



UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA - IM/UFRJ
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE MATEMÁTICA

AS MÉTRICAS DE CAYLEY E SEUS DESDOBRAMENTOS (1857-1895)

LEANDRO SILVA DIAS

Orientador: Prof. Dr. Gérard Emile Grimberg
Universidade Federal do Rio de Janeiro - UFRJ

Coorientador: Prof. Dr. Philippe Nabonnand
Université de Lorraine

RIO DE JANEIRO
FEVEREIRO DE 2023

LEANDRO SILVA DIAS

**AS MÉTRICAS DE CAYLEY E SEUS DESDOBRAMENTOS
(1857-1895)**

Tese de Doutorado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como requisito parcial para obtenção do título de Doutor em Ensino e História da Matemática e da Física.

Orientador: Prof. Dr. Gérard Emile Grimberg
Universidade Federal do Rio de Janeiro - UFRJ

Coorientador: Prof. Dr. Philippe Nabonnand
Université de Lorraine

RIO DE JANEIRO
FEVEREIRO DE 2023

CIP - Catalogação na Publicação

D541m Dias, Leandro Silva
 As métricas de Cayley e seus desdobramentos
 (1857-1895) / Leandro Silva Dias. -- Rio de
 Janeiro, 2023.
 168 f.

 Orientador: Gérard Emile Grimberg.
 Coorientador: Philippe Nabonnand.
 Tese (doutorado) - Universidade Federal do Rio
 de Janeiro, Instituto de Matemática, Programa de Pós
 Graduação em Ensino de Matemática, 2023.

 1. Cayley. 2. Klein. 3. Perpendicularidade. 4.
 Métrica. 5. Recepção. I. Grimberg, Gérard Emile,
 orient. II. Nabonnand, Philippe, coorient. III.
 Título.

AS MÉTRICAS DE CAYLEY E SEUS DESDOBRAMENTOS (1857-1895)

LEANDRO SILVA DIAS

Tese de Doutorado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como requisito parcial para obtenção do título de Doutor em Ensino e História da Matemática e da Física.

Aprovada em 27 de Fevereiro de 2023

Assinaturas dispensadas, resolução CEPG/UFRJ N° 128, de 11/11/2022.

Prof. Dr. Gérard Emile Grimberg
UFRJ (Orientador)

Prof. Dr. Philippe Nabonnand
Université de Lorraine (Coorientador)

Prof. Dr. Thiago Hartz
UFRJ

Prof. Dr. Rogério Monteiro de Siqueira
USP

Prof. Dr. Marcos Vieira Teixeira
UNESP - Rio Claro

RIO DE JANEIRO
FEVEREIRO DE 2023

Dedico ao meu pai, **José Carlos Pacheco Dias**
(*in memoriam*), que sempre esteve presente nos
momentos de dificuldades e alegrias.

Agradecimentos

Como em toda tarefa de longo prazo, dificuldades, imprevistos, infelicidades e obstáculos surgem no caminho, além de difíceis escolhas e momentos de dúvidas e incertezas. Agradeço a Deus e a todos que me ajudaram, por ter vencido dificuldades e poder terminar este trabalho. São diversas pessoas que participaram direta ou indiretamente da produção desta tese, além de instituições que contribuíram nesse percurso, sem as quais este trabalho não seria possível.

À minha mãe, **Isabel Leocadia Silva Dias**, grande incentivadora, companheira e apoiadora.

À minha esposa, **Giselle Eler Amorim Dias**, companheira de caminhada que sempre me apoiou e, com paciência, soube enfrentar as dificuldades ao meu lado.

Ao meu orientador, **Gérard Emile Grimberg**, que sempre me incentivou nas pesquisas em história da matemática e por ter acreditado no meu trabalho, além de contribuir com ricas orientações, sempre cordiais, empolgantes. *Cher maître, Merci Beaucoup!*

A **Philippe Nabonnand**, meu coorientador, pela acolhida no período que fiquei em Nancy e pelas ricas oportunidades de orientação, sempre com muita paciência e ótimas ideias. *Merci Beaucoup!*

À banca que avaliou este trabalho, pelas orientações e sugestões, por ter aceitado a tarefa de ler e de fazer indicações, enfim, por tudo.

Ao meu amigo e companheiro de jornada acadêmica, **Jansley Alves Chaves**, pelos momentos que trocamos informações de pesquisa, pela companhia e amizade, pela parceria nos congressos e, especialmente, pelo período que convivemos na França, em Nancy, por conta das pesquisas do doutorado. Sou grato pela sua amizade, com certeza esta tese deve muito a você, meu amigo.

Ao grupo de pesquisa sobre geometria do século XIX, liderado pelo professor **Gérard Emile Grimberg**. Aos amigos: **Jansley Alves Chaves, Magno, Daniel, Ana Clara, João Victor, Jonatham e Lucas**, pelas animadas reuniões semanais, muito produtivas, e pelas trocas de informação, muito obrigado.

Aos **amigos do programa de Pós-graduação em Ensino de Matemática (Pemat)**,

muito obrigado pela convivência e pelas trocas de ideias. Aos professores do programa, que contribuíram na minha formação. Aos **colegas e professores do seminário da linha de História da Matemática**, pelas frutíferas discussões e conversas.

À equipe dos *Archives Henry Poincaré*, pela receptividade e toda colaboração no período de minha estadia na cidade de Nancy, França, de junho de 2019 a fevereiro de 2020. Especialmente a **Philippe Nabonnand, Pierre Edouard Bour, Ramatoulaye Toure, Geneviève Schwartz e Pierre Willaime**, que muito me ajudaram na estadia em Nancy. *Merci Beaucoup!*

À equipe da *Unité de Recherche Animal et Fonctionnalités des Produits Animaux* da *Université de Lorraine*, no nome do seu diretor, professor **Pascal Fontaine**, dos professores **Sylvain Milla e Marielle Thomas**, por terem recebido minha esposa, Giselle Dias, como pesquisadora durante nossa estadia em Nancy. *Merci Beaucoup!*

Aos colegas e a toda equipe do **Instituto Federal do Rio de Janeiro (IFRJ)**, em especial ao campus Volta Redonda. Por toda parceria, por ter sido liberado por dois anos para poder me dedicar ao doutorado, muito obrigado.

Aos meus amigos: **Catalina Ruano, Thiago Dorini, Iury Domingos e Paulo Guedes Fontes**. Muito obrigado por tudo, principalmente pela convivência em Nancy.

Ao meu psicólogo, **Jeferson Oliveira**, pelas sessões de terapia que me ajudaram a enfrentar os desafios dos últimos dois anos de doutorado. Sua contribuição foi essencial.

Resumo

O objetivo desta tese é de elucidar como se deu o desenvolvimento das métricas de Cayley, além de reconstruir os contextos de recepção e circulação do trabalho matemático, explícita ou implicitamente, invocado na dinâmica dos desenvolvimentos relativos à noção de métrica. Com isso, esclarecemos como se desenvolveram os conceitos necessários para o estabelecimento das métricas de Cayley, no século XIX. Investigamos como isso ocorreu e como participam os diversos matemáticos envolvidos em pesquisas sobre estes conceitos relacionados às métricas. Além disso, analisamos a recepção destas pelas comunidades matemáticas, dando destaque à britânica, à francesa, à alemã e à italiana. Para isso, nos perguntamos como se deu a gênese do conceito de métrica de Cayley e como ela foi recebida na segunda metade do século XIX nessas comunidades matemáticas. Para responder à primeira questão, analisamos as condições de nascimento da teoria dos invariantes. Os trabalhos de diversos matemáticos britânicos foram analisados e, a partir daí, a metodologia das “redes de textos” nos ajudou a entender o contexto de produção matemática. Como o trabalho principal se dá no contexto dessa teoria, igualmente estudamos a construção da visão geométrica de Cayley acerca do trabalho algébrico com os invariantes de polinômios homogêneos. Encontramos uma relação próxima com o trabalho dos matemáticos Plücker e Hesse, no que diz respeito à teoria das cônicas na forma analítica, com uso das coordenadas homogêneas. A partir deste contexto, construímos uma apresentação da sexta memória sobre os *quantics*, entrando no texto e esclarecendo a gênese da construção das métricas de Cayley. A recepção foi estudada, no caso inglês, através da análise dos principais periódicos daquele período, concluindo que o principal matemático em relação à recepção foi Clifford. Já no caso Alemão, partimos do artigo sobre as geometrias não euclidianas de Klein, vendo as diferenças em relação à abordagem de Cayley. Na França, apresentamos como se deu o interesse pelo tema nos periódicos e apontamos aspectos interessantes na obra de Darboux sobre geometria analítica. Também analisamos os dez primeiros anos do jornal de Battaglini, onde encontramos referências às métricas de Cayley. Por fim, explicitamos todos os aspectos nos quais esta tese contribui à história da matemática no que se trata das métricas de Cayley.

Palavras-chave: Cayley. Klein. Perpendicularidade. Métrica. Recepção.

Abstract

The objective of this thesis is to elucidate how the development of Cayley's metrics took place, in addition to reconstructing the contexts of reception and circulation of the mathematical work, explicitly or implicitly, invoked in the dynamics of developments related to the notion of metric. Through this investigation, we aim to shed light on the development of the concepts necessary for the establishment of Cayley's metrics in the 19th century. We examined the process by which these concepts were developed and how the mathematicians involved in research on metrics participated in this process. In addition to the reception of these by the mathematical community, especially British, French, German and Italian. For this, we ask ourselves how the genesis of Cayley's concept of metric took place. Also, how it was received in the second half of the 19th century in these mathematical communities. To answer the first question, we analyze the birth conditions of the theory of invariants. The works of several British mathematicians were analyzed and the methodology of "text networks" helped us to understand the context of mathematical production. As the main work takes place in the context of this theory, we also study the construction of Cayley's geometric vision about the algebraic work with the invariants of homogeneous polynomials. Where we find a close relationship with the work of mathematicians Plücker and Hesse, about the theory of conics in analytical form, with the use of homogeneous coordinates. From this context, we build a presentation of the sixth memory upon quantics, entering the text and clarifying the genesis of the construction of Cayley's metrics. Reception was studied, in the English case, through the analysis of the main journals of that period, concluding that the main mathematician in relation to reception was Clifford. In the German case, we start from Klein's article on non-Euclidean geometries, seeing the differences with Cayley's approach. In France, we present how the interest in the subject took place in the periodicals and point out interesting aspects in Darboux's work on analytic geometry. We also analyzed the first ten years of Battaglini's journal, where we discovered references to Cayley's metrics. Finally, we explain all the aspects in which this thesis contributes to the history of mathematics in terms of Cayley's metrics.

Keywords: Cayley. Klein. Perpendicularity. Metric. Reception.

Lista de Figuras

Figura 2.1 – Arthur Cayley	15
Figura 2.2 – James Joseph Sylvester	55
Figura 2.3 – George Salmon	57
Figura 2.4 – Rede de Textos	59
Figura 3.1 – Modelo da reta projetiva	71
Figura 3.2 – Modelo da geometria esférica	77
Figura 3.3 – Diagrama de Cayley	80
Figura 4.1 – Robert Tucker	91
Figura 4.2 – William Kingdon Clifford	92
Figura 4.3 – Thomas Archer Hirst	93
Figura 4.4 – William Spottiswoode	94
Figura 4.5 – Norman Macleod Ferrers	95
Figura 4.6 – Ilustração reta	102
Figura 4.7 – Otto Wilhelm Fiedler	109
Figura 4.8 – Jean-Gaston Darboux	119

Lista de Tabelas

Tabela 4.1 – Lista de artigos B4f do <i>Cellule MathDoc</i>	90
Tabela 4.2 – Lista de artigos do <i>Giornale di Matematiche</i>	117
Tabela B.1 – Textos que compõe a rede sobre a recepção da geometria de Cayley.	148
Tabela B.2 – Quantidade de textos por autores.	148
Tabela B.3 – Quantidade de textos por ano.	149
Tabela B.4 – Mencionado e quem menciona	150
Tabela B.5 – Rubricas ou assuntos da rede.	150
Tabela B.6 – Textos por periódico.	151
Tabela B.7 – Textos citados na rede	154

Sobre as traduções, nomenclaturas e abreviações

Citações em língua estrangeira

As citações, no corpo do texto, estão em português. Todas as traduções foram feitas por mim, pois quase a totalidade dos textos não possui tradução prévia. As respectivas transcrições, na língua original, ficam nas notas de rodapé.

Nomenclaturas

Utilizo os títulos originais de periódicos, artigos, livros etc., sem tradução deles. Considero que a pesquisa em história da ciência / matemática esteja avançando no Brasil e que, para melhor divulgação destas fontes, seria ideal colocá-los em sua língua original. Em raras exceções, utilizo o nome vulgar de alguns periódicos, como por exemplo O *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, eu utilizo o nome pelo qual ficou conhecido: Jornal de Crelle ou simplesmente Crelle. Ficou divulgado assim devido seu fundador, August Leopold Crelle, ter editado do início, em 1826, até seu falecimento, em 1855. Igualmente, chamo de Jornal de Liouville o *Journal de mathématiques pures et appliquées*, pois ficou assim conhecido, devido a Joseph Liouville ter fundado o periódico e dele ter sido o editor de 1836 a 1874.

Abreviações

Para o nome dos periódicos foram utilizadas abreviações que seguem o padrão ISO 4, considerando a lista de abreviações LTWA, *List of Title Word Abbreviations* (Padrão internacional, para maiores detalhes: <https://www.issn.org>). Faço isso para tornar a leitura mais agradável, uma vez que estes nomes se repetem ao longo desta tese. Com isso, conseguimos abreviações conforme a tabela seguinte.

Lista de abreviações	
Periódicos britânicos	
Nome	Abreviação
Philosophical Magazine	Philos. Mag.
Philosophical Transactions of the Royal Society of London	Philos. Trans. R. Soc.
Proceedings of the London Mathematical Society	Proc. Lond. Math. Soc.
Messenger of Mathematics	Messenger Math.
The Oxford, Cambridge, and Dublin messenger of mathematics	Oxf. Camb. Dub. Messenger Math.
The Quarterly journal of pure and applied mathematics	Q. J. Math.
Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society	Math. Proc. Camb. Philos. Soc.
The Cambridge and Dublin Mathematical Journal	Camb. Dub. Math. J.

Sumário

Sobre as traduções, nomenclaturas e abreviações	x
1 – INTRODUÇÃO	1
1.1 Metodologia e delimitação de um <i>corpus</i> de fontes originais	2
1.2 Revisão bibliográfica	5
1.2.1 História geral	5
1.2.2 A gênese da teoria dos invariantes e a construção das métricas	6
1.2.3 A recepção e utilização das métricas de Cayley	7
Estrutura da tese	8
2 – TEORIA DOS INVARIANTES BRITÂNICA, ORIGENS E CARACTERÍSTICAS	10
2.1 Introdução	10
2.2 Sobre a análise dos artigos	11
2.3 Contexto Britânico do início do século XIX	13
2.4 Arthur Cayley (1821-1895)	14
2.5 Geometria analítica inglesa do século XIX	16
2.5.1 A geometria analítica de Henry Parr Hamilton	17
2.5.2 Contribuições de De Morgan	19
2.5.3 Primeiras publicações de Cayley	21
2.6 George Boole, início da teoria dos invariantes	22
2.6.1 A visão geométrica analítica de Boole	22
2.6.2 O início da teoria dos invariantes	25
2.6.3 Aspectos geométricos da nova teoria	29
2.6.4 Geometria projetiva analítica	31
2.6.5 A influência de George Boole sobre Cayley	33
2.7 O desenvolvimento da teoria dos invariantes pelos britânicos	33
2.8 Primeiro período, de 1843 a 1845	34
2.8.1 O artigo <i>On the Theory of Determinants</i>	34
2.8.2 Os artigos de Cayley de “geometria algébrica”	35
2.8.3 A “geometria algébrica” nos trabalhos de D. F. Gregory, William Thom- son e William Walton	39

2.8.4	O artigo de Boole de 1844, a continuação de sua teoria	41
2.8.5	O artigo de Cayley de 1845, a sua primeira contribuição no tema iniciado por Boole	42
2.9	Segundo período, de 1845 a 1846	44
2.9.1	<i>The Cambridge and Dublin Mathematical Journal</i>	44
2.9.2	Artigos de “geometria algébrica”	46
2.9.3	Artigo de 1846	48
2.10	Terceiro período, de 1846 a 1854	51
2.10.1	Alguns artigos de Cayley	51
2.10.2	Alguns artigos de Sylvester	54
2.10.3	Alguns artigos de Salmon	57
2.10.4	A “prática comum” inglesa	58
2.11	Conclusões	60
3	– AS MEMÓRIAS SOBRE AS NORMAIS	62
3.1	Introdução	62
3.2	Cayley e a teoria dos invariantes	63
3.3	A quinta memória sobre os <i>quantics</i>	65
3.4	O artigo sobre as normais de uma cônica	67
3.5	A sexta memória sobre os <i>quantics</i>	69
3.5.1	Definição de métrica na reta projetiva	71
3.5.2	O caso limite	73
3.5.3	Definição de métrica no plano projetivo	74
3.5.4	O caso limite	76
3.6	Nota explicativa sobre a sexta memória	78
3.7	O artigo de Cayley <i>On The Non-Euclidean Geometry</i> de 1872	80
3.8	Divulgação e contribuição de Salmon	81
3.9	Conclusões	82
4	– RECEPÇÃO DAS MÉTRICAS DE CAYLEY	85
4.1	As métricas de Cayley e os britânicos	86
4.1.1	Como foi a seleção dos textos	86
4.1.2	Critérios de seleção dos textos	88
4.1.3	Quem são os participantes desta rede	90
4.1.4	Como é a dinâmica da rede	96
4.1.5	Clifford e sua contribuição a teoria das distâncias	108
4.2	Fiedler e as métricas	109
4.2.1	Livro de 1862	111
4.3	A estadia de Felix Klein em Paris	112
4.4	O artigo de 1871 de Felix Klein	113

