto, a ideia de que Poncelet só começou a trabalhar no assunto mais tarde é incorreta, uma vez que o matemático já havia desenvolvido o conceito anteriormente.

Chasles faz um comentário, em seu trabalho, sobre o *Traité* de Poncelet que merece ser destacado. Ele enfatiza o uso habilidoso das propriedades geométricas presentes no trabalho de Poncelet, que foram aplicadas de maneira tão precisa e inteligente que não foi necessário recorrer a cálculos complexos para obter os resultados desejados. Esse aspecto é particularmente notável, pois demonstra a profunda compreensão que Poncelet tinha das propriedades fundamentais da geometria, e sua habilidade em utilizá-las para resolver problemas complexos. Essa abordagem, baseada na intuição geométrica e na manipulação cuidadosa das propriedades projetivas das figuras, é uma das marcas do *traité* de Poncelet.

Chasles faz uma observação de que a teoria das figuras homólogas a qual Poncelet dicorre em seu *Traité* é uma generalização no espaço das descobertas de De La Hire e Poivre:

Finalmente, a bela teoria das figuras homólogas de M. Poncelet, que se insere na de De La Hire e Poivre no caso de figuras planas, mas que ainda não havia sido concebida para figuras em três dimensões.(CHASLES, 1837, p.218)³

intime et systématique entre les figures à trois dimensions et les figures planes. C'est par de telles considérations qu'il démontra, avec une élégance rare et une évidence parfaite, les beaux théorèmes qui constituent la théorie des pôles dans les courbes du second degré ; la propriété des centres de similitude de trois cercles pris deux à deux, lesquels centres sont trois à trois en ligne droite ; et diverses autres propositions de Géométrie plane. Depuis, les élèves de Monge cultivèrent avec succès cette Géométrie, d'un genre vraiment nouveau, et à laquelle on a souvent donné, avec raison, le nom d'école de Monge, et qui consiste, comme nous venons de dire, à introduire dans la Géométrie plane des considérations de Géométrie à trois dimensions.

² Ce n'est que dans ces derniers temps que M. Poncelet a abordé Principe de continuité, franchement cette question, qui méritait d'être approfondie, et qu'il a rattachée à un point de doctrine important dans la Géométrie rationnelle.

³ Enfin, la belle théorie des figures homologiques ou perspective-relief de M. Poncelet, qui rentre dans celle de De La Hire et Le Poivre par le cas des figures planes, mais qui n'avait point encore été conçue pour les figures à trois dimensions

Chasles lembra que o *Journal de Crelle* publicou um trabalho de Poncelet sobre construção das tangentes às curvas geométricas em 1831 sobre *Análise de transversais aplicada à busca das propriedades projetivas das linhas e superfícies geométricas*.⁴

Poncelet incluiu no seu Tratado das propriedades projetivas uma introdução, na qual com um cuidado minucioso e louvável, destacou a prioridade que outros poderiam ter em relação a algumas verdades geométricas que deveriam decorrer naturalmente de suas novas doutrinas.

M. Poncelet, em seu Tratado das propriedades projetivas (art. 616), demonstrou que, pela curva de quarto grau resultante da interseção de duas superfícies quaisquer do segundo grau, é geralmente possível fazer passar quatro cones do segundo grau.

4.2 A recepção da obra de Poncelet nos artigos da revista de Terquem (1842-1862)

Seus fundadores e editores Olry Terquem⁵ e Camille-Christophe Gerono⁶ tinham exatamente o público alvo fixado: os candidatos as *Écoles Polytechnique e Normale*. Portanto, destinava-se a um público específico que diferia do *Journal de Liouville*, periódico de 1836 do qual Terquem fora editor e tradutor.

Em 1841 e 1842, o campo editorial na França e na Alemanha passou por uma reorganização com a chegada de jornais que não se limitavam exclusivamente à pesquisa matemática, mas ao ensino de matemática. Na França, em 1842, foi lançado o *Nouvelles Annales de mathématiques*, o *Journal des candidats aux écoles polytechnique et normale*. (VERDIER, 2009, p.115)⁷

⁴ *Journal de Crelle*, t. VIII, p. 229.

⁵ Terquem (1782-1862) é um antigo aluno da *École Polytechnique* da turma de 1801. Ele é autor de vários livros didáticos e, a partir de 1855, iniciou a publicação de um suplemento aos *Nouvelles Annales* intitulado *Bulletin de Bibliographie, d'Histoire et de Biographie de Mathématiques*, que foi a primeira revista dedicada à história da matemática e o tornou um especialista em história da matemática.

⁶ Camille-Christophe Gerono (1799-1891) foi um matemático francês. A *lemniscata* de Gerono ou curva em forma de oito foi nomeada em sua homenagem.

⁷ En 1841 et 1842, le champ éditorial en France et en Allemagne se réorganise avec l'arrivée de journaux qui ne sont plus exclusivement centrés sur les recherches mathématiques mais sur l'enseignement des mathématiques. En France, en 1842, sont lancées les *Nouvelles Annales de mathématiques*, le « *Journal des candidats aux écoles polytechnique et normale* ».

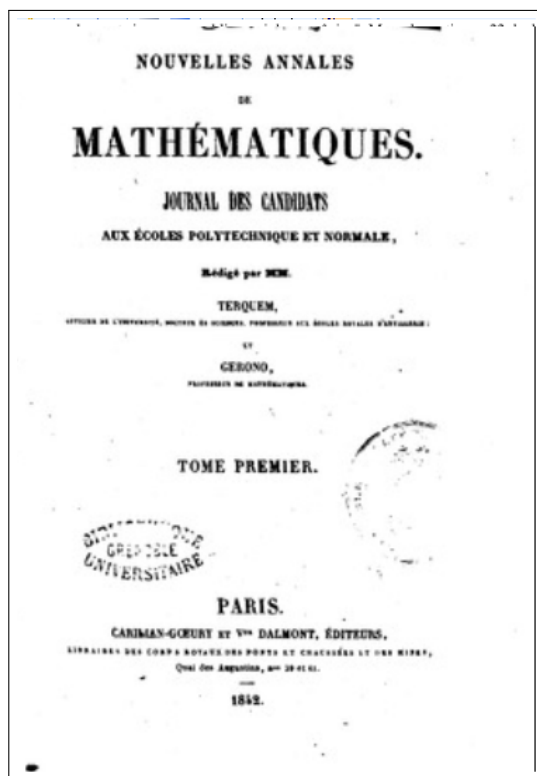


Figura 4.1 – Primeira edição: 1842.

Durante o período de 1842 a 1862, essa revista estabeleceu-se como um importante veículo editorial no Ensino . Nesse contexto, Terquem, o fundador da revista, teve um papel central ao definir a linha editorial e intervir frequentemente no conteúdo publicado, como aponta Nabonnand e Rollet (2009, p. 6). Terquem escreveu mais de 250 artigos, incluindo análises de livros, e formulou cerca de quinze questões e forneceu quase 50 soluções para problemas matemáticos (NABONNAND; ROLLET, 2009, p.6). O período também foi marcado por mudanças significativas no ensino de matemática na França, com a reforma dos programas de ensino em 1852, que afetaram diretamente a produção e recepção dos trabalhos publicados nesse periódico. Além disso, o fim desse período foi marcado pela morte de Terquem, indicando um momento de transição para a revista.

Alguns autores que publicaram na revista de Terquem citam explicitamente Poncelet. Listamos na tabela 4.1 a seguir alguns dos resultados encontrados em nossa pesquisa.

Autor	Referência no jornal de Terquem	Assunto	Referência no Tratado de 1822
Terquem	1842, t. 1, p.79; 1845, t.4, p.14; 1848, t.7, p. 308;	Cita a reciprocidade polar de Poncelet	1842 Section IV, p. 358; 1845 Section IV, p. 283 e Section II, p.99; 1848 Section II, p.99
Hermite	1842, t.1, p.263;	Um teorema devido a Poncelet	Section II, p.99.
Serret	1848, t.7, p.196; 1849, t.8, p.271	Reciprocidade Polar	1848, Section II, p.99.
Lenthéric	1848, t.7, p.352; 1849, t.8, p.252	Reciprocidade Polar	1848, Section II, p.99.
Prouhet	1850, t.9,	Um teorema de Poncelet	
Painvin	1863, t.22, p.171	Cita Poncelet em reciprocidade polar	
Hesse	1855, t.14, p.178	Um teorema de Poncelet	Section I, p.54.
Jonquières	1855, t.14, p.440; 1857, t.16, p.189; 1859, t.18, p.249	Cita alguns teoremas de Poncelet	1855, Section IV, p. 260;
Gentil	1849, t.8, p. 290	Reciprocidade polar	Section I, p.41.
Mathieu	1844, t.3, p.121	Reciprocidade Polar	1844, Section IV, p.29

Tabela 4.1 – Resultados no jornal de Terquem

Primeiramente, é importante destacar que diversos aspectos da obra de Poncelet são referenciados nos artigos em questão, como pode ser observado na coluna indicada na tabela 4.1, a qual faz referência às páginas do Tratado de 1822.

Os artigos publicados na revista abordam uma ampla gama de tópicos abrangendo praticamente todas as áreas da obra de Poncelet. É interessante observar que a maioria dos autores desses artigos são professores, o que demonstra o quão amplamente a obra de Poncelet é estudada e discutida. Além disso, é notável que esses estudos empregam predominantemente métodos analíticos para análise e exploração dos conceitos.

A seguir, serão apresentados alguns exemplos significativos que ilustram essa abordagem.

Em nossa pesquisa, o primeiro personagem analisado é Terquem, que publicou vários artigos mencionando Poncelet. Em um deles, Terquem apresenta 20 pontos sobre as relações algébricas dos pontos notáveis do triângulo segundo Euler. O artigo começa demonstrando que o ortocentro O de um triângulo ABC é o circuncentro do triângulo $A'B'C'$. Em seguida, Terquem apresenta o centro de gravidade do perímetro G_p do triângulo ABC , que é o mesmo que o incentro do triângulo $A''B''C''$, cujos vértices são os pontos médios dos lados do triângulo ABC .

Terquem então anuncia que os pontos 2 – incentro (I), 3 – centro de gravidade (G) e 5 – centro de gravidade do perímetro (G_p) são colineares, uma vez que I e G_p são pontos homólogos de triângulos semelhantes na razão $\frac{1}{2}$. Ele mostra que a mediana é dividida na mesma razão e, portanto, a intersecção das duas retas é o centro de gravidade, concluindo que os três pontos são colineares. Terquem também demonstra que a reta que incide no circuncentro C_1 e no ortocentro O também incide no centro de gravidade G , uma propriedade deduzida por Euler em seus *Mémoires de Petersb.*, t. XI, 1765, a partir de considerações analíticas.

No 19º ponto, Terquem cita Poncelet.

Este é um caso particular do belo teorema do M. Poncelet: dado um polígono inscrito em uma cônica e circunscrito a outra, existe uma infinidade de polígonos que satisfazem essa condição em relação a essas duas cônicas.⁸(TERQUEM, 1842b, p.86)

⁸ C'est un cas particulier du beau théorème de M. Poncelet : un polygone étant inscrit à une conique et circonscrit à une autre, il existe une infinité de polygones qui satisfont à cette condition relativement à ces deux coniques;

Ele indica consultar a seção IV do capítulo 3 do tratado de 1822 de Poncelet. Fomos ao tratado verificar o dito por Terquem e encontramos Poncelet (1822, p.358) o seguinte teorema: "Inscrição, em uma seção cônica dada, de um polígono que seja ao mesmo tempo circunscrito a outra".⁹ Mais a frente, Poncelet coloca a questão: "Dadas duas seções cônicas no mesmo plano, inscrever em uma delas um polígono de quantos lados se desejar, que esteja ao mesmo tempo circunscrito à outra?"¹⁰(PONCELET, 1822, p.365). Para o melhor entendimento, reproduzimos na seguinte figura.

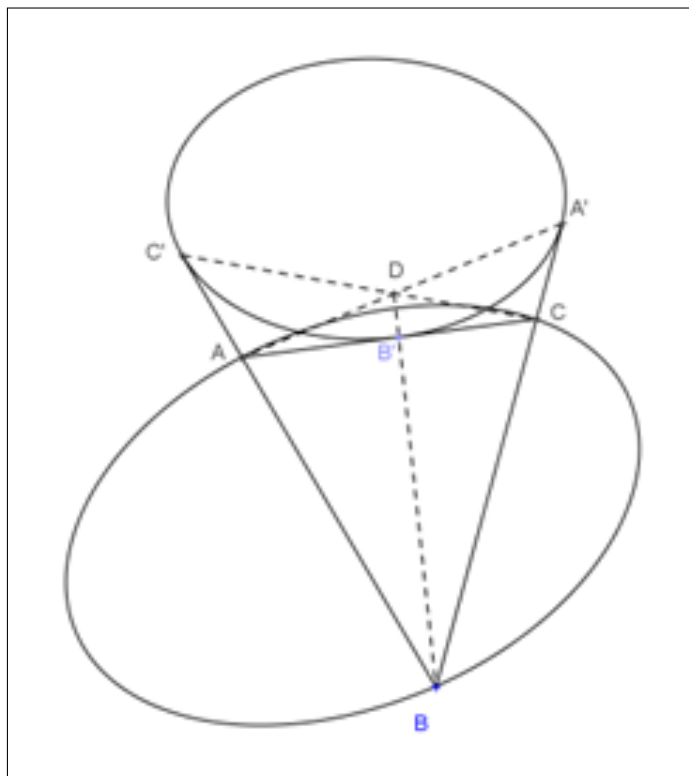


Figura 4.2 – Inscrição e circunscrição de polígono em cônicas

Poncelet se utiliza das relações de tangência, ângulos e reciprocidade polar para apresentar inicialmente em um polígono de três lados, depois de quatros e generaliza para um número de n lados o famoso teorema da inscrição e circunscrição concomitantes de polígonos em cônicas. Conforme Poncelet (1822, p.362): "Propriedades dos polígonos simultaneamente inscritos em uma seção cônica e circunscritos a outra."¹¹

Poncelet (1822, p.365) apresenta no item 568 um quadrilátero para discutir a inscrição e circunscrição concomitante à cônicas coplanares. Demonstra que o concurso das diagonais é o concurso das secantes conjugadas comum as duas curvas. E que o ponto K , concurso das diagonais é invariável e mais ainda é o polo da reta polar que une os pontos de concurso dos

⁹ Inscription, à une sections conique donnée, d'un polygone qui soit en même temps circonscrit à une autre.

¹⁰ Deux sections coniques étant données sur un même plan, inscrire à l'une d'elles un polygone de tant de côtés qu'on voudra, qui soit en même temps circonscrit à l'autre ?

¹¹ Propriétés des polygones à la fois inscrits à une section conique et circonscrits à une autre.

prolongamentos dos lados. Portanto, trata-se em todo o desenvolvimento de abordar a ideia de reciprocidade polar.

A generalização a qual se refere Terquem feita por Poncelet (1822, p.366) sobre as considerações no triângulo de Euler é baseado nas ideias de polígonos quaisquer inscritos e circunscritos concomitantemente às cônicas. Quando as cônicas são circunferências de círculos seus centros possuem a polar no infinito. E, portanto, as considerações de Euler é um caso particular das ideias que Poncelet irá apresentar de formar generalizada em seu Tratado.

Vamos abordar agora o artigo de Hermite (1842) que trata sobre os polos de seções cônicas. Ele afirma: “Dado um plano com duas seções cônicas A e B, consideramos uma tangente traçada na seção A e tomamos ela como uma polar em relação à seção B. Em seguida, queremos saber o lugar geométrico do polo dessa tangente, supondo que o ponto de tangência percorra a curva A”¹²(HERMITE, 1842, p.263).

A solução apresentada por Hermite neste artigo é notável por sua brevidade, consistindo de apenas duas páginas e sendo completamente analítica. Ele conclui que a curva percorrida pelo polo é uma cônica, o que é uma descoberta significativa. Por outro lado, Poncelet aborda o mesmo problema, mas utilizando a Reciprocidade Polar. Essa abordagem é possível porque a recíproca polar de uma cônica é outra cônica. No entanto, se a diretriz da cônica é uma circunferência cujo centro é um dos focos da cônica, então a recíproca polar será uma outra circunferência. Deixaremos a figura seguinte como ilustração dessa abordagem.

¹² On donne sur un plan deux sections coniques A,B ; on considère une tangente menée à la première, comme une polaire par rapport à l'autre, et on demande le lieu de son pôle en supposant que le point de tangence parcourt la courbe A.

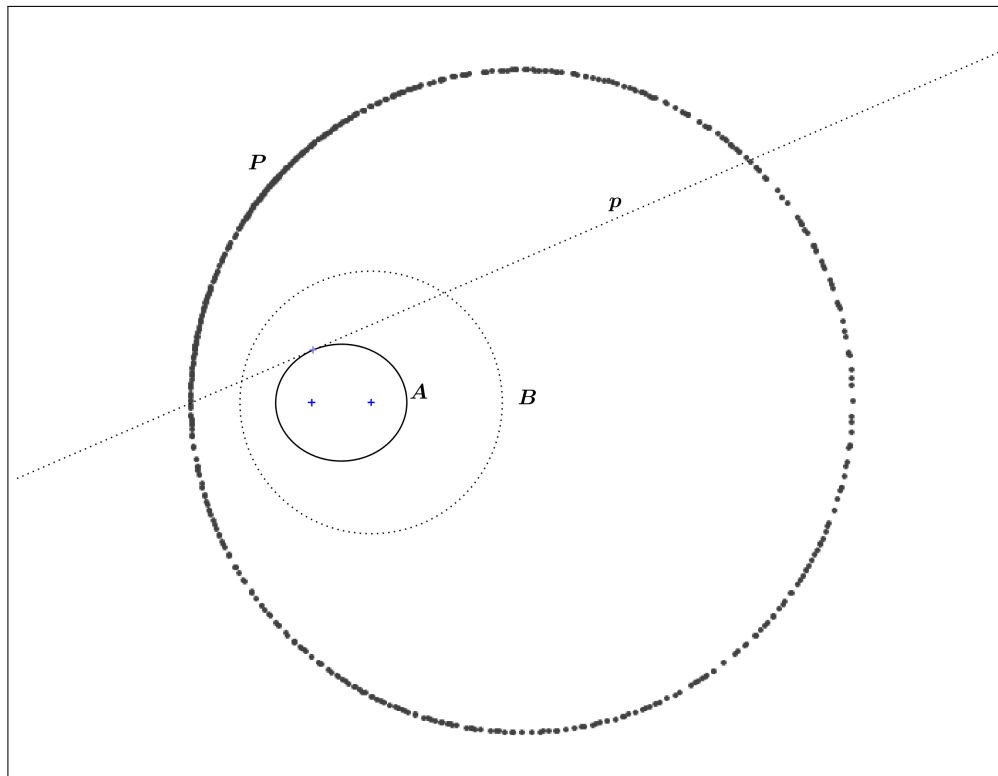


Figura 4.3 – A polar de uma cônica é outra cônica

Agora analisando a citação de Serret (1848). Ele apresenta o seguinte teorema:

Teorema. Se dois dos lados AB , AC de um triângulo ABC inscrito em uma cônica giram constantemente em torno dos pontos fixos P , P' , o terceiro lado BC envolverá uma cônica duplamente tangente ao proposto, seguindo a linha PP' dos pivôs. Note-se primeiro que este teorema é fundamental na obra de M. Poncelet, no sentido de que serve de base para as belas proposições do autor sobre a envoltória do lado livre de um polígono inscrito, do qual os outros lados giram em torno pontos dados, etc., e ao seu notável teorema sobre polígonos, ambos inscritos em uma cônica e circunscritos em outra.¹³(SERRET, 1848, p.196)

O teorema citado é fundamental para a obra de M. Poncelet, pois ele o utilizou como base para diversas proposições sobre envoltórias de polígonos inscritos em cônicas e circunscritos a outras cônicas. Uma das proposições mais notáveis de Poncelet é o seu teorema sobre polígonos, que diz que se um polígono está inscrito em uma cônica e circunscrito a outra cônica, então é possível traçar uma sequência infinita de polígonos inscritos e circunscritos a estas mesmas cônicas. Esse resultado é uma das primeiras aplicações da ideia de reciprocidade polar, introduzida por Poncelet e que se tornou uma ferramenta essencial na geometria projetiva.

¹³ Théorème. Si deux des côtés AB , AC d'un triangle ABC inscrit à une conique, pivotent constamment autour des points fixes P , P' , le troisième côté BC enveloppera une conique doublement tangente à la proposée, suivant la droite PP' des pivots. Remarquons d'abord que ce théorème est fondamental dans l'ouvrage de M. Poncelet, en ce sens qu'il sert de base aux belles propositions de l'auteur sur l'enveloppe du côté libre d'un polygone inscrit, dont les autres côtés pivotent autour de points donnés, etc., et à son théorème si remarquable sur les polygones à la fois inscrits à une conique et circonscrits à une autre.

Além disso, o teorema em questão é importante porque mostra que, ao girar dois lados de um triângulo inscrito em uma cônica em torno de pontos fixos, o terceiro lado descreve uma cônica duplamente tangente à cônica original. Essa propriedade é usada por Poncelet em muitas de suas proposições, em particular na construção de uma cônica comum a dois triângulos distintos, que é um problema clássico da geometria projetiva.

O próximo artigo que analisaremos é de Jacques Lenthéric, que era professor da Escola de Engenharia de Montpellier. Também é autor de um *Cours de Géométrie*. Escreveu em 1848 e 1849 dois artigos nas *Nouvelles Annales de Mathématiques* sobre os polos e as polares, conforme a tabela 4.1. O primeiro artigo trata da teoria geral dos polos, das polares e das curvas e superfícies do segundo grau. Ele inicia este artigo apresentando a expressão analítica de uma curva do segundo grau qualquer. Ele trabalha com as tangentes a essa curva a partir de um ponto qualquer e os pontos de contato. Daí faz uma análise da equação da reta que passa pelos pontos de contato e define uma "corda de contato", a partir desta reta que passa pelos pontos de contato.

se tangentes à curva de segunda ordem são traçadas em todos os pontos de uma reta situada de qualquer forma no plano da curva, então todas as cordas de contato se encontrarão em um único ponto e esse ponto estará localizado no diâmetro conjugado da direção da reta. (LENTHÉRIC, 1848, p.312)

O trabalho é analítico e explora vários aspectos relacionados aos polos e polares.

Em todas as curvas de segundo grau, a diretriz tem o foco como polo, o que justifica a denominação de "polo focal". M. Poncelet propôs, com razão, dar esse nome à diretriz.¹⁴ (LENTHÉRIC, 1848, p.357)

É a partir desse teorema, que poderia servir como ponto de partida para essa teoria, que se tornaria independente da teoria das tangentes, que deriva a denominação de "pólo" (do verbo grego que significa girar), introduzido em 1811 por M. Servois na ciência.¹⁵ (LENTHÉRIC, 1848, p.359)

O artigo de Lenthéric, elaborado com a ferramenta Geometria Analítica, discorre sobre as curvas polares recíprocas, termo cunhado por Poncelet, que se referem às duas curvas de um mesmo sistema, e a cônica intermediária, denominada diretriz. A solução para esse fenômeno foi apresentada pelo professor Plücker e posteriormente explicada geometricamente por M. Ângelo Genocchi de Turim.

Lenthéric (1849, p.352) apresenta uma contribuição significativa para a teoria da reciprocidade polar, sendo construído com a ferramenta Geometria Analítica. Em suas 16 páginas, Lenthéric explora as curvas polares recíprocas e a cônica intermediária como diretriz, nomeadas por Poncelet. Abaixo uma citação onde ele indica as inspirações da sua obra:

¹⁴ Dans toutes les courbes du deuxième ordre, la directrice a pour pôle le foyer; ce qui justifie la dénomination de polaire focale, M. Poncelet a proposé, avec raison, de donner à la directrice.

¹⁵ C'est de ce théorème, qui pourrait servir de point de départ à cette théorie, que l'on rendrait ainsi indépendante de celle des tangentes, que dérive la dénomination de pôle (du verbe grec qui signifie tourner), introduite en 1811 par M. Servois dans la science.

As duas curvas de um mesmo sistema foram designadas, por Poncelet, sob o nome de curvas polares recíprocas, e a cônica, que a serve de intermediária, sob o nome de diretriz.