4.4.1	Definição da métrica sobre a reta projetiva	114
4.4.2	Métrica no plano projetivo	115
4.4.3	Curvatura gaussiana	115
4.5	Recepção italiana	116
4.6	Repercussão nos periódicos franceses	117
4.7	Darboux e as métricas de Cayley-Klein	119
4.7.1	Jean Gaston Darboux (1842 - 1917)	119
4.7.2	<i>Bulletin des sciences mathématiques</i>	120
4.7.3	Darboux (1873)	122
4.7.4	Darboux (1873) e a “geometria de Cayley”	124
4.7.5	Métrica de Cayley nos <i>Leçons sur la théorie générale des surfaces</i> . . .	125
4.8	Conclusões	128
5 – CONSIDERAÇÕES FINAIS		130
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS		135
Apêndices		142
APÊNDICE A – OBRAS DE GEORGE SALMON		143
APÊNDICE B – RECEPÇÃO DE MÉTRICA DE CAYLEY PELOS INGLESES . .		146
APÊNDICE C – ARTIGOS DOS PERIÓDICOS FRANCESES		155

Introdução

Esta tese é fruto de alguns anos de pesquisa, que teve início ainda no mestrado no Programa de Pós-graduação em Ensino de Matemática (Pemat - UFRJ). Quando estava para definir o tema da dissertação, o professor Gérard Emile Grimberg me propôs ler o artigo *Sixth Memoir upon Quantics*¹, de Arthur Cayley. A leitura não foi fácil, principalmente por duas razões: a notação peculiar adotada por Cayley e a matemática presente no texto, que não é abordada nas graduações em matemática no Brasil. Apesar disso, fiquei empolgado com o tema e a dissertação de mestrado foi defendida. Nela investiguei a visão geométrica de Cayley acerca dos trabalhos algébricos que culminariam nas memórias sobre os *quantics*. Ao iniciar o doutorado, me mantive pesquisando temas voltados para o estudo da matemática e de problemas presentes na sexta memória, como os trabalhos de Darboux sobre superfícies ortogonais. Com isso, voltei a rever a sexta memória, o que me levou às questões desta tese.

O objetivo desta tese é esclarecer a elaboração e construção das métricas por Cayley, a partir do que será chamado plano projetivo, bem como sua recepção. Nossa pesquisa parte do desenvolvimento da teoria dos invariantes, pois as métricas de Cayley se situam no contexto desta teoria. Dos textos onde Cayley trabalha essas métricas, destaca-se a sexta memória sobre os *quantics*, porém engloba também muitos outros trabalhos de Cayley e de matemáticos que abordaram assuntos afins. Para organizar nosso trabalho, temos três questões principais:

1. Como se deu a gênese e a evolução da teoria dos invariantes? Importante destacar que as métricas de Cayley são um assunto que tem sua gênese na sexta memória sobre os *quantics*, e que foi trabalhado em vários textos, sejam de Cayley, sejam de outros matemáticos que trataram de assuntos afins. E que esta memória está inserida numa série de artigos que abordam a teoria dos invariantes, intitulados “memórias sobre os *quantics*”. O objeto desta teoria eram os invariantes dos polinômios homogêneos e ela foi desenvolvida pelos ingleses, a partir do trabalho de Boole (1841). Destacam-se as contribuições de Cayley, Sylvester e Salmon. É importante ressaltar que as métricas de Cayley utilizam conceitos e ferramentas provenientes da teoria dos invariantes, além de aspectos geométricos necessários para sua

¹ Como este artigo é diversas vezes mencionado, o chamaremos apenas de “sexta memória”.

definição. Um exemplo dessa relação entre a geometria e as métricas de Cayley é o estudo de polinômios homogêneos de grau dois com duas ou três variáveis, que correspondem às cônicas ou quádras. Nesse caso, é evidente o aspecto geométrico da pesquisa, pois é possível trabalhar com tangentes e secantes de cônicas, bem como solucionar problemas envolvendo várias dessas curvas, explorando todos os aspectos geométricos envolvidos.

2. Em que condição surge essa visão geométrica através do estudo das formas quadráticas que levou Cayley a construir na sexta memória as métricas esférica e euclidiana? A definição de “absoluto” necessita de uma generalização da noção de perpendicularidade, onde duas retas harmônicas em relação a uma dada quádras são perpendiculares. Analisamos os artigos, sejam de Cayley ou de outros matemáticos, para dar conta da gênese do conceito de métrica. Aqui temos uma contribuição original para esse debate, pois o desenvolvimento das métricas de Cayley ainda não foram plenamente esclarecidas.
3. E, por fim, como foi a recepção das métricas, assim como o diálogo que se instaurou entre Cayley e Felix Klein? Essa questão nos motivou a realizar uma pesquisa sobre textos franceses e alemães, uma vez que Felix Klein teve uma participação significativa no campo das métricas, sobretudo por meio de seus artigos sobre as geometrias não euclidianas de 1871 e 1873. Os matemáticos franceses também desempenharam um papel ativo nesse tema, com destaque para Darboux, que se encontrou com Klein em Paris em 1870 e realizou importantes contribuições.

Para compreender a origem das métricas de Cayley, foi necessário analisar diversos trabalhos de Cayley e de outros matemáticos. O mesmo se aplica ao estudo da recepção dessas métricas. Essa abordagem explica a amplitude do conjunto de textos originais que precisamos estudar. A seguir, detalharemos como organizamos esses textos e quais metodologias empregamos para responder às nossas questões.

1.1 Metodologia e delimitação de um *corpus* de fontes originais

Para uma organização mais eficiente do *corpus* de textos originais, os dividiremos em três grupos: em primeiro lugar, os trabalhos sobre teoria dos invariantes; em segundo lugar, aqueles que abordam as métricas de Cayley; e, em terceiro lugar, os textos que nos oferecem informações acerca da recepção dessas métricas.

No primeiro grupo de textos, temos o artigo de 1841 de George Boole, que é considerado o primeiro a tratar das substituições lineares numa abordagem que possibilitou o desenvolvimento da teoria dos invariantes pelos matemáticos britânicos. A partir desse artigo, encontramos uma série de outros trabalhos que se conectam diretamente, numa citação explícita sobre o texto, ou indiretamente, compartilhando os mesmos conceitos ou métodos ao trabalhar as transformações

lineares e os fatores invariantes desta. Para melhor tratar estes trabalhos e poder utilizar um método heurístico que responda às nossas questões, nos inspiramos na metodologia de “rede de textos” de Brechenmacher (2006). Ele constrói uma rede de textos de diferentes matemáticos, a partir de um ponto inicial, que tratam de diferentes formas a noção de matriz (BRECHENMACHER, 2006, p.8). Brechenmacher (2006) encontra um período para sua pesquisa, de 1850 a 1930, a partir das leituras dos diversos textos que tratam de matrizes. As interseções entre os usos do conceito de matriz representam os “nós” dessa “rede”. Para nosso trabalho, os pontos comuns foram determinados a partir de uma análise cuidadosa de como os trabalhos sobre teoria dos invariantes podem ser classificados.

Em nossa “rede de textos” temos uma série de trabalhos que testemunham o surgimento da teoria dos invariantes britânica. Compilamos desde textos de Hamilton (1826), Morgan (1833) e Smith (1837), que explicam o período de transição na produção matemática dos ingleses, até o trabalho de Boole (1841b), bem como os diversos textos que desenvolvem a teoria dos invariantes no período de 1841 a 1854. Após o artigo de Boole, também entram no nosso estudo Cayley (1843b), Cayley (1843c), Gregory (1843), Walton (1844) e Boole (1844) que continuam as ideias do artigo de 1841. No artigo de Cayley sobre o assunto iniciado por Boole (CAYLEY, 1845d), ele define uma forma de encontrar invariantes chamada “hiperdeterminantes”. Ele continua essa definição noutro artigo (CAYLEY, 1846), além dos artigos onde explicita sua notação (CAYLEY, 1847; CAYLEY, 1848). Também são fundamentais para esta pesquisa o artigo de Sylvester (1850), que apresenta as interseções entre duas cônicas, o artigo de Salmon (1846). E seu livro sobre as curvas planas (SALMON, 1852). Esses trabalhos testemunham uma prática comum que é de relacionar álgebra dos polinômios homogêneos com geometria projetiva.

Quanto ao *corpus* de textos sobre as métricas de Cayley, trabalhamos com a primeira, a quinta e a sexta memória sobre *quantics*. Essa série de artigos sobre *quantics* é ao todo composta por dez trabalhos; no entanto, analisamos somente estas três memórias, pois as demais não exploram a relação entre álgebra e geometria, focalizando os processos algébricos da teoria dos invariantes. Além dessas memórias, encontramos um artigo publicado no jornal do Crelle de 1859 que trata das normais a uma cônica e que apresenta a noção de “absoluto” pela primeira vez. Além disso, nessa publicação, Cayley mostra sua definição de perpendicularidade mais geral que será fundamental na sexta memória para definir métrica. Examinamos também os artigos sobre geometria não euclidiana (CAYLEY, 1872) e a nota sobre a sexta memória (CAYLEY, 1889). Esses desenvolvimentos foram rapidamente acrescentados no livro de Salmon (1863) sobre as seções cônicas, apresentando a noção de perpendicularidade de Cayley ao tratar dos invariantes.

Por fim, temos o *corpus* de textos para tratar da recepção das métricas de Cayley. Para isso, nos inspiramos no trabalho de Richards (1979) que estudou a recepção das geometrias não euclidianas no Reino Unido explorando as concepções das comunidades britânicas. Também partimos das concepções acerca dos trabalhos com polinômios homogêneos, como a estrita relação com aspectos geométricos. Também McCleary (1989), ao explorar a recepção na história da matemática, apresenta três aspectos, que são: como respondem a obra de um matemático; as

questões que envolvem uma determinada escola, quadro filosófico ou uma comunidade; e, por último, a possibilidade de aplicação de uma teoria. Destacamos que a recepção pode ser vista por dois aspectos: uma quando a referência ao trabalho de Cayley é feita para dar suporte a outra teoria ou problema; e outra quando desenvolve o próprio conceito de métrica, expandindo ou mudando a teoria. Por exemplo, em seus artigos sobre as geometrias não euclidianas, Felix Klein desenvolve o conceito de métrica, trazendo novos significados ao que fez Cayley, diferentemente de apenas fazer menção ao conceito. Levantamos as questões que nos ajudaram a entender como as métricas de Cayley foram recebidas, inicialmente no Reino Unido, depois na França, na Alemanha e na Itália.

As fontes utilizadas para entender a recepção são em grande maioria artigos de periódicos, também alguns livros e poucas cartas. Pesquisas que verificam a circulação matemática a partir de periódicos especializados já são muito bem estabelecidas. No caso da circulação matemática, existe o projeto CIRMATH², que reuni pesquisadores de vários países em suas pesquisas e publicações. Nosso trabalho busca estudar casos de circulação matemática que passam fronteiras geográficas e, principalmente no estudo da recepção, os diversos periódicos foram fundamentais para responder às nossas perguntas. Entendemos os artigos e periódicos de forma ampla, além de encontrar neles o registro dos conceitos, teorias e desenvolvimentos matemáticos de um determinado período. Tanto na elaboração do que tinha em mente Cayley ao escrever a sexta memória, quanto na recepção, os diversos artigos nos servem de fonte para contextualizar e explicar os diversos processos e as relações existentes entre matemáticos de determinado período.

Quanto aos textos trabalhados para recepção, encontramos uma lista de textos britânicos, sistematizados no apêndice B, na tabela B.1. Destacamos os trabalhos de Clifford³ e suas contribuições, ou seja, ele não apenas faz referência a métrica de Cayley, como também propôs discussões a respeito do tema. Aqui destacamos que a recepção pode ser mais “passiva”, ao apenas relatar uma contribuição, mas ela pode ser “ativa”, contribuindo com seu desenvolvimento, o que ocorreu não somente com Clifford, mas também com Klein e Darboux.

No caso da recepção francesa, destacamos o papel dos periódicos, com destaque para o jornal de Terquem. Além disso, Darboux se encontrou em Paris com Klein e Lee em 1870. Lembramos que a tradução do pequeno artigo que Klein publicou em 1871 foi rapidamente publicado no *Bulletin* (KLEIN, 1871a), periódico do qual Darboux era um dos editores, com Hoüel. Também se destacam os livros de Darboux⁴, onde parece o termo “geometria de Cayley”.

Pelo lado alemão, temos os artigos de Felix Klein⁵, onde ele mesmo afirma que leu a sexta memória a partir dos trabalhos de Fiedler (1862). Também alguns resultados no periódico jornal do Crelle, onde Cayley divulgou os principais resultados em teoria dos invariantes.

² Para maiores informações: <https://cirmath.hypotheses.org/>.

³ Clifford (1866), Clifford (1868), Clifford (1873), Clifford (1882).

⁴ Darboux (1894a), Darboux (1896)

⁵ Klein (1871b), Klein (1873).

1.2 Revisão bibliográfica

As questões de pesquisa da nossa tese e o *corpus* das fontes utilizadas nos levaram a estudar a literatura acadêmica sobre três aspectos: 1. a história geral da matemática no Reino Unido no período 1840-60 a fim de entender o contexto em que a obra de Cayley se elabora e se desenvolve; 2. a gênese da teoria dos invariantes e a construção das métricas a partir da reta e do plano projetivo (esses termos representam um anacronismo, mas explicaremos mais adiante esse problema); 3. a recepção e a utilização das métricas de Cayley, assim como a interação entre Cayley e Klein acerca da construção das métricas.

1.2.1 História geral

Ball (1889) talvez seja o primeiro a dar uma descrição do desenvolvimento da matemática britânica, e o seu livro traz vários elementos biográficos a respeito de Cayley e da situação na matemática no período que nos interessa. Um dos fatores explorados por ele foi o papel desempenhado pela Sociedade Analítica. Ele destaca como os matemáticos Peacock, Herschel e Babbage atuaram na adoção dos métodos analíticos e da notação do cálculo diferencial que era utilizado no continente europeu. Por ser praticamente contemporâneo de Cayley, nos dá uma noção de como a sociedade matemática atuou naquele período, nos ajudando no contexto de formação de Cayley.

Klein (1979) nos oferece uma outra visão da matemática no Reino Unido trazendo um outro ponto de vista. Ele nos esclarece aspectos importantes do desenvolvimento da teoria dos invariantes britânica, além da sexta memória e de como ela foi lida por ele, sendo reinterpretada a partir do seu trabalho sobre grupos de transformação.

Mais recentemente Richards (1979) fornece vários elementos da concepção da geometria em meados do século XIX no Reino Unido, focando em particular no contexto em que Cayley, Sylvester e Salmon desenvolveram as suas obras. Richard também aborda a recepção das geometrias não euclidianas pelo contexto das ideias e concepções dos matemáticos britânicos. Essa conjuntura nos ajudará a entender a recepção das métricas de Cayley.

Parshall (2006), na sua biografia de Sylvester também delimita uma visão desse período, principalmente em relação à teoria dos invariantes, que foi um de seus temas de pesquisa. Destacamos que Sylvester foi amigo de Cayley e seu companheiro de pesquisa em teoria dos invariantes. Logo, entender sobre a vida e obra de Sylvester é fundamental para falar sobre as métricas de Cayley.

Crilly (2006) traz também vários elementos biográficos e de contextualização da obra de Cayley, além de editar no seu trabalho várias cartas de Cayley em apêndice. Esse trabalho nos dá um ótimo cenário de como foi a vida de Cayley, desde seus primeiros estudos, passando por sua formação em Cambridge, chegando ao seu estabelecimento enquanto matemático.