M. o professor Plucker é o primeiro, como observa M. Terquem (tomo VII, p.311), que deu uma explicação completamente satisfatória desse fato singular, ao qual retornamos.

As polares recíprocas da diretriz, em relação a duas polares recíprocas, são elas mesmas polares recíprocas, em relação a esta diretriz. M. Angelo Genocchi, de Turin, nos enderessou uma demonstração geométrica deste teorema. (LENTHÉRIC, 1849, p.355)

Lenthéric (1849) apresenta com rigor e naturalidade a introdução dos números complexos na Geometria e a frutífera noção dos pontos do círculo localizados no infinito, proposta por M. Poncelet. Lenthéric também apresenta os princípios fundamentais do método dos polos recíprocos, a teoria das figuras homólogas e o método de projeção cônica. Para que a essência e a fertilidade desses métodos sejam bem compreendidas, o autor apresenta uma grande variedade de aplicações específicas e incentiva os jovens estudiosos a lerem as obras de Chasles e Poncelet. Ou seja, esse trabalho de Lenthéric é uma contribuição importante para a compreensão da teoria da reciprocidade polar e de suas aplicações na geometria.

A tabela apresentada como Tabela 4.1 contém uma variedade de artigos nos quais são empregadas noções da Geometria Pura, utilizando métodos de Geometria Analítica para as soluções dos problemas. Essa ampla gama de recursos demonstra a riqueza e a versatilidade dos métodos disponíveis para o geômetra ao demonstrar teoremas, permitindo a abordagem de diversas noções da Geometria Moderna por meio da Geometria Analítica. É importante enfatizar que essa combinação de abordagens evidencia o potencial inventivo desses métodos, sempre buscando a simplicidade e a elegância na resolução de problemas.

É interessante notar que esses trabalhos fazem referências aos assuntos abordados por Poncelet em seu *Traité*, o que sugere uma assimilação das suas doutrinas pelos autores desses artigos. Embora não seja possível listar todos os artigos presentes na tabela, é inegável a relevância dessas obras para a Geometria Analítica e sua contribuição para o desenvolvimento da Geometria como um todo. Além disso, elas sinalizam como a obra de Poncelet foi recebida nesse periódico, evidenciando o impacto e a influência do seu trabalho.

Observamos que os métodos utilizados pelos autores são de natureza analítica, o que revela uma certa mudança de direção em relação aos problemas tratados por Poncelet.

Para completar o panorama da recepção dessas obras, analisaremos as resenhas de livros apresentadas por Terquem em seu periódico. Essas resenhas fornecerão *insights* adicionais sobre a forma como as contribuições de Poncelet foram recebidas e avaliadas pela comunidade acadêmica da época.

4.3 Recepção de Poncelet nas resenhas de Terquem (1842-1862)

Vamos agora examinar como Poncelet foi reapropriado nas resenhas de livros escritas por Terquem na seção análise de livros¹⁶ de seu periódico *Nouvelles annales de mathématiques*. Nosso estudo cobre o período de 1842 a 1862, desde o primeiro volume desse periódico até o ano em que Poncelet começou a trabalhar em suas obras completas. Esse período é importante porque nos permite observar como seus trabalhos foram recebidos, já que após 1862 eles já eram considerados parte do patrimônio de Poncelet. Analisaremos essa questão em mais detalhes no próximo capítulo desta tese.

A primeira resenha que analisamos é sobre o livro *Complément de géométrie analytique*, escrito por Page, de 1841. Essa resenha está no primeiro volume do jornal de Terquem. Terquem (1842a, p. 206) afirma que muitos livros são antiquados e deixaram a geometria estagnada, enquanto a disciplina em si avançou muito nas últimas décadas. Destaca que o objetivo de Page foi fornecer um livro conciso que contenha as principais proposições da geometria das transversais e que possa ser usado por alunos e professores para acompanhar o ensino atual em muitos colégios parisienses. Ou seja, M. Page escreveu seu livro para atualizar a geometria das cônicas, linhas e superfícies e torná-la mais acessível aos alunos e professores.

Após uma breve apresentação da estrutura do livro de Page, Terquem (1842a, p. 209) apresenta algumas críticas. A primeira delas é referente ao título, que Terquem considera impreciso, uma vez que algumas proposições essenciais foram omitidas, faltando pouco para que o livro se tornasse um "Tratado completo" de geometria analítica de duas dimensões. Além disso, Terquem considera que Page poderia ter incluído essas proposições que faltam. Outra crítica é a ausência do belo teorema de Poncelet, que estabelece que duas cônicas que estão no mesmo plano têm uma relação especial, onde o polo da segunda é encontrado em relação à primeira. Terquem reclama que o livro não apresenta este teorema e credita sua autoria a Poncelet.

No volume 4 do *Nouvelles Annales*, Terquem faz uma observação relevante sobre a demonstração do teorema de Poncelet por Jubé, embora não se trate especificamente de uma resenha. De acordo com Terquem (1845, p.272), a demonstração apresentada por Jubé é exatamente a mesma que Gérono havia feito no volume anterior, na página 499. O teorema em questão é o seguinte: "A bissetriz do ângulo formado pelas duas tangentes a uma elipse também é a bissetriz do ângulo formado pela união de seu ponto de interseção com os focos". Embora Jubé não tenha mencionado explicitamente que o teorema é de autoria de Poncelet, Terquem faz questão de ressaltar que o teorema é de fato de autoria de Poncelet. Essa observação destaca a reclamação de Poncelet de que seus teoremas e doutrinas não eram devidamente referenciados pelos autores daquele período.

Terquem (1846, p.381) faz uma resenha do livro de título *Cours Complet de Mathématiques*, de Auguste Blum, de 1845, e era destinado aos candidatos a todas as escolas do governo

¹⁶ *Analyse d'ouvrages*

francês. Terquem apresenta a estrutura do livro, mas o que nos interessa é um comentário muito interessante quanto à autoria dos teoremas.

Essas diversas teorias que ocupavam um lugar tão grande entre os antigos desapareceram com razão dos escritos dos geômetras do século XVIII; os avanços da geometria contemporânea tornam novamente necessária a introdução dessas teorias, cuja ausência deve agora ser apontada como uma verdadeira lacuna; e até mesmo em certos aspectos, como uma falta de patriotismo, porque a nova direção dada aos estudos geométricos é devida a cientistas franceses, como Servois, Brianchon, Poncelet, Chasles, etc. ¹⁷(TERQUEM, 1846, p.384)

Ou seja, na resenha feita por Terquem, ele observa que os teoremas que representavam os avanços da nova geometria não estavam sendo devidamente referenciados, mesmo com o pioneirismo dos franceses nessa área. Essa observação reforça o que já havíamos mencionado sobre Poncelet, que também reclamava da falta de reconhecimento por sua obra.

A próxima resenha foi elaborada por Eugène Prouhet (1817-1867), que será um dos editores dos *Nouvelles annales de mathématiques*, a partir de 1862, por conta do falecimento de Terquem. Ele apresenta o livro *Des méthodes en géométrie*, de Paul Serret, de 1855. No final da sua resenha, ele destaca:

Devemos ser gratos ao autor, cuja erudição parece tão vasta, por nos ter apresentado tantos métodos engenhosos usados pelos maiores geômetras do passado, que nossa negligência condenava ao esquecimento. Ele presta assim um grande serviço à ciência, pois, seguindo a judiciosa reflexão do M. Poncelet, na passagem que serve de epígrafe para o livro do M. Serret: "Não são tanto as verdades particulares como os métodos que não devemos deixar perecer".¹⁸(PROUHET, 1856, p.101)

Prouhet concorda com Terquem e com a reflexão de Poncelet de que é mais importante preservar os métodos do que as verdades particulares da geometria. Essa preocupação do corpo editorial do periódico, evidenciada pela citação de Prouhet, é muito relevante para nossas considerações sobre a recepção de Poncelet e sua influência no desenvolvimento da matemática. Mostra-nos que os editores do periódico estavam atentos não apenas às descobertas matemáticas, mas também às metodologias empregadas pelos matemáticos, o que demonstra a importância dada ao desenvolvimento da ciência como um todo.

Na resenha do livro de Mannheim, intitulado *Transformation des propriétés métriques des figures à l'aide de la théorie des polaires réciproques*, publicada no volume 17 do jornal de Terquem, Faure (1858, p.27) destaca que:

¹⁷ Ces diverses théories qui occupaient une si grande place chez les anciens avaient disparu avec raison des écrits des géomètres du xviii^e siècle ; les progrès de la géométrie contemporaine rendent de nouveau nécessaire l'introduction de ces théories dont l'absence devrait désormais être signalée comme une véritable lacune ; et même sous certains rapports , comme un manque de patriotisme, car la nouvelle direction donnée aux études géométriques est due à des savants français , aux Servois, Brianchon , Poncelet, Chasles, etc.

¹⁸ On doit savoir gré à l'auteur, dont l'érudition paraît si étendue, de nous avoir fait connaître tant de procédés ingénieux employés par les plus grands géomètres des temps passés et que notre insouciance condamnait à l'oubli. Il rend en cela un grand service à la science, car, suivant la judicieuse réflexion de M. Poncelet, dans le passage qui sert d'épigraphe au livre de M. Serret : "Ce ne sont pas tant les vérités particulières que les méthodes qu'il ne faut pas laisser périr".

M. Mannheim, usando como base de suas transformações a teoria das polares recíprocas, menciona os trabalhos de MM. Poncelet, Chasles, entre outros, sobre o mesmo assunto, e enuncia a questão que se propõe a resolver: transformar, usando a teoria das polares recíprocas, uma relação métrica sem que ela sofra nenhuma preparação. Determinar imediatamente as diferentes formas em que a relação transformada teria aparecido se tivesse sido operada em diferentes formas da relação dada.¹⁹(FAURE, 1858, p. 27)

Na resenha do livro de Mannheim, Faure destaca que o autor menciona Poncelet, Chasles e outros matemáticos em relação à teoria da reciprocidade polar. Mannheim demonstra interesse na reciprocidade polar e, inclusive, ajudou na elaboração das obras completas de Poncelet com a ajuda de Moutard.

No volume de 1859, Terquem (1859b, p.445) apresenta uma lista com oito geometrias distintas por suas diferenças lógicas, acompanhada pelos nomes dos matemáticos franceses que publicaram obras especiais em cada uma delas. Poncelet é mencionado em duas das geometrias: a geometria projetiva e a geometria "dualista, reciprocidade polar". Nesse sentido, a contribuição de Poncelet em geometria projetiva é reconhecida e ele é considerado o matemático francês com o trabalho mais especial nessa área.

No mesmo volume, Terquem (1859a, p.56) resume brevemente o conteúdo do jornal do Crelle, tomo 56 (1859), páginas 191 a 283. Na parte de geometria, ele menciona o artigo de O. Hermes, *Sur des tétraèdres homologues*, que estende o teorema de Poncelet e será publicado no jornal. Embora seja uma citação breve, essa referência faz de Poncelet uma autoridade em teoremas de geometria projetiva.

Já no volume de 1861, Terquem faz uma nota sobre a resenha o trabalho de Chasles, *Les trois livres de porismes d'euclide, rétablis pour la première fois, d'après la notice et les lemmes de pappus, etc.* Nesta nota do editor, ele faz uma nota de rodapé que diz:

São conhecidas as felizes abreviações, as belas descobertas, que devemos aos nossos célebres geômetras Poncelet e Chasles, que foram os primeiros a introduzir entidades geométricas imaginárias situadas no infinito e linhas passando por pontos imaginários.²⁰(TERQUEM, 1861, p.12)

Terquem mais uma vez atribui a Poncelet a autoria das entidades geométricas imaginárias ao infinito, juntamente com Chasles. É importante destacar que essa nota faz referência a um trabalho de Chasles. Podemos observar que o editor reitera a importância de Poncelet na criação de teoremas e abordagens.

Percebemos uma reapropriação significativa das obras de Poncelet a partir das resenhas escritas por Terquem nas *Nouvelles annales de mathématiques* de 1842 a 1862, o que evidencia a

¹⁹ M. Mannheim, prenant pour base de ses transformations la théorie des polaires réciproques, rappelle les travaux de MM. Poncelet, Chasles, etc., sur le même sujet, puis énonce ainsi la question qu'il se propose de résoudre : Transformer à l'aide de la théorie des polaires réciproques une relation métrique sans lui faire subir aucune préparation. Déterminer immédiatement les différentes formes sous lesquelles se serait présentée la relation transformée si l'on avait opéré sur différentes formes de la relation donnée.

²⁰ On connaît les heureuses abréviations, les belles découvertes, qu'on doit à nos célèbres géomètres Poncelet et Chasles, qui les premiers ont introduit les êtres géométriques imaginaires situés à l'infini, et des lignes passant par des points imaginaires.

importância dessas resenhas como fonte de compreensão sobre a recepção e difusão do trabalho do autor. Nesse sentido, ao analisarmos a resenha do livro de Page, podemos notar que a obra de geometria analítica vai além de suas características superficiais, incorporando também noções de geometria racional. Essas noções são evocadas e aplicadas na resolução de problemas por meio da geometria analítica, revelando a riqueza do trabalho de Poncelet.

É importante ressaltar que a ausência do teorema de Poncelet em algumas obras foi alvo de críticas por parte de Terquem, que considerava essa omissão como uma lacuna significativa. O teorema em questão, devido à sua relevância, deveria estar presente nessas obras para uma compreensão completa e aprofundada da geometria. Essas críticas apontam para a valorização e reconhecimento do legado de Poncelet na época em que as resenhas foram escritas.

Além disso, ao estudarmos a recepção das obras de Poncelet nas resenhas de Terquem, somos capazes de compreender como esses trabalhos foram percebidos e avaliados naquele período. É importante salientar que, após 1862, já podemos considerar essas obras como parte integrante do que hoje denominamos de patrimonialização de Poncelet. Esse processo de patrimonialização reflete a consolidação e a valorização do conhecimento e das contribuições de Poncelet, que passam a ser incorporados no ensino e na formação dos candidatos aos concursos das escolas.

Dessa forma, as resenhas escritas por Terquem revelam não apenas a apropriação e difusão das obras de Poncelet, mas também como parte desse trabalho se torna um conhecimento essencial a ser assimilado pelos candidatos aos concursos das escolas. A entrada da obra de Poncelet no ensino evidencia a sua relevância e o reconhecimento da importância de seus conceitos e teorias como parte essencial do conhecimento matemático.

4.4 Conclusão

Tanto Chasles como os autores das revistas se inspiraram na obra de Poncelet, mas não se limitaram a simplesmente absorver suas ideias. Ao contrário, eles reinterpretaram e fizeram suas próprias adaptações, isso significa que se apropriaram delas e as transformaram em algo novo. É interessante observar que essa prática de reapropriação e reformulação de ideias é comum no campo da ciência e contribui para a evolução do conhecimento ao longo do tempo. Dessa forma, podemos afirmar que a obra de Poncelet não foi apenas um ponto de partida, mas um catalisador para a criação de novos pensamentos e reflexões.

As resenhas e os artigos evidenciam como a obra de Poncelet se torna um conhecimento que os candidatos aos concursos das escolas devem incorporar. As doutrinas e teoremas de Poncelet passam a serem ensinadas.

As resenhas mencionadas destacam a importância da obra de Poncelet no contexto educacional, especialmente para os candidatos que buscam aprovação em concursos de escolas. Isso indica que o trabalho de Poncelet não apenas influenciou o campo da matemática, mas também se tornou parte integrante do currículo e do ensino dessas instituições. Essa assimilação

do conhecimento de Poncelet pelos estudantes reflete o reconhecimento da relevância e do impacto duradouro de sua obra.

A Coletânea de Poncelet, seus colaboradores e a Patrimonialização

Pouco menos de quarenta anos após a publicação original em 1822, Poncelet decidiu compilar e editar suas obras sobre Geometria em um empreendimento ambicioso que resultou em quatro volumes: dois volumes intitulados *Applications d'Analyse et de Géométrie* (1862-1864) e dois volumes do *Traité des Propriétés Projectives des figures* (1865-1866). Essa compilação incluiu comentários e notas e permitiu o acompanhamento da evolução do pensamento de Poncelet, graças à ordem cronológica da apresentação. O primeiro volume contém cadernos inéditos de *Saratoff* (1813-1814), enquanto o segundo volume apresenta vários artigos publicados entre 1817 e 1822, além de memórias submetidas, correspondências com outros matemáticos, relatórios e adições. O terceiro volume republica a versão original de sua obra de 1822, enquanto o quarto volume inclui obras geométricas escritas por Poncelet entre 1823 e 1832, incluindo polêmicas com Gergonne e Plücker.

As coletânea das obras completas de Poncelet contaram principalmente com a colaboração de dois matemáticos: Moutard e Mannheim. As intervenções que eles fizeram nas edições das obras são comentadas pelo próprio Poncelet no texto:

Por minha vez e ao mesmo tempo, acredito que devo declarar aqui que as adições dos senhores Moutard e Mannheim foram feitas sem minha participação e sem que eu tenha intervindo na correção das provas de impressão. Além disso, acredito que devo observar que meu trabalho e o desses sábios geômetras foram concebidos e redigidos de maneira completamente independente [...]. (PONCELET, 1862, p.551, nota) ¹

O texto descreve como Poncelet abordou seus trabalhos quase cinquenta anos após seus manuscritos de *Saratoff*. Ele optou por publicar seus manuscritos sem alterar os originais, apenas transcrevendo os textos manuscritos sem modificar a ordem ou natureza das ideias.

¹ A mon tour et à la même occasion, je crois devoir déclarer ici que les additions de MM Moutard et Mannheim ont été faites sans aucune participation de ma part, et sans que je sois intervenu dans la correction des épreuves d'imprimerie. Je crois, de plus, devoir faire observer que mon travail et celui de ces savants géomètres ont été conçus et rédigés d'une manière entièrement indépendante.[...]

Isso significa que ele manteve o pensamento fundamental intacto, mas removeu os exemplos e o desenvolvimento excessivo que muitos leitores consideravam desnecessários. Além disso, Poncelet decidiu não incorporar reflexões críticas que surgiram em trabalhos posteriores sobre a teoria geométrica dos sinais de posição. Em resumo, Poncelet escolheu uma abordagem mais conservadora e limitada, preservando o essencial de seus trabalhos sem se preocupar com revisões ou atualizações.

5.1 Contribuições de Moutard e Mannheim

Nas adições dos trabalhos de Poncelet em 1862, há a participação dos matemáticos Théodore Moutard e Amédée Mannheim ². Poncelet deixou claro que essas adições foram feitas sem a sua participação ou intervenção na correção das provas. No entanto, a contribuição desses dois matemáticos foi importante para o desenvolvimento e ampliação das ideias de Poncelet sobre geometria projetiva.

Moutard foi um matemático francês que contribuiu significativamente para a teoria das transformações geométricas. Já Mannheim foi um matemático francês que se destacou no estudo da geometria projetiva. Ambos foram responsáveis por acrescentar exemplos e notas aos trabalhos de Poncelet, além de corrigir algumas partes do texto.

A colaboração desses dois matemáticos nas edições das obras completas de Poncelet demonstra a importância da troca de ideias e da colaboração na construção do conhecimento científico. Ao trabalharem juntos, Moutard e Mannheim foram capazes de aprimorar e ampliar as ideias de Poncelet, contribuindo para o avanço da geometria projetiva.

² Souvenirs, Notes et Additions, p.499-560

5.1.1 Théodore Moutard (1827-1901)

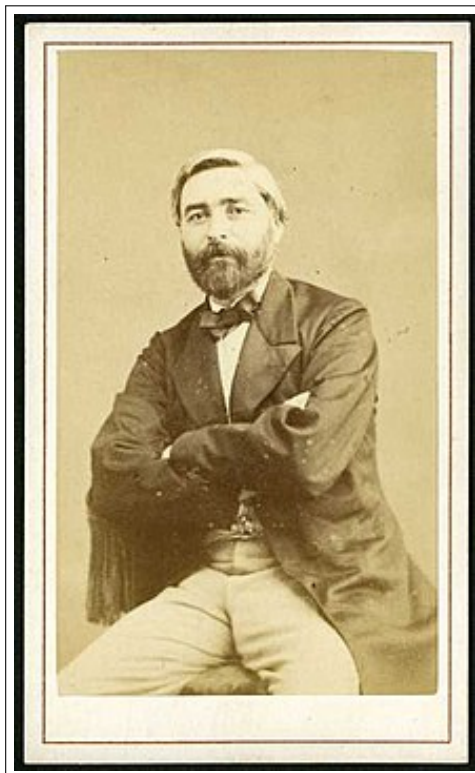


Figura 5.1 – Théodore Moutard.

Moutard, um engenheiro de minas francês, fez contribuições significativas para a geometria matemática. Ele é conhecido por ter desenvolvido a transformação de geometria inversa que leva seu nome. Moutard foi aluno da *École Polytechnique* em 1844 e completou seus estudos na *École des Mines* em 1849. Ele se tornou um membro do Corpo de Mineração, mas foi dispensado em 1852 por se recusar a prestar juramento após a queda de Napoleão III. Moutard retornou em 1870 e tornou-se professor de mecânica na *École des Mines* em 1875. Ele também serviu como examinador da *École Polytechnique* em 1883 e colaborou com Poncelet em funções elípticas, além de participar das edições das obras completas de Poncelet.

A obra intitulada *Applications d'Analyse et de Géométrie*, publicada em 1862, é composta pelos sete cadernos de *Saratoff* e outras adições. O seu lançamento foi importante para preservar e disponibilizar para o futuro as contribuições originais dos cadernos *Saratoff* para a geometria projetiva, facilitando sua divulgação. A organização em sete partes permitiu que os diferentes tópicos abordados fossem divididos em seções, tornando a leitura mais organizada e acessível aos leitores.

**RELAÇÕES ENTRE OS PRINCIPAIS MÉTODOS DE GEOMETRIA PURA E
ANÁLISE ALGÉBRICA.**

O texto apresenta as quatro etapas desenvolvidas por Moutard na contribuição ao *Applications d'Analyse et de Géométrie* sobre projeção central. A projeção central é um importante conceito na geometria projetiva, e sua análise analítica é essencial para compreensão e desenvolvimento de novas aplicações. As quatro etapas descritas no texto, desde as reflexões preliminares até as coordenadas simétricas, demonstram a profundidade da análise e a dedicação de Moutard na busca por uma compreensão mais completa da projeção central. Este trabalho contribuiu significativamente para o desenvolvimento da geometria projetiva sob a viés analítico:

1 - Reflexões preliminares sobre os princípios de projeção central.

Uma época significativa na história da geometria pura foi marcada pela aplicação dos Princípios de projeção central. Os métodos baseados nesses princípios, cujos cadernos de *Saratoff* são um primeiro esboço e estão contidos na obra *Applications d'Analyse et Géométrie* t.I, possuem uma característica intuitiva e sistemática que permite descobrir novas propriedades das figuras e encontrar um conjunto de proposições. Isso fornece à geometria uma nova força.

Os efeitos da perspectiva sobre o desenvolvimento de outros métodos de transformações nem sempre foram indiretos. Os Princípios de Homologia, tal como estabelecidos no *Traité des Propriétés Projective des Figures*, são, na verdade, os mesmos princípios da perspectiva, acrescidos de considerações de geometria no espaço.

A Teoria da reciprocidade polar, que surgiu em paralelo à Teoria das propriedades projetivas, teve suas bases estabelecidas a partir das mesmas ideias. Essa teoria permitiu um melhor entendimento do papel geométrico do infinito e dos imaginários, bem como a aplicação do Princípio da continuidade, resultando na simplificação de métodos mais complexos. O conceito em que todos os pontos ao infinito incidem sobre uma mesma reta é uma consequência desse princípio, e possibilita a criação de um novo sistema de coordenadas para o estudo das propriedades projetivas das figuras.

2 - Teoria analítica da projeção central.

O problema de transformar uma figura plana por meio de projeção central envolve estabelecer as relações que conectam os elementos geométricos que definem a posição de um ponto em uma figura no plano com sua posição perspectiva no plano de projeção. Essa é uma tarefa importante na geometria projetiva, e é interessante notar como a abordagem analítica pode ajudar a compreender melhor a relação entre esses elementos.

É possível obter a equação de coordenadas de uma curva plana ou de uma de suas projeções centrais em relação a um eixo arbitrariamente escolhido, substituindo as coordenadas x e y por expressões que envolvem a relação entre duas funções lineares das novas coordenadas x' e y' . Consiste em utilizar as relações entre duas funções lineares das novas coordenadas x' e y' . Essas relações permitem substituir as coordenadas originais x e y e, dessa forma, obter uma nova equação que descreve a curva.

A significação geométrica pode-se fazer da seguinte maneira:

Seja RS o plano de uma figura, $R'S'$ o plano de projeção, O o centro de projeção, M e M' os pontos onde uma transversal incidente em O transpassa os planos citados. A questão é de apresentar as coordenadas x e y do ponto M , colocada em relação a dois eixos Ix e Iy traçados no plano RS , em função das coordenadas x' e y' do ponto M' colocado em relação aos eixos $C'x'$ e $C'y'$ traçados no plano $R'S'$.

Para definir as situações dos diversos elementos da questão, consideremos que traçamos pelo centro de projeção O a reta OCC' que perpassa o plano RS em C e o plano $R'S'$ em C' origem das coordenadas $C'x'$, $C'y'$, as retas OA e OB respectivamente paralelas aos eixos $C'x'$ e $C'y'$ e sejam A e B os traços destas retas no plano RS , da mesma forma, sejam os pontos A' e B' os traços no mesmo plano das retas $C'x'$ e $C'y'$.

Assim, como as retas AB e $A'B'$ serão paralelas, teremos a seguinte relação de igualdade:

$$\frac{OC'}{OC} = \frac{AA'}{AC} = \frac{BB'}{BC}$$

Podemos observar que a reta $A'B'$ é o lugar dos pontos da figura que coincide com sua perspectiva, e que a reta AB é o lugar dos pontos cuja perspectiva está no infinito. Conhecido a posição dos pontos A , B e C para se determinar o centro de projeção, o plano de projeção e os eixos coordenados $C'x'$, $C'y'$. Daremos a seguinte denominação aos seguimentos:

$$1^{\circ} - \frac{OC'}{OC} = \frac{AA'}{AC} = \frac{BB'}{BC} = \lambda$$

Vejamos,

Seja M um ponto qualquer do plano. Tracemos BM e AM e teremos P e Q os pontos na intersecção com AC e BC . Tracemos OP e OQ e teremos P' e Q' os pontos de intersecção com CA' e CB' . $C'P'$ e $C'Q'$ serão as coordenadas x' e y' do ponto M' : de fato, as duas retas $M'P'$, $C'Q'$ são paralelas. As retas $M'Q'$ e $C'P'$ também são paralelas. Por consequência $C'P'M'Q'$ é o paralelogramo das coordenadas do ponto M' . A figura abaixo nos dá as relações seguintes:

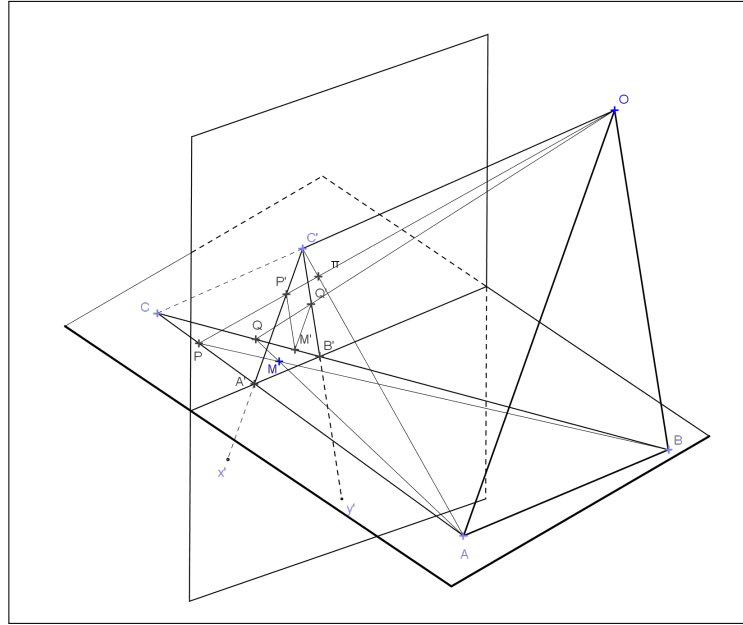


Figura 5.2 – Prerspectiva

$$\frac{C'P'}{AO} = \frac{x'}{p} = \frac{C'\Pi}{A\Pi}$$

Por outro lado o triângulo $AC'C$ intersecta a transversal $O\Pi P$, teremos

$$\frac{C'\Pi}{A\Pi} x \frac{AP}{CP} x \frac{CO}{C'O} = 1$$

ou ainda,

$$\frac{C'\Pi}{A\Pi} = \frac{CP}{AP} x \frac{C'O}{CO} = \lambda \cdot \frac{CP}{AP}$$

por cosequência

$$x' = \lambda p x \frac{CP}{AP}$$

$$y' = \lambda q x \frac{CQ}{BQ}$$

Para completar a solução do problema proposto, tudo o que resta é substituir essas expressões, as relações

$$\frac{CP}{AP}$$

e

$$\frac{CQ}{BQ}$$

por seus valores em função das coordenadas do ponto M depois resolvê-lo com respeito a x e y as equações assim obtidas. Sejam α e α' ,

β e β' , γ e γ' as abscissas e ordenadas dos pontos A , B e C . O ponto P incidente em AC dividindo-a na razão $\frac{CP}{AP}$, possui abscissa e ordenada:

$$\frac{\gamma + \alpha \cdot \frac{CP}{AP}}{1 + \frac{CP}{AP}}$$

$$\frac{\gamma' + \alpha' \cdot \frac{CP}{AP}}{1 + \frac{CP}{AP}}$$

Por outro lado o ponto P é incidente, também, na reta BM e temos a relação:

$$\left(1 + \frac{CP}{AP}\right)(\beta'x - \beta y) + \left(\gamma + \alpha \frac{CP}{AP}\right) + \left(\gamma' + \alpha' \frac{CP}{AP}\right)(\beta - x) = 0$$

de onde tiramos,

$$\frac{CP}{AP} = \frac{(\gamma' - \alpha')x + (\alpha - \beta)y + \gamma x' - \alpha \gamma'}{(\alpha' - \beta')x + (\beta - \alpha)y + \alpha \beta' - \beta x'} = \frac{x'}{\lambda p}$$

Da mesma forma

$$\frac{CQ}{BQ} = \frac{y'}{\lambda q}$$

Por simples manipulação chega-se as seguintes coordenadas:

$$x = \frac{\alpha \frac{x'}{\lambda p} + \beta \frac{y'}{\lambda q} + \gamma}{\frac{x'}{\lambda p} + \frac{y'}{\lambda q} + 1}$$

,

$$y = \frac{\alpha' \frac{x'}{\lambda p} + \beta' \frac{y'}{\lambda q} + \gamma'}{\frac{x'}{\lambda p} + \frac{y'}{\lambda q} + 1}$$

3 - Aplicação analítica das fórmulas de projeção central

As informações apresentadas acima possibilitam inferir algumas proposições sobre perspectivas, cujas implicações analíticas podem ser difíceis de alcançar de forma direta. Moutard utiliza a solução geométrica de um problema como exemplo.:

Projetar o sistema de duas seções cônicas situadas em um mesmo plano segundo o sistema de dois círculos.

Designando por G e H duas cônicas dadas, por G' e H' suas projeções, que devem ser reduzidas à circunferências de círculos. Supõe que a cônica G seja uma circunferência de círculo de raio 1 e centrada no eixo de coordenadas.

$$(G): x^2 + y^2 - 1 = 0$$

$$(H): Ax^2 + A'y^2 + A'' + 2By + 2B'x + 2B''xy = 0$$

$$(G'): x'^2 + y'^2 - 1 = 0$$

$$(H'): K(x'^2 + y'^2) + 2Iy' + J = 0$$

O problema, considerado analiticamente, consiste em determinar os coeficientes da substituição.

$$x = \frac{ax' + by' + c}{a''x' + b''y' + c''}$$

$$y = \frac{ax' + by' + c}{a''x' + b''y' + c''}$$

e os três coeficientes K , I e J .

Portanto, é viável encontrar a solução utilizando a Geometria racional quando há informações sobre algumas distâncias específicas. Contudo, Moutard destaca que a resolução do problema é facilitada quando se utilizam transformações analíticas combinadas com conceitos geométricos.

Moutard faz considerações geométricas e considerações analíticas, e o uso da ideia de polo e polar para chegar a uma solução que envolve oito possibilidades. Apesar de ter utilizado as considerações geométricas, as soluções obtidas são inteiramente algébricas.

em seguida, Moutard irá se aprofundar nas soluções reais do problema em questão. Ele argumenta que toda solução real que se aplica ao problema deve ser uma solução geométrica do seguinte problema: projetar um sistema de duas cônicas, denominadas G e H , em um sistema de dois círculos. Essa afirmação sugere que a solução do problema original pode ser obtida por meio de uma projeção geométrica apropriada.

Em seguida analisa a distinção de três casos gerais:

1º Os quatro sistemas são reais e não há uma secante ideal comum a ambas as curvas G e H , tornando impossível encontrar soluções reais para o problema.

2º As soluções do problema em questão são divididas em quatro sistemas, sendo dois sistemas com soluções reais e dois com soluções imaginárias. Ao analisar as duas curvas G e H , é possível identificar a existência de duas secantes comuns entre elas, sendo apenas uma dessas secantes ideal.

3º As quatro soluções possíveis são imaginárias, o que significa que não existem soluções reais para o problema. Além disso, as duas curvas possuem duas secantes ideais em comum. Isso implica que não há uma secante que intersecte ambas as curvas no plano real, apenas no plano projetivo.

Moutard, ao concluir suas considerações, fornece de forma resumida o método para reduzir uma integral por meio da abordagem analítica utilizada anteriormente. Essa abordagem consiste em aplicar transformações analíticas e considerações geométricas para resolver problemas de projeção central e encontrar soluções reais ou imaginárias. A redução de uma integral

pode ser realizada por meio da aplicação dessas mesmas técnicas, o que permite simplificar a integral e encontrar uma solução mais facilmente. Em outras palavras, o método de Moutard não se limita apenas à resolução de problemas de projeção central.

4 – Sobre coordenadas simétricas

As equações que são usadas para encontrar a equação geral, em coordenadas de Descartes, das projeções centrais de uma determinada curva podem ser interpretadas diretamente, sem depender das considerações que foram inicialmente estabelecidas. Isso nos leva a considerar como expressar em linguagem algébrica a definição de um modo de transformação que a analogia permite estender imediatamente às figuras tridimensionais. Suponha que x, y, z são as coordenadas de um ponto no espaço, é possível determinar um novo ponto (x', y', z') ligado ao primeiro por meio de uma construção que pode ser demonstrada geometricamente de várias formas, seguindo as relações

$$x = \frac{ax' + by' + cz' + d}{a'''x' + b'''y' + c'''z + d'''}$$

$$y = \frac{a'x' + b'y' + c'z' + d'}{a'''x' + b'''y' + c'''z + d'''}$$

$$z = \frac{a''x' + b''y' + c''z' + d''}{a'''x' + b'''y' + c'''z + d'''}$$

Considere (x', y', z') como a transformada do ponto (x, y, z) . Moutard sustenta que a aplicação da homologia de Poncelet resolve o problema dessa transformação pois é uma transformação geométrica utilizando o princípio da projeção. Essa sugestão de transformação da figura é por via de uma projeção central. E Moutard dá um exemplo de substituição das coordenadas de (x, y) por $(\frac{x}{z}, \frac{y}{z})$ e (x', y') por $(\frac{x'}{z'}, \frac{y'}{z'})$ e apresentando como funções homogêneas:

$$x = ax' + by' + cz', y = a'x' + b'y' + c'z', a''x' + b''y' + c''$$

Moutard observou que ao definir três eixos de referência, três parâmetros de referência e o produto das distâncias dos pontos do plano aos eixos pelos parâmetros, as expressões algébricas que correspondem às propriedades projetivas apresentam maior simetria.

Moutard chama a atenção de que há outra forma lógica de realizar tais transformações:

Ao lado da origem lógica, atribuída anteriormente ao método das coordenadas simétricas, pode-se apontar outra em certas notações abreviadas que Bobillier foi o primeiro a empregar de maneira sistemática.³(PONCELET, 1862, p.528)

Moutard enfatiza que existem maneiras lógicas de realizar transformações projetivas por meio das coordenadas simétricas e das notações abreviadas introduzidas por Bobillier. É

³ A coté de l'origine logique, attribuée dans ce qui précède à la méthode des coordonnées symétriques, on peut en signaler une autre dans certaines notations abrégées que Bobillier a le premier employées d'une manière systématique.

interessante notar como diferentes abordagens e notações podem ter um impacto significativo na clareza e eficiência das operações realizadas na geometria projetiva. A adoção de notações abreviadas pode simplificar a representação de relações projetivas, enquanto as coordenadas simétricas permitem uma representação mais simétrica das propriedades projetivas.

Vamos examinar o emprego das coordenadas homogêneas por Moutard para não só definir as relações de incidência no espaço das coordenadas homogêneas no plano projetivo, mas também para obter uma fórmula geral para transformações projetivas. Isso nos permitirá comparar as abordagens utilizadas por Moutard na busca de soluções com as de Poncelet, quase 50 anos antes.

Com a publicação das obras de Poncelet, tornou-se possível ter uma compreensão mais precisa do desenvolvimento de suas ideias, uma vez que, na França dos anos 60, a geometria projetiva era estudada em coordenadas homogêneas. Dessa forma, o trabalho de Moutard, com suas notas sobre a obra de Poncelet, teve grande relevância ao estabelecer uma conexão próxima entre a concepção sintética de Poncelet e os novos avanços na geometria projetiva, que se desenvolveram a partir de figuras como Plücker, Möbius, Klein e outros.

5.1.2 Amédée Mannheim (1831-1906)



Figura 5.3 – Amédée Mannheim.

Jean-Victor Poncelet, um dos mais renomados matemáticos franceses do século XIX, em seus anos finais, dedicou-se a escrever uma obra completa de sua produção matemática. Para isso, contou com a ajuda de dois ex-alunos da *École Polytechnique*, MM Moutard e Mannheim. No caso de Mannheim, sua contribuição se concentrou em estudos sobre a geometria projetiva e suas aplicações na teoria da reciprocidade polar.

Mannheim publicou dois trabalhos importantes: Teoria dos polares recíprocos (Metz, 1851); e Transformação de propriedades métricas das figuras com a ajuda da teoria dos polares recíprocos (MANNHEIM, 1857). Em 1851, Mannheim abordou a teoria da reciprocidade polar e propôs as primeiras ideias sobre as transformações das relações métricas (CHAVES; GRIMBERG, 2018a). Em 1857, apresentou um novo trabalho sobre a transformação de propriedades métricas das figuras, utilizando a teoria da reciprocidade polar.

Mannheim propôs a seguinte abordagem para definir a métrica utilizando a reciprocidade polar: dados as polares a e b de dois pontos A e B , respectivamente, traça-se a reta OM que passa pelo centro O do círculo diretor e pelo ponto de intersecção M das polares a e b . Em seguida, desenha-se uma reta por A e outra paralela a ela por B . Ao traçarmos uma perpendicular a essas duas retas passando por O , ela irá intersectar os polares de A e B nos pontos C e D , respectivamente, que são os polos das duas retas que construímos passando por A e B . As retas OC e OD determinarão os inversos de C e D , respectivamente, $C\perp$ e $D\perp$. Com isso, podemos obter a métrica da figura projetiva.

$$AB = \left(\frac{1}{OC} - \frac{1}{OD} \right) \cdot \frac{1}{\sin \hat{O}}$$

Mannheim, durante sua formação na *École Polytechnique*, teve como diretor o renomado matemático Jean-Victor Poncelet, que apresentou a teoria da Reciprocidade Polar em seu trabalho intitulado *Mémoire sur la théorie générale des polaires réciproques* de 1824. É interessante notar que Mannheim, juntamente com M. Moutard, foi um dos principais colaboradores na elaboração da obra completa de Poncelet, publicada em 1862, 1864, 1865 e 1866. Não nos parece mera coincidência que Mannheim tenha sido participado desse projeto, considerando sua conexão com Poncelet e seu conhecimento em relação à Reciprocidade Polar.

Na obra de 1862 intitulada *Applications d'Analyse et Géométrie*, Mannheim escreveu uma nota que trata dos polígonos inscritos e circunscritos às curvas, assim como observações sobre o traçado das tangentes. Nessa nota, Mannheim aponta que um polígono pode ter sua forma continuamente alterada, podendo assumir condições bastante diversas. Para definir geometricamente a lei de deformação de um polígono, Mannheim supõe que se conheça as diferentes curvas que tocam seus vértices, sendo todas elas contínuas e interconectadas de tal modo que, conhecendo-se uma delas, todas as outras podem ser determinadas. Ele também admite um movimento infinitesimal dos lados do polígono e, caso um ponto seja desconhecido, basta uma construção linear para determiná-lo.

5.1.2.1 Transformações Geométricas: Polo e Polar

Mannheim publica em 1851 seu primeiro artigo: *note sur la théorie des polaires reciproques*, onde podemos observar as primeiras ideias das transformações das relações métricas. Nossa pesquisa sobre ele se faz ainda mais interessante, pois, apesar de se tratar de um colaborador nas obras de Poncelet, suas ideias sobre transformações métricas apresentam uma abordagem discordante dos princípios de Poncelet. Além disso, dois aspectos nos interessam: quais abordagens de Mannheim se assemelham a teoria da reciprocidade polar de Poncelet e em que medida se distancia das ideias de Poncelet, por abordar as relações métricas.

Inicialmente vamos considerar uma circunferência de círculo α com centro O e um ponto P exterior e coplanar à α . Por P tracemos uma reta t secante à α nos pontos C e D . Nestes pontos tracemos as tangentes, que se intersectarão no ponto T . O lugar geométrico dos pontos T 's, quando a secante t gira sobre o ponto P , é uma reta p perpendicular à reta OP . Desta forma, o ponto P é denominado de **polo** e a reta p é sua **polar**.

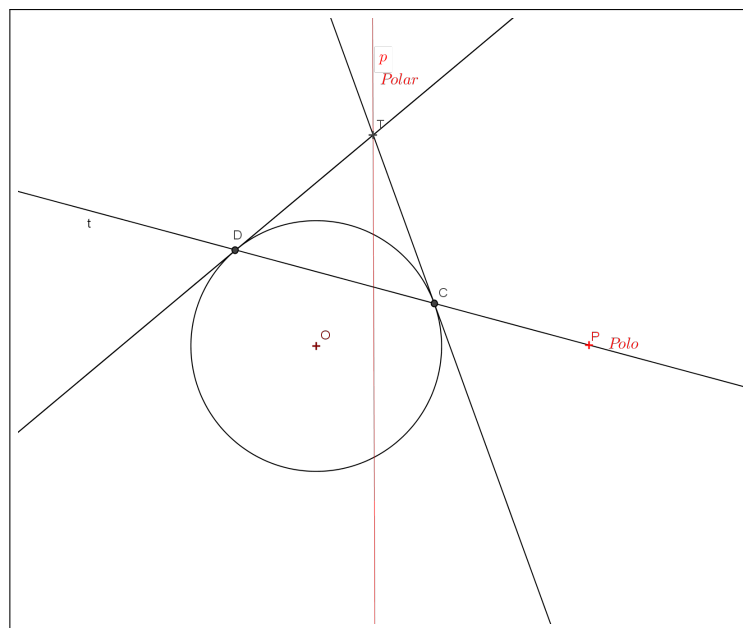
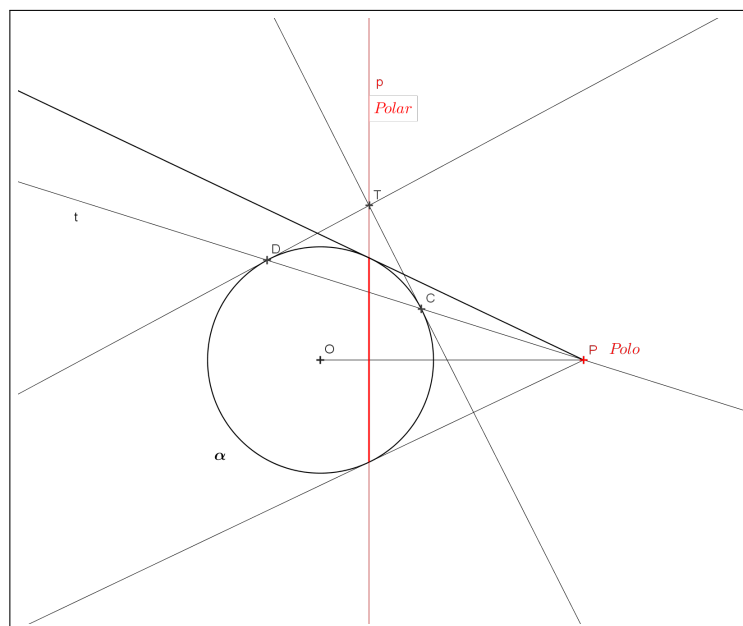


Figura 5.4 – Reciprocidade Polar

Quando o ponto P é exterior à circunferência de círculo, sua polar se confunde com a corda de contato das tangentes traçadas por P , conforme a figura 5.5.

Figura 5.5 – corda de contato $\equiv$ polar

Teorema 5.1.1 *Os polos de todas as retas que passam por um ponto incidem na polar deste ponto. (MANNHEIM, 1857, introduction)*

A recíproca deste teorema é verdadeira, e anuncia-se:

Teorema 5.1.2 *As polares de todos os pontos de uma reta passam pelo polo desta reta. (MANNHEIM, 1857, introduction)*

Estes dois teoremas acima enunciados são a base da *teoria dos polos e polares*.

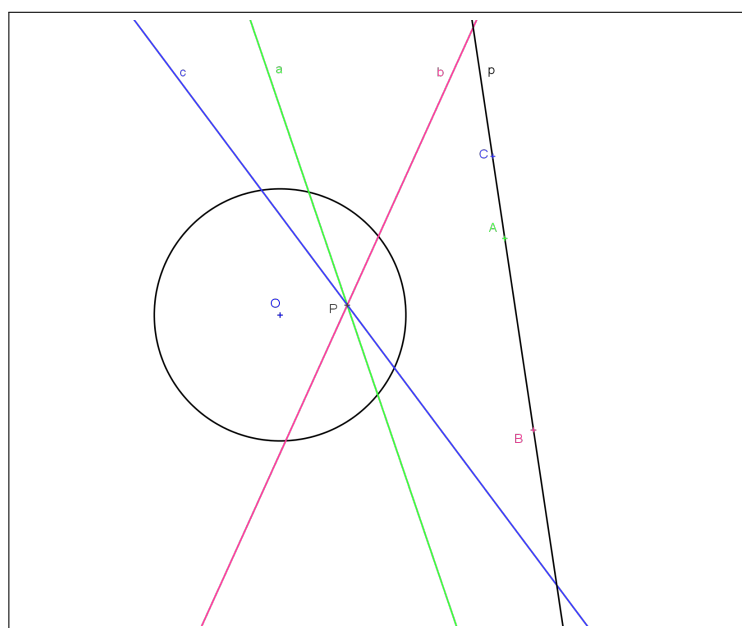


Figura 5.6 – Transformação geométrica

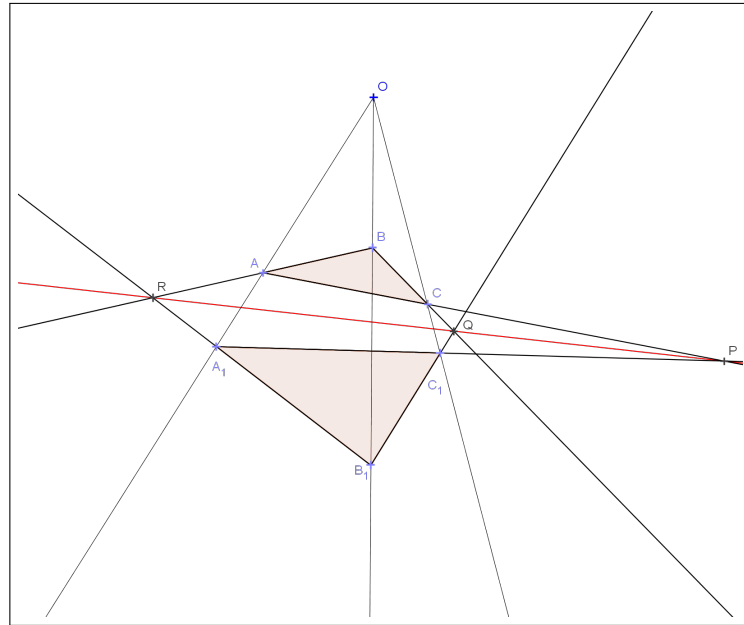


Figura 5.8 – Homologia

Nas propriedades métricas consideramos as grandezas. As propriedades relativas aos ângulos são denominadas *propriedades angulares*. Podemos determinar, facilmente, a relação métrica de área de duas figuras, mas podemos determinar as propriedades angulares pela simples transformação da teoria das polares recíprocas em virtude do seguinte teorema:

O ângulo de duas retas r e t é igual ao ângulo das retas que passam pelo centro do círculo diretor e os polos R e T das retas r e t .