1.2.2 A gênese da teoria dos invariantes e a construção das métricas

Meyer (1892) escreveu um trabalho sobre a teoria dos invariantes e seus aspectos ligados à geometria projetiva. Essa obra nos interessa, pois situa a teoria dos invariantes no período de 1841 a 1867, destacando o papel inicial de George Boole em seu artigo de 1841. Além disso, destaca a importância do trabalho de 1846 de Cayley sobre os “hiperdeterminantes” que marcou o que Salmon chamou de “álgebra moderna”. No período de 1851 a 1854, Sylvester publicou uma série de artigos que delimitaram os termos deste novo ramo da matemática. Por exemplo, Sylvester, em 1852, estabelece a lei da inércia para formas quadráticas; estabelece também a relação entre equações diferenciais parciais e covariantes em seu artigo sobre o cálculo das formas. Meyer destaca ainda as memórias sobre os *quantics*, e apresenta a importância da sexta memória.

Na *Encyclopédie des sciences mathématiques*, Meyer e Drach fornecem comentários sobre os diversos trabalhos da teoria dos invariantes que se sucedem na comunidade britânica inglesa e sobre as outras etapas do desenvolvimento da teoria (MEYER FRANZ; DRACH, 1911). Ou seja, eles nos dão elementos importantes a respeito do contexto de desenvolvimento da teoria dos invariantes.

Crilly possui dois artigos sobre a teoria dos invariantes: um trata do “nascimento” (CRILLY, 1986) e o outro da “morte” (CRILLY, 1988) desta teoria. Os artigos apresentam um contexto sobre a abordagem britânica de encontrar os invariantes ou covariantes, contudo não abordam os aspectos geométricos da teoria. Além disso, Crilly (2006) fez uma bela biografia sobre Cayley, porém não se dedica às pesquisas sobre as geometrias não euclidianas, além de não ter detalhado o conteúdo da sexta memória. Quando ele trata das memórias sobre os *quantics*, faz isso considerando apenas os aspectos algébricos da teoria dos invariantes, e não destaca sua relação com geometria.

Parshall (1989) estuda as duas etapas essenciais da teoria dos invariantes, primeiro dos britânicos e segundo dos trabalhos dos matemáticos alemães decisivos na década 1860. Segundo a autora, a etapa dos britânicos forneceu um método poderoso para encontrar invariantes e covariantes, principalmente com os trabalhos sobre os *quantics* de Cayley. Já a abordagem alemã permitiu que Gordan avançasse no teorema da finitude que culminou na demonstração de Hilbert. Quanto aos trabalhos analisados por Parshall, no caso britânico, ela concentra sua pesquisa no artigo de 1841 de Boole, passando pelos artigos de Cayley sobre transformações lineares, pelos primeiros trabalhos de Sylvester, até as primeiras memórias sobre os *quantics*. Porém, não explora a relação entre teoria dos invariantes e geometria.

Wolfson (2008) estudou com mais precisão os artigos de Boole que dão origem à teoria dos invariantes. Ele trabalha o contexto da produção matemática de Boole, apresentando seu método de calcular o que Sylvester chama de invariante de formas quadráticas. Termina mostrando o interesse de Cayley sobre o tema e como ele incrementa o programa de Boole.

1.2.3 A recepção e utilização das métricas de Cayley

A respeito das métricas de Cayley, estudamos vários textos. Começamos pelos trabalhos de Felix Klein que foi o matemático que mais divulgou a obra de Cayley sobre este tema. Além dos seus artigos sobre as geometrias não euclidianas, é importante destacar seu trabalho (KLEIN, 1979) sobre história da matemática, especificamente o que trata da álgebra geométrica e, que aborda a sexta memória. Nesse trabalho, ele explica as métricas de Cayley de forma breve, sem se preocupar em seguir o conteúdo da sexta memória, porém esse percurso nos ajuda a entender a recepção das métricas de Cayley por Klein.

Há trabalhos de autores que discutem a obra de Cayley, como Sommerville que possui dois artigos que examinam as métricas, incluindo a classificação das geometrias. Em seu primeiro artigo, Sommerville (1910, p.25) apresenta a métrica a partir da geometria projetiva, com o objetivo de expor uma classificação. Já em seu artigo de 1932, ele desenvolve a métrica partindo de um sistema de coordenadas homogêneas, no estilo de Cayley, chegando ao caso de n dimensões (SOMMERVILLE, 1932, p.23). Porém, não desenvolve muitas considerações históricas sobre o assunto, nem mesmo cita os artigos de Cayley, nem os de Klein. Ou seja, apesar de apresentar bem o conteúdo relacionado às métricas, não esclarece as contribuições de Cayley e Klein.

Pierpont (1931) considera que o trabalho de Cayley não teve seu papel bem apresentado pela historiografia, nisto nossos trabalhos concordam. Ele afirma: “Cayley em seu *Sixth Memoir Upon Quantics* (1859) estabeleceu as bases da geometria não euclidiana. Embora este artigo seja frequentemente referido, seu verdadeiro significado parece ter sido totalmente negligenciado”⁶ (PIERPONT, 1931, p.117, Tradução nossa). Nesse artigo, o autor apresenta a abordagem de Cayley para métrica não euclidiana, diferenciando-a da proposta por Klein.

Em outro artigo, Pierpont (1930) apresenta uma das possíveis razões para a abordagem de Cayley ser negligenciada, afirmando que foi devido à popularidade adquirida pelos trabalhos de Klein, destacando que provavelmente muitos matemáticos estudaram geometrias não euclidianas a partir deles (PIERPONT, 1930, p.68). Segundo ele, esse fato, atrelado ao programa de *Erlangen*, que também ganhou muita popularidade, tendo sido traduzido para o italiano (1890), o francês (1891) e o inglês (1893), sendo, portanto, amplamente divulgado, nos faz entender alguns dos motivos pelos quais a abordagem de Klein foi mais conhecida do que a de Cayley. Essa tese difere de Pierpont, pois ele não destaca o papel fundamental da geometria elíptica. Veremos como o modelo esférico é de suma importância para entender o desenvolvimento das métricas de Cayley.

Rosenfeld (2012) situa historicamente o trabalho de Cayley sobre as métricas entre Lobachevski e Riemann. Apesar disto, não explora outros textos de Cayley além da sexta memória. Trabalha bem a abordagem de Klein, em seguida a de Cayley. Apesar de tratar da história das geometrias não euclidianas, não aprofunda a reflexão sobre as métricas de Cayley.

⁶ Cayley in his *Sixth Memoir upon Quantics* (1859) laid the foundations of non-euclidean geometry. Although this paper is often referred to, its true significance seems to have been entirely overlooked.

Voelke (2005), em seu livro sobre geometrias não euclidianas entre 1860 e 1900, tratou dos desenvolvimentos de Cayley e Klein sobre as métricas, apresentando as abordagens de ambos. Nesse texto, o autor procura realmente aprofundar a discussão a respeito dos textos desses matemáticos. Porém, não segue o raciocínio de Cayley, pois não mostra como o modelo esférico desempenha um papel fundamental para que este chegasse a sua definição de métrica. Além disso, Voelke não considera o artigo de 1872 de Cayley, nem faz uma análise das notas de Cayley. Voelke (2005, p.197) afirma que Cayley não deixa nenhuma indicação da origem de suas ideias; assim, esta tese intenciona, como um de seus objetivos, esclarecer a origem das métricas de Cayley.

Estrutura da tese

Esta tese é composta por cinco capítulos, sendo o primeiro esta introdução. No segundo capítulo, tratamos dos primeiros trabalhos em teoria dos invariantes formulados pelos britânicos. Foram feitas pesquisas e análises para situar o contexto de produção matemática antes das memórias sobre os *quantics*. Apresentamos trabalhos que relacionam álgebra e geometria na primeira metade do século XIX de matemáticos como: Henry Parr Hamilton, De Morgan, Boole e Cayley. Cayley inicia seu período produtivo após a influência da Sociedade Analítica no ensino e pesquisa em Cambridge; tratamos, portanto, de alguns aspectos desse movimento e seu impacto sobre a produção matemática daquele período. Cayley começa a publicar em 1841. A respeito da teoria dos invariantes, seus primeiros trabalhos datam do período de 1843 a 1845, após o trabalho sobre transformações lineares de Boole. Analisamos diversos artigos e mostramos que há uma prática comum na forma como se relacionam álgebra e geometria nos textos. Tudo isso ajudou a traçar as estratégias para responder às perguntas do capítulo seguinte.

No terceiro capítulo, investigamos o desenvolvimento do conceito de métrica de Cayley. Começamos por contextualizar o início da produção das memórias sobre os *quantics*, com o objetivo de explicitar o processo criativo de Cayley presente na sexta memória. Destacamos o fato de ele ter publicado, no jornal do Crelle, um artigo sobre as normais submetido em 1857. Nesse artigo, ele apresenta uma generalização do conceito de perpendicularidade, que é utilizada para definir métrica na sexta memória. O matemático também apresenta nesse texto o conceito de “absoluto” pela primeira vez. Apresentamos, a partir disso, uma leitura da sexta memória, onde destacamos cada passo exposto por Cayley, evidenciando que o modelo da geometria esférica foi fundamental para seu processo de elaboração das métricas. A nota explicativa de Cayley é apresentada aqui, pois ela nos ajuda a entender quais as questões o preocupavam nesse processo. Terminamos o capítulo destacando que, em 1863, George Salmon insere o termo “absoluto” na nova edição do seu tratado das seções cônicas. Estes pontos já nos sinalizam alguns aspectos importantes para a recepção das métricas de Cayley.

O quarto capítulo é dedicado à recepção da métrica de Cayley por alguns matemáticos britânicos, alemães, franceses e italianos. Na maior parte desse trabalho, foram analisados

artigos de periódicos, poucos livros foram estudados, destacamos os livros de Fiedler⁷ e os de Darboux⁸. Aqui a circulação matemática é estudada na interação dos textos, seja de forma direta ou indireta, analisando o contexto do trabalho matemático seguindo alguns critérios, como a citação à sexta memória, a utilização da métrica de Cayley, ou o trabalho geométrico dos polinômios homogêneos na abordagem de Cayley. Para ajudar na sistematização dessas publicações, foram elaboradas algumas tabelas com informações a respeito desses artigos ou textos que se encontram no apêndice B; assim, foi possível agrupar os dados de forma a ajudar nas análises, com informações organizadas para responder às nossas perguntas. O apêndice A possui uma lista das obras de George Salmon (até o momento não encontrei essa lista completa em nenhuma obra, fui elaborando esse material a partir das bases dos diversos periódicos), e no apêndice C uma lista dos textos franceses.

Por fim, há, neste trabalho, um capítulo de considerações finais onde retomo os resultados de pesquisa e respondo à questão principal da tese e às questões específicas de cada capítulo.

⁷ Fiedler (1862), Fiedler (1866).

⁸ Darboux (1873), Darboux (1894b), Darboux (1917).

Teoria dos invariantes britânica, origens e características

2.1 Introdução

O objetivo deste capítulo é estudar a origem da teoria dos invariantes proposta pelos britânicos, para poder entender quais são as suas características e suas principais questões ou conceitos. Como a sexta memória sobre os *quantics* se insere no trabalho de Cayley sobre os invariantes, então para poder melhor analisar o conteúdo dessa memória é fundamental situá-la nos desenvolvimentos dessa teoria.

A teoria dos invariantes se desenvolveu a partir dos trabalhos sobre transformações lineares, com destaque para o trabalho de George Boole, de 1841, e para a teoria das formas algébricas que foi apresentada com essa nomenclatura inicialmente por Sylvester (1852). Analisamos neste capítulo o artigo de Boole, verificando os principais aspectos de sua obra. Boole investiga, por exemplo, como o discriminante de uma equação se comporta após a transformação linear e mostra que se mantém inalterado a menos do produto do determinante dos coeficientes da transformação. Por outro lado, investigamos uma série de artigos que tratam das equações algébricas de várias variáveis e sua relação com a geometria, desenvolvendo o estudo das formas algébricas. Esses trabalhos nos interessam, pois a relação estabelecida entre álgebra e geometria de 1841 a 1859 nos sinaliza como a teoria dos invariantes terá uma abordagem geométrica, o que propiciou a elaboração das métricas de Cayley.

Vale destacar que, ao trabalhar com teoria dos invariantes, é possível se dedicar tanto aos aspectos algébricos quanto aos aspectos geométricos dessa teoria. Os aspectos algébricos envolvem o estudo das propriedades e operações dos números, variáveis, equações, funções e outras entidades abstratas. Já os aspectos geométricos estão relacionados ao uso de um sistema de coordenadas para explorar as propriedades geométricas desses entes. Nesta tese, argumentamos que Cayley também se interessava pelos aspectos geométricos da teoria dos invariantes. Ele utilizava coordenadas homogêneas para analisar as propriedades projetivas de pontos, retas,

planos, cônicas e quádricas, como apresentaremos neste capítulo.

Então, por um lado analisamos artigos que ajudaram a fundar a teoria dos invariantes, a partir de Boole (1841b); por outro, trabalhos que tratam da álgebra dos polinômios homogêneos, como os artigos de Cayley, Sylvester e Salmon, que se inserem na teoria das formas algébricas. A seguir, abordaremos o contexto da produção matemática britânica no início do século XIX.

Nesse período, a Sociedade Analítica consegue modificar a forma de fazer matemática, que estava muito influenciada pelos Newtonianos que mantinham um certo afastamento dos novos métodos analíticos do continente europeu. Veremos como se inserem as primeiras publicações de Cayley nesse contexto de produção matemática.

Antes do artigo de 1841 de Boole, estudamos trabalhos de matemáticos como Hamilton (1826) ou Morgan (1833) que discutiram uma álgebra com viés geométrico. Assim se configurava o contexto de produção matemática próximo ao período de publicação de Boole (1841b) sobre as transformações lineares.

O primeiro artigo de Cayley (1841) também foi estudado para entender quais foram seus primeiros campos de interesse, assim como o artigo de Boole (1841b) e as reações a este artigo, sejam as de Cayley, sejam as de outros matemáticos, como Sylvester e Salmon.

Para melhor apresentar os diversos trabalhos relacionados à teoria dos invariantes, separamos os artigos em três períodos. O primeiro, de 1843 a 1845, se inicia no ano em que Cayley se interessa por pesquisas sobre geometria projetiva analítica e vai até o momento anterior à publicação do artigo de 1845, em que o matemático publica um texto sobre as transformações lineares que ajuda a fundar as bases da teoria dos invariantes. O segundo período, de 1845 a 1846, alcança a publicação dos artigos de 1845 e 1846 sobre as transformações lineares. Preferimos promover o recorte de um intervalo curto, pois os artigos são extensos e demandam um olhar mais atento. Por fim, o período de 1846 a 1854 vai até o ano de publicação da primeira memória sobre os *quantics*. É importante lembrar que essas memórias são objeto de estudo do terceiro capítulo desta tese.

Terminamos construindo uma representação gráfica da “rede de textos” inspirada no trabalho de Brechenmacher (2006). Também reunimos as principais considerações a que chegamos sobre o início da teoria dos invariantes e sobre como esse contexto de produção matemática nos ajuda a entender a sexta memória sobre os *quantics*, que trataremos no próximo capítulo.

2.2 Sobre a análise dos artigos

Nosso questionamento acerca da relação entre álgebra e geometria nas memórias sobre *quantics* nos levou a perguntas que necessitavam ser investigadas no período anterior ao trabalho dos *quantics*. Uma dessas perguntas tratava sobre a origem do uso das coordenadas homogêneas por Cayley, uma vez que, nas memórias sobre *quantics*, ele faz uso constante desse sistema de coordenadas, como se essa utilização fosse comum naquele período. Esclarecer o desenvolvimento algébrico geométrico de Cayley, desde suas primeiras produções matemáticas até as memórias

sobre *quantics*, passou a integrar nossa pesquisa.

Com isso, vários aspectos necessitavam ser examinados, mas aquele que procuramos analisar no segundo capítulo desta dissertação foi a origem da abordagem algébrica com uma visão geométrica por parte de Cayley. Para isso, foi necessário investigar o período no qual Cayley iniciou seus estudos em Cambridge. Além disso, atentamos para as características originais da teoria dos invariantes, retornando a sua forma mais inicial com George Boole, uma vez que era necessário ver as motivações dessa teoria por parte dos matemáticos ingleses.

Consideramos também a relação entre os métodos de Cayley e os de matemáticos como George Boole, J. J. Sylvester e George Salmon e pensamos encontrar neles uma prática comum na Inglaterra por aquele período (1843-1854), que culminou nos desenvolvimentos futuros, como as memórias sobre *quantics* e o livro de Salmon, dentre outros. Corry (2004, p.12) defende a abordagem em que se destacam dinâmicas internas de uma comunidade matemática local, em oposição a uma universal, vendo aspectos particulares da matemática produzida por esta comunidade.

Utilizamos, no terceiro capítulo, o que Frédéric Brechenmacher chama de “rede de textos”. Brechenmacher constrói uma rede de textos de diferentes matemáticos, a partir de um ponto inicial, que tratam de diferentes formas a noção de matriz (BRECHENMACHER, 2006, p.8). Ele encontra um período para sua pesquisa, 1850-1930, a partir das leituras dos diversos textos que tratam de matrizes. As interseções entre os usos do conceito de matriz representam os “nós” dessa “rede”.