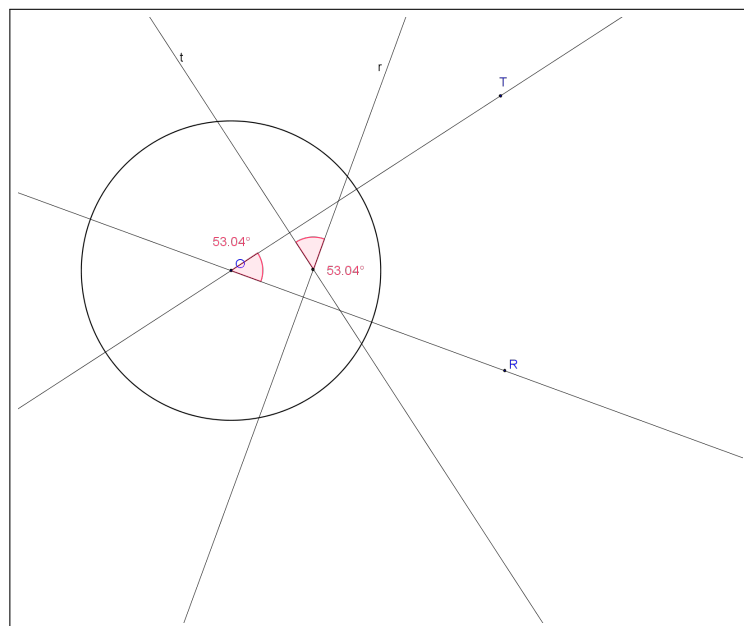


Figura 5.9 – ângulos entre as polares e o polo e o centro

Assim, consideremos a afirmação de que em um triângulo a soma dos ângulos internos

é equivalente a dois retos. Logo, no triângulo edf retângulo, esta propriedade se exprime pela relação métrica dos ângulos

$$e + d + f = 180^0$$

Desta relação retiramos a relação

$$\text{sen}(e) = \text{sen}(d + f)$$

Desenvolvendo tal expressão teremos,

$$\text{sen}(e) = \text{sen}(d)\cos(f) + \text{sen}(f)\cos(d)$$

Elevando ao quadrado,

$$\text{sen}^2(e) = \text{sen}^2(d)\cos^2(f) + \text{sen}^2(f)\cos^2(d) + 2\text{sen}(d)\cos(f)\text{sen}(f)\cos(d)$$

Substituindo $\cos^2(d)$ por $1 - \text{sen}^2(d)$ e $\cos^2(f)$ por $1 - \text{sen}^2(f)$, teremos

$$\begin{aligned} \text{sen}^2(e) = \\ \text{sen}^2(d) - \text{sen}^2(d)\text{sen}^2(f) + \text{sen}^2(f) - \text{sen}^2(f)\text{sen}^2(d) + 2\text{sen}(d)\cos(f)\text{sen}(f)\cos(d) \end{aligned}$$

$$\text{sen}^2(e) = \text{sen}^2(d) + \text{sen}^2(f) + 2\text{sen}(d)\text{sen}(f)[\cos(d)\cos(f) - \text{sen}(d)\text{sen}(f)]$$

Mas,

$$\cos(d)\cos(f) - \text{sen}(d)\text{sen}(f) = \cos(d + f) = -\cos(e)$$

Teremos então,

$$\text{sen}^2(e) = \text{sen}^2(d) + \text{sen}^2(f) - 2\text{sen}(d)\text{sen}(f)\cos(e)$$

Assim, transformamos a relação métrica de ângulos em relação trigonométrica. Podendo escrever,

$$1 = \frac{\text{sen}^2(d)}{\text{sen}^2(e)} + \frac{\text{sen}^2(f)}{\text{sen}^2(e)} - 2 \cdot \frac{\text{sen}(d)}{\text{sen}(e)} \cdot \frac{\text{sen}(f)}{\text{sen}(e)} \cdot \cos(e)$$

De onde,

$$1 = \frac{ef^2}{df^2} + \frac{ed^2}{df^2} - 2 \cdot \frac{ef}{df} \cdot \frac{ed}{df} \cdot \cos(e)$$

E podemos escrever,

$$df^2 = (ef)^2 + (ed)^2 - 2(ef)(ed)\cos(e)$$

Desta forma, transformamos as relações métricas de ângulos em relações de distância. Retomemos a relação trigonométrica

$$\text{sen}(e) = \text{sen}(d)\cos(f) + \text{sen}(f)\cos(d)$$

Baixemos do vértice e a perpendicular eh sobre fd ; esta relação pode ser escrita

$$\text{sen}(e) = \frac{eh}{ed}.\text{sen}(90 - f) + \frac{eh}{ef}\text{sen}(90 - d)$$

ou

$$(ed)(ef)\text{sen}(e) = (eh)(ef).\text{sen}(90 - f) + (eh)(ed)\text{sen}(90 - d)$$

De onde temos a identidade

$$\text{área de } def = \text{área } deh + \text{área } hef$$

Obtemos uma relação métrica de área.

Podemos, por analogia, realizar as transformações de áreas e volumes. No momento, pensamos que o exemplo acima é suficiente para fazer compreender os diferentes tipos de relações métricas e suas transformações umas nas outras.

5.1.2.3 Transformações das propriedades métricas das figuras com a ajuda da teoria da reciprocidade polar

Agora vamos nos ocupar da transformação das propriedades das figuras usando a teoria da reciprocidade polar.

Isso introduz um novo tópico na discussão, que é a transformação das propriedades das figuras. Com a ajuda da teoria da reciprocidade polar, podemos transformar figuras de uma forma que preserve algumas de suas propriedades métricas importantes como, por exemplo, a relação de ângulos. A reciprocidade polar é uma técnica da geometria projetiva que permite que as figuras sejam mapeadas umas nas outras de uma forma sistemática e controlada.

As propriedades descritivas das figuras planas são muito simplesmente transformadas em relação a uma circunferência de círculo, ou um círculo diretor: não é sequer necessário representá-las por uma figura; obtemos o resultado da transformação alterando na declaração as palavras pontos e retas por retas e pontos. Se operarmos assim na propriedade descritiva que estabelecemos por exemplo, encontramos o recíproco dessa propriedade. Abaixo um exemplo de de uma declaração colocada uma ao lado da outra ⁴ para facilitar a comparação:

⁴ Esta forma dá uma ideia de dualidade. Foi realizada por Geogonne no *Annales des Mathématiques Pures et Appliquées*

Quando dois triângulos possuem seus vértices dois a dois sobre três retas concorrentes em um ponto, seus lados homólogos concorrem em três pontos colineares.

Quando dois triângulos são tais que seus lados intersectam-se dois a dois em três pontos colineares, seus vértices incidem sobre três retas concorrentes em um mesmo ponto.

As propriedades angulares são transformadas simplesmente pela teoria das polares recíprocas em virtude do seguinte teorema:

Teorema 5.1.3 *Os ângulos de duas retas a, b é igual ao ângulo das retas que incidem no centro do círculo diretor aos pólos A e B destas retas.*

Vamos tomar o teorema seguinte para melhor explicitar a seguinte afirmação: Em um triângulo as três alturas intersectam-se em um mesmo ponto.

Sejam A, B, C os vértices de um triângulo dado h, h', h'' , as perpendiculares aos lados e incidentes aos vértices. O triângulo dado tem por polar recíproco o triângulo D, E, F . Procuramos determinar o ponto H , polo de h . Este ponto deve se encontrar sobre a , polar de A , pois h passa por A . Por outro lado, a reta OH deve ser perpendicular à OA em virtude do teorema anunciado acima, pois h é perpendicular ao vértice A , o polo H é então a intersecção das retas OH e a . Da mesma forma determinamos H', H'' , polos de h', h'' . Como os pontos H, H', H'' são colineares as suas polares h, h', h'' concorrerem em um mesmo ponto, o Ortocentro.

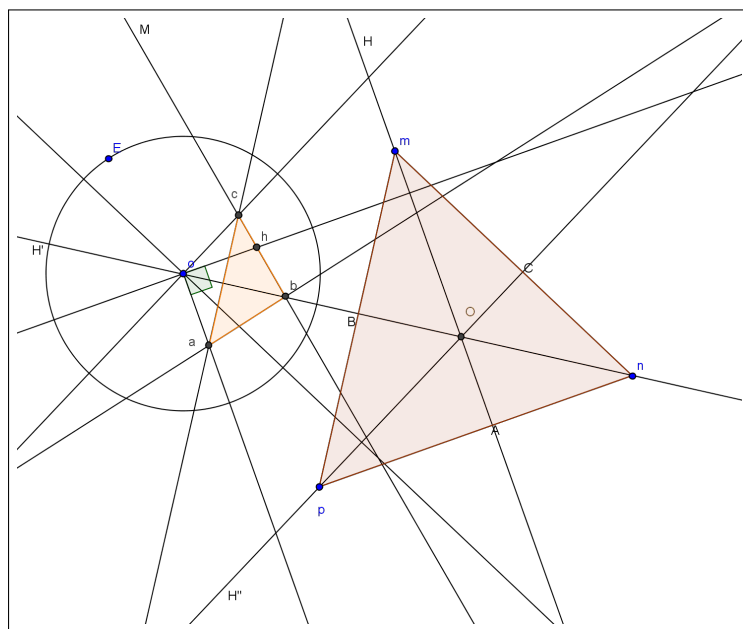


Figura 5.10 – Três retas concorrentes, três pontos colineares

Em sua memória sobre Teoria geral das polares recíprocas, Poncelet mostrou como se poderia transformar as propriedades métricas que qualifica como projetivas. As propriedades angulares se transformam, como vimos acima, adotando a circunferência de círculo como curva

diretriz. As relações métricas se transformam também conservando esta curva em virtude do seguinte teorema:

Teorema 5.1.4 *O raio da circunferência de círculo diretriz é média proporcional entre as distâncias ao polo e a polar.*

Assim, considere-se um ponto A qualquer coplanar a uma circunferência de círculo, a sua polar em relação à esta curva de centro O e raio r é intersectada pela reta AO no ponto A_1 . Devemos ter,

$$OA.OA_1 = r^2$$

Se o raio do círculo diretor é unitário, então teremos,

$$OA.OA_1 = 1 \rightarrow OA = \frac{1}{OA_1}$$

Esta relação dá imediatamente a transformação de um segmento de uma reta que passa pelo centro da curva diretriz. De fato, sejam A e B dois pontos da reta AO e a, b polares destes pontos em relação à curva diretriz de centro O , e A_1, B_1 os pontos onde estas polares intersectam a reta AO . Teremos,

$$OA = \frac{1}{OA_1}, OB = \frac{1}{OB_1}$$

De onde,

$$OB - OA \text{ ou } AB = \frac{1}{OB_1} - \frac{1}{OA_1}$$

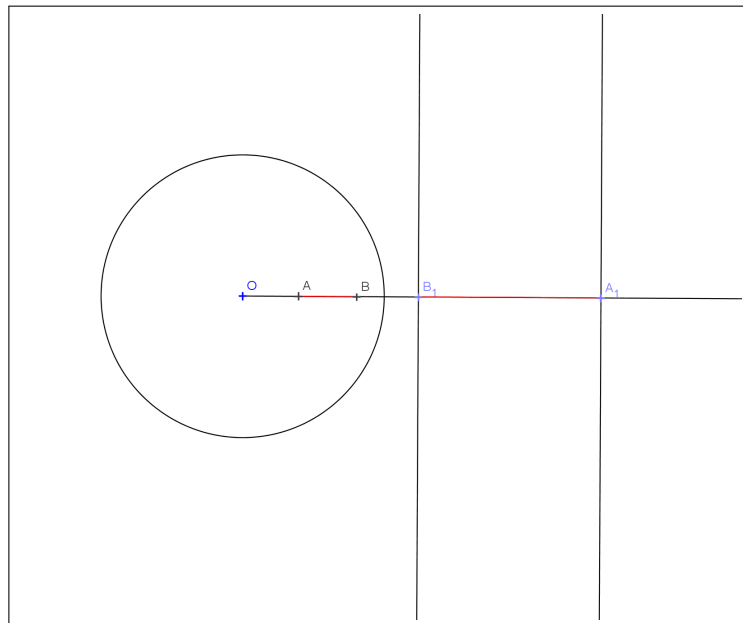


Figura 5.11 – Métrica de A_1B_1

sobre a importância atribuída tanto a esse conhecimento quanto aos gestos que o acompanham e aos valores que ele representa.⁵(EHRHARDT et al., 2022, p.10)

As relevantes contribuições de Poncelet na geometria e mecânica lhe conferiram grande destaque, sendo considerado uma referência em Mecânica aplicada e frequentemente citado em trabalhos desta natureza, mas menos citado em Geometria. Isso levanta questões sobre a patrimonialização de suas obras e descobertas matemáticas.

Uma das principais preocupações da preservação do patrimônio matemático é a patrimonialização, que busca garantir a conservação e transmissão de conhecimentos e práticas matemáticas para as próximas gerações. Essa preservação não se limita somente aos resultados matemáticos, mas também inclui os métodos, técnicas e práticas utilizados pelos matemáticos ao longo do tempo.

A patrimonialização do patrimônio matemático é importante porque, ao longo dos séculos, a matemática acumulou um grande volume de conhecimento e técnicas que são valiosos para a humanidade. Esses conhecimentos e técnicas podem ser utilizados em diversas áreas. Além disso, a matemática é um patrimônio cultural da humanidade, e sua preservação é importante para a compreensão e apreciação da história e da cultura de diferentes povos e épocas.

Uma das principais contribuições de Poncelet na geometria projetiva foi a criação do conceito de polaridade. Essa ideia revolucionou a geometria projetiva, permitindo que propriedades projetivas mais complexas fossem deduzidas de forma mais simples e elegante.

A patrimonialização do conhecimento matemático é baseada em conceitos fundamentais, como materialidade, imaterialidade, textualidade e prática. A materialidade se refere a objetos físicos, como instrumentos, coleções e locais, que ajudam a preservar a história da matemática (EHRHARDT et al., 2022, p.9). A imaterialidade inclui ideias, conceitos e teorias que representam o conhecimento matemático em si e permitem sua transmissão de uma geração para outra. A textualidade engloba a documentação escrita do patrimônio matemático, como manuscritos, livros e artigos científicos (EHRHARDT et al., 2022, p.10). Já a prática abrange as técnicas utilizadas pelos matemáticos em sua pesquisa, além dos métodos informais de comunicação entre eles. Esses conceitos são essenciais para a preservação da história e do conhecimento matemático ao longo do tempo.

Um exemplo desse processo é a obra de Chasles intitulada *Rapport*, publicada em 1870, na qual ele tinha como objetivo documentar e preservar a história da matemática. Em seu trabalho, Chasles coletou informações sobre a vida e as contribuições de importantes matemáticos, ajudando a estabelecer a disciplina da história da matemática. Analisar a forma como Poncelet e seus conceitos e métodos são apresentados nessa obra pode nos ajudar a entender melhor o processo de patrimonialização desse matemático. Em seu *Rapport*, Chasles apresenta Poncelet

⁵ La patrimonialisation renvoie donc à une forme d'actualisation permanente des savoirs, associée à la prise de conscience par les individus et les communautés de l'importance attachée tant à ces savoirs qu'aux gestes qui les accompagnent et aux valeurs qu'ils revêtent.

como um importante contribuinte para a geometria projetiva, que desenvolveu o conceito de polaridade, permitindo a expressão de propriedades projetivas mais complexas em termos de polos e polares.

Joseph Bertrand escreveu uma biografia de Poncelet, que apresenta uma visão detalhada da vida do matemático, desde sua formação acadêmica até suas contribuições para a matemática e suas relações pessoais.

Uma maneira adotada para patrimonializar Poncelet é através do Prêmio Poncelet, oferecido a cada dois anos pela Académie des Sciences de Paris a jovens matemáticos que apresentam contribuições notáveis na geometria ou na mecânica. Esse prêmio é uma forma de honrar a contribuição de Poncelet à matemática e incentivar o progresso contínuo da disciplina.

Em resumo, a patrimonialização na matemática consiste em preservar e valorizar o patrimônio cultural, histórico e artístico. Isso inclui a documentação da história e contribuições de matemáticos importantes, como Poncelet, através de biografias, prêmios e estudos aprofundados de suas obras. Neste capítulo, discutiremos como esse processo ocorre, com base em fontes como o trabalho de Chasles "Rapport" de 1870 (CHASLES, 1870), a biografia de Poncelet escrita por Joseph Bertrand (BERTRAND, 1875), trabalhos que apresentam os desenvolvimentos de Poncelet no "horizonte" de métodos distantes dos de Poncelet, e prêmios como o Prêmio Poncelet, que buscam manter viva a memória do matemático.

5.2.2 Geometria projetiva na educação matemática: um estudo sobre os livros de geometria analítica após 1870

Após 1865 surgiram alguns livros com o conteúdo de Geometria Pura, mas com abordagem analítica. Vamos analisar três obras que escolhemos por conter os assuntos da Geometria Pura: coordenadas homogêneas, trilineares, tangenciais, a noção de invariantes, etc.

Picquet

Louis Didier Henry Picquet (1845-1925) foi capitão de Engenharia, politécnico da promoção de 1864, autor de dezesseis artigos publicados nos *Nouvelles annales de mathématiques* e no *Bulletin de la société mathématique de France*; tutor na *École Polytechnique*, ele foi examinador de admissão em 1887 e também ocupou a presidência da Sociedade de Matemática da França. Ele publicou um Tratado sobre Geometria Analítica em 1882, e especificou o público ao qual foi dirigido:

O Tratado de Geometria Analítica que publicamos hoje é feito para os alunos e para todos os interessados nesta ciência. Acreditamos que cada um, forte ou fraco, saberá tirar dele o que precisa, de acordo com seus objetivos. (PICQUET, 1882, p.I) ⁶

⁶ Le Traité de Géométrie analytique que nous publions aujourd'hui est fait pour les élèves et pour tous ceux qui

A principal referência continua sendo os alunos de matemática especial, mas o autor vislumbra um público mais amplo e, em particular, concebe que cada um tem um uso particular de sua obra.

Picquet argumenta em favor do uso combinado de métodos geométricos e analíticos, argumentando que na geometria analítica, a álgebra e a geometria se complementam mutuamente. É somente pelo uso cuidadoso de ambas que se pode resolver as questões mais complexas, para as quais cada uma delas, por si só, seria insuficiente:

Ele tem sua própria característica, resultante do fato de termos buscado principalmente popularizar o uso desses métodos, tão conhecidos e apreciados hoje em dia pelos estudiosos e professores, mas que em geral são desconhecidos pelos alunos: estamos falando da dualidade e da homografia. Ao dedicarmos algumas lições desde o início para apresentar claramente esses dois poderosos métodos de transformação, que amplo horizonte não estamos abrindo para aqueles que aprendem e quantos esforços penosos e estéreis são evitados durante o desenvolvimento posterior do pensamento geométrico?(PICQUET, 1882, p.I) ⁷

No seu segundo livro, ele começa abordando as coordenadas homogêneas, que possibilitam demonstrar imediatamente as propriedades das figuras num contexto geral, ou seja, projetivo. Ele apresenta o teorema de Bézout sobre o número de interseções de duas curvas algébricas e introduz as noções de invariante e covariante, as quais permitem formular propriedades geométricas de curvas de forma completamente independente das coordenadas:

Entende-se que certas propriedades geométricas de uma curva são completamente independentes da escolha das coordenadas, do triângulo de referência que as define (PICQUET, 1882, p.187)

Ele entende que uma equação representa uma classe de curvas consideradas em diferentes referenciais. Outros capítulos do livro abordam os temas de eixos radicais, pólos e polares, bem como a transformação por raios vetoriais recíprocos. O terceiro livro dedica-se às propriedades particulares das cônicas, enquanto o quarto livro trata da construção de várias curvas de grau maior que dois.

As características da obra e os comentários do autor estabelecem que se trata de uma tentativa de apresentar a geometria analítica num quadro imediatamente geral, recorrendo às transformações da dualidade e da homografia, e à utilização de coordenadas homogêneas.

Embora sua obra apresente alguns temas que naturalmente remetem a Poncelet, como diâmetros conjugados, polo e polar, involução, figuras homotéticas, entre outros, não há em sua

s'intéressent à cette science. Nous pensons que chacun, fort ou faible, saura y puiser dans la mesure de ses besoins, et eu égard au but qu'il poursuit.

⁷ Il a son caractère propre, provenant de ce que nous avons surtout cherché à vulgariser l'emploi de ces méthodes, si connues et si appréciées aujourd'hui par le public savant et par le corps enseignant, mais que les élèves ignorent en général: nous avons nommé la dualité et l'homographie. En consacrant, dès le début, quelques leçons à leur présenter franchement ces deux puissantes méthodes de transformation, quel large horizon n'ouvre-t-on pas à ceux qui apprennent, et combien d'efforts pénibles et stériles sont évités lors du développement ultérieur de l'esprit géométrique?

obra nenhuma citação explícita a Poncelet.

Pruvost

Um segundo trabalho foi publicado em 1884, as *Leçons de géométrie analytique* por Émile Pruvost (1833-1913)

O autor é um ex-aluno da *École Normale* da classe de 1853, Inspetor Geral de Instrução Pública e ex-professor de matemática especial em várias escolas secundárias, incluindo Louis-le-Grand. Ele escreveu suas Lições para o uso da classe especial de matemática e candidatos à *École Normale Supérieure* e à *École Polytechnique*.

Embora Pruvost aborde em seu livro (PRUVOST, 1886) assuntos como homotetia, reciprocidade polar, polo e polares, entre outros, não há menção específica a Poncelet.

O autor adota uma abordagem do particular para o geral. Por exemplo, ele introduz os conceitos de polo e polar primeiramente em relação a duas retas, posteriormente em relação a um círculo e, mais adiante, em relação a uma cônica.

Nesta extensa obra de mais de setecentas páginas, são apresentadas várias noções de geometria avançada, juntamente com a teoria analítica de coordenadas trilineares e tangenciais. O livro segue uma ordem didática progressiva, ou seja, conceitos mais abstratos são gradualmente introduzidos ao longo da leitura, permitindo ao leitor escolher o nível em que deseja se aprofundar.

Longchamps

O autor da terceira obra é Gaston Gohierre de Longchamps (1842-1906). Ex-aluno da *École Normale* promoção de 1863, professor de matemática especial em várias escolas secundárias, incluindo o *Lycée Charlemagne* na época da publicação de seu *Cours de mathématiques spéciales* entre 1883 e 1885 (LONGCHAMPS, 1884), contendo três volumes que tratam respectivamente de álgebra e geometria analítica bi e tridimensional.

As lições dois e três do primeiro livro de geometria analítica bidimensional abordam curvas específicas, como a cissóide, a estrofóide e a concóide. Nas lições seguintes, a equação da reta é expressa em coordenadas homogêneas, o que indica que o conteúdo é destinado a leitores que já possuem conhecimentos em geometria analítica.

No segundo livro, o estudo sobre a teoria geral das curvas planas é iniciado utilizando coordenadas homogêneas desde o início. Esse livro é seguido por um terceiro livro dedicado especificamente ao estudo das seções cônicas.

Ao longo das sucessivas lições, há muitos capítulos que abordam tópicos como eixos radicais, coordenadas tangenciais, polares e o método de polares recíprocos, dilatação e similaridade, homologia e homografia.

Apesar de utilizar as doutrinas de Poncelet, é interessante observar que as três obras em questão não mencionam o nome do matemático francês. O conteúdo desses livros é bastante extenso, especialmente quando comparado aos programas dos concursos. No entanto, eles são explicitamente direcionados aos candidatos a concursos e grandes universidades, e seus autores são renomados professores que ocupam altos cargos na hierarquia acadêmica.

A falta de citação às doutrinas e teorias de Poncelet nas três obras de Geometria Analítica suscita reflexões sobre a patrimonialização do personagem e de sua obra. O fato de autores utilizarem determinadas doutrinas e teorias como um patrimônio comum de uma comunidade e de uma atividade sem sequer se dar conta de quem as escreveu, pode ser um indício de que a figura do autor se torna menos importante do que a sua obra.

Essa prática pode ser considerada como um indício de que a obra é maior que seu autor e, portanto, pouca importância é dada a autoria e ao reconhecimento aos autores que produziram o conhecimento que está sendo utilizado.

A patrimonialização do conhecimento pode ser benéfica para a transmissão do saber e sua manutenção, mas não deve ser realizada, no nosso ponto de vista, às custas da falta de valorização dos autores e do reconhecimento de sua contribuição. É preciso lembrar que o conhecimento é construído coletivamente, mas também é fruto do trabalho individual e da criatividade de cada autor.

5.2.3 Início da patrimonialização através dos livros

Jacques Lenthéric : A Perspectiva para compreender a Geometria Racional

Em 1865, um ensaio intitulado *Exposition élémentaire des diverses théories de la géométrie moderne* foi publicado, compilando três memórias previamente apresentadas à Academia de Ciências e Letras de Montpellier. Há uma reedição em 1874 pela casa de Gauthier-Villars. Lenthéric cita imediatamente Poncelet e Chasles como fontes para seu trabalho.

A estrutura do livro é organizada em torno das noções fundamentais da geometria racional, apresentando definições e propriedades iniciais. A principal ideia que guia a obra é a transformação de figuras geométricas.

Modificando, pelo mesmo processo geométrico, a posição de cada um dos pontos de uma figura, obtemos uma nova reta que é dito ser a transformada da primeira. Se a transformação for uma figura mais simples ou cujas propriedades já são conhecidas, é concebível que possa facilitar o estudo da figura primitiva; portanto, qualquer modo de transformação constitui um método geométrico que apresentará mais ou menos interesse nas aplicações. (LENTHÉRIC, 1874, p.5)

O método geométrico da transformação de figuras é abordado por Lenthéric seguindo a tradição de Poncelet. Em particular, Lenthéric destaca a perspectiva central como a única transformação considerada, e demonstra que esta é uma homologia, transformação introduzida por Poncelet em 1822 (PONCELET, 1822, p.159). Duas figuras são consideradas homológicas

quando seus vértices correspondentes estão em retas que se encontram em um ponto único, o centro da homologia, e seus lados correspondentes se intersectam na mesma reta, o eixo da homologia.

Lenthéric fornece um exemplo em que a cônica é reduzida a duas retas e, tomando seis pontos incidentes três a três nas retas, usando a propriedade da polar de um ponto em relação a uma cônica, ele prova que as diagonais do hexágono são concorrentes em um ponto.

Aqui é claro que está usando das propriedades projetivas das figuras.

Lenthéric também se utiliza da homologia como método de invenção de propriedades geométricas. Ele realiza uma transformação na figura de um triângulo, com suas três medianas concorrentes, e obtém a seguinte proposição:

Se no plano de um triângulo temos alguma transversal, e se tomamos de cada lado o conjugado harmônico dos pontos de encontro da transversal, em relação aos dois vértices do triângulo; unindo cada um dos pontos assim obtidos ao vértice oposto, resultarão três retas que se cruzarão no mesmo ponto. (LENTHÉRIC, 1874, p.3)

A reta no infinito é transformada em uma transversal e, de fato, o ponto médio de um segmento é o conjugado harmônico do ponto da transversal correspondente ao infinito. As noções de geometria racional são interpretadas em termos de homologia. Por exemplo, Lenthéric prova que a corda de contato das tangentes transportadas de um ponto E exterior a um círculo é o lugar geométrico dos conjugados harmônicos F do ponto E em relação aos dois pontos de intersecção M e M' das secantes conduzidas ao círculo do ponto E . Lenthéric interpreta este resultado em termos de homologia, onde o círculo se reproduz quando tomamos E como centro de homologia e sua polar IL como eixo de homologia. Assim, pode-se reproduzir um círculo escolhendo-se arbitrariamente a reta enviada ao infinito. Este é um caso particular da proposição empregada por Poncelet (PONCELET, 1822, p.100), a saber, que a figura formada por qualquer cônica e qualquer reta pode ser considerada a projeção de um círculo no qual a reta é conduzida ao infinito.

Este resultado lhe permite provar o seguinte teorema que está na figura 5.14:

Em um triângulo inscrito em uma cônica, as interseções de cada lado com a tangente pelo [vértice] oposto são três pontos localizados na mesma reta. (LENTHÉRIC, 1874, p.70)

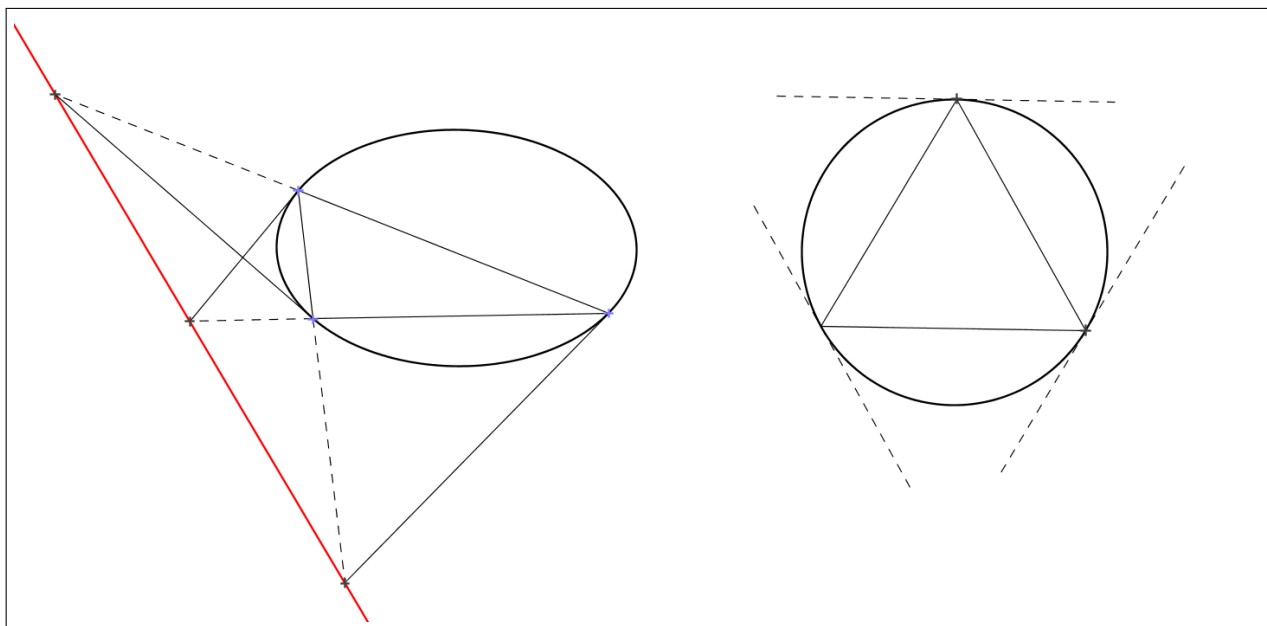


Figura 5.14 – Os pontos de intersecção dos lados com as tangentes ao vértice oposto são colineares.

Lenthéric segue a ideia de Poncelet de que, em um plano projetivo, uma cônica pode ser substituída por um círculo. Para reproduzir o círculo, toma-se a reta do infinito como a reta que liga os pontos de intersecção dos lados com as tangentes pelos vértices opostos. Ou seja, os lados do triângulo inscrito no círculo são paralelos às tangentes ao círculo pelo vértice oposto aos respectivos lados, o que implica que o triângulo é equilátero. Assim, o teorema torna-se mais imediato a compreensão do eleitor: os três pontos de intersecção estão alinhados na reta do infinito.

De forma semelhante, Lenthéric demonstra os teoremas de Pascal e Brianchon, reduzindo-os a um hexágono regular inscrito em um círculo. Dessa forma, vemos que Lenthéric apresenta as noções de geometria racional a partir do ponto de vista da homologia, seguindo a proposta de Poncelet de reduzir a figura a uma forma mais simples.

Lenthéric demonstra que duas figuras em perspectiva são homológicas e, inversamente, utiliza essa transformação como um método direto para transformar figuras planas. Ele segue a terminologia de Poncelet, distinguindo entre propriedades projetivas, que são preservadas pela transformação, e propriedades métricas, que nem sempre são.

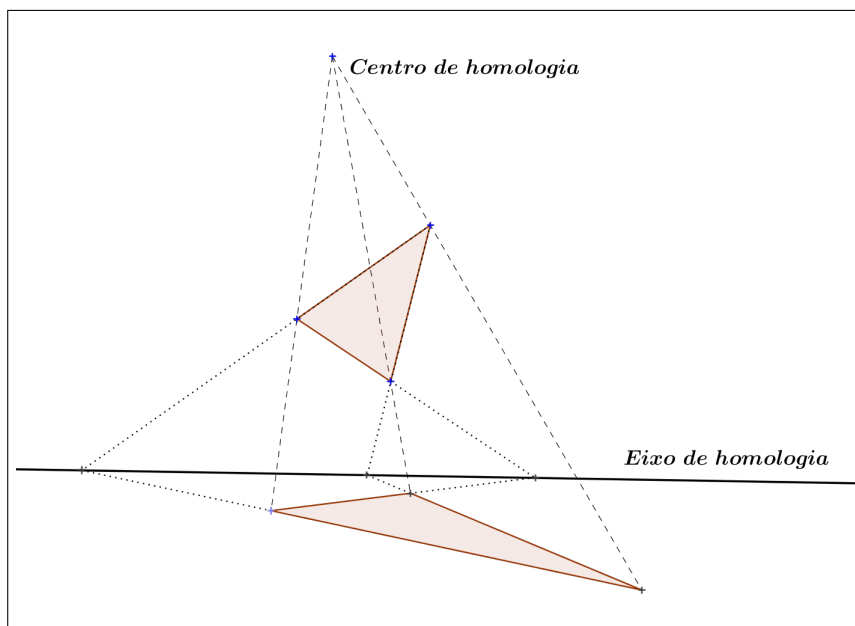


Figura 5.15 – Figuras homológicas.

Tomemos como exemplo o teorema abaixo que é o caso particular de uma propriedade da polar de um ponto em relação a uma cônica, quando a cônica é degenerada a duas retas:

Tomando-se em duas retas duas séries de três pontos correspondentes, A, B, C e A', B', C' , os pontos de cruzamento M, N, P das diagonais AB', BA', AC' e CA', CB' e BC' , serão colineares

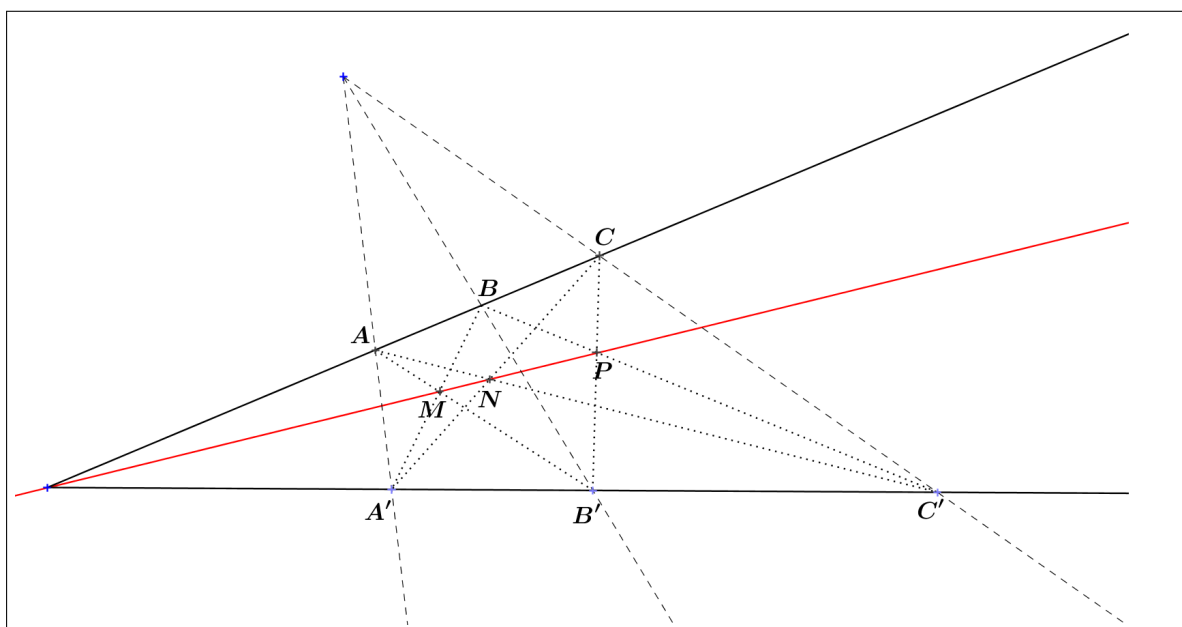


Figura 5.16 – Polar de um ponto quando a cônica degenera à duas retas.

O autor transforma a figura para que a reta $A'C'$ se torne o que chamaremos de reta do infinito. Na figura transformada, as retas BA', CA' passarão a ser duas paralelas e assim sucessivamente as demais. É mais fácil mostrar nesta nova figura que os pontos m, n, p estão

alinhados. Lenthéric deduz do fato de que os triângulos arm e csp são semelhantes, que os triângulos mrn e nsp também são semelhantes e, conseqüentemente, que os pontos m, n, p estão alinhados.

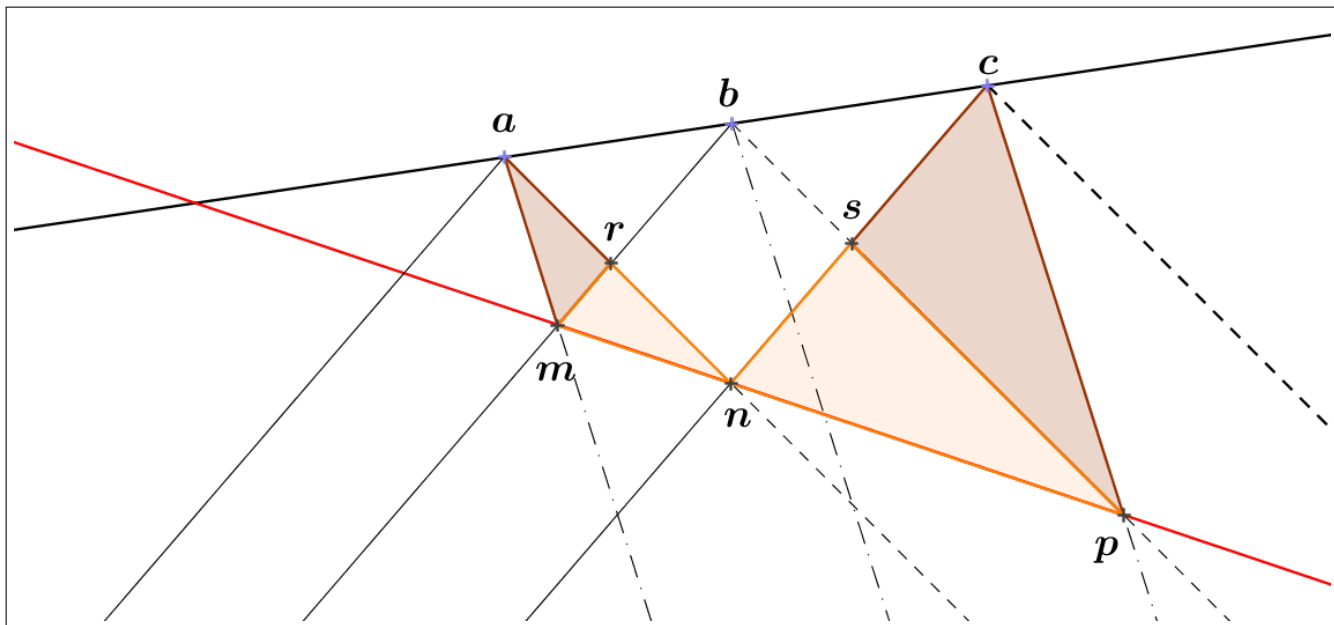


Figura 5.17 – As retas vão ao infinito.

Podemos expressar que, segundo as definições e propriedades apresentadas no livro, a transversal é a figura resultante da transformação da reta no infinito. Além disso, é interessante destacar que o ponto médio de um segmento é considerado o conjugado harmônico do ponto da reta situado no infinito.

As noções de geometria racional são interpretadas em termos de homologia. Por exemplo, por ocasião do capítulo sobre as polares, Lenthéric prova que, dado um ponto E exterior a um círculo, a corda de contato das tangentes transportadas deste ponto para o círculo é o lugar geométrico dos conjugados harmônicos F do ponto E em relação aos dois pontos de intersecção M e M' das secantes conduzidas ao círculo do ponto E . Imediatamente, Lenthéric interpreta este resultado em termos de homologia: o círculo se reproduz, ou seja, é ele próprio transformado, quando tomamos E como centro de homologia e sua polar IL como eixo de homologia. A partir daí, pode-se reproduzir um círculo, escolhendo-se arbitrariamente a reta enviada ao infinito. Este é um caso particular da proposição empregada por **Poncelet**, a saber, que a figura formada por qualquer cônica e qualquer reta pode ser considerada a projeção de um círculo e a reta do infinito.

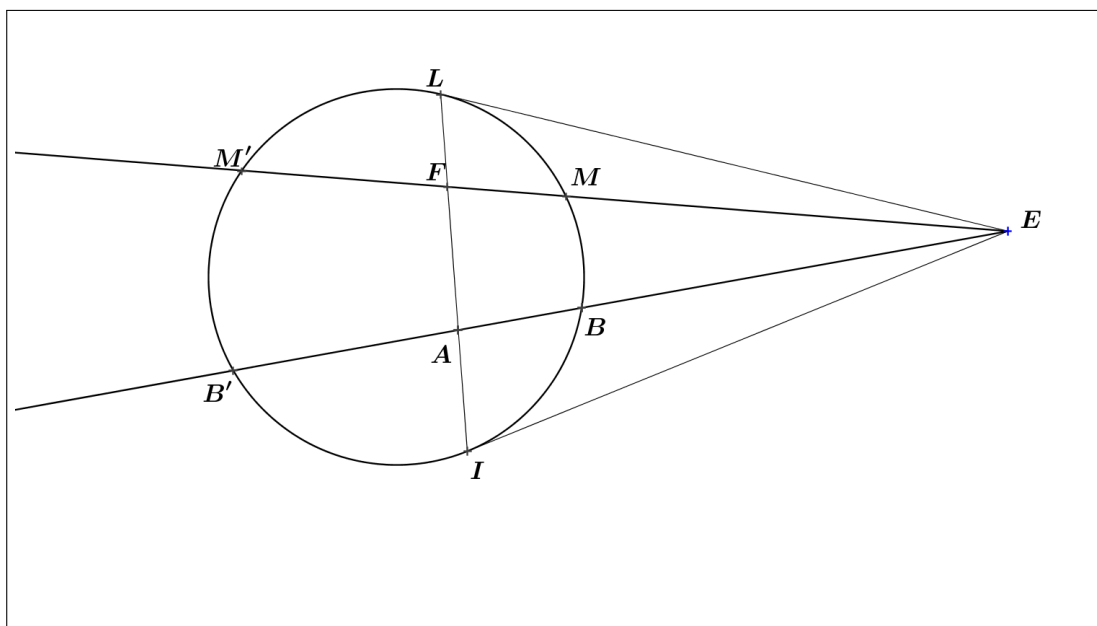


Figura 5.18 – Centro e eixo de homologia.

BULLETIN.

TRAITÉ DE GÉOMÉTRIE ÉLÉMENTAIRE⁸PAR MM. Eugène Rouché⁹ et Charles de Comberousse¹⁰

O *Bulletin dos Nouvelles Annales* faz uma resenha do livro de Comberousse e Rouché.

[...] Somos assim conduzidos com naturalidade e rigor à introdução dos imaginários na Geometria e à fecunda noção dos pontos do círculo situados no infinito, por M. Poncelet.

[...] Após esta exposição das propriedades fundamentais, há um rápido esboço dos métodos gerais, os princípios do método dos polares recíprocos, a teoria das figuras homológicas, o método por projeção cônica, seguido de um grande número de aplicações específicas fazer com que seu espírito e fecundidade sejam bem compreendidos e inspirar jovens estudiosos com o desejo de ler os escritos eruditos de MM. Chasles e Poncelet. (HAUSER, 1866, p.42-47)

Charles de Comberousse, professor de matemática no Collège Chaptal, tutor e examinador para admissão na *École centrale des arts et manufatura*, da qual ele próprio veio (turma de 1850), publicou entre 1860 e 1862 um *Cours de Mathématiques* contendo todas as partes necessárias para os candidatos à Escola Central de Artes e Manufatura. No final da Geometria Plana, contida no segundo volume do seu Curso, existe um suplemento que expõe os “Princípios gerais relativos à resolução de problemas”. Comberousse apresenta primeiro os dois métodos de análise e síntese, afirmando que somente a análise pode encontrar a prova de uma proposição. E afirma que a natureza do problema é que pode indicar o método de abordagem.

⁸ *Nouvelles annales de mathématiques 2re série*, tome 5 (1866), p. 42-47

⁹ professeur au lycée Charlemagne, répétiteur à l'École Polytechnique, etc.

¹⁰ professeur au collège Chaptal, répétiteur à l'École Centrale.

Para resolver problemas de geometria, é impossível indicar um método geral e certo. A natureza dos problemas que podem ser colocados é muito variável para que a solução seja certa de ser obtida seguindo um determinado curso. No entanto, existem métodos especiais que se aplicam mais diretamente a certas classes de questões; e se soubermos discernir a que categoria pertence o problema de que tratamos, já demos um grande passo em direção à solução, pois já se sabe de antemão o modo pelo qual as coisas devem ser dirigidas. (COMBEROUSSE, 1861, p.224)

Embora o livro seja destinado principalmente aos candidatos à *École centrale*, ele vai além dos requisitos, sem dúvida para os alunos mais avançados e para aqueles que se destinam à *École polytechnique*.

O método de projeção consiste em visualizar a figura plana de um problema como a projeção de uma figura correspondente no espaço tridimensional. Essa abordagem simplifica a resolução do problema em questão. O método de projeção é uma técnica derivada diretamente da geometria descritiva. Um exemplo dado por Comberousse ilustra esse método.:

Dadas duas retas cujo ponto de interseção é inacessível ou desconhecido, conduza por um dado ponto c a uma terceira reta cuja direção passa por este ponto de interseção. (COMBEROUSSE, 1861, p.230)

Seja AA' e BB' as retas dadas e C o ponto dado, conforme a figura 5.19. A figura solução é considerada como a projeção de uma pirâmide triangular com base ABC . O traçado das paralelas $A'C'$, $C'B'$ e $A'B'$ às três retas AC , CB e AB desenha uma secção desta pirâmide e o ponto C' pertence à aresta CO .