Mesmo que nosso trabalho não vise a um período tão longo, iniciamos uma leitura dos artigos de Cayley que trata da álgebra de polinômios homogêneos e geometria projetiva, com isso determinamos o período de 1841 a 1853, que se encontra entre o início da pesquisa sobre teoria dos invariantes e a submissão da primeira memória sobre *quantics*.

Percebeu-se que os artigos analisados apresentaram o mesmo tipo de relação que Brechenmacher (2006, p.9) chama dos “nós”, entrelaçamentos de referências, que, no caso da pesquisa de Brechenmacher, foram utilizados para destacar as diferentes práticas contidas nos textos que tratavam de matrizes. Nossa pesquisa se utiliza desse conceito de pontos de confluência a fim de destacar um campo de pesquisa na Inglaterra em meados do século XIX. Assim, nosso trabalho residiu em analisar os diversos textos escritos por matemáticos britânicos que utilizavam a álgebra de polinômios homogêneos munida de algumas propriedades da geometria projetiva, tais como: involução de pontos ou retas, razão harmônica, entre outros.

Esse campo de pesquisa é entendido conforme apresenta Catherine Goldstein et al. (2007):

Argumenta-se que se tratava de um campo (de pesquisa), no sentido de que “todas as pessoas que estão envolvidas no [este] campo têm em comum um certo número de interesses fundamentais, isto é, em tudo o que está ligado à própria existência do campo”, e que se pode descobrir “a presença na obra de vestígios de relações objetivas ... para outros trabalhos, passados ou presentes,

[do campo]”¹ (GOLDSTEIN et al., 2007, p.52, Tradução nossa).

Ou seja, quando pessoas pertencem a um determinado campo de pesquisa, possuem certo número de interesses fundamentais comuns. Neste capítulo, estes pontos são: a álgebra dos polinômios homogêneos, algumas propriedades da geometria projetiva e a relação existente entre essas teorias.

Assim, no terceiro capítulo, buscamos “tecer” alguns “fios” dessa rede de pesquisa na Inglaterra e, com isso, esclarecer uma prática comum de alguns matemáticos britânicos do meado do século XIX, partindo de Cayley.

Outro aspecto importante que foi questionado diz respeito à relação entre álgebra e geometria nos trabalhos anteriores à sexta memória. Ao examinar as memórias dos *quantics*, é possível notar que Cayley trabalhou com polinômios homogêneos e coordenadas homogêneas no que é conhecido como espaço projetivo. Ao utilizar polinômios homogêneos de grau dois, ele pôde trabalhar com cônicas usando três variáveis e quádras usando quatro variáveis. Isso resulta em uma compreensão geométrica dos *quantics*. É pertinente questionar como essa relação foi desenvolvida antes de 1854. Para isso, é necessária uma análise de diversos textos entre 1841 e 1854, que lidam com transformações lineares, teoria das formas e geometria projetiva.

Essa análise pode nos permitir entender como a geometria projetiva, que surgiu no final do século XVIII, se desenvolveu e se relacionou com a álgebra ao longo do século XIX. Os trabalhos de Cayley foram fundamentais para essa relação, mas é importante compreender como outros matemáticos abordaram a questão antes dele. Além disso, essa investigação pode nos ajudar a compreender como a geometria projetiva influenciou outras áreas da matemática, como a geometria algébrica e a teoria dos invariantes, que tiveram um papel importante no desenvolvimento da física teórica no século XX. Em resumo, uma análise detalhada dos textos que lidam com transformações lineares, teoria das formas e geometria projetiva pode nos fornecer uma compreensão mais ampla sobre a interação entre álgebra e geometria no contexto da história da matemática. Para isso, vamos começar estudando o contexto do desenvolvimento da matemática britânica no início do século XIX.

2.3 Contexto Britânico do início do século XIX

A primeira metade do século XIX foi marcada por importantes fatos que influenciaram a pesquisa matemática britânica. A influência dos trabalhos de Newton, do qual a geometria euclidiana era a base de toda pesquisa matemática, fez com que os britânicos criassem resistência ao desenvolvimento da análise e do cálculo diferencial que ocorreu nos demais países europeus.

¹ We argue that it constituted a (research) field, in the sense that “all the people who are engaged in [this] field have in common a certain number of fundamental interests, viz., in everything that is linked to the very existence of the field,” and that one can uncover “the presence in the work of traces of objective relations ... to other works, past or present, [of the field].”

Tal estado de afastamento em relação à matemática europeia perdurou até o final do século XVIII.

A partir de Robert Woodhouse, iniciou-se um grupo de matemáticos interessados em introduzir as inovações analíticas e do cálculo diferencial, que permeavam a pesquisa europeia. A escola analítica, formada por matemáticos seguidores das ideias de Woodhouse, procurou retirar o estudo britânico do isolamento provocado pela tradição de Newton.

Além do ganho obtido com as novas notações do cálculo diferencial, houve uma abertura para pesquisas em geometria analítica, com destaque para a álgebra com aplicações geométricas. Além da álgebra de Peacock, concorrem para esse avanço os desenvolvimentos analíticos de Hamilton (1826) e Morgan (1833). A criação de um periódico inglês específico para publicações de artigos matemáticos, com a presença de diversos artigos relacionados à geometria analítica e à álgebra com aplicações geométricas, nos dá a clara noção das mudanças que ocorreram nos anos iniciais da primeira metade do século XIX.

Pretendemos esclarecer o surgimento da teoria dos invariantes, através dos trabalhos em transformações lineares de Boole e seu caráter geométrico inicial. Assim, nos perguntamos: como ocorreu o interesse inglês pela álgebra aplicada à geometria? Como se deu o início da teoria dos invariantes? Quais são seus interesses geométricos? Como ocorre a influência desta teoria sobre Cayley?

Tendo em vista nossos questionamentos, apresentaremos alguns aspectos geométricos que permearam o início da teoria dos invariantes, bem como a relação entre essa nova teoria e esses aspectos geométricos. Serão apresentadas características da geometria analítica britânica, porém não temos a intenção de esgotar as considerações, mas sim de apresentar os pontos mais relevantes aos nossos questionamentos.

Em seguida, veremos o interesse inicial de Cayley por geometria analítica em seu primeiro artigo de 1841, do *Cambridge Mathematical Journal*, que nos sinaliza alguns aspectos importantes da álgebra aplicada à geometria. O início da teoria dos invariantes, como afirmado por historiadores como Tony Crilly e Karen Parshall, pode ser tomado a partir do artigo de George Boole de 1841, *Exposition of a General Theory of Linear Transformations*, apresentado em duas partes no *Cambridge Mathematical Journal*. Também sem a intenção de esgotar o assunto, apresentaremos a teoria de Boole e os aspectos geométricos presentes em seu artigo. Boole, através de seu artigo de 1841, influenciou os trabalhos de Cayley que desenvolveram a teoria dos invariantes. Cayley contou com a parceria de Sylvester e Salmon, o qual também se interessa pelo assunto posteriormente.

2.4 Arthur Cayley (1821-1895)

Arthur Cayley foi um dos matemáticos britânicos mais produtivos do seu tempo. Nasceu em 16 de outubro de 1821, na cidade de Richmond em Surrey, na Inglaterra. Seu pai, Henry, era um mercador de sucesso que decidiu se mudar para St. Petersburg devido aos seus negócios na

Rússia; logo, os primeiros anos de Cayley foram vividos nesse país, no período de 1821 a 1828. Retornando da Rússia, seu pai procurou encaminhá-lo aos estudos. Cayley, então, iniciou seus estudos na escola privada Eliot Place, em 1831; mudando, em seguida, em 1835, para o King's College.

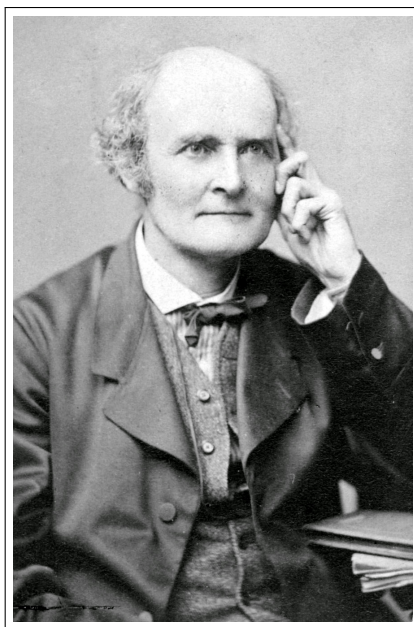


Figura 2.1 – Arthur Cayley
Fonte: Wikipedia².

Cayley, segundo Crilly (2006, p.32), ingressou no Trinity College, Cambridge, em outubro de 1838. É possível que Peacock iniciasse seus estudos por álgebra e geometria, este é um dos fatores que justifica o interesse de Cayley em tais temas.

Peacock também fazia frequente referência aos trabalhos de matemáticos continentais, com uma contínua missão de trazê-los para Cambridge, e enfatizava a importância da álgebra aplicada à geometria (CRILLY, 2006, p.32).

Com esse incentivo e agora com acesso à biblioteca do Trinity College, Cayley seleciona algumas obras de referência em seus primeiros empréstimos. Aos dezessete anos (1838), escolhe *Géometrie descriptive* de Gaspard Monge, *Elements de géometrie* de Adrien Marie Legendre e *Méchanique Analytique* de Joseph-Louis Lagrange (CRILLY, 2006, p.33).

Logo, Cayley se destaca por estudar os grandes matemáticos de seu tempo desde o seu início em Cambridge. Esse fato sustentado por Crilly é também destaque de Andrew Russell Forsyth, sucessor de Cayley como *Sadleirian Professor* na cadeira de matemática, em 1895, ano da morte de Cayley.

Forsyth afirma em sua biografia: “Cayley evidentemente havia lido, de forma investigativa e com cuidadoso senso crítico, a Mecânica Analítica de Lagrange, um pouco do trabalho de Laplace, e várias memórias dos dois jornais continentais do seu tempo, o de Liouville e o de

² Retirada do site https://pt.wikipedia.org/wiki/Arthur_Cayley, acessado em 25/09/2019.

Crelle.”³ (FORSYTH, 1889, p.xii, Tradução nossa). Destaca ainda que o fato era raro para um estudante de 19 a 20 anos de sua época.

Em outra de suas idas à biblioteca do Trinity College, Cayley consulta a obra *Géométrie de Position* de Lazare Carnot (CRILLY, 2006, p.48). Este fato ocorreu antes da publicação de seu primeiro artigo, o que sugere uma influência francesa em suas primeiras pesquisas.

2.5 Geometria analítica inglesa do século XIX

No início do século XIX, importantes mudanças na Inglaterra influenciaram a formação dos estudantes daquele período. Daí a importância de iniciarmos com uma contextualização, destacando o desenvolvimento da geometria analítica, foco inicial das pesquisas de Cayley.

A escola newtoniana foi responsável por deixar a matemática britânica isolada do restante da Europa, no que diz respeito aos desenvolvimentos matemáticos da análise, do cálculo diferencial e das abordagens analíticas relacionados à geometria.

A questão da escolha da notação de Newton na Inglaterra, em oposição à notação de Leibniz pelo restante da Europa, não é suficiente para explicar o atraso britânico, pois, mesmo que a notação de Newton fosse superior à de Leibniz, os matemáticos britânicos estariam em desvantagem em relação ao restante da comunidade matemática européia, que traduzia e utilizava os resultados de Newton, Taylor, Maclaurin, dentre outros, para sua própria notação. Por outro lado, os matemáticos britânicos não realizaram um esforço semelhante, colocando-se em situação de distanciamento em relação aos seus vizinhos (BALL, 1889, p.98).

Somado a isso, temos o fato da escola de Newton insistir no uso de demonstrações geométricas, mesmo após os princípios do cálculo diferencial já terem se tornados universais. Com isso, empregavam os métodos mais criativos possíveis para inserir tais demonstrações sempre que podiam. Deriva daí uma resistência à análise, além do fato de o critério de rigor britânico estar firmado na geometria sintética.

George Peacock foi o mais influente dos membros da escola analítica, que foi responsável por retirar os matemáticos britânicos dessa situação de isolamento em relação ao restante da Europa. Isso chegou a ser um fato preocupante para tais matemáticos, uma vez que o isolamento perdurava desde a última metade do século XVIII.

O principal obstáculo para as inovações dos métodos analíticos e do cálculo diferencial vinha dos principais docentes e membros do senado, que consideravam qualquer tentativa de inovação como um pecado contra a memória de Newton (BALL, 1889, p.117).

Esse novo movimento, identificado como escola analítica, teve início com Robert Woodhouse, primeiro a publicar um trabalho que introduzia as novas notações do cálculo diferencial. Com título *Principles of analytical calculation*, sua obra foi publicada em 1803, em Cambridge, porém foi severamente criticada pela adoção dos novos métodos (BALL, 1889, p.118).

³ Cayley had evidently read with enquiring and critical care the *Mécanique Analytique* of Lagrange, some of the work of Laplace, and several memoirs in the two continental journals of the time, those of Liouville and Crelle.

Em 1812, Peacock, Herschel e Babbage, seguindo a influência das observações de Woodhouse, concordaram em formar a Sociedade Analítica, com o objetivo de defender o uso dos métodos analíticos e da nova notação do cálculo diferencial na universidade, no lugar da antiga notação de Newton (BALL, 1889, p.120).

A primeira das duas conquistas marcantes dessa sociedade foi, em 1816, a publicação da tradução do livro texto *Elementary differential calculus*, de Lacroix; e, a segunda, em 1817, foi a introdução por Peacock dos símbolos do cálculo diferencial no conjunto dos documentos do exame do *senate-house* (BALL, 1889, p.120).

Guicciardini (1989, p.136) destaca que, apesar da importância da Sociedade Analítica, há de se considerar o trabalho anterior de Woodhouse, em Cambridge, bem como de muitos outros centros de reforma igualmente importantes, desde academias militares como a *Royal Military Academy at Woolwich*, até universidades, como Oxford, Edinburgh, Glasgow, Dublin, dentre outras.

Além disso, Guicciardini afirma:

Mas a segunda e mais importante contribuição dos membros da Sociedade Analítica foi que eles iniciaram uma tendência de pesquisa que caracterizou grande parte da matemática britânica até Cayley e Boole. As memórias da Sociedade Analítica foram centradas no cálculo de operadores e equações funcionais.⁴ (GUICCIARDINI, 1989, p.137, Tradução nossa)

Veremos adiante que, a partir das inovações da Sociedade Analítica, surgem matemáticos como George Boole e Cayley desempenhando papéis fundamentais para o desenvolvimento da pesquisa na teoria dos invariantes. Isso pode ser atribuído, em parte, a esse período de mudanças na matemática britânica, o que concorda com a afirmação de Guicciardini.

Dentre as muitas inovações da Sociedade Analítica, pode-se destacar o aumento progressivo de trabalhos em geometria analítica. Segundo Ball (1889, p.129), o único trabalho que introduzia o tema em Cambridge, no início do século XIX, tratava da Álgebra de Wood, que possuía um apêndice de aproximadamente trinta páginas no final do livro. O título era *On the application of álgebra to geometry*, e continha as equações da reta, da elipse, e de poucas outras curvas. Logo, a necessidade de um livro texto em geometria analítica foi primeiramente suprida pelo trabalho de Henry Parr Hamilton em 1826 (BALL, 1889, p.129).

2.5.1 A geometria analítica de Henry Parr Hamilton

Henry Parr Hamilton (1794-1880) graduou-se no Trinity College, B.A.⁵, em 1816. Exerceu vários ofícios universitários, tomando o grau de M.A.⁶ em 1819. O livro texto de

⁴ But the second and most important contribution from the Analytical Society's members was that they initiated a trend of research which characterized much of British mathematics up to Cayley and Boole, The Memoirs of the Analytical Society were centred on the calculus of operators and on functional equations.

⁵ Bachelor of Arts, a menor graduação de uma universidade.

⁶ Master of Arts, este grau é obtido após o bacharel em artes. Originalmente, depois dos "exercícios de mestre", onde o candidato respondia a três questões de membros que possuíam M.A., duas questões de membros B.A.

Henry Parr Hamilton, *The Principles of Analytical Geometry Designed for use of students in the University*, como induz o próprio título, vinha suprir uma lacuna no ensino de geometria analítica em Cambridge. Em seu prefácio, o autor deixa claro que seu trabalho visa a atrair a atenção dos estudantes para esse ramo da ciência que considera extensamente útil para os superiores departamentos de matemática (HAMILTON, 1826, p.iii).

Sua abordagem detalhada possui duas partes: uma para geometria de duas dimensões e outra para geometria de três dimensões, incluindo transformações dos eixos coordenados e sólidos de revolução, além da apresentação formal da reta, parábola, elipse e hipérbole e das curvas e superfícies quaisquer de segunda ordem.

No capítulo XI de sua obra, encontram-se transformações de coordenadas no espaço, tema que nos interessa, uma vez que Boole retoma essa ideia em seu artigo de 1841 sobre transformações lineares. Segue primeira proposição do livro de Hamilton:

Prop. 1. Para passar de um sistema de eixos oblíquos para outro, a origem sendo a mesma. Sejam x,y,z e x',y',z' as coordenadas de um ponto a que se refere aos eixos primitivo e novo, respectivamente. Se o mesmo raciocínio for aplicado ao plano, que foi utilizado (72) no caso da reta, pode ser provado que as coordenadas primitivas são funções lineares das novas; vamos supor, por conseguinte,

$$\begin{aligned}x &= mx' + ny' + pz', \\y &= m'x' + n'y' + p'z', \\z &= m''x' + n''y' + p''z',\end{aligned}$$

nas quais as constantes $m,n,p \dots$ estão agora a serem determinadas.⁷ (HAMILTON, 1826, p.245, Tradução nossa)

A transformação linear das variáveis era abordada de forma clara com a interpretação geométrica de mudança dos eixos coordenados. Essa proposição apresenta uma maneira de passar de um sistema de eixos oblíquos para outro, mantendo a origem. Ela parte da definição das coordenadas de um ponto em relação aos eixos primitivos e aos novos eixos, representadas pelas variáveis x,y,z e x',y',z' , respectivamente. Hamilton acrescenta em sua observação, feita após desenvolver alguns de seus corolários:

Observação. A transformação das coordenadas de um sistema retangular para outro é subserviente a várias questões importantes nos departamentos de Mecânica. Entre os diferentes métodos que têm sido propostos para executar esta

e de uma declaração. Em Cambridge, o grau de mestre era conferido àqueles que possuíam o mínimo de seis anos após o final de sua primeira residência, salvo membros que possuíam o título de fellow e aos agentes universitários, que possuíam o mínimo de três anos.

⁷ Prop. 1. To pass from one system of oblique axes to another, the origin being the same. Let x,y,z and x',y',z' be the co-ordinates of a point referred to the primitive and new axes respectively. If the same reasoning be applied to the plane, which was used (72) in the case of the straight line, it may be proved that the primitive co-ordinates are linear functions of the new ones; we shall assume, therefore,

$$\begin{aligned}x &= mx' + ny' + pz', \\y &= m'x' + n'y' + p'z', \\z &= m''x' + n''y' + p''z',\end{aligned}$$

in which the constants $m,n,p \dots$ are now to be determined.

operação, o referido acima é o mais utilizado geralmente. Foi utilizado pela primeira vez por Euler, e foi subsequentemente adotado por Lagrange e de Laplace.⁸ (HAMILTON, 1826, p.251, Tradução nossa)

Dois anos mais tarde, Hamilton publica *An analytical system of conic sections*, que foi substituído somente pelo trabalho de John Hymers, *Conic sections* de 1837 (BALL, 1889, p.130).

Peacock também contribui com o ensino de geometria analítica num trabalho que, segundo Ball (1889, p.130), foi emitido anonimamente, em 1833, com o título *Syllabus of trigonometry, and application of álgebra to geometry* e setenta páginas destinadas à geometria analítica. Houve uma segunda edição, em 1836, antes do trabalho de Hymers.

2.5.2 Contribuições de De Morgan

De Morgan foi igualmente importante propagador do uso da álgebra aplicada à geometria. Ele publica dois artigos no *Transactions of the Cambridge Philosophical Society*, um no quarto volume, no ano 1833, e outro no quinto volume, em 1835. O segundo artigo trata das superfícies de segunda ordem, uma pesquisa similar à primeira, que abordou as curvas de segunda ordem.

É importante notar que a principal referência britânica para estes artigos de De Morgan trata-se justamente do *Analytical geometry* de Henry Hamilton, conforme o próprio De Morgan cita em seu segundo artigo (MORGAN, 1835, p.93).

No primeiro artigo, *On the General Equation of Curves of Second Degree*, de 1830, De Morgan inicia apresentando seu objetivo: “O objetivo deste Trabalho é chamar a atenção para algumas propriedades das Curvas de Segundo Grau, por meio das quais a redução de suas equações de um conjunto de eixos a outro é materialmente facilitada.”⁹ (MORGAN, 1833, p.71, Tradução nossa).

Ele considera uma curva qualquer do segundo grau e eixos coordenados, x e y , que fazem um ângulo θ , na notação de De Morgan $\widehat{xy} = \theta$ ¹⁰. Ele investiga o caso em que a origem seja movida para um ponto de coordenadas m e n nas direções de x e y . Além disso, discute que os novos eixos possuem as seguintes inclinações, em comparação com os eixos originais, $\widehat{x'x} = \phi$ e $\widehat{y'x} = \psi$, sendo x' e y' os novos eixos coordenados, então $\widehat{x'y'} = \psi - \phi = \theta'$. A partir daí, apresenta as equações da curva, no primeiro e no segundo sistema de eixos coordenados, respectivamente:

$$ay^2 + bxy + cx^2 + dy + ex + f = 0,$$

$$a'y'^2 + b'x'y' + c'x'^2 + d'y' + e'x' + f' = 0.$$

⁸ Observation. The transformation of co-ordinates from one rectangular system to another, is subservient to various important inquiries in the higher departments of Mechanics. Among the different methods which have been proposed for executing this operation, the one above given is the most generally used. It was employed for the first time by Euler, and was afterwards adopted by Lagrange and Laplace.

⁹ The object of this Paper is to draw attention to some properties of Curves of Second Degree, by means of which the reduction of their equations from one set of axes to another is materially facilitated.

¹⁰ Em notação moderna $X\hat{O}Y = \theta$.

Com estas considerações, De Morgan encontra as relações abaixo, que representam x e y em função dos novos eixos coordenados:

$$x = \frac{\sin(\theta - \phi)}{\sin\theta}x' + \frac{\sin(\theta - \psi)}{\sin\theta}y' + m,$$

$$y = \frac{\sin(\phi)}{\sin\theta}x' + \frac{\sin(\psi)}{\sin\theta}y' + n.$$

Substituindo, na primeira equação do segundo grau, esses valores de x e y , os resultados dos coeficientes de y'^2 , $x'y'$, x'^2 , etc. devem ser proporcionais a a' , b' , c' , etc.; feitas as substituições e desenvolvimentos, ele apresenta:

$$\begin{aligned} A &= a - b\cos\theta + c\cos^2\theta, \\ B &= \sin\theta(b - 2c\cos\theta), \\ C &= c\sin^2\theta, \\ D &= 2an + bm + d - \cos\theta(2cm + bn + e), \\ E &= \sin\theta(2cm + bn + e), \\ F &= an^2 + bmn + cm^2 + dn + em + f. \end{aligned}$$

Desta etapa inicial de seu artigo, o autor tira algumas considerações:

No qual é importante observar que, se as coordenadas primitivas forem retangulares $A = a$, $B = beC = c$. Se, além disso, a origem não for alterada $D = d$, $E = e$, $F = f$. Também, se os eixos de x' forem paralelos aos de x e $\widehat{x'y'} = 90^\circ$, a equação torna-se $Ay'^2 + Bxy' + Cx'^2 + Dy + Ex + F = 0$.¹¹ (MORGAN, 1833, p.72, Tradução nossa)

A partir dos desenvolvimentos de Gauss e Lagrange em substituições lineares, surgem, na primeira metade do século XIX, pesquisadores ingleses interessados em desenvolver as propriedades dessas substituições e de suas aplicações à geometria e, conseqüentemente, às demais áreas das ciências físicas, como a mecânica. Nesses dois artigos, De Morgan demonstra estar entre esses pesquisadores, o que nos sinaliza o interesse crescente em se aplicar à álgebra uma interpretação geométrica.

Logo, conforme a escola analítica vencida as barreiras impostas pela tradição de Newton, não houve somente um ganho nos métodos analíticos e do cálculo diferencial, mas também ocorreu uma abertura para todo trabalho continental, inclusive para esses métodos de aplicações da álgebra para geometria.

A seguir, destacaremos o primeiro trabalho de Cayley em que revela seu interesse por geometria analítica.

¹¹ In which it is important to observe that if the primitive co-ordinates be rectangular $A = a$, $B = beC = c$. If in addition the origin be not changed $D = d$, $E = e$, $F = f$. Also that if the axes of x' is parallel to that of x and $\widehat{x'y'} = 90^\circ$, the equation becomes $Ay'^2 + Bxy' + Cx'^2 + Dy + Ex + F = 0$.

2.5.3 Primeiras publicações de Cayley

Esses fatos explicam o interesse do primeiro artigo de Cayley, *On a Theorem in the Geometry of Position*, de 1841, de fazer uso da relação álgebra e geometria, o que está em consonância com o movimento trazido pela escola analítica e com sua leitura das recentes produções matemáticas dos principais jornais de sua época.

O trecho inicial do artigo deixa clara sua intenção:

Propomo-nos aplicar o seguinte teorema (novo?) à solução de dois problemas em Geometria Analítica. Dados os símbolos

$$|\alpha|, \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha' & \beta' \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \\ \alpha'' & \beta'' & \gamma'' \end{vmatrix}, \&c$$

denotam as quantidades $\alpha, \alpha\beta' - \alpha'\beta, \alpha\beta'\gamma'' - \alpha\beta''\gamma' + \alpha'\beta''\gamma - \alpha'\beta\gamma'' + \alpha''\beta\gamma' - \alpha''\beta'\gamma, \&c$.¹²(CAYLEY, 1841, p.267, Tradução nossa)

Neste artigo de 1841, Cayley se propôs a encontrar a relação existente entre cinco pontos colocados no espaço arbitrariamente, usando, para isso, recursos algébricos, dentre os quais propriedades dos determinantes e uso das equações da circunferência e da esfera (CAYLEY, 1841, p.268).

Crilly (2006, p.55) destaca alguns fatos importantes desse primeiro artigo de Cayley, a começar pelo fato desse problema da relação entre pontos no espaço já ter sido tratado por J. L. Lagrange, Lazare Carnot e Jacques Binet (amigo de Cauchy). Isso mostra a capacidade de Cayley em reconhecer problemas e interpretá-los, trazendo para a realidade inglesa e expressando relações algébricas por meio de determinantes. Outro destaque de Crilly (2006, p.55), consiste no fato curioso de o problema recair novamente na “moderna teoria dos invariantes” na segunda metade do século XIX, ou seja, de certa forma, sua primeira investigação possui relação com a teoria que ajudaria a fundar a partir de 1845.

Esse trabalho inicial demonstra o grande interesse de Cayley pela álgebra aplicada à geometria. O fato condiz com as possíveis influências recebidas por seu primeiro tutor, George Peacock, e pelo ambiente propício criado pela escola analítica e por suas leituras, enquanto iniciava seus estudos em Cambridge.

Uma rápida leitura pelo índice do segundo volume do *The Cambridge Mathematical Journal*, de 1841, nos mostra o quanto avançaram as pesquisas em geometria analítica na Inglaterra. Há inclusive uma seção específica cujo título é: *Analytical geometry of three dimensions*. Na parte de álgebra, não é difícil encontrar trabalhos que relacionem a álgebra à geometria, como por exemplo, um artigo de George Boole, *Researches in the theory of analytical transformations*,

¹² We propose to apply the following (new?) theorem to the solution of two problems in Analytical Geometry. Let the symbols

$$|\alpha|, \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha' & \beta' \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \\ \alpha'' & \beta'' & \gamma'' \end{vmatrix}, \&c$$

denote the quantities $\alpha, \alpha\beta' - \alpha'\beta, \alpha\beta'\gamma'' - \alpha\beta''\gamma' + \alpha'\beta''\gamma - \alpha'\beta\gamma'' + \alpha''\beta\gamma' - \alpha''\beta'\gamma, \&c$.

with a special application to the reduction of the general equation of the second order (1841), que iremos destacar mais a frente.

Boole influenciou fortemente os trabalhos de Cayley (CRILLY, 1986, p.241), principalmente ao introduzir um tema que muito interessou Cayley e que passou a se chamar teoria dos invariantes, na segunda metade do século XIX.

2.6 George Boole, início da teoria dos invariantes

2.6.1 A visão geométrica analítica de Boole

Em 1837, Cambridge passa a contar com um periódico específico para publicação de artigos matemáticos, *The Cambridge Mathematical Journal*. Antes, produções matemáticas deveriam ser submetidas ao *Philosophical Transactions*, que publicava artigos em diversas áreas do conhecimento. Para isso, contou com o incentivo de Archibald Smith, *Senior Wangler* de 1836, que escreveu uma carta a Duncan Farquharson Gregory, solicitando um periódico britânico com a finalidade de publicar curtos artigos com temas em matemática. Gregory respondeu positivamente, sendo o editor dos primeiros volumes a partir de novembro de 1837 (THOMSON, 1874, p.iii).

Apesar da especialização ganha com o novo periódico, podemos encontrar seções destinadas à matemática aplicada à física, tais como: astronomia, estudo do comportamento da luz e do som, mecânica e hidrostática.

Como já mencionamos, no *The Cambridge Mathematical Journal*, desde seu primeiro volume, encontramos seções destinadas à geometria plana, à geometria analítica de três dimensões e à álgebra. Já na seção destinada à álgebra, encontramos artigos que aplicam a álgebra à geometria.

Um exemplo que ilustra este fato é o artigo *Transformation of certain analytical expressions*, escrito por Archibald Smith, logo no primeiro volume de 1837. Smith, como incentivador da criação do periódico, não perde tempo e publica nele. Em seu artigo, ele inicia:

Nós frequentemente exigimos em Análise encontrar a soma dos quadrados de três quantidades de forma

$$ay - bx, bz - cy, cx - az$$

e um ligeiro artifício nos permite fazer isso muito rapidamente. Adicionando e subtraindo $a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2$, a soma dos quadrados se torna

$$\frac{(a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2) - (ax + by + cz)^2}{(a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2) \left\{ 1 - \frac{(ax + by + cz)^2}{(a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2)} \right\}}.$$

Agora, a expressão $\frac{(ax + by + cz)}{(a^2 + b^2 + c^2)^{1/2}(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}}$ é o cosseno do ângulo entre as retas que fazem ângulos [156] com os eixos coordenados, cujos cossenos são proporcionais a a , b , c , xyz , respectivamente. Se este ângulo for denominado θ , a expressão se torna $\frac{(ax + by + cz)}{(a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2)} \sin^2 \theta$.¹³ (SMITH, 1837, p.169, Tradução nossa)

¹³ We frequently require in Analysis to find the sum of the squares of three quantities of the form

Essa expressão é retomada por George Boole em seu artigo *Analytical geometry*, no segundo volume deste periódico, ano 1841. Ao iniciar seu artigo, Boole apresenta seu interesse nas considerações geométricas que a expressão permite fazer. Ele diz:

Nas investigações diversas do seguinte artigo, terei a frequente oportunidade para me referir a um teorema apresentado por um escritor no primeiro volume deste Jornal, e que pode ser aqui recapitulado, quero dizer,

$$\begin{aligned} & (ay - bx)^2 + (bz - cy)^2 + (cx - az)^2 \\ &= (a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2) - (ax + by + cz)^2 \\ &= (a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2)\sin^2\theta \end{aligned}$$

onde θ é a inclinação de duas curvas, cuja direção dos co-senos é proporcional a, b, c, x, y, z , respectivamente.¹⁴ (BOOLE, 1841a, p.179, Tradução nossa)

Para entender melhor esta citação, podemos usar a identidade notável $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ para expandir cada um dos termos acima:

$$(ay - bx)^2 = a^2y^2 - 2abxy + b^2x^2;$$

$$(bz - cy)^2 = b^2z^2 - 2bcyz + c^2y^2; e$$

$$(cx - az)^2 = c^2x^2 - 2acxz + a^2z^2.$$

Somando tudo, obtemos:

$$(ay - bx)^2 + (bz - cy)^2 + (cx - az)^2 = (a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2) - 2(abxy + bcyz + acxz).$$

Note que o termo $-2(abxy + bcyz + acxz)$ é o produto interno entre os vetores (a, b, c) e (x, y, z) , ou seja, $-(ax + by + cz)$. Logo, podemos escrever a equação acima como:

$$(ay - bx)^2 + (bz - cy)^2 + (cx - az)^2 = (a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2) - (ax + by + cz)^2.$$

Finalmente, podemos usar o fato de que $\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$ e que o cosseno do ângulo entre dois vetores é dado pelo produto interno dividido pelo produto das normas dos vetores, para chegar à terceira equação:

$$(ay - bx)^2 + (bz - cy)^2 + (cx - az)^2 = (a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2)\sin^2\theta.$$

Essa equação é muito útil em geometria algébrica, pois relaciona as coordenadas dos pontos e os coeficientes da curva cúbica que passa por eles. O que Boole propõe é encontrar a expressão da distância mínima de duas curvas do primeiro grau, ou seja, a distância mínima

$$ay - bx, bz - cy, cx - az$$

and a slight artifice enables us to do this very readily. By adding and subtracting $a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2$, the sum of the square becomes

$$(a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2) - (ax + by + cz)^2 = (a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2)\left\{1 - \frac{(ax + by + cz)^2}{(a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2)}\right\}.$$

Now the expression $\frac{(ax + by + cz)}{(a^2 + b^2 + c^2)^{1/2}(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}}$ is the cosine of the angle between two lines which make angles with the [156] coordinate axes, whose cosine are proportional to a, b, c, x, y, z , respectively. If this angle be called θ , the expression becomes $= (a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2)\sin^2\theta$.