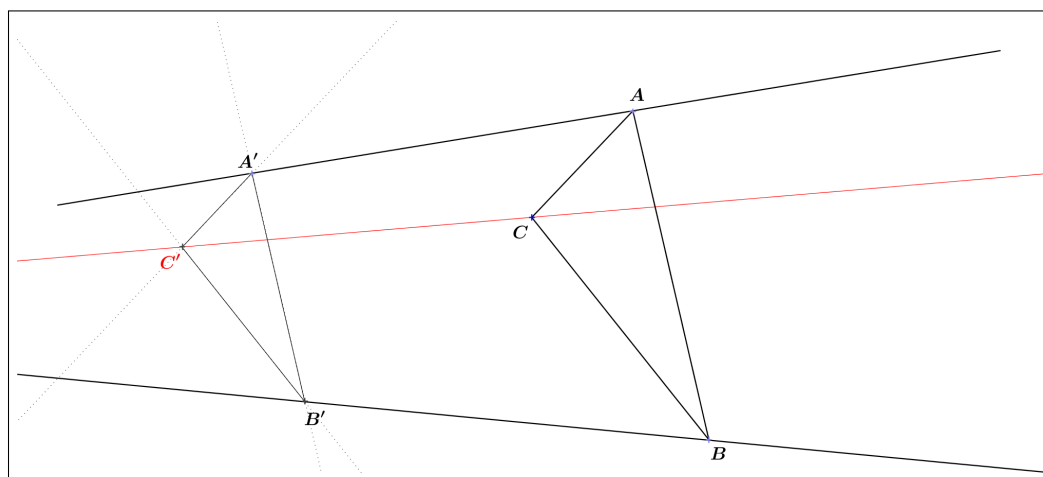


Figura 5.19 – Transformação por projeção.

Painvin : Reconquistar o terreno perdido pela Geometria Analítica à Geometria Racional

Louis Félix Painvin (1826-1875) era professor de matemática especial no *Lycée de Douai* desde 1860 quando publicou, em 1866, seus *Principes de la géométrie analytique*, que seria seguido seis anos depois por um trabalho complementar para geometria de espaço. Doutor

e professor associado, autor nos *Nouvelles Annales de Mathématiques* e autor de notas nos Relatórios da Academia das Ciências, ensinará sempre em matemática especial, em Lyons em 1869, e em Louis-le-Grand em Paris em 1872. Neste trabalho, ele quer provar, pela geometria analítica, muitas proposições estabelecidas.

Sob o poderoso impulso de Chasles, Steiner, **Poncelet**, etc..., a Geometria Pura fez imensos progressos e deixou a Geometria Analítica para trás. Para recuperar o terreno perdido, não devemos negligenciar nenhum dos recursos da Análise. (PAINVIN, 1866, p.I)

Painvin apresenta as noções de polares, razão anarmônica, divisão homográfica, involução, transformação por polar recíproca, homotetia, entre outras, por meio da geometria analítica em seu livro. Desde as primeiras páginas, vários sistemas de coordenadas são apresentados, além das coordenadas cartesianas, como as tangenciais, homogêneas, trilaterais e polares. Painvin destaca que essa abordagem é uma novidade na França:

O estudo das coordenadas tangenciais ainda não foi apresentado sistematicamente em nenhuma de nossas obras francesas, a Geometria Analítica do MM. Briot & Bouquet dificilmente contém mais do que a definição, o tratado de M. Salmon contém no início noções um pouco mais amplas [...] A Geometria Analítica de M. Hesse [1861] é, creio, a única obra em que se fez uso sistemático dessas coordenadas. (PAINVIN, 1866, p.II)

Painvin aborda cada livro de sua obra sucessivamente em coordenadas cartesianas, trilaterais e tangenciais, o que faz com que o conjunto seja notavelmente volumoso. Em sua advertência, ele explica os motivos que o levaram a dar mais extensão ao curso do que os programas exigem.:

O curso que publico hoje [...] contém primeiro os assuntos exigidos pelos nossos programas [...]. As partes complementares que tratam das coordenadas trilaterais e das coordenadas tangenciais [...] destinam-se principalmente aos alunos do segundo ano. [Eles] serão um novo alimento para sua curiosidade; e, [...] poderão, com este estudo, adquirir mais recursos para o ataque e a resolução dos problemas, e alargar, ao mesmo tempo, o campo das suas ideias sobre Geometria. (PAINVIN, 1866, p.II)

Painvin ilustra, com um exemplo, a demonstração dos resultados da geometria racional por meio da geometria analítica. Ele começa com a propriedade das transversais de um triângulo, o teorema de Menelau, que foi originalmente demonstrado em geometria pura, mostrando dois triângulos semelhantes. No entanto, Painvin prova a proposição de várias maneiras utilizando geometria analítica.

Primeiramente, em coordenadas cartesianas e posteriormente em coordenadas trilineares, o autor mostra que se um segmento M_1M_2 é cortado por uma reta com equação $Ax + By + C = 0$ em um ponto I , temos a relação: $\frac{M_1I}{M_2I} = -\frac{Ax_2 + By_2 + C}{Ax_1 + By_1 + C}$. Assim, se um triângulo $M_1 M_2 M_3$ é cortado por uma transversal $I_1 I_2 I_3$, a relação anterior aplicada aos três lados leva, tomando o produto das três igualdades obtidas, à:

$$\frac{M_1 I_3}{M_2 I_3} \cdot \frac{M_2 I_1}{M_3 I_1} \cdot \frac{M_3 I_2}{M_1 I_2} = -1$$

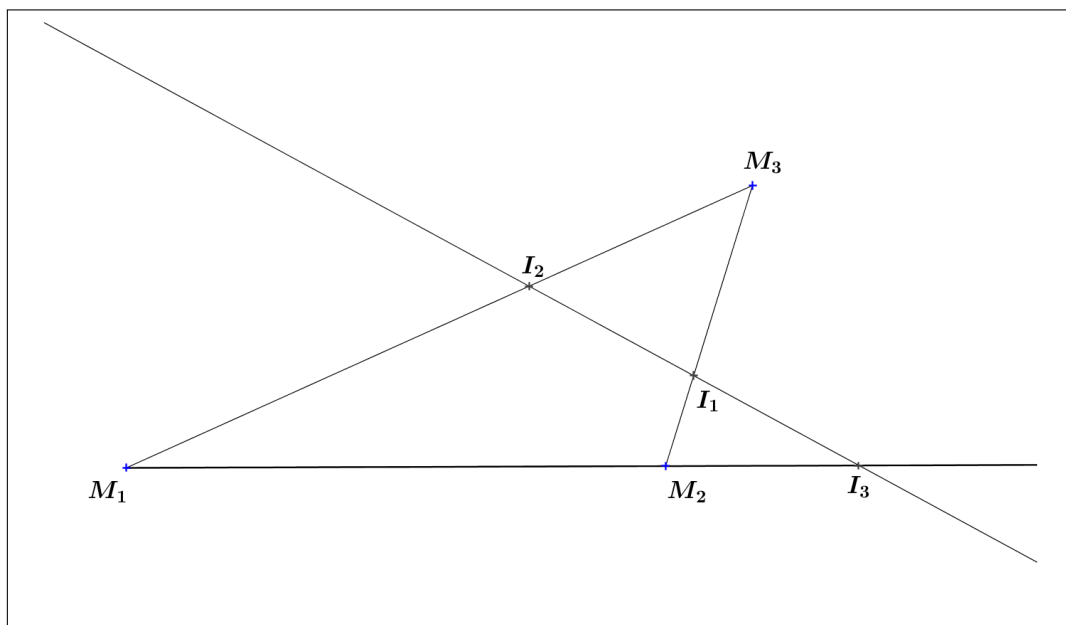


Figura 5.20 – Reta transversal.

Outro exemplo é sobre uma declaração de Painvin de que podemos encontrar no Tratado de Poncelet:

Quando um quadrilátero está circunscrito a um círculo, se uma tangente rola sobre o círculo, o produto de suas distâncias a dois vértices opostos é o produto de suas distâncias aos outros dois vértices em uma razão constante. (PAINVIN, 1866, p.180)

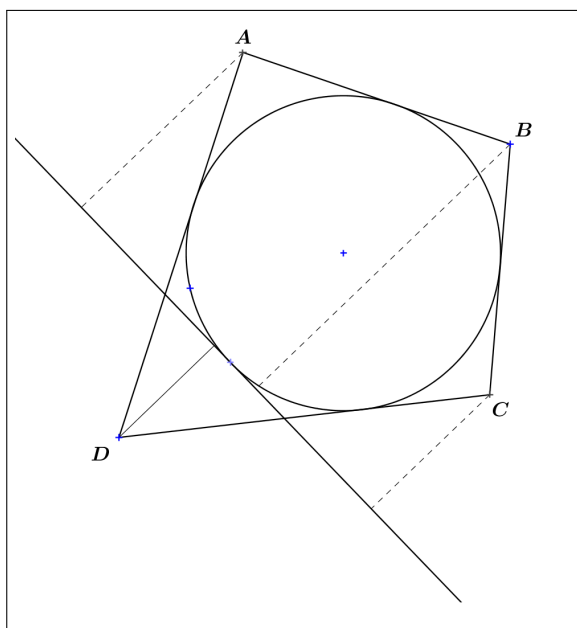


Figura 5.21 – Constância dos produtos das distâncias dos vértices de um quadrilátero circunscrito a uma tangente.

O livro é finalizado com uma seleção de 82 problemas de concursos realizados entre 1812 e 1867, o que evidencia que a obra foi concebida para estudantes em processo de preparação, com o intuito de apresentar métodos que possam ser aplicados para solucionar questões de provas e exames.

Painvin apresenta uma obra extensa sobre geometria analítica, diferenciando-se das obras contemporâneas do mesmo tema, e destinada a alunos de matemática especial. Ele expõe vários sistemas de coordenadas, incluindo coordenadas homogêneas, para permitir o raciocínio em um quadro geral com pontos no infinito. As noções de geometria racional são integradas ao longo do curso, e sempre demonstradas por métodos analíticos, em consonância com o objetivo declarado de recuperar o terreno perdido pela geometria analítica em relação à geometria pura.

Traité des sections coniques de Georges Salmon

Georges Salmon (1819-1904), professor do *Trinity College* em Dublin, escreveu o *treatise on conic sections* cujo título completo da terceira edição, publicada em Londres em 1855, é *treatise on conic sections, containing an account of some of the most important modern algebraic and geometric methods*. Poncelet escreveu em 1862 que a edição feita em Londres em 1855 goza, tanto na França como na Inglaterra, de uma justa celebridade (PONCELET, 1862, p.212).

Esta obra é citada por vários autores franceses e traduzida em 1870 por Henri Résal e Victor Vaucheret,¹¹. Estes acreditam “prestar um verdadeiro serviço à educação” (SALMON, 1870, p. vi), sem especificar um determinado nível de ensino.

¹¹ Henri Résal, engenheiro de minas, politécnico de 1847 e professor da faculdade de Besançon, e Victor Vaucheret, capitão de artilharia, politécnico da turma de 1851.

Salmon inclui em sua obra capítulos que tratam de métodos recentes e afirma que foi o primeiro a apresentá-los de forma sistemática e acessível. Ele também menciona em seu prefácio que utiliza seu trabalho como material didático para ensinar geometria analítica a seus alunos iniciantes (SALMON, 1855, prefácio).

Salmon (1870) cita na quinta edição, na qual a tradução francesa é produzida, a lista dos autores de quem extrai suas referências para seu tratado: Chasles, **Poncelet**, Bobillier, Brianchon, Carnot e Gergonne pela França; August Ferdinand Möbius (1790-1868), Julius Plücker (1801-1868) e Jakob Steiner (1796-1863) pela Alemanha; Arthur Cayley (1820-1895) pela Inglaterra. Em particular, o uso de novos sistemas de coordenadas devido a Möbius e Plücker torna possível expressar analiticamente certas ideias geométricas.

Após os capítulos que abordam coordenadas cartesianas, há outros capítulos que se dedicam a aplicar o método das notações abreviadas em cada um deles. Em seguida, existem capítulos sobre o princípio da dualidade e o método dos polares recíprocos, que são abordados de forma analítica. Além disso, há capítulos sobre o método das projeções, invariantes e covariantes, e o método dos infinitesimais..

Serret : identificar métodos para resolver questões de geometria

Paul Serret (1827-1898) é professor de matemática em Paris, normalien da promoção de 1849, não agrégé mas doutor em 1859 por um trabalho sobre retas de dupla curvatura, membro da *société philomathique*. Ele não deve ser confundido com o politécnico e acadêmico Joseph-Alfred Serret. Na sua obra *méthodes en géométrie*¹², lamenta que os “métodos dos inventores” tenham “desaparecido sob a uniformidade de uma análise elegante” (SERRET, 1855, prefácio, p.v).

Serret frequentemente cita os *Nouvelles Annales* como a fonte das declarações que ele propõe. Ele também cita em várias ocasiões, desde a primeira página, o Exame de Lamé, descrito como "uma excelente obra" (SERRET, 1855, p.1).

Por fim, o método pela transformação de figuras é, na opinião de Serret, "um dos mais importantes e frutíferos da geometria" a ponto de afirmar que "constitui o verdadeiro método da geometria" (SERRET, 1855, p.20). Os nomes de Cavalieri, Grégoire de Saint-Vincent, Pascal, Newton, Maclaurin, Dupin, **Poncelet** e Chasles são chamados a refazer a história deste método. Serret dedica um capítulo separado à ilustração desse método em uma transformação particular, a transformação por raios vetoriais recíprocos (SERRET, 1855, p.21)¹³

Transformação por raios vetores recíprocos por Serret

Seguindo o trabalho sobre geometria de figuras finitas contém um segundo capítulo, dedicado à transformação por raios vetoriais recíprocos, que ele usa para estabelecer várias

¹² Serret, Paul, *Des méthodes en géométrie*, Paris : Mallet-Bachelier, 1855.

¹³ Chapitre II, p.21, *Des Méthodes en Géométrie*

propostas de geometria e geometria esférica. Os pontos recíprocos são definidos da seguinte forma:

Diz-se que dois pontos M e M' são recíprocos em relação a um ponto O , chamado de origem, segundo uma potência P , positiva ou negativa, quando estão localizados na mesma reta que passa pelo ponto O e o produto de suas distâncias até este ponto é igual à potência P . (SERRET, 1855, p.21)

Serret apresenta vários resultados, incluindo que se M e M' , por um lado, e N e N' , por outro, são pontos recíprocos, então a relação entre eles é dada por $M'N' = \frac{MN}{OM}P$. Ele também demonstra que os ângulos de uma figura e sua recíproca são iguais, o que indica uma transformação conforme, e que a figura recíproca de uma reta que não passa pela origem é uma circunferência. Estes resultados são empregados para estabelecer proposições que daremos dois exemplos.

Primeiro a relação anterior aplicada quando M é um ponto de um círculo com centro C . Então, $MC = \frac{M'C' \cdot OC}{OM'}$ onde a relação $\frac{M'C'}{OM'}$ é uma constante. Daí a proposição de que o lugar geométrico dos pontos cuja razão entre dois pontos dados é constante é um círculo (círculo de Apolônio).

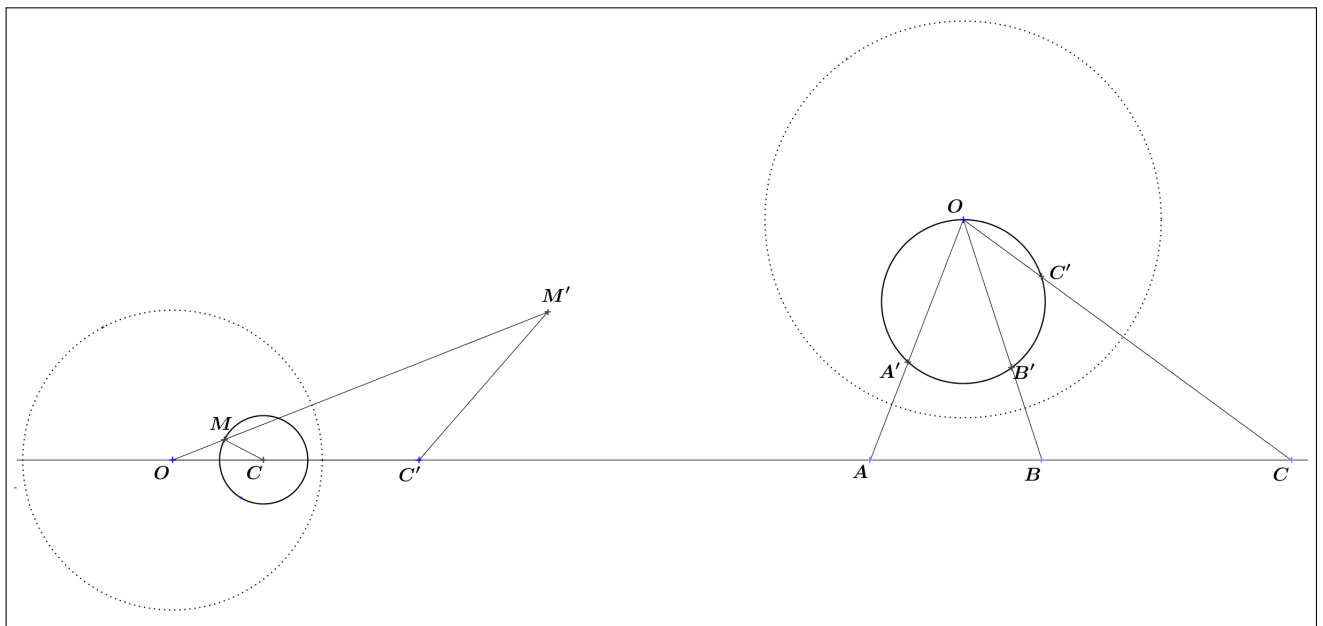


Figura 5.22 – Inversão.

Então a relação óbvia entre três pontos alinhados A, B, C , $AC = AB + BC$, dá pela transformação de três pontos colineares A', B', C' que verificam : $\frac{A'C'}{OA' \cdot OC'} = \frac{A'B'}{OA' \cdot OB'} + \frac{B'C'}{OB' \cdot OC'}$

Serret desenvolve as propriedades da transformação por raios vetoriais recíprocos por métodos geométricos e mostra em particular como é possível inventar proposições a partir de proposições conhecidas.

As noções de Geometria Racional e o ensino de Geometria elementar

As noções de geometria racional foram introduzidas nos trabalhos de ensino de geometria elementar em certas obras de geometria analítica da década de 1840. Entretanto, as obras de Poncelet no *Traité des Propriétés projective des Figures* foram pouco difundidas no ensino antes de 1865.

A obra de Jacques Lenthéric, em 1865, é uma compilação de várias memórias submetidas à *Académie* de Ciências de Montpellier. Expõe as noções de geometria racional de forma elementar e em conexão com a perspectiva central. No mesmo ano, a *Introduction à la Géométrie Supérieure*¹⁴ de Charles Housel propõe explicitamente popularizar as ideias da Geometria Moderna. Finalmente, Millet escreveu em 1870 os *Principales méthodes de géométrie moderne*.

Além disso, alguns livros de ensino de geometria elementar introduzem os métodos da geometria racional. O *Traité de Géométrie Élémentaire* de **Rouché e Comberousse** aborda essas noções. Os Irmãos das Escolas Cristãs publicam um Apêndice aos seus Elementos de Geometria.

Millet : Os métodos da Geometria Racional e sua aplicações

Luc Alphonse Millet (1842-1877) Ex-aluno da *École Normal* da promoção de 1862, professor no Lycée de Troyes a partir de 1871. Em seu trabalho intitulado *Principales méthodes de géométrie moderne*¹⁵ ele quer apresentar a geometria racional de forma elementar:

Facilitar o estudo da Geometria moderna para os alunos, orientar seus primeiros passos por meio de inúmeras aplicações, tal é o objetivo especial deste trabalho elementar (MILLET, 1870, p.4)

Na introdução, ele menciona os empréstimos feitos à Paul Serret e ao *Traité de Géométrie Élémentaire* de Rouché e Comberousse.

Millet adere à reta e ao círculo, e especifica que "todas as propriedades descritivas obtidas para o círculo permanecem verdadeiras para as cônicas"(MILLET, 1870, p.212) Aqui, novamente, não há uma citação às doutrinas de Poncelet. Sabemos, pelos trabalhos de Poncelet usando o princípio de projetividade, que as cônicas são transformadas entre si no plano projetivo.

Millet, portanto, declina uma lista de métodos geométricos em geometria elementar da reta e do círculo. Vejamos como um tema do concurso público dá origem a quatro soluções diferentes, apresentadas sucessivamente e envolvendo cada um dos métodos descritos nos quatro primeiros capítulos. O enunciado deste problema é:

Dados dois círculos que não se tocam [...] de cada ponto M de um deles, traçamos duas retas que passam pelos centros de semelhança S e S' dos dois círculos, essas retas encontram cada uma o segundo círculo em dois pontos, juntamos esses pontos dois a dois em cruz, pede-se que demonstre que, as duas retas assim obtidas, uma é o diâmetro do segundo círculo, a outra passa por um ponto fixo (MILLET, 1870, p.62)

¹⁴ Housel, *Introduction à la géométrie supérieure*, Paris : Bachelier, 1865

¹⁵ Millet, *Principales méthodes de géométrie moderne*, Verdun, 1870.

Millet rapidamente estabelece que BA' é um diâmetro do círculo C' considerando que BC' é paralelo a MC e $C'A'$ também. Para a segunda parte do teorema, quatro métodos são apresentados.

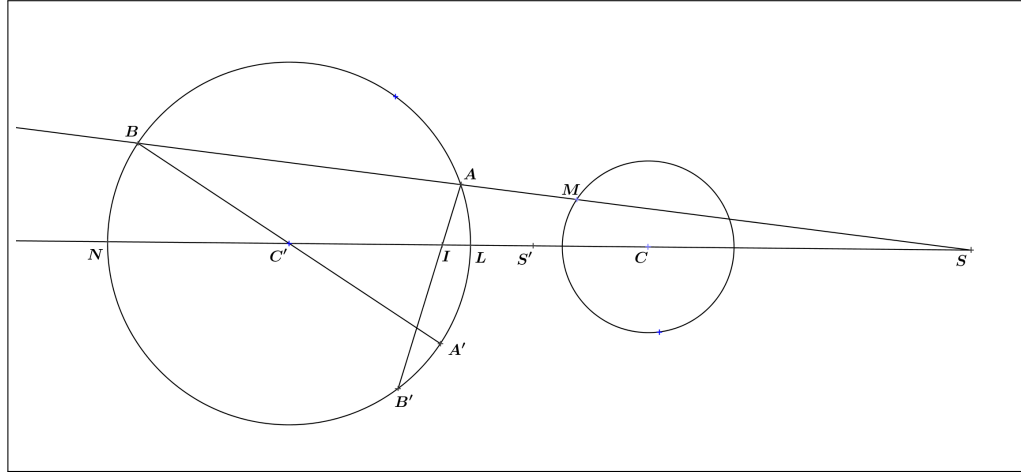


Figura 5.23 – Similitude.

O primeiro método envolve as propriedades relacionadas aos centros de similitude de dois círculos e à potência de um ponto em relação a um círculo. Millet obtém a igualdade:

$$\frac{IS'}{IS} = \frac{CS'}{C'S'} \cdot \frac{S'L \cdot S'N}{SL \cdot SN}$$

Esta última razão sendo constante, a posição do ponto I é fixa. O segundo método é o método transversal. O triângulo $S'MS$ é considerado cortado pelas transversais AB' e BA' , daí as relações:

$$\frac{SA \cdot MB' \cdot S'I}{MA \cdot B'S' \cdot IS} = 1$$

$$\frac{SB \cdot MA' \cdot S'C'}{BM \cdot A'S' \cdot C'S} = 1$$

que, multiplicados, dão:

$$\frac{SA \cdot MB' \cdot SB \cdot MA' \cdot S'C'}{MA \cdot B'S' \cdot BM \cdot A'S' \cdot C'S} = \frac{IS}{IS'}$$

Esta razão é constante porque $MB' \cdot MA' = MA \cdot MB$, então o ponto I é fixo como antes.

O terceiro método é o dos feixes homográficos. Os feixes $B.NA'LA$ e $B'.N'A'LA$ são homográficos porque os ângulos entre as retas homólogas dos dois feixes são iguais. A igualdade das razões anarmônicas dá: $\frac{LC'}{NC'} : \frac{SL}{NS} = \frac{LS'}{NS'} : \frac{LI}{NI}$

Aqui novamente encontramos uma razão constante que fixa a posição do ponto I .

Finalmente, o quarto método usa pólos e eixos radicais. Millet começa mostrando que o ponto H de intersecção das tangentes aos círculos nos pontos B' e M pertence ao eixo radical dos dois círculos. De fato, as tangentes ED e HA sendo paralelas pela semelhança dos círculos, o triângulo HMA é semelhante ao triângulo MED e, portanto, isósceles como ele. Então, ele prova que a tangente em B' é $B'H$ e deduz que quando H descreve o eixo radical, a corda AB' passa constantemente pelo pólo I do eixo radical em relação ao círculo C' .

O autor expõe regularmente uma variedade de soluções possíveis variando o método para declarações que muitas vezes são extraídas dos concursos. No capítulo sobre o método de transformação pelas polares recíprocas em relação a um círculo, Millet estabelece vários teoremas correlativos a teoremas conhecidos.

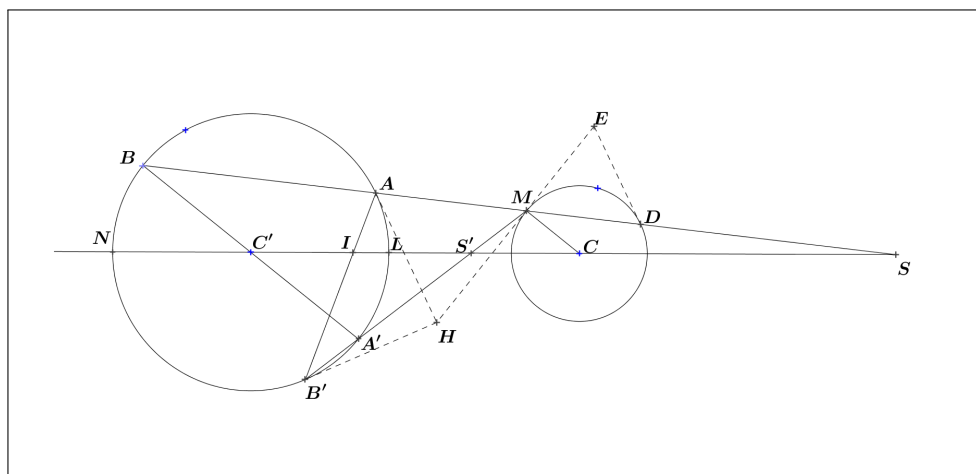


Figura 5.24 – As tangentes pelos pontos anti-homólogos intersectam-se no Eixo radical.

Trata ainda sobre transformação por raios vetores recíprocos desenvolvida geometricamente na obra de Serret. Mas, não cita as doutrinas referenciando Poncelet. Quando trata das propriedades projetivas das figuras, cita que foram "estudadas e destacadas por Poncelet" (MILLET, 1870, p.167). Observe que há uma citação superficial, pois é uma obra de Poncelet.

Ao apresentar um método para mostrar que as retas são concorrentes, método semelhante pode ser usado para mostrar que os pontos estão em uma reta, é exatamente sobre reciprocidade polar, não há citação sobre Poncelet.

5.2.4 Início da patrimonialização através *Nouvelles Annales de Mathématiques: journal des candidats aux écoles polytechnique et normale*

É interessante notar que o surgimento de novos periódicos na França após o término das edições do *Annales Mathématiques Pures et Appliquées* coincidiu com a interrupção das publicações de Poncelet em Geometria. O *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées* conhecido como *Journal* de Liouville é caracterizado pela Matemática pura, enquanto o *Journal* de Terquem é caracterizado pela Matemática do ensino. É nesse último periódico que podemos encontrar as possíveis aplicações das doutrinas de Poncelet, uma vez que o ensino de Geometria poderia ter sido influenciado por suas ideias. O surgimento desses periódicos evidencia a importância da divulgação científica e do papel dos periódicos na disseminação das pesquisas matemáticas.

Este *Journal*, conforme indicado pelo próprio título, são destinados a jovens que desejam ingressar na *École Polytechnique* ou na *École Normale*, além de professores cuja competência envolve o aprimoramento da informação sobre Matemática Especial, simplificação de teorias, desenvolvimento e aplicação de vários métodos, bem como a divulgação de descobertas recentes.

*NOTE SUR LE CERCLE TANGENT A TROIS CERCLES DONNÉS*¹⁶;

PAR M. PAUL **SERRET**.

Neste artigo sobre o problema de Apolônio, Serret apresenta uma solução utilizando um teorema de Poncelet:

qualquer um dos círculos tangentes e o círculo ortogonal têm como eixo radical um dos quatro eixos de semelhança dos círculos propostos, (PONCELET).(SERRET, 1863, p.95)

Serret adota a forma sintética para apresentar a solução.

*NOTE SUR DEUX SUITES RECURRENTES DE CERCLES ET DE SPHÈRES*¹⁷;

PAR M. PAUL **SERRET**.

O artigo de Serret inicia com um teorema de Steiner e a demonstração sugere utilizar alguns lemas para reduzir ao teorema de Poncelet.

*SUR DIVERSES GEOMETRIES*¹⁸

Hoje existem oito geometrias, diferenciadas entre si por diferenças lógicas. Vamos designá-los pelos nomes dos geômetras franceses que publicaram obras especiais.

- 1º. La géométrie ancienne, fondamentale, celle des Lycées (Legendre) ;
- 2º. La géométrie projective (**Poncelet**) ;
- 3º. La géométrie dualiste, polarité réciproque (**Poncelet**) ;
- 4º. La géométrie segmentaire (**Chasles**) ;
- 5º. La géométrie infinitésimale (Bertrand, Ossian Bonnet) ;
- 6º. La géométrie cinématique (**Mannheim**) ;
- 7º. La géométrie algorithmique, déterminants, invariants (**Painvin**) ;
- 8º. La géométrie épiphanoïque, famille de surfaces homofocales, isothermes, équistatiques (Lamé).

¹⁶ *Nouvelles annales de mathématiques 2re série*, tome 2 (1863), p. 96

¹⁷ *Nouvelles annales de mathématiques 2re série*, tome 1 (1862), p. 184

¹⁸ *Nouvelles annales de mathématiques 1re série*, tome 18 (1859), p.445

Existem ainda duas outras geometrias, cujos princípios ainda não são conhecidos.

- a) A geometria da situação, indicada por Leibniz;
- b) A geometria de disposição, assunto de seis palestras públicas do Sr. Sylvester, cujos resumos estão impressos, e que este famoso matemático promete apresentar em breve em um livro de memórias especial.

Neste artigo, o Journal de Terquem lista os matemáticos franceses e as áreas da Geometria em que eles publicaram trabalhos de referência. O artigo destaca Poncelet, que contribuiu com importante trabalhos para a geometria projetiva e a geometria dualística (reciprocidade polar).

THÉORÈME SUR LES CONIQUES INSCRITES DANS UN QUADRILATÈRE ¹⁹ ;

PAR M. PAINVIN.

TEOREMA IV. — Três cônicas S, S', S'' sendo circunscritas no mesmo quadrilátero, se de qualquer ponto I de S conduzirmos das tangentes IT' e IT'' respectivamente às cônicas S' e S'' , e que M' e M'' são as interseções dessas tangentes com a cônica S , a envoltória das retas $M'M''$ é composta por duas cônicas circunscritas ao mesmo quadrilátero. (PAINVIN, 1863, p.171)

No artigo, Painvin comenta sobre um teorema específico e faz uma observação a respeito dele sobre a demonstração que Poncelet fez em *Applications d'Analyse et Géométrie* T. I:

Este último teorema é conhecido há muito tempo. M. **Poncelet** demonstrou analiticamente para o caso de três círculos com uma corda comum (*Applications d'Analyse et de Géométrie*, p. 314 a 347), e estendeu-o ao caso de três cônicas usando os princípios do método projetivo. (PAINVIN, 1863, p.156)

5.3 As noções de Geometria Pura nas obras de ensino.

O Tratado de Geometria de Rouché e Comberousse (1866)

Eugène Rouché (1832-1910) é um matemático, politécnico da turma de 1852, doutor em ciências matemáticas em 1858, professor no liceu Carlos Magno e na *École centrale*, tutor na *École polytechnique*. Ele já havia publicado *Leçons nouvelles de trigonométrie*, quando publicou com Charles de Comberousse em 1866 um *Traité de Géométrie Élémentaire* ²⁰ que gozaria de considerável sucesso editorial até meados do século XX. Ele escreverá outro curso de geometria descritiva e se tornará um examinador na *École polytechnique*.

Charles de Comberousse, professor de matemática no Collège Chaptal, tutor e examinador para admissão na *École centrale des arts et manufatura*, da qual ele próprio veio (turma de 1850), publicou entre 1860 e 1862 um *Cours de Mathématiques* contendo todas as partes necessárias para os candidatos à Escola Central de Artes e Manufatura.

¹⁹ *Nouvelles annales de mathématiques 2re série*, tome 2 (1863), p. 156-172

²⁰ Rouché, Eugène, Comberousse, Charles, *Traité de géométrie élémentaire*, Paris : Gauthier-Villars, 1866.

Os autores evocam, como Painvin, o terreno conquistado pela geometria pura sobre a geometria analítica:

A geometria [pura] está, portanto, avançando rapidamente ao longo de um caminho frutífero. Graças às belas conquistas do nosso século, recuperou o terreno perdido à Análise (ROUCHÉ; COMBEROUSSE, 1866, p.xiii)

Os autores discutem a questão em torno de encontrar um equilíbrio entre seguir as diretrizes estabelecidas pelos órgãos governamentais e oferecer aos alunos uma formação matemática mais abrangente e diversificada. Segundo eles as descobertas da Geometria moderna não penetraram no ensino, ao serem negligenciadas pelos Programas oficiais e não ocupam o lugar que lhes é devido:

Hoje existem duas formas de escrever um livro destinado aos estudos: pode-se restringir-se aos Programas oficiais e não ir além do quadro; podemos também, seguindo rigorosamente estes Programas no que é obrigatório, ir além e tentar completá-los. Para aplicar uma ciência, não basta conhecer algumas partes dela; você tem que estar familiarizado com todos os seus métodos, para ser o mestre do todo. As magníficas descobertas da Geometria moderna não penetraram no ensino: negligenciadas pelos Programas, não ocupam na série de estudos matemáticos o lugar que lhes é devido; dificilmente são mencionados e incidentalmente na Geometria Analítica, onde muito erroneamente parecem ser uma nova conquista do admirável instrumento criado por Descartes. Estamos longe de criticar os Programas por seu silêncio a esse respeito: eles são tão carregados que seria inapropriado pedir um acréscimo. Mas não se pode aprender um programa de exames e ao mesmo tempo tentar entender o alcance da ciência que se está estudando, tendo um conhecimento rápido, uma visão geral de seus principais métodos? Tal é o pensamento que nos guiou na composição desta obra (ROUCHÉ; COMBEROUSSE, 1866, p.xiv)

Os autores escrevem sobre a exposição de métodos de geometria pura em um livro de geometria elementar, mesmo que esses métodos não estejam oficialmente nos programas. Eles argumentam que a compreensão desses métodos é essencial para a compreensão da geometria, em oposição à simples memorização. Assim, o livro é considerado como um livro introdutório que apresenta várias noções de geometria, como o princípio dos sinais, razão anarmônica, hexágono de Pascal, entre outras. No entanto, apenas as primeiras propriedades dessas noções são expostas e aplicadas a um número limitado de proposições. Apesar disso, o livro oferece elementos notáveis dentro deste quadro limitado. O objetivo parece ser mostrar a importância da compreensão dos métodos de geometria pura na geometria elementar, o que pode ser útil para estudantes que desejam avançar em estudos mais avançados de matemática.

O teorema de Desargues e sua forma dual são apresentados desta maneira:

Quando dois triângulos ABC , $A'B'C'$, têm seus vértices localizados dois a dois em três retas $OA'A$, $OB'B$, $OC'C$, concorrentes	no mesmo ponto O , seus lados se encontram dois a dois (BC e $B'C'$, AC e $A'C'$, AB e $A'B'$) em três pontos α , β , γ localizados em
---	--

uma reta

Quando dois triângulos ABC , $A'B'C'$, são tais que seus lados se cruzam em pares (BC e $B'C'$, AC e $A'C'$, AB e $A'B'$) em três pontos α , β , γ localizados em uma reta, seus vértices estão localizados dois a dois em três retas concorrentes $OA'A$, $OB'B$, $OC'C$ no mesmo ponto O .

O texto descreve o trabalho de Rouché e Comberousse e sua utilização da transformação por polaridade recíproca em relação a um círculo para derivar proposições em geometria. Além disso, os autores dão ênfase às propriedades da homotetia, uma transformação também conhecida como similitude em Poncelet, que eles usam para estabelecer o teorema de Monge e definir a semelhança no caso de figuras curvilíneas. É interessante notar a importância que os autores dão à compreensão das transformações geométricas e sua aplicação na resolução de problemas geométricos, demonstrando a relevância dessa abordagem para o ensino e aprendizagem da geometria.

Embora Rouché e Comberousse não citem explicitamente Poncelet em seu livro, é importante reconhecer a influência que o trabalho de Poncelet teve sobre suas pesquisas. Daí a nossa insistência em dizer que a obra tornou-se maior que o autor.

É importante destacar que a obra de Poncelet teve grande influência na época em que Rouché e Comberousse escreveram seu livro. Naquele momento, muitos matemáticos estavam trabalhando em problemas geométricos baseados nas ideias de Poncelet, e é evidente que os autores se inspiraram em seu trabalho, embora não o tenham citado explicitamente.

Resumidamente, a falta de citação ou a citação muito breve a Poncelet pode ser vista como uma evidência da influência significativa e da importância do trabalho deste matemático na geometria da época. Ao serem utilizadas as doutrinas e teoremas de Poncelet sem citá-lo, eles se tornam parte do patrimônio intelectual da disciplina, incorporados ao corpo de conhecimento compartilhado pelos matemáticos que o estudam.

Há uma resenha do livro no *Journal* de Terquem:

BULLETIN. TRAITÉ DE GÉOMÉTRIE ÉLÉMENTAIRE (1864) ²¹.

5.4 Prêmio PONCELET

A *Académie des Sciences* recebeu, em sua Sessão de 13 de abril de 1868, a seguinte carta:

²¹ Nouvelles annales de mathématiques 2re série, tome 5 (1866), p. 42

Sr. Presidente, Os sentimentos de respeito e carinho com que o general Poncelet nutria pela Academia inspiraram-lhe o desejo de estar sempre associado ao seu trabalho. Durante sua vida, e seus colegas que ele amava bem o sabem, ele não deixou um único momento de se ocupar com o progresso da ciência; em sua última hora, ele formou o desejo de ainda estar associado, após sua morte, ao desenvolvimento deles por um longo futuro.

Eu cumpro suas intenções colocando à disposição da Academia uma soma anual de dois mil e quinhentos francos, destinada a premiar o autor francês ou estrangeiro da obra mais importante para o progresso da Matemática pura ou aplicada, publicada no curso dos dez anos que terão precedido o julgamento da Academia. A partir desse momento, o capital que representa esta anuidade anual está assegurado depois de mim na Academia. Se não a renuncio hoje a favor dela, é porque encontrarei alguma doçura e alguma consolação, enquanto viver, em cuidar para que a renda que instituo seja depositada todos os anos, em nome do general e em memória de sua querida memória, o aniversário de sua morte, nas mãos do agente da Academia.

Tenho a honra de ser, etc. Mme Poncelet (MAINDRON, 1881, p.150)

A oferta realizada por Mme Poncelet foi aceita pela *Académie* por meio de um ato notarial em 25 de maio de 1868. Posteriormente, em 22 de agosto do mesmo ano, foi emitido um decreto que autorizou oficialmente a *Académie* a aceitar essa doação. O prêmio, que leva o nome de Poncelet, foi concedido pela primeira vez no ano seguinte, em 1869.

Mme Poncelet realizou uma nova doação à *Académie* em 12 de junho de 1876, oferecendo uma quantia para a compra anual de uma cópia das obras do General Poncelet, a ser concedida juntamente com o prêmio. Em 2 de dezembro de 1876, um novo decreto autorizou essa doação. O prêmio Poncelet foi fixado em dois mil francos e a *Académie* acrescentou uma medalha de bronze com as feições do general, bem como uma cópia de suas obras completas. Abaixo estão listados os laureados até o ano de 1880:

1869. ROBERT-MAYER (J.)

1870. JORDAN (G.)

1871. BOUSSINESQ (J.)

1872. MANNHEIM (H.)

1873. THOMSON (William)

1874. BRESSE

1875. DARBOUX (Gaston)

1876. KRETZ (Xavier)

1877. LAGUERRE

1878. LÉVY (Maurice)

1879. MOUTARD (Théodore)

1880 LÉAUTÉ

Mme Poncelet teve uma iniciativa importante ao criar o prêmio Poncelet, que representa um reconhecimento duradouro do legado intelectual deixado pelo General Poncelet. A adição das obras completas do General como parte do prêmio mostra a importância de preservar e

difundir o conhecimento e as contribuições acadêmicas de figuras históricas relevantes. Além disso, a lista dos laureados até 1880 dá uma ideia da pesquisa em matemática e física naquela época. Ao observarmos a lista de laureados do prêmio Poncelet, neste período, podemos constatar que esse ato faz parte de um processo de valorização do ilustre matemático. Notavelmente, a lista inclui os nomes de dois colaboradores de Poncelet na elaboração de suas obras completas, Mannheim e Moutard, bem como o nome de Kretz, que escreveria a segunda edição da obra de Mecânica de Poncelet.

além de homenagear o trabalho e legado do próprio Poncelet, também serviu como uma forma de reconhecimento e incentivo aos colaboradores que ajudaram a elaborar suas obras completas e divulgar seu trabalho. A inclusão de seus nomes na lista de laureados mostra a importância desses colaboradores e sua contribuição para o desenvolvimento da matemática. Além disso, o prêmio também pode ter servido como uma forma de estimular novas pesquisas e trabalhos na área, já que a premiação era concedida a trabalhos notáveis em matemática, física e engenharia.

5.5 Conclusão

Em nossa primeira seção, examinamos o interesse de Poncelet em disseminar as ideias de projeção na geometria como um meio de impulsionar a busca por novas soluções. Ao considerar o princípio de projeção, Poncelet observou que vários geômetras, tanto contemporâneos quanto antigos, usavam essa ferramenta, as vezes, de maneira implícita para resolver problemas. Dessa forma, Poncelet empregou esse princípio para resolver a questão de Hachette na *Correspondance sur l'École Polytechnique* sobre a tangência a três circunferências de círculo. Podemos perceber a dinâmica que Poncelet aplicou na solução do problema, utilizando o princípio de projeção.

Considere três cones circular reto, de alturas diferentes, que estão colocados lado a lado em um plano. Agora imagine uma esfera que está tocando os três cones ao mesmo tempo. Se você seccionar os cones e a esfera com um plano que seja perpendicular aos eixos dos cones, você terá uma figura neste plano que mostra três circunferências disjuntas e exteriores, representando os cones, e uma circunferência que representa a esfera. Essas quatro circunferências devem ser dispostas de forma que estejam tangenciando uma à outra em um arranjo conveniente.

Poncelet propôs uma ideia na qual, ao mover o plano que corta os cones até o vértice do cone mais baixo, a figura formada por três circunferências de círculo e uma circunferência da esfera, tangentes umas às outras em uma disposição conveniente, se transformaria em duas circunferências de círculo e um ponto tangenciados pela circunferência da esfera.

Para justificar a validade das propriedades geométricas ao aplicar o princípio de projeção, Poncelet precisou adotar um princípio de continuidade. Isso significa que ele assumiu que, mesmo com a mudança da figura após o deslocamento do plano de seção, as propriedades da figura original são mantidas. Esse princípio de continuidade é essencial para permitir a utilização do princípio de projeção na solução de problemas geométricos dinâmicos.

Dessa forma, fica evidente que o foco principal do trabalho de Poncelet é a utilização do princípio de projeção para analisar as propriedades das figuras geométricas. O título escolhido pelo autor deixa claro o objetivo do trabalho e mostra a importância que ele atribui ao uso da projeção na geometria. Além disso, a escolha do termo **propriedades projetivas das figuras** indica que a escolha de um sistema de projeção é indiferente, desde que seja observada o conceito de invariância e o princípio de continuidade de tal forma que justifiquem a validade das propriedades em diferentes sistemas de projeção.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Ao abordarmos a infância de Poncelet em Saint-Avold, fica evidente seu espírito de liderança que o conduziu à carreira militar. Posteriormente, ainda adolescente, retornou a Metz em 1804 para desenvolver seus estudos. Foi em Metz que iniciou formalmente sua vida acadêmica e realizou seus trabalhos mais importantes tanto em Geometria quanto em Mecânica. Durante a análise das escolas de ensino, enfatizamos a importância da *École Polytechnique*, que desempenhou um papel crucial na formação de Poncelet. Além disso, é notável a influência de Monge, uma vez que a geometria descritiva serviu como uma etapa intermediária em sua carreira de geômetra. Através dessa influência, Poncelet percebeu as propriedades projetivas que permeavam as soluções e os trabalhos dos geômetras.

Ao analisarmos as publicações de Poncelet no *Correspondance* durante seus anos na *École Polytechnique*, podemos constatar o notável conhecimento prévio que possuía antes do período de cativeiro em *Saratoff*. Suas soluções brilhantes e independentes revelam uma originalidade em seus métodos e uma forte predileção pela geometria. Em resumo, podemos afirmar que Poncelet já demonstrava sua genialidade desde sua formação acadêmica, o que o tornou um dos grandes nomes da Geometria.

Ao analisarmos a influência dos grandes matemáticos na formação de Poncelet, podemos perceber a importância de Monge e Carnot em sua trajetória. Em relação a Monge, foram três ideias essenciais que influenciaram Poncelet: a noção de projeção e transformação, a modificação das relações entre Análise e Geometria e a utilização implícita do princípio de continuidade. Essas ideias levaram Poncelet a perceber as propriedades projetivas que permeiam os trabalhos dos geômetras.

Por sua vez, a influência de Carnot foi observada tanto na geometria quanto nos trabalhos em mecânica. Poncelet também utilizou a analogia entre as transformações de uma figura e de um sistema mecânico, evidenciando a importância da influência de Carnot em sua formação. Ao percebermos essas influências em Poncelet, podemos entender como o matemático desenvolveu sua habilidade em encontrar soluções originais e independentes, que o levaram a se destacar em sua carreira.

Durante nossa análise dos cadernos de *Saratoff*, dos cadernos de Metz, do Tratado de 1822 e dos artigos publicados posteriormente até a ocupação da cadeira de Mecânica na *Académie des Sciences*, nosso objetivo foi estabelecer uma base para compreender todo o conjunto da obra geométrica de Poncelet. A partir desse ponto, nos propusemos a examinar como esse rico material estava sendo recebido e apropriado por diversos indivíduos, tanto na comunidade matemática quanto entre estudantes de concursos.

Buscamos obter informações por meio de três fontes distintas: a primeira delas foi o *Journal* de Terquem, onde nos interessava analisar como Poncelet era citado e qual a forma que suas doutrinas eram abordadas, ou seja, se utilizavam métodos sintéticos ou não para resolverem as questões apresentadas. Já a segunda fonte foram os livros que tratavam do tema de Geometria, com o objetivo de verificar se abordavam o assunto em questão, se a abordagem era analítica ou sintética e se faziam menção a Poncelet em seus conteúdos. A terceira fonte foi o *Aperçu* de Chasles. Julgamos interessante pois além de apresentar os trabalhos de Poncelet, Chasles também é um geômetra e do seu ponto de vista nos parece ser possível levantar algumas questões. Com essas análises, pudemos compreender melhor a recepção da obra de Poncelet na comunidade matemática e na formação acadêmica dos estudantes de concurso das escolas do governo.

Em um último momento, fomos verificar como se deu, após os anos de 1870, pouco tempo depois do falecimento de Poncelet, o uso de material que foi legado por Poncelet, além dos que citamos, a sua coletânea.

Existem algumas observações importantes a serem feitas sobre a divulgação da obra de Poncelet. Em primeiro lugar, é importante notar que ele não foi professor de Geometria, o que significa que não teve a oportunidade de disseminar sua produção por meio de aulas. Isso contrasta com a situação de Chasles, que era professor na Sorbonne e, portanto, tinha um ambiente propício para divulgar sua obra.

Além disso, é interessante notar que tanto a Geometria Projetiva quanto a Geometria Descritiva têm uma aplicabilidade muito grande, especialmente na Mecânica. Isso sugere que essas áreas da Geometria poderiam ter sido mais amplamente divulgadas entre os artesãos e trabalhadores da época, que poderiam ter se beneficiado dessas ferramentas matemáticas em seu trabalho.