¹⁴ In the miscellaneous investigations of the following paper, I shall have frequent occasion to refer to a theorem noticed by a writer in the first volume of this Journal, and which it may be as well here to recapitulate, viz.,

$$\begin{aligned} & (ay - bx)^2 + (bz - cy)^2 + (cx - az)^2 \\ &= (a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2) - (ax + by + cz)^2 \\ &= (a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2)\sin^2\theta \end{aligned}$$

where θ is the inclination of two lines, whose direction cosines are proportional to a, b, c, x, y, z , respectively.

entre duas retas. Ele desenvolve sua teoria utilizando-se da expressão acima e apresenta os vários casos possíveis de serem investigados.

Pode-se perceber que o uso da álgebra aplicada à geometria estava gerando trabalhos importantes. O artigo de Boole, como ocorreu com o de Smith, foi colocado na seção “álgebra” do periódico.

Boole ainda publicou outro artigo, no mesmo volume do *The Cambridge Mathematical Journal*, com o seguinte título: *Researches on the theory of analytical transformations, with a special application to the reduction of the general equation of the second order*. Boole apresenta uma função quadrática qualquer P nas variáveis x e y , onde x e y podem ser expressos em relações a duas outras variáveis x' e y' pelas seguintes expressões:

$$x = f(x', y'), y = f'(x', y').$$

Realizando as substituições dessas relações que representam x e y , ele encontra a seguinte equação:

$$P = P'.$$

Agora considera a transformação da equação $P=0$ na $P'=0$, pela substituição dos valores $x = f(x', y'), y = f'(x', y')$. Com isso, também faz uso do seguinte sistema de equações diferenciais:

$$\begin{aligned} P &= P', \\ \frac{dP}{dx} &= \frac{dP'}{dx} = \frac{dP'}{dx'} \frac{dx'}{dx} + \frac{dP'}{dy'} \frac{dy'}{dx}, \\ \frac{dP}{dy} &= \frac{dP'}{dy} = \frac{dP'}{dx'} \frac{dx'}{dy} + \frac{dP'}{dy'} \frac{dy'}{dy}, \end{aligned}$$

que continua, caso existam mais variáveis, faz uso também de equações diferenciais de primeira ordem e de ordens superiores, como segue:

$$\begin{aligned} \frac{dP}{dx} &= \frac{dP'}{dx}, \quad \frac{dP}{dx} = \frac{dP'}{dx} \\ \frac{d^2 P}{dx^2} &= \frac{d^2 P'}{dx^2}, \\ \frac{d^2 P}{dx dy} &= \frac{d^2 P'}{dx dy}, \end{aligned}$$

que continua, caso existam mais variáveis ou necessitem de equações diferenciais de grau maior. Boole utiliza este método com a finalidade de reduzir a equação quadrática:

$$Ax^2 + A'y^2 + 2Bxy + 2Cx + 2C'y + D = 0,$$

numa nova equação com coordenadas retangulares x', y' da forma: $D = 0$. Utilizando o raciocínio que chamou de *Differentiating along the New Axes* (BOOLE, 1841b, p.67), ele também realiza a redução no caso de três variáveis.

Esse artigo já sinaliza as primeiras ideias de Boole referente às transformações lineares das coordenadas e o quanto seu trabalho algébrico possuía um caráter geométrico. Todo o esforço anterior explica as características de seu trabalho na teoria das transformações lineares que foi o embrião da teoria dos invariantes. Veremos que Boole não abandona sua visão geométrica nesses próximos artigos.

2.6.2 O início da teoria dos invariantes

Boole publica, no terceiro volume do *The Cambridge Mathematical Journal*, um artigo em duas partes com título: *Exposition of a general theory of linear transformations*. Na primeira parte, em sua introdução, faz uma breve referência às suas investigações e cita: *Mécanique Analytique*, de Lagrange; uma memória de Laplace (ele chama de especial memória, mas não a identifica); Lebesgue e Jacobi (sem identificar os respectivos trabalhos desses matemáticos); uma memória de Cauchy (também sem identificar); e o artigo de De Morgan que trata das superfícies do segundo grau que já temos citado.

O *Mécanique Analytique* de Lagrange tratou, na sua segunda parte, de título *La Dynamique*, das substituições lineares das variáveis de polinômios homogêneos, a fim de estudar o movimento de corpos suspensos. Lagrange verifica a transformação linear:

$$p = p'x + p''y + p'''z$$

$$q = q'x + q''y + q'''z$$

$$r = r'x + r''y + r'''z$$

considerando a relação $p^2 + q^2 + r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ e seis equações de condição. (LAGRANGE, 1788, p.395)

Parshall (1989, p.160) diz que Boole desenvolve suas próprias ideias e técnicas através dessas leituras de Lagrange que influenciou, inclusive, seu trabalho de 1841, *Researches on the theory of analytical transformations, with a special application to the reduction of the general equation of the second order*, que já apresentamos.

Somando-se a essa grande influência, podemos dar destaque aos artigos de De Morgan (1833, 1835) e A. Smith (1837) que claramente foram fontes inspiradoras para Boole. Destaca-se o fato de Lagrange, De Morgan e A. Smith apresentarem em suas teorias uma forte relação com propriedades geométricas.

Boole inicia a primeira parte de seu artigo apresentando sua investigação:

A conclusão mais geral, para o qual os trabalhos dos escritores acima mencionados levaram, é que, é sempre possível tirar os produtos das variáveis $x_1, x_2, \dots, x_m$, a partir de uma função homogênea proposta do segundo grau, Q , por meio da substituição linear de um novo conjunto de variáveis, $y_1, y_2, \dots, y_m$, conectadas com as originais pela relação:

$$x_1^2 + x_2^2 \cdots + x_m^2 = y_1^2 + y_2^2 \cdots + y_m^2 (1);$$

ou, em outras palavras, para determinar, sujeito a (1), os valores dos coeficientes $A_1, A_2, \dots, A_m$, na equação da transformação, $Q = A_1x_1^2 + A_2x_2^2 \dots + A_mx_m^2$ (2).¹⁵ (BOOLE, 1841c, p.1, Tradução nossa)

Boole (1841c, p.2) afirma que o método comumente utilizado trata-se justamente de substituir no lugar das variáveis da equação acima (2) uma função composta pelas variáveis do lado oposto na igualdade (1), igualando os coeficientes e eliminando as constantes desconhecidas. A dificuldade do processo consiste justamente nessas eliminações, que pode ser um trabalho muito difícil para funções de grau maior que dois. O novo método de Boole possibilitou o tratamento no caso de polinômios homogêneos de grau maior que dois, apesar de ainda utilizar processos de eliminação¹⁶, porém entre equações diferenciais. Nessas resoluções, ele chega às relações entre os coeficientes, o que possibilitou a pesquisa sobre invariantes desses polinômios homogêneos.

Boole (1841c, p.2) afirma que (1) e (2) são casos particulares dos polinômios homogêneos:

$$\begin{aligned} h_2(x_1, x_2, \dots, x_m) &= h'_2(y_1, y_2, \dots, y_m) \dots (A_1) \\ H_2(x_1, x_2, \dots, x_m) &= H'_2(y_1, y_2, \dots, y_m) \dots (B_1) \end{aligned}$$

no qual h_2, h'_2, H_2, H'_2 são funções do segundo grau. De forma similar, ele utiliza h_n, h'_n, H_n, H'_n para o caso de funções de grau n :

$$\begin{aligned} h_n(x_1, x_2, \dots, x_m) &= h'_n(y_1, y_2, \dots, y_m) \dots (A_2) \\ H_n(x_1, x_2, \dots, x_m) &= H'_n(y_1, y_2, \dots, y_m) \dots (B_2) \end{aligned}$$

Daí, ele considera as formas abreviadas:

$$\begin{aligned} q &= r \dots (A_8), \\ Q &= R \dots (B_8). \end{aligned}$$

E, então, representa as funções q, r, Q, R , sob as formas gerais:

$$\left. \begin{aligned} q &= a_1x_1^n + a_2x_2^n + \dots + a_mx_m^n + \sum a_1x_1^\alpha x_2^\beta \dots x_m^\mu \\ r &= b_1y_1^n + b_2y_2^n + \dots + b_my_m^n + \sum b_1y_1^\alpha y_2^\beta \dots y_m^\mu \\ Q &= A_1x_1^n + A_2x_2^n + \dots + A_mx_m^n + \sum A_1x_1^\alpha x_2^\beta \dots x_m^\mu \\ R &= B_1y_1^n + B_2y_2^n + \dots + B_my_m^n + \sum B_1y_1^\alpha y_2^\beta \dots y_m^\mu \end{aligned} \right\} (3)$$

¹⁵ The most general conclusion to which the labours of the above-mentioned writers have led, is, that it is always possible to take away the products of the variables $x_1, x_2, \dots, x_m$, from a proposed homogeneous function of the second degree, Q , by the linear substitution of a new set of variables, $y_1, y_2, \dots, y_m$, connected with the original ones by the relation

$$x_1^2 + x_2^2 \dots + x_m^2 = y_1^2 + y_2^2 \dots + y_m^2 (1);$$

or in other words, to determine, subject to (1), the values of the coefficients $A_1, A_2, \dots, A_m$, in the equation of transformation, $Q = A_1x_1^2 + A_2x_2^2 \dots + A_mx_m^2$ (2).

¹⁶ A teoria da eliminação é uma técnica utilizada para estabelecer o resultado das equações de coexistência e, mais especificamente, para obter o resultante de um sistema de equações de um determinado grau. A relação entre a teoria da eliminação e a teoria dos invariantes está diretamente relacionada com o estudo das propriedades dos resultantes.

Boole afirma que, pelo teorema de Taylor, as equações (A_8) e (B_8) somente existem, em sua forma mais geral, se as respectivas equações obtidas por sucessivas diferenciações também forem satisfeitas. Daí, ele passa a considerar a primeira diferenciação da equação (B_8) :

$$\left. \begin{aligned} & \frac{dQ}{dx_1} \frac{dx_1}{dy_1} + \frac{dQ}{dx_2} \frac{dx_2}{dy_1} \dots + \frac{dQ}{dx_m} \frac{dx_m}{dy_1} = \frac{dR}{dy_1} \\ & \frac{dQ}{dx_1} \frac{dx_1}{dy_2} + \frac{dQ}{dx_2} \frac{dx_2}{dy_2} \dots + \frac{dQ}{dx_m} \frac{dx_m}{dy_2} = \frac{dR}{dy_2} \\ & \dots\dots\dots \\ & \frac{dQ}{dx_1} \frac{dx_1}{dy_m} + \frac{dQ}{dx_2} \frac{dx_2}{dy_m} \dots + \frac{dQ}{dx_m} \frac{dx_m}{dy_m} = \frac{dR}{dy_m} \end{aligned} \right\} (4).$$

[illegible]
$$\left. \begin{aligned} &\lambda_1 \frac{dQ}{dx_1} + \mu_1 \frac{dQ}{dx_2} \cdots + \rho_1 \frac{dQ}{dx_m} = \frac{dR}{dy_1} \\ &\lambda_2 \frac{dQ}{dx_1} + \mu_2 \frac{dQ}{dx_2} \cdots + \rho_2 \frac{dQ}{dx_m} = \frac{dR}{dy_2} \\ &\dots\dots\dots \\ &\lambda_m \frac{dQ}{dx_1} + \mu_m \frac{dQ}{dx_2} \cdots + \rho_m \frac{dQ}{dx_m} = \frac{dR}{dy_m} \end{aligned} \right\} (6).$$

Suponhamos que os segundos membros de (6) desaparecem, e linearmente eliminamos $\frac{dQ}{dx_1}, \frac{dQ}{dx_2}, \dots, \frac{dQ}{dx_m}$, desde os primeiros membros assim igualados a zero, obteremos a equação final entre as constantes,

$$F(\lambda_1, \mu_1, \dots, \rho_1, \dots, \lambda_m, \mu_m, \dots, \rho_m) = 0 \dots \dots (9),$$

que, se satisfeita, irá indicar que as condições propostas, (8), podem coexistir, sem a evanescência simultânea de $\frac{dQ}{dx_1}$, $\frac{dQ}{dx_2}$, ..., $\frac{dQ}{dx_m}$. Estas condições são aqui notadas, porque podem ser encontradas para reaparecer, como sendo a causa de certas peculiaridades na solução final. Sobre a natureza e significado da condição (9), para o presente será suficiente observar que analiticamente corresponde aos casos nos quais, enquanto os valores definidos são atribuídos a um conjunto de variáveis $y_1, y_2, \dots, y_m$, aqueles do outro conjunto $x_1, x_2, \dots, x_m$, tornam-se arbitrários ou infinitos, e que a sua interpretação geométrica tem referência a certos casos de transformação possível, tal como, por exemplo, a alteração de coordenadas a partir de um par de eixos que têm dada inclinação para outro par de eixos que têm uma dada inclinação a outro par mutuamente coincidentes. A omissão, portanto, a uma análise mais aprofundada deste caso de fracasso, passamos a examinar as conclusões que podem ser extraídas da

outra dependente e sistemas sempre compatíveis (7) e (8).¹⁷ (BOOLE, 1841c, p.4, Tradução nossa)

A função composta pelas constantes da substituição linear será empregada para determinar a propriedade de invariância de certas expressões compostas dos coeficientes de polinômios homogêneos. Boole se preocupa com a interpretação geométrica do caso apresentado, veremos que isso será uma constante em seu trabalho.

Em seu primeiro exemplo, Boole considera a forma quadrática $Q = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2$, com isso o conjunto de derivadas parciais é:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dQ}{dx} &= 2Ax + 2By = 0 \\ \frac{dQ}{dy} &= 2Bx + 2Cy = 0 \end{aligned} \right\},$$

que pode ser reduzido à forma:

$$\left. \begin{aligned} Ax + By &= 0 \\ Bx + Cy &= 0 \end{aligned} \right\}.$$

Procedendo à eliminação das variáveis, Boole encontra: $\theta(Q) = B^2 - AC$, ou $\theta(Q) = AC - B^2$, que é o discriminante da forma quadrática apresentada. Utiliza a nomenclatura que posteriormente seria introduzida por Sylvester, em seu artigo de 1851, $\theta(Q)$ é um invariante de Q .

Boole avança com um novo exemplo de uma forma quadrática de três variáveis. Esse caso poderia ser considerado mais difícil se não fosse empregado seu novo método. Boole apresenta $Q = Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dyz + 2Exz + 2Fxy$, o novo conjunto de equações, depois do processo de derivadas parciais, fica como abaixo:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dQ}{dx} &= Ax + Fy + Ez = 0 \\ \frac{dQ}{dy} &= Fx + By + Dz = 0 \\ \frac{dQ}{dz} &= Ex + Dy + Cz = 0 \end{aligned} \right\}$$

Após a eliminação das variáveis, ele encontra:

¹⁷ If we suppose the second members of (6) to vanish, and linearly eliminate $\frac{dQ}{dx_1}, \frac{dQ}{dx_2}, \dots, \frac{dQ}{dx_m}$ from the first members thus equated to 0, we shall obtain a final equation among the constants,

$$F(\lambda_1, \mu_1, \dots, \rho_1, \dots, \lambda_m, \mu_m, \dots, \rho_m) = 0 \dots \dots (9),$$

which, if satisfied, will indicate, that the proposed conditions, (8), may coexist, without the simultaneous evanescence of $\frac{dQ}{dx_1}, \frac{dQ}{dx_2}, \dots, \frac{dQ}{dx_m}$. These circumstances are here noticed, because they will be found to reappear, as the cause of certain peculiarities in the final solution. On the nature and meaning of the condition (9), it will for the present be sufficient to remark, that it analytically corresponds to those cases in which, while definite values are attributed to the one set of variables $y_1, y_2, \dots, y_m$, those of the other set $x_1, x_2, \dots, x_m$, become arbitrary or infinite, and that its geometrical interpretation has reference to certain cases of impossible transformation, such as, for example, the change of co-ordinates from a pair of axes having a given inclination to another from a pair of axes having a given inclination to another pair mutually coinciding. Omitting therefore the further consideration of this case of failure, we proceed to examine the conclusions which may be drawn from the otherwise dependent, and always compatible systems (7) and (8).

$$\theta(Q) = ABC + 2DEF - (AD^2 + BE^2 + CF^2),$$

que, nos termos de Sylvester, é o invariante desse polinômio homogêneo.

O próximo exemplo que Boole, igualmente de difícil resolução pela prática anterior, é o de uma cúbica binária: $Q = Ax^3 + 3Bx^2y + 3Cxy^2 + Dy^3$, onde o sistema de equações, após as derivadas parciais, é:

$$\begin{aligned} Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 &= 0, \\ Bx^2 + 2Cxy + Dy^2 &= 0, \end{aligned}$$

em que, ao se eliminar x^2 e y^2 e dividir os resultados por y e por x , respectivamente, encontrou:

$$\left. \begin{aligned} 2(B^2 - AC)x - (AD - BC)y &= 0 \\ (AD - BC)x - 2(C^2 - BD)y &= 0 \end{aligned} \right\},$$

Que, após a eliminação das variáveis, encontra:

$$\theta(Q) = (AD - BC)^2 - 4(B^2 - AC)(C^2 - BD),$$

novamente uma forma invariante segundo a notação posterior de Sylvester.

Boole completa afirmando que o procedimento pode ser realizado para casos mais complicados (BOOLE, 1841c, p.7). Em suas considerações seguintes, ele pretende relacionar as formas $\theta(Q)$ e $\theta(q)$ e para isso utiliza um método próximo ao que aborda em seu artigo anterior. Boole (1841c, p.10, Tradução nossa) diz: “Este, de fato, consiste numa extensão do método que eu, em uma ocasião anterior, empreguei, quando tratei o mesmo tema nas páginas deste Jornal, vide No. VIII. Vo. II p. 64.”¹⁸. Realmente seu método e seu interesse pelo tema podem ser verificados no artigo anterior, já apresentado aqui.

2.6.3 Aspectos geométricos da nova teoria

O que nos interessa, além de uma apresentação do início da teoria dos invariantes, é o fato do referido trabalho trazer uma interpretação geométrica para essas transformações. E Boole explicita essa interpretação, mostrando sua importância. Num exemplo, seleciona o caso abaixo (BOOLE, 1841c, p.11):

$$\begin{aligned} ax^2 + 2bxy + cy^2 &= a'x'^2 + 2b'x'y' + c'y'^2, \\ Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 &= A'x'^2 + 2B'x'y' + C'y'^2. \end{aligned}$$

No exemplo, tem-se: $\theta(Q) = AC - B^2$, $\theta(q) = ac - b^2$, $\theta(R) = A'C' - B'^2$, $\theta(r) = a'c' - b'^2$, que seriam as soluções pelo método anteriormente apresentado. Boole aplica seu método:

¹⁸ This, in fact, consisted in an extension of the method which I on a former occasion employed, when treating the same subject in the pages of this Journal, vide No. VIII. Vo. II p. 64.

$$\frac{\theta(Q)}{\theta(q)} = \frac{\theta(R)}{\theta(r)} \text{ e}$$

$$\frac{(a\frac{d}{dA} + b\frac{d}{dB} + c\frac{d}{dC})\theta(Q)}{\theta(q)} = \frac{(a'\frac{d}{dA'} + b'\frac{d}{dB'} + c'\frac{d}{dC'})\theta(R)}{\theta(r)},$$

realizando as substituições e resolvendo as diferenciações:

$$\frac{AC - B^2}{ac - b^2} = \frac{A'C' - B'^2}{a'c' - b'^2} \text{ e}$$

$$\frac{aC - 2bB + cA}{ac - b^2} = \frac{a'C' - 2b'B' + c'A'}{a'c' - b'^2}.$$

Em relação à primeira igualdade, $ax^2 + 2bxy + cy^2 = a'x'^2 + 2b'x'y' + c'y'^2$ (39), ele faz a seguinte consideração:

Isto corresponde à ideia geométrica de uma mudança de coordenadas, a partir de um par de eixos x, y , possuindo um ângulo θ , para um outro par x', y' , cujo ângulo de inclinação é de θ' , então (39) tornar-se

$$x^2 + 2xy\cos\theta + y^2 = x'^2 + 2x'y'\cos\theta' + y'^2$$

$$\therefore a = 1, b = \cos\theta, c = 1, a' = 1, b' = \cos\theta', c' = 1.$$

Desde (41) e (42), então

$$\frac{AC - B^2}{(\sin\theta)^2} = \frac{A'C' - B'^2}{(\sin\theta')^2},$$

$$\frac{A - 2B\cos\theta + c}{(\sin\theta)^2} = \frac{A' - 2B'\cos\theta' + c'}{(\sin\theta')^2}.$$

(BOOLE, 1841c, p.11)

Logo, desde a primeira parte de seu trabalho sobre transformações lineares, Boole se utiliza do fato geométrico dessas transformações poderem ser interpretadas como uma mudança dos eixos coordenados. Isso ainda foi destacado em outro exemplo, no mesmo artigo, em que:

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + 2dyz + 2exz + 2fxy$$

$$= a'x'^2 + b'y'^2 + c'z'^2 + 2d'y'z' + 2e'x'z' + 2f'x'y',$$

pelo mesmo processo, corresponde a uma mudança do sistema de eixos x, y, z para o x', y', z' ; onde se as inclinações entre x e y , y e z , x e z são, respectivamente, iguais a χ, ϕ, ψ , e as inclinações para o outro sistema de eixos, x' e y' , y' e z' , x' e z' , sendo, respectivamente, iguais a χ', ϕ', ψ' , então:

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2yz\cos\phi + 2xz\cos\psi + 2xy\cos\chi$$

$$= x'^2 + y'^2 + z'^2 + 2y'z'\cos\phi' + 2x'z'\cos\psi' + 2x'y'\cos\chi'.$$

Após estas considerações, chega ao seu mais importante resultado, o seguinte teorema:

Se Q_n é uma função homogênea de grau n , com m variáveis que, pelos teoremas lineares (80) é transformado em R_n , uma similar função homogênea; e se γ representa o grau de $\theta(Q_n)$ e $\theta(R_n)$, então

$$\theta(Q_n) = \frac{\theta(R_n)}{E^{\frac{\gamma_n}{m}}},$$

E sendo o resultado obtido pela eliminação das variáveis dos segundos membros dos teoremas lineares (80), igualado a 0. (BOOLE, 1841c, p.19)

Parshall (1989, p.162) afirma que Boole acerta nesse teorema aquilo que se tornaria a definição de invariante. Pode se constatar que Boole disse, em outras palavras, que $\theta(Q_n)$ e $\theta(R_n)$ são iguais a menos de uma potência do determinante formado pelos coeficientes da transformação linear.

A segunda parte do artigo destina-se a exibir novos resultados, exemplos que ilustram a efetividade de suas técnicas, além da aplicabilidade dos teoremas. Boole novamente utiliza o fato de essas transformações serem interpretadas geometricamente como uma mudança do sistema de eixos coordenados. Aplica inclusive o caso de coordenadas ortogonais (ele chama de “retangulares”) que reduz a equações mais simples (BOOLE, 1841d, p.118).

Ainda na segunda parte de seu artigo, aplica seus métodos à solução de equações algébricas, dando um claro exemplo da forma cúbica (BOOLE, 1841d, p.118).

No final da segunda parte de seu artigo, faz duas considerações relevantes. A primeira, que considera importante a conexão entre transformações lineares e extensivas classes de teoremas, dependendo de equações diferenciais parciais, particularmente aquelas que são encontradas em geometria analítica. A segunda consideração encoraja futuras investigações, dizendo acreditar ser um amplo campo de pesquisa e descoberta (BOOLE, 1841d, p.119).

Essas considerações nos mostram dois fatores importantes e claramente perceptíveis em nossa leitura dos artigos de Boole. Primeiro, seu forte caráter geométrico que não foi apenas accidental, mas sim uma visão clara desde os seus artigos anteriores. Segundo, ele abre um novo campo de pesquisa grandioso, algo que o próprio matemático afirma e sobre o qual, apesar de dizer que não pretende explorar, escreve outros artigos, principalmente em 1851.

2.6.4 Geometria projetiva analítica

A geometria projetiva analítica pode ser identificada na França através do *Aperçu Historique*, de Michel Chasles, e na Alemanha com os trabalhos de Julius Plücker, principalmente com o *System der Analytischen Geometrie*.

Mansion (1873, p.314) ressalta a importância do trabalho de Plücker sobre coordenadas homogêneas e o tratamento analítico das propriedades projetivas. Destaca duas vantagens desse novo método: a ideia das curvas e das superfícies mais gerais e os imaginários que surgem nas equações algébricas. Plücker fez belas aplicações desse método para estudar curvas de terceira ordem (MANSION, 1873, p.314). Ainda menciona Möbius e seu cálculo baricêntrico, destacando o fato de que, depois, as principais ideias foram sintetizadas por Steiner e com desenvolvimentos de Chasles, em seu *Aperçu Historique* (MANSION, 1873, p.315).

Esse trabalho de Chasles exerceu influência sobre as pesquisas de Cayley (CRILLY, 2006, p.65). Podem-se citar como exemplos os primeiros artigos de Cayley que tratam de curvas algébricas: *On the intersection of curves* (1843) e *On the theory of algebraic curves* (1843). No primeiro, cita um teorema presente no *Aperçu Historique* que Chasles usa para demonstrar o teorema de Pascal. O teorema é apresentado por Cayley da seguinte maneira: “Se uma curva de terceira ordem passa através de oito pontos de interseção de duas curvas de terceira ordem, ela passará através do nono ponto de interseção”. (CAYLEY, 1843c, p.25).

Cayley estende a definição para curvas de ordem “ m ” e “ n ” e relaciona aos $m.n$ pontos de interseção (CAYLEY, 1843c, p.26).

Já no segundo artigo, Cayley considera os casos nos quais a interseção pode ser menor que $m.n$, considerando formas de ordem “ m ” e “ n ”. E, no final, cita duas fontes de referência no assunto: Jacobi, *Theoremata de punctis intersectionis duarum curvarum algebraicarum*, do jornal do Crelle (1836, volume XV) e Plücker, *Théorèmes généraux concernant les equations à plusieurs variables, d'un degré quelconque entre un nombre quelconque d'inconnues*, jornal do Crelle (1837, volume XVI).

Em seus primeiros artigos, pode-se constatar o quanto Cayley conhecia dos trabalhos dos matemáticos continentais, como Lagrange, Jacobi, M. Chasles, Plücker, entre outros (DIAS, 2013). Tal fato nos ajuda a entender o rápido desenvolvimento dos artigos de Cayley e sua extraordinária produção matemática.

É importante destacar o precoce interesse de Cayley sobre polinômios homogêneos, formas homogêneas, como fica perceptível na introdução de seu segundo artigo. Ao fazer isso, ele enfatiza a propriedade de homogeneidade dessas formas. Cayley afirma que os termos de H_m são os mesmos de uma função U de coeficientes inteiros e racionais, todos de grau m . Isso significa que os polinômios homogêneos de grau m podem ser representados por uma função de coeficientes inteiros e racionais, o que simplifica a análise desses polinômios (CAYLEY, 1843c, p.46). Cayley usou essa abordagem para explorar as propriedades dos polinômios homogêneos e formas homogêneas em seus trabalhos, e essa abordagem se tornou fundamental para o desenvolvimento da geometria algébrica e da teoria dos invariantes.

Jacobi, em seu artigo de 1836, além de mencionar o uso de funções homogêneas, oferece como referência seu outro trabalho, também do Jornal do Crelle, de 1833, que investiga transformações de polinômios homogêneos por meio de substituições lineares (JACOBI, 1836, p.115).

No artigo de 1833, dentre seus desenvolvimentos, pode-se ver a busca por relações entre os coeficientes desses polinômios (JACOBI, 1834, p.7). Boole vai além, estabelecendo as características dessas relações, bem como um método novo para encontrá-las. Em meados de 1844, Cayley demonstra seu interesse por esse campo de pesquisa através de uma carta endereçada a Boole, que será apresentada na seção seguinte.

2.6.5 A influência de George Boole sobre Cayley

Crilly (2006, p.86) informa que, em junho de 1844, Cayley, escreve uma carta a George Boole, enviando alguns desenvolvimentos surgidos após sua leitura do artigo de Boole. Cayley escreve sobre seu interesse pelo novo tema de pesquisa:

Permita-me usar do pretexto do prazer que me proporcionou um artigo seu publicado há algum tempo no *Mathematical Journal*, *On the theory of linear transformations*, e do interesse que eu tomei pelo assunto, para enviar algumas fórmulas em relação a este tema, que foram sugeridas por mim através de seu artigo muito interessante; eu ficaria feliz se elas prevalecerem sobre vós para retomar o assunto, o que realmente parece inesgotável. (CAYLEY, 1844a apud CRILLY, 2006, p.86)

Logo, a comunicação entre Boole e Cayley nos mostra o quanto de interesse os artigos de 1841 daquele despertaram neste, levando-o a encontrar métodos próprios e mais eficazes do que o de Boole, o que fica registrado em seus artigos de 1845 e 1846 em transformações lineares que apresentam seus métodos na teoria dos invariantes.

2.7 O desenvolvimento da teoria dos invariantes pelos britânicos

Cayley participou de forma ativa desse processo iniciado pela Sociedade Analítica de retirar a Inglaterra da situação de isolamento em relação à matemática continental. Temas abordados, como geometria de posição, determinantes e operações com cálculo, testificam esse esforço por manter a matemática de Cambridge mais próxima à dos demais países europeus.

As formas algébricas, das quais emerge inspiração para o surgimento da teoria dos invariantes, foram um dos temas principais do período. Esta última foi o grande interesse de pesquisa de Cayley, no período de 1843 a 1854, com inúmeros artigos tratando do tema na linha do programa da teoria das curvas de Plücker, sendo aplicada assim à geometria analítica.

O jornal *The Cambridge Mathematical Journal* foi expandido para o *The Cambridge and Dublin Mathematical Journal*, a partir de 1846. Cayley rompe as barreiras do isolamento matemático inglês em 1844, com a publicação do artigo *Mémoire sur les Courbes Du Troisième Ordre*, no jornal de Liouville. Foi um feito memorável, pois se tratava de um dos mais importantes periódicos internacionais na área, juntamente com o jornal do Crelle.

Cayley faz amizade com J. J. Sylvester, com quem fará grande parceria no desenvolvimento da teoria dos invariantes, no ano de 1850. Salmon também se torna grande colaborador nesta teoria que passa a atrair grande atenção dos matemáticos por aquele período.

Nosso objetivo será investigar o desenvolvimento da teoria dos invariantes, no período de 1843 a 1854, logo anterior ao grande trabalho das memórias sobre *quantics* de Cayley, no que se refere aos seus aspectos algébricos e, principalmente, geométricos. Nossos questionamentos principais:

- A teoria prossegue com interpretações geométricas?
- Qual o papel da geometria projetiva analítica nesta teoria?
- Como se desenvolve a rede de pesquisa britânica e quais os seus principais pontos de interesse?

Para respondê-las, apresentaremos os artigos matemáticos de Cayley e de seus contemporâneos, dividindo em três períodos: primeiro, de 1843 a 1845, culminando no primeiro artigo no qual Cayley propõe um método novo em relação ao de Boole; segundo, a produção de 1845 a 1846, período que inclui o primeiro trabalho e o segundo nos quais introduz os chamados “hiperdeterminantes”; e, por último, de 1846 a 1854, período que culmina com a primeira memória sobre os *quantics*. É a partir desse último período que pretendemos analisar a prática comum entre Cayley, Sylvester e Salmon.

2.8 Primeiro período, de 1843 a 1845

Neste primeiro período, pretendemos estudar como avança o uso da álgebra aplicada à geometria por Cayley e por alguns de seus contemporâneos britânicos. O recorte escolhido se deve ao fato de, em 1845, Cayley publicar seu primeiro artigo que trouxe grande avanço à teoria dos invariantes, *On The Theory of Linear Transformations*; com isso, podem-se analisar as primeiras características dessa nascente teoria durante o período indicado.

A álgebra apreciada será, primordialmente, aquela introduzida por Boole, que considera substituições lineares, também conhecida como teoria das curvas algébricas, uma vez que possuía clara intenção de estudar curvas e superfícies de um dado grau. Por sua vez, a geometria considerada será a projetiva, incluindo suas transformações e propriedades. Como já vimos, essa geometria chega a Cambridge por intermédio da influência francesa, de Chasles, e da alemã, dos textos de Plücker e Hesse.

2.8.1 O artigo *On the Theory of Determinants*

O artigo de Cayley foi recebido em 20 de fevereiro de 1843, porém apenas foi publicado no oitavo volume dos *Transactions of The Cambridge Philosophical Society* de 1849, porém, apesar da publicação tardia, traz várias características importantes do trabalho algébrico e geométrico de Cayley no início de 1843.

O estudo dos determinantes por Cayley estava conectado a várias áreas de estudo como, por exemplo, as rotações no espaço, a teoria das equações lineares, a geometria analítica, a teoria dos números, dentre outras partes do conhecimento matemático (CRILLY, 2006, p.66).

Dentre estas áreas de pesquisa, conforme afirma Crilly (2006, p.66), o estudo dos determinantes estava relacionado à “teoria da eliminação”, que guiou Cayley ao grande desenvolvimento da teoria dos invariantes.