Ademais, é importante notar que o ensino nas classes especiais era moldado pelas demandas dos concursos aos quais os estudantes se destinavam. Como o principal concurso era o da *École Polytechnique*, e as questões de Matemática frequentemente envolviam Geometria Analítica, não é surpreendente que houvesse poucas soluções sintéticas nos jornais e livros da época.

Feitas as observações passemos as conclusões:

Observamos que após 1842, ano do início do *Nouvelles Annales de Mathématiques*, *Journal* de Terquem, onde Poncelet é citado algumas vezes, possui as resoluções das questões, geralmente, desenvolvida de forma analítica. Este periódico é voltado aos candidatos à *École Polytechnique*.

Não encontramos no *Journal de Terquem* muitas soluções sintéticas e o próprio editor fará um desabafo ao fazer a resenha do livro de Page ele dirá que o livro de Page poderia ter incluído proposições que faltam. Outra crítica é a ausência do belo teorema de Poncelet, que estabelece que duas cônicas que estão no mesmo plano têm uma relação especial, onde o polo da segunda é encontrado em relação à primeira. Terquem reclama que o livro não apresenta este teorema e credita sua autoria a Poncelet.

Terquem faz uma nota relevante sobre a demonstração de um teorema de Poncelet por Jubé. Segundo Terquem (TERQUEM, 1845, p.272), a demonstração de Jubé é exatamente a mesma que Gérono. Embora Jubé não tenha mencionado que o teorema é de Poncelet, Terquem faz justiça ao lembrar que o teorema é de autoria de Poncelet. Isso destaca a reclamação de Poncelet de que seus teoremas e doutrinas não eram referenciados pelos autores daquele período.

No texto acima pode-se observar o quanto o editor ficou indignado com a falta de referência.

Terquem faz um desabafo que julgo ser interessante repetir aqui:

Essas diversas teorias que ocupavam um lugar tão grande entre os antigos desapareceram com razão dos escritos dos geométricos do século XVIII; os avanços da geometria contemporânea tornam novamente necessária a introdução dessas teorias, cuja ausência deve agora ser apontada como uma verdadeira lacuna; e até mesmo em certos aspectos, como uma falta de patriotismo, porque a nova direção dada aos estudos geométricos é devida a cientistas franceses, como Servois, Brianchon, Poncelet, Chasles, etc. (TERQUEM, 1846, p.384)

É lamentável perceber que, muitas vezes, grandes mentes e suas contribuições para a ciência passam despercebidas ou não recebem o devido reconhecimento. Infelizmente, esse foi o caso de muitos matemáticos franceses, inclusive de suas doutrinas e teoremas. Esse cenário não foi diferente para os trabalhos de Poncelet, mesmo tendo sido citado por Terquem. É importante destacar a relevância das contribuições de Poncelet para a Geometria Projetiva e o fato de suas ideias terem sido fundamentais para o desenvolvimento dessa área da matemática. No entanto, a falta de reconhecimento na época não diminui o valor de suas descobertas e, hoje, sua obra é amplamente estudada e reconhecida por matemáticos e estudantes.

Ao analisarmos as edições do *Journal* de Terquem e do *Aperçu* de Chasles, podemos notar a relevância do nome de Poncelet na comunidade matemática da época. São 173 artigos no *Journal* e 33 no *Aperçu*, o que demonstra que seu legado foi bastante explorado e estudado pelos matemáticos da época. É interessante ressaltar que, apesar disso, muitas vezes o trabalho de Poncelet não recebeu o reconhecimento merecido, o que é um reflexo da própria dinâmica da comunidade científica e da valorização dada a certas áreas e correntes de pensamento. No entanto, é inegável a importância e a contribuição de Poncelet para a geometria projetiva e para a matemática em geral. Caracterizando uma patrimonialização.

É interessante destacar que essa patrimonialização não ocorre apenas na matemática, mas em diversas áreas do conhecimento. Quando um autor ou uma obra se torna um patrimônio, ela transcende o tempo e o espaço em que foi produzida e passa a ser uma referência perene para

as gerações futuras. No caso de Poncelet, sua obra é utilizada como referência na geometria projetiva e mesmo sendo pouco citado nos livros didáticos, é reconhecido como um importante contribuinte para o desenvolvimento da área. A patrimonialização da obra de Poncelet é uma prova da sua relevância e da importância do seu legado para a matemática e para a humanidade como um todo.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BELHOSTE, B. De l'école polytechnique à saratoff, les premiers travaux géométriques de poncelet. **Bulletin de la Sabix. Société des amis de la Bibliothèque et de l'Histoire de l'École polytechnique**, SABIX, n. 19, p. 9–29, 1998.

BERTRAND, J. **Éloge historique de Jean-Victor Poncelet**. [S.l.]: Institut de France, 1875.

BOUCARD, J.; VERDIER, N. Circulations mathématiques et congruences dans les périodiques de la première moitié du xix^e siècle. **Philosophia Scientiæ. Travaux d'histoire et de philosophie des sciences**, Université Nancy 2, n. 19-2, p. 57–78, 2015.

BRIANCHON, C. J. Mémoires sur les lignes du second ordre. **Correspondance sur l'École polytechnique, Treizième cahier, Tome VI**, p. 297–311, 1806.

_____. Solution de plusieurs problèmes de géométrie. **Correspondance sur l'École polytechnique, Dixième cahier, Tome IV**, p. 1–15, 1810.

_____. **Mémoires sur les lignes du second ordre**. Paris: Chez Bachelier, Libraire, 1817.

CARNOT, L. N. M. **De la corrélation des figures de géométrie**. [S.l.]: De l, 1801.

_____. **Géométrie de position**. [S.l.]: Imprimerie de Crapelet, 1803.

CHABAUD-LATOUR, F.-E.-H. d. **Discours prononcés aux funérailles de M. le général Poncelet, le mardi 24 décembre 1867**. (Paris), 1868. 29 p. Disponível em: <<http://catalogue.bnf.fr/ark:/12148/cb39365141f>>.

CHASLES, M. **Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie**. Bruxelles: M. Hayez, Imprimeur De L'Académie Royale, 1837.

_____. **Rapport sur les progrès de la géométrie**. [S.l.]: Imprimerie nationale, 1870. v. 20.

CHATZIS, K. Les cours de mécanique appliquée de Jean-Victor Poncelet à l'école de l'artillerie et du génie et à la Sorbonne, 1825-1848. **Histoire de l'éducation**, ENSL, n. 120, p. 113–138, 2008.

CHAVES, J. A.; GRIMBERG, G. E. O tratado sobre as propriedades projetivas das figuras de Jean-Victor Poncelet: elementos de uma gênese. **Revista Brasileira de História da Matemática**, v. 14, p. 85–106, 2014.

_____. A concepção geométrica de mannheim nos escritos de poncelet. In: **16º Seminário Nacional de História da Ciência e da Tecnologia**. Campina Grande: [s.n.], 2018.

_____. Poncelet et les points imaginaires à l'infini. In: **37ème Congrès de l'ASPLF**. Rio de Janeiro: [s.n.], 2018.

_____. Os pontos imaginários nas obras de poncelet, chasles e laguerre. **LLULL (Madrid)**, v. 43, p. 69–98, 2020.

COMBEROUSSE, C. **Cours de mathématiques**. [S.l.]: Mallet-Bachelier, 1861.

DIDION, I. **Notice sur la vie et les ouvrages du général J.-V. Poncelet**. [S.l.]: Gauthier-Villars, 1869.

DUMAS, J.-B. **Discours prononcés aux funérailles de M. le général Poncelet, le mardi 24 décembre 1867**. (Paris), 1868. 29 p. Disponível em: <<http://catalogue.bnf.fr/ark:/12148/cb39365141f>>.

DUPIN, P. C. F. Memoire sur la description des lignes et des surfaces du second degre. **Journal de l'École Polytechnique**, v. 14, p. 45–83, 1808.

_____. **Développements de géometrie, avec des applications à la stabilité des vaisseaux, aux déblais et remblais, au défilement, à l'optique, etc. ouvrage approuvé par l'institut de France, pour faire suite a la geometrie descriptive et a la geometrie analytique de M. Monge:... par Ch. Dupin...** [S.l.]: m. me ve Courcier, imprimeur-libraire pour les mathématiques, quai des Augustins, 1813.

_____. **Géométrie et mécanique des arts et métiers et des beaux-arts: cours normal...** [S.l.: s.n.], 1826.

_____. **Discours prononcés aux funérailles de M. le général Poncelet, le mardi 24 décembre 1867**. (Paris), 1868. 29 p. Disponível em: <<http://catalogue.bnf.fr/ark:/12148/cb39365141f>>.

EHRHARDT, C.; BRUNEAU, O.; (D'), R. E. Patrimonialisation des mathématiques (xviii-xxe siècles). **Philosophia Scientiae**, v. 26, n. 2, p. 5–17, 2022. Disponível em: <<https://www.cairn.info/revue--2022-2-page-5.htm>>.

FAURE. Bibliographie. **Nouvelles annales de mathématiques: journal des candidats aux écoles polytechnique et normale**, v. 17, n. 1, p. 26–29, 1858.

FRIEDELMEYER, J.-P. Le théorème de clôture de poncelet, une démonstration «imparfaite», qui fait toute une histoire. **Évelyne Barbin et Dominique Bénard, éditeurs: Histoire et enseignement des mathématiques–Rigueurs, erreurs, raisonnements**, p. 229–261, 2007.

_____. L'impulsion originelle de poncelet dans l'invention de la géométrie. In: _____. **Eléments d'une biographie de l'espace projectif**. [S.l.]: PUN, 2010. (Histoires de géométries), p. 55–158. ISBN 978-2-8143-0032-3.

GERGONNE, J. D. Description des sections coniques, par les intersections continues de leurs tangentes. **Annales de mathématiques pures et appliquées**, v. 5, p. 49–51, 1814.

_____. Géométrie analitique. recherche du cercle qui en touche trois autres sur un plan. In: **Annales de mathématiques pures et appliquées**. [S.l.: s.n.], 1817. v. 7, p. 289–303.

_____. Géométrie de la règle. solution et construction, par la géométrie analytique, de deux problèmes dépendant de la géométrie de la règle. In: **Annales de mathématiques pures et appliquées**. [S.l.: s.n.], 1817. v. 7, p. 325–334.

_____. Annales de mathématiques pures et appliquées. t. 8.(1817-1818)(Annales de Gergonne). In: IMPRIMERIE DE P. DURAND BELLE NIMES, 1818 FORMAT: 406 P. ISSN: 1764-7843. **Annales de mathématiques pures et appliquées**. [S.l.], 1818. v. 8, p. 1817–1818.

_____. Considérations philosophiques sur les éléments de la science de l'étendue. **Annales de mathématiques pures et appliquées**, v. 16, p. 209–231, 1825.

GOLDSTEIN, C.; SCHAPPACHER, N.; SCHWERMER, J. **The shaping of arithmetic after CF Gauss's Disquisitiones Arithmeticae**. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2007.

GRIMBERG, G. E.; CHAVES, J. A.; FERREIRA, M. L. **Geometria da Régua: As Construções de Jean-Victor Poncelet**. 1. ed. São Paulo: Livraria da Física, 2021. 116 p.

HACHETTE, J. N. P. **Correspondance sur l'Ecole Polytechnique**. [S.l.: s.n.], 1813.

HAUSER, S. Analyse d'ouvrages. **Nouvelles annales de mathématiques: journal des candidats aux écoles polytechnique et normale**, v. 5, n. 2, p. 42–47, 1866.

HERMITE, M. Lieu géométrique des pôles d'une section conique, par rapport à une autre. **Nouvelles annales de mathématiques: journal des candidats aux écoles polytechnique et normale**, v. 1, n. 1, p. 263, 1842.

KRETZ, M. Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques. **Bull. des Sciences math.**, v. 6, 1874.

LAURENTIN, J. **Fidélités et reconstructions, l'exemple de l'école géométrique française de Gaspard Monge (1771-1816)**. Tese (Doutorado) — Paris, EHESS, 2000.

LENTHÉRIC, J. Théorie générale des pôles, polaires, etc. **Nouvelles annales de mathématiques: journal des candidats aux écoles polytechnique et normale**, v. 7, n. 1, p. 373–385, 1848.

_____. Théorie générale des polaires reciproques planes. **Nouvelles annales de mathématiques: journal des candidats aux écoles polytechnique et normale**, v. 8, n. 1, p. 252–266, 1849.

_____. **Exposition élémentaire des diverses théories de la géométrie moderne**. [S.l.]: Gauthier-Villars, 1874.

L'HOSPITAL, G.-F.-A. d. **Traité analytique des sections coniques et de leur usage pour la résolution des équations... ouvrage posthume de M. le marquis de L'Hospital**. monographie imprimée. Paris: Moutard, 1776. II-463 p. Consultable en ligne. Disponible em: <<http://catalogue.bnf.fr/ark:/12148/cb308155356>>.

LONGCHAMPS, G. Gohierre de. Géométrie analytique à deux dimensions. In: _____. **Cours de mathématiques spéciales**. [S.l.]: Paris: Delagrave, 1884. T. 2.

LORENAT, J. Figures real, imagined, and missing in poncelet, plücker, and gergonne. **Historia Mathematica**, Elsevier, v. 42, n. 2, p. 155–192, 2015.

MAINDRON, E. **Les fondations de prix à l'Académie des Sciences: Les lauréats de l'Académie, 1714-1880**. [S.l.]: Gauthier-Villars, 1881.

MANNHEIM, A. **Transformation des propriétés métriques des figures à l'aide de la théorie des polaires réciproques**. [S.l.]: Mallet-Bachelier, 1857.

MILLET, L. A. **Principales méthodes de géométrie moderne**. [S.l.]: Deverdun, 1870.

NABONNAND, P. **Contributions à l'histoire de la géométrie projective au 19e siècle**. HAL, 2006. Accessed on 2023-05-02. Disponible em: <<https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-010822/>>.

_____. L'étude des propriétés projectives des figures par poncelet: une modernité explicitement ancrée dans la tradition. In: GILAIN, C.; GUILBAUD, A. (Ed.). **Sciences mathématiques 1750-1850**. [S.l.]: CNRS Editions, 2015. p. 381–402.

_____. Utiliser des éléments imaginaires en géométrie: Carnot, poncelet, von staudt et chasles. In: _____. **Eléments d'une biographie de l'espace géométrique**. PUN-Edulor, 2016. (Histoires de géométries), p. 69–105. ISBN 978-2-8143-0269-3. HAL Id: hal-01264479. Disponible em: <<https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01264479/>>.

NABONNAND, P.; PEIFFER, J.; GISPERT, H. Circulations et échanges mathématiques (18e–20e siècles). **Philosophia Scientiæ. Travaux d'histoire et de philosophie des sciences**, Université Nancy 2, n. 19-2, p. 7–16, 2015.

NABONNAND, P.; ROLLET, L. 1842-1927 : les nouvelles annales de mathématiques, journal des candidats aux écoles spéciales. In: **Séminaire d'histoire des mathématiques de l'Institut Henri Poincaré**. Paris, France: [s.n.], 2009. Disponible em: <<https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00564051/>>.

PAINVIN, L. F. Théorème sur les coniques inscrites dans un quadrilatère. **Nouvelles annales de mathématiques: journal des candidats aux écoles polytechnique et normale**, v. 2, n. 2, p. 156–172, 1863.

_____. **Principes de la géométrie analytique**. [S.l.]: Impr. Robaut, 1866.

PICQUET, H. **Traité de géométrie analytique à l'usage des candidats aux Écoles du gouvernement et aux grades universitaires**. [S.l.]: Paris : Masson, 1882.

PONCELET, J.-V. Correspondance. lettre de m. poncelet, capitaine du génie, ancien élève de l'école polytechnique. **Annales de mathématiques pures et appliquées**, v. 8, p. 68, 1817.

_____. Géométrie des courbes. théorèmes nouveaux sur les lignes du second ordre. In: **Annales de mathématiques pures et appliquées**. [S.l.: s.n.], 1817. v. 8, p. 1–14.

_____. Philosophie mathématique. In: **Annales de mathématiques pures et appliquées**. [S.l.: s.n.], 1817. v. 8, n. 1817-1818, p. 141–155.

_____. Questions résolues. In: **Annales de mathématiques pures et appliquées**. [S.l.: s.n.], 1817. v. 8, n. 1817-1818, p. 201–232.

_____. R'eflexions sur l'usage de l'analyse alg'ebrique dans la g'eom'etrie ; suivies de la solution de quelques probl'emes d'ependant de la g'eom'etrie de la r'egle. **Annales de math'ematiques pures et appliqué'es**, v. 8, p. 161–202, 1817–1818.

_____. **Traite sur les Proprietes des Figures**. Paris: Bachelier, 1822.

_____. **Application d'Analyse et Géométrie I**. [S.l.]: Mallet-Bachelier, 1862.

_____. **Applications d'analyse et de géométrie: qui ont servi de principal fondement au traité des propriétés projectives des figures.** [S.l.]: Gauthier-Villars, 1864.

PROUHET, E. Bibliographie. **Nouvelles annales de mathématiques: journal des candidats aux écoles polytechnique et normale**, v. 15, n. 1, p. 98–101, 1856.

PRUVOST, E. **Leçons de géométrie analytique à l'usage des élèves de la classe de mathématiques spéciales et des candidats à l'École Normale Supérieure et à l'École Polytechnique.** [S.l.]: Paris: Dupont, 1886.

RADAU, R. Essais et notices. le général poncelet. **Revue des Deux Mondes (1829-1971)**, JSTOR, v. 74, n. 4, p. 1045–1054, 1868.

ROLLAND, E. **Discours prononcés aux funérailles de M. le général Poncelet, le mardi 24 décembre 1867.** (Paris), 1868. 29 p. Disponível em: <<http://catalogue.bnf.fr/ark:/12148/cb39365141f>>.

ROUCHÉ, E.; COMBEROUSSE, C. de. **Traité de géométrie élémentaire.**[1866. [S.l.]: Gauthier-Villars, 1866.

SALMON, G. **A Treatise on Conic Sections: Containing an Account of Some of the Most Important Modern Algebraic and Geometric Methods.** Londres: Longman, Brown, Green, and Longmans, 1855. 324 p.

_____. **Traité de géométrie analytique: sections coniques.** [S.l.]: Gauthier-Villars et fils, 1870.

SANTOS, C. Haubrichs dos. **Étienne Bobillier (1798-1840): parcours mathématique, enseignant et professionnel.** Tese (Doutorado) — Université de Lorraine, 2015.

SERRET, P. Sur un théorème de la théorie des propriétés projectives de m. poncelet. **Nouvelles annales de mathématiques: journal des candidats aux écoles polytechnique et normale**, v. 1, n. 7, p. 196–199, 1848.

_____. **Des méthodes en géométrie.** [S.l.]: Mallet-Bachelier, 1855.

_____. Note sur le cercle tangent à trois cercles donnés. **Nouvelles annales de mathématiques: journal des candidats aux écoles polytechnique et normale**, v. 2, n. 2, p. 95–97, 1863.

SERVOIS, F.-J. **Solutions peu connues de différens problèmes de géométrie-pratique.** [S.l.]: Devilly; Paris: Courcier, 1805.

_____. Solution du premier des deux problèmes proposés à. In: **Annales de mathématiques pures et appliquées.** [S.l.: s.n.], 1810. v. 1, n. 1810-1811, p. 337–341.

TERQUEM, O. Analyse d'ouvrages. **Nouvelles annales de mathématiques: journal des candidats aux écoles polytechnique et normale**, v. 1, n. 1, p. 204–213, 1842.

_____. Considérations sur le triangle rectiligne, d'après euler. **Nouvelles annales de mathématiques: journal des candidats aux écoles polytechnique et normale**, v. 1, n. 1, p. 79–87, 1842.

_____. Note sur un triple emploi. **Nouvelles annales de mathématiques: journal des candidats aux écoles polytechnique et normale**, v. 4, n. 1, 1845.

_____. Bibliographie. **Nouvelles annales de mathématiques: journal des candidats aux écoles polytechnique et normale**, v. 5, n. 1, p. 415–418, 1846.

_____. Correspondance. In: **Nouvelles annales de mathématiques: journal des candidats aux écoles polytechnique et normale**. [S.l.: s.n.], 1851. v. 10, n. 1, p. 296.

_____. Bibliographie. **Nouvelles annales de mathématiques: journal des candidats aux écoles polytechnique et normale**, v. 18, n. 1, p. 51–59, 1859.

_____. Sur diverses geometries. **Nouvelles annales de mathématiques: journal des candidats aux écoles polytechnique et normale**, v. 18, n. 1, p. 445–446, 1859.

_____. Note du rédacteur. **Nouvelles annales de mathématiques: journal des candidats aux écoles polytechnique et normale**, v. 20, n. 1, p. 11–13, 1861.

TOURS, L. Gaultier de. Sur les moyens généraux de construire graphiquement un cercle déterminé par trois conditions, et une sphère déterminée par quatre conditions. **XVI^e journal de l'École Polytechnique**, p. 124–130, 1813.

TRIBOUT, H. **Henri Tribout. Un grand savant, Le Général Jean-Victor Poncelet: 1788-1867. Préface de Maurice d'Ocagne,...** [S.l.]: G. Saffroy (Impr."Au Calame"), 1936.

VERDIER, N. Les journaux de mathématiques dans la première moitié du xixe siècle en europe. **Philosophia Scientiæ. Travaux d'histoire et de philosophie des sciences**, Université Nancy 2, n. 13-2, p. 97–126, 2009.

Anexos

Histórico militar de Poncelet

R. U.

MINISTÈRE DE LA GUERRE. RÉPUBLIQUE FRANÇAISE.

MINISTÈRE DE LA GUERRE
ARCHIVES ADMINISTRATIVES

RELEVÉ DE SERVICES.

Enreg. n° 1070.50 EXTRAIT des registres matricules et documents déposés au Ministère.

NOM ET SIGNALEMENT MILITAIRE.	DÉTAIL DES SERVICES.
PONCELET	Elève à l'Ecole Polytechnique 1 ^{er} Nov. 1807
Jean, Victor	S/lieutenant élève du génie à l'Ecole d'application de Metz le 1 ^{er} Oct. 1810
né le 1 ^{er} Juillet 1788	Lieutenant en 1 ^{er} à l'île de Motonorm le 11 Fév. 1812
à METZ	à la Grande Armée le 17 Juin 1812
(Moselle).	Prisonnier de guerre à Krasnoe 18 Nov. 1812
	Classé à l'Etat-Major du génie 1 ^{er} Jan. 1813
	Capitaine en second de sapeurs 2 Juil. 1813
	- d ^e - 1 ^{er} 24 Déc. 1813
	- d ^e - à l'Etat- Major du génie le 4 Août 1814
	Rentré des prisons du génie le 7 Sept. 1814
	Employé à Metz le 21 Sept. 1814
	Employé à l'Arsenal du génie à Metz le 24 Fév. 1815
	En mission pour la reconnais- sance du département de la Moselle le 10 Mai 1815
	Employé à Metz le 15 Juin 1815
	Capitaine le 1 ^{re} classe le 4 Jan. 1822
	Professeur de mécanique à l'Ecole d'application de Metz 1 ^{er} Mai 1824
	Chef de bataillon le 16 Jan. 1831

Délivré à M. DORVEAUX
Archiviste de l'Académie des Sciences
en réponse à sa PARIS

4005-183-1925. [30350]

Figura A.1 – Histórico militar

DETAIL DES SERVICES.	
Attaché au Comité des Fortifications le	6 Mars 1835
Lieutenant-colonel le	13 Mars 1841
Colonel le	12 Mai 1844
Général de brigade le	19 Avr. 1848
Commandant de l'Ecole polytechnique le	29 Avr. 1848
Admis à la retraite le	21 Juin 1850
Relevé de la retraite et placé dans le Section de réserve le	1 ^o Jap. 1853
Décédé à Paris le	23 Déc. 1857
CAMPAGNES	
1812, Watcheren et Russie - 1813 - captivité 1814 1816 défense et blocus de Metz .	
DECORATIONS	
Chevalier de la Légion d'honneur le	14 Février 1815
Officier - d ^o -	30 Mai 1837
Commandeur - d ^o -	10 Déc. 1850
Grand Officier - d ^o -	9 Juillet 1853
Chevalier de Saint-Louis le	29 Oct. 1826

Figura A.2 – Histórico militar

Obs.: A data de falecimento de Poncelet possui um erro de digitação, no lugar de 1857 deveria estar 1867.