No próprio artigo, Cayley explica esse uso diverso da teoria dos determinantes. Ele diz: “Os nomes ‘determinantes’, ou ‘resultantes’, foram designados, como é bem conhecido, para as funções que, igualadas a zero, expressam o resultado da eliminação de algum número de variáveis e de algumas equações lineares, sem termos constantes.” (CAYLEY, 1843c, p.75).

Cayley trata o assunto em duas investigações distintas e é justamente na primeira parte de seu artigo que os determinantes são abordados conforme a definição acima apresentada.

Ainda em sua introdução, o matemático apresenta as aplicações da “teoria dos determinantes”:

Mas as mesmas funções ocorrem na resolução de um sistema de equações lineares, no problema geral da eliminação entre as equações algébricas, e casos particulares delas em geometria algébrica, na teoria dos números, e, em suma, em quase todas as partes da matemática. (CAYLEY, 1843c, p.75)

Esse é o primeiro artigo no qual Cayley usou o termo “*algebraic geometry*”. Ficou claro que a designação está relacionada ao uso das equações algébricas e à teoria da eliminação, que culminou na teoria dos invariantes. Logo, o termo “geometria algébrica”, nesse contexto, pode ser utilizado para designar o uso das teorias relacionadas às equações algébricas, conforme já apresentamos.

Cayley lista alguns trabalhos de seu conhecimento nesse assunto. Do século XVIII, cita Étienne Bézout, Gabriel Cramer, Laplace, Lagrange e Vandermonde. Do século XIX, Jacques Binet, Cauchy, Jacobi e Victor Lebesgue. A maioria desses trabalhos de diversos matemáticos estava relacionada ao uso da análise à geometria, ou à teoria das curvas, o que mostra o quanto o autor conhecia da matemática continental e explica sua grande produção matemática, inclusive em periódicos não ingleses.

Cayley (1843c, p.76) também menciona *Disquisitiones Arithmetica* de Gauss e *Determination of the Elements of a Comet's Orbit* de Lagrange, como forma de exemplificar alguns casos do uso das equações. Ele cita seu texto de 1841, que trata de encontrar a relação existente entre as distâncias de cinco pontos no espaço, dizendo que tem aplicado esse método no artigo e em outros problemas geométricos.

A teoria encontrada no trabalho indicado, chamada por Cayley de “teoria dos determinantes”, é uma forma inicial que culmina em seu artigo de 1846 sobre os “hiperdeterminante”, em que Cayley encontra clara aplicação no cálculo de invariantes, como veremos mais à frente.

2.8.2 Os artigos de Cayley de “geometria algébrica”

O índice do *The Cambridge Mathematical Journal*, volume quatro, de 1845, nos mostra o quanto avançaram os métodos analíticos aplicados à geometria. Basta dizer que a seção destinada à geometria plana possui vários artigos que seguem essa tendência.

A seção aborda a geometria dos sólidos também usa recursos algébricos. Destacaremos um artigo de Cayley que utiliza transformações lineares.

Na seção de álgebra, há artigos que lançam mão da “teoria das formas” como o de Cayley, *Chapters in the analytical geometry of (n) dimensions*. Fechando essa seção, encontram-se os artigos *Notes on linear transformations*, de Boole, e *On the theory of linear transformations*, de Cayley, de 1845, que apresenta seu método em resposta à teoria de Boole.

Cayley submete o artigo *Demonstration of Pascal's Theorem*, em novembro de 1843, publicado no volume acima citado do *The Cambridge Mathematical Journal*, na seção intitulada *Plane Geometry*. Cayley (1843a, p.18) realiza uma demonstração analítica do teorema de Pascal, utilizando-se de equações homogêneas e trabalhando no espaço projetivo. Ele faz uso de seis pontos onde ele trabalha as condições para estes pertencerem a um cone, de tal forma que o problema possa ser reduzido ao plano, utilizando $z = 1$, ou seja, ao teorema do hexágono de Pascal ¹⁹.

Lembrando que uma maneira de encontrar a equação de um plano é usar um ponto e um vetor normal. Um vetor normal é um vetor que é perpendicular ao plano. Se temos um ponto $P = (x_0, y_0, z_0)$ e um vetor normal $n = (A, B, C)$, então a equação do plano que passa por P é $U = Ax + By + Cz - D = 0$, onde $D = Ax_0 + By_0 + Cz_0$. Isso pode ser verificado inserindo as coordenadas de P e vendo que $U = 0$. Cayley usa planos passando pela origem, então, neste caso $P = (0, 0, 0)$ e $D = 0$. Assim, a equação do plano é simplesmente $U = Ax + By + Cz = 0$. Por exemplo, se queremos encontrar a equação de um plano passando pela origem e tendo um vetor normal $n = (1, -2, 3)$, então a equação é $U = x - 2y + 3z = 0$. Agora ele trabalha com seis planos definidos por $U_1 = 0, U_2 = 0, U_3 = 0, U_4 = 0, U_5 = 0, U_6 = 0$. Cada um desses planos passa pela origem e tem um vetor normal diferente. Podemos usar esses planos para estudar várias propriedades geométricas, como interseções, ângulos, distâncias e volumes. Ele considera as interseções dois a dois dos planos, que resultam em seis retas que passam pela origem. Essas retas podem ser associadas a pontos no plano $z = 1$, usando a dualidade entre retas e pontos. Por exemplo, a reta que é a interseção dos planos $x + y + z = 0$ e $x - y + z = 0$ pode ser representada pelo ponto $(1, 0, 1)$ no plano $z = 1$. Cayley mostra que esses seis pontos formam um hexágono e chega à relação que garante que esses pontos pertencem a um mesmo cone de segunda ordem, demonstrando, assim, o teorema.

No final do artigo, faz referência a um método de Chasles que considera mais simples, mas que necessita de conhecimento prévio da propriedade de semelhança da razão anarmônica, consistindo nisso a dificuldade do método para iniciantes nessa teoria analítica (CAYLEY, 1843a, p.20). Cayley demonstra novamente sua identificação com a teoria apresentada por Chasles.

No próximo artigo, publicado na mesma seção do quarto volume do *Cambridge Mathematical Journal*, cujo título é *On the theory of algebraic curves*, Cayley explica seu uso dos polinômios homogêneos e das equações desses polinômios:

Suponhamos uma curva definida pela equação $U = 0$, U sendo uma função racional e integral de grau m e de coordenadas x, y . Pode ser sempre assumido, sem perda de generalidade, que os termos envolvendo x^m, y^m , ambos aparecem

¹⁹ Se o hexágono é inscrito a uma cônica, os três pontos de intersecção dos lados opostos são colineares.

em (U) ; e também que o coeficiente de y^m é igual à unidade. (CAYLEY, 1843b, p.102)

Cayley toma uma equação U de grau m de variáveis x, y com coeficientes inteiros e racionais. Sem perda de generalidade, considera que os termos x^m, y^m apareçam em U e que o coeficiente de y^m seja igual à unidade e justifica essas considerações afirmando ser possível, caso a equação não satisfaça essas condições, através de transformações dos eixos coordenados e dividindo a nova equação pelo coeficiente de y^m , chegar a tais condições para um caso qualquer onde a função U não esteja neste formato.

Cayley introduz essas condições visando a uma apresentação mais cômoda que ele pretende usar, a fim de realizar suas considerações sobre a curva representada por essa equação. Ele prossegue:

Dado H_m denotar os termos de U , que são da ordem (m) , e dados $y - \alpha x, y - \beta x, \dots, y - \lambda x$ serem os fatores de H_m . Se as quantidades $\alpha, \beta, \dots, \lambda$ são todas diferentes, a curva é dito ter um número de direções assintóticas iguais ao grau de sua equação. (CAYLEY, 1843b, p.103)

Denota H_m a função homogênea de grau m formada pelos termos de U que possuem tal grau. Exemplo, sendo $U = a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4y^3 + a_5x^2y + a_6xy^2$, então $H_m = a_1x^3 + a_4y^3 + a_5x^2y + a_6xy^2$, sendo a função homogênea retirada dos termos de U .

Ele toma ainda $y - \alpha x, y - \beta x, \dots, y - \lambda x$ para fatores desse polinômio, daí a importância das condições iniciais que apresenta, onde os termos x^m, y^m devem estar em U e do coeficiente de y^m ser igual à unidade, para que seja possível a forma fatorada e sempre considera as quantidades $\alpha, \beta, \dots, \lambda$ diferentes, o que garante o fato do número de assíntotas ser igual ao grau da equação.

Desenvolvendo a teoria, Cayley chega a uma forma de representar as equações das curvas através da seguinte expressão: $U = (y - \alpha x - \alpha')(y - \beta x - \beta') + k$, para o caso de uma equação do segundo grau. Com essa forma de representar, consegue discutir os casos possíveis de interseção da curva acima com outra, $V = (y - Ax - A')(y - Bx - B') + K$, também do segundo grau. Ele analisa os casos nos quais o número de interseções é menor do que o produto do grau dos polinômios. No exemplo das equações do segundo grau, trata dos casos onde haverá, respectivamente, três, duas e uma interseção.

Estes artigos mostram que Cayley estava interessado em estudar as propriedades geométricas das curvas e superfícies algébricas, usando ferramentas analíticas como os polinômios homogêneos. Ele foi influenciado por Plücker, que introduziu o conceito de classe de uma curva e desenvolveu a geometria projetiva de forma analítica. Ele cita o matemático alemão no final de seu artigo (CAYLEY, 1843b, p.112). Cayley usou o que hoje chamamos de sistema de coordenadas homogêneas para representar pontos e retas no plano e no espaço projetivo. Ele não deu um nome específico a esse sistema, mas o usou de forma natural e consistente em seus trabalhos. O sistema de coordenadas homogêneas introduz um parâmetro homogêneo h , que não é zero, e que permite expressar um ponto cartesiano (X, Y) como uma tripla $[x, y, h]$, onde $X = x/h$ e $Y = y/h$. Quando $h = 1$, as coordenadas cartesianas são um caso particular

das coordenadas homogêneas. Este sistema possui vantagens no tratamento algébrico de transformações geométricas, como translação, escala e rotação, pois permite representá-las como multiplicação de matrizes. Além de poder trabalhar com os pontos imaginários ao infinito. Esses pontos representam a direção de retas paralelas ao plano de projeção. O conjunto de todos os pontos imaginários ao infinito forma uma reta chamada de reta no infinito. Quando trabalhamos no sistema cartesiano não é possível trabalhar com esses pontos. Cayley já tinha percebido essa vantagem quando trabalhou sobre estes artigos de 1843.

O próximo artigo de Cayley, cujo título é *Chapters in the analytical geometry of (n) dimensions*, de 1844, tomou lugar na seção de álgebra. A primeira observação que se pode fazer é em relação ao próprio título que, apesar de sugerir o uso de uma geometria de n dimensões, revela que Cayley não se detém às questões filosóficas da existência ou não de espaços de n dimensões, o que faz é considerar determinantes de ordem n , sendo possível destacar transformações de n variáveis. Quando, porém, ele faz referência à geometria, considerando casos concretos, considera três dimensões (CAYLEY, 1844b).

Neste artigo, Cayley (1844b) estabelece as bases para o estudo da geometria analítica de (n) dimensões, usando a notação matricial e os determinantes. Ele define o que hoje chamamos de produto escalar e produto vetorial entre vetores de (n) componentes, e mostra como eles podem ser usados para calcular distâncias, ângulos e áreas. Ele também introduz o conceito de forma quadrática e de superfície quádrlica, generalizando as noções de elipse, parábola e hipérbole para dimensões superiores. Ele demonstra algumas propriedades dessas formas e superfícies, como a existência de eixos principais. Ou seja, neste artigo ele coloca vários elementos importantes para a generalização da geometria analítica de (n) dimensões que se tornará importante nos futuros trabalhos em geometria algébrica ou teoria dos invariantes.

Outra discussão seria acerca dos motivos pelos quais o artigo foi publicado na seção de álgebra e não de geometria. O periódico possuía duas seções destinadas à geometria, uma chamada *Plane Geometry* - pelo próprio nome seria da geometria de duas dimensões - e a outra seção com título *Solid Geometry*, que tratava da geometria de três dimensões. Logo, a geometria era encarada dentro dessas duas perspectivas; assim, o artigo de Cayley foi mais bem enquadrado, aparentemente, na seção de álgebra.

O artigo se utiliza de polinômios homogêneos, desenvolve sua teoria com o uso de determinantes, formas bilineares, equações recíprocas e, no final, aplica a geometria. Crilly (2006, p.82) destaca que esse trabalho possui influência de Plücker, autor de *General Theorems* de 1837, fato coerente com nossos resultados nas leituras dos artigos de Cayley.

Esses artigos demonstram o quanto Cayley estava familiarizado com o uso da álgebra aplicada à geometria. Ele utiliza polinômios homogêneos, estudando a teoria das curvas, seguindo o programa de Plücker. Várias citações existem, também, com relação aos trabalhos de Chasles, o que indica uma influência francesa em relação à geometria projetiva.

Antes de estudar o primeiro artigo de Cayley que desenvolve a teoria iniciada por Boole, analisaremos alguns artigos de três matemáticos britânicos, D. F. Gregory, William Thomson e

William Walton, para destacar a recepção das novas abordagens por contemporâneos de Cayley.

2.8.3 A “geometria algébrica” nos trabalhos de D. F. Gregory, William Thomson e William Walton

Duncan Farquharson Gregory nasceu em Edinburgh em abril de 1813, foi eleito *Fellow* do Trinity College em 1840 e faleceu em fevereiro de 1844, de uma doença não esclarecida na biografia de Leslie Ellis, editor do *Cambridge Mathematical Journal* (ELLIS, 1844, p.152).

Escreveu sobre cálculo, utilizando a notação de Leibniz, seguindo a tendência de modernização proposta pela Sociedade Analítica.

Em geometria analítica, em 1842, começou a escrever um livro terminado pelo matemático William Walton (1813 a 1901), cuja segunda edição data de 1852 e tem por título: *A Treatise on The Application of Analysis to Solid Geometry*. A obra sintetiza todo o trabalho inglês de aplicar transformações lineares e uso do cálculo diferencial à geometria, usa extensamente a propriedade de simetria das equações, que Cayley utiliza para o caso dos polinômios homogêneos.

Seu último artigo publicado foi *Of Asymptotes to Algebraic Curves*, do quarto volume do *Cambridge Mathematical Journal*, no qual usa a interpretação da primeira derivada e o cálculo do ponto de tangência de uma curva. Ele interpreta as assíntotas como o caso de tangência num ponto no infinito.

Utiliza a seguinte forma de representar uma curva:

$$u = \phi_n(x,y) + \phi_{n-1}(x,y) + \phi_{n-2}(x,y) + \cdots + \phi_0 = 0,$$

onde o símbolo $\phi_n(x,y)$ denota uma função homogênea de grau n nas variáveis x e y . Essa notação foi utilizada para facilitar o cálculo do ponto de tangência, pois simplifica a representação da equação da tangente:

$$x' \frac{du}{dx} + y' \frac{du}{dy} + \phi_{n-1}(x,y) + 2\phi_{n-2}(x,y) + \cdots + n\phi_0 = 0,$$

sendo x' e y' as coordenadas da tangente. Essa propriedade facilita o cálculo da derivada de u em relação a x e a y , pois basta aplicar a regra do produto e usar que $\frac{d}{dx}(x^n y^0) = nx^{n-1}y^0$ e $\frac{d}{dy}(x^0 y^n) = ny^{n-1}x^0$. Assim, a equação da tangente pode ser escrita de forma mais simples, eliminando os termos que não dependem de x' e y' . D. F. Gregory chega à condição que $u_n = 0$, onde u_n é a função homogênea de grau n nas variáveis x e y (GREGORY, 1843, p.44).

A equação $u = \phi_n(x,y) + \phi_{n-1}(x,y) + \phi_{n-2}(x,y) + \cdots + \phi_0 = 0$ é uma forma conveniente de representar uma curva. Nessa equação, cada termo $\phi_i(x,y)$ é uma função homogênea de grau i nas variáveis x e y . Essa notação tem a propriedade de simplificar o cálculo do ponto de tangência.

A equação da tangente é encontrada a partir do cálculo das derivadas parciais da equação da curva em relação às variáveis x e y , no ponto desejado. Usando a notação acima, a equação

da tangente pode ser escrita como $x' \frac{du}{dx} + y' \frac{du}{dy} + \phi_{n-1}(x, y) + 2\phi_{n-2}(x, y) + \cdots + n\phi_0 = 0$, onde x' e y' são as coordenadas do ponto de tangência.

A notação apresentada permite uma simplificação na representação da equação da tangente, já que a derivada de cada termo $\phi_i(x, y)$ em relação a x ou y é uma função homogênea de grau $i - 1$, o que permite uma fácil identificação dos termos correspondentes na equação da tangente. Além disso, a notação também é útil para a simplificação do cálculo de outros conceitos geométricos, como as normais e as curvaturas das curvas.

Um exemplo do seu método é apresentado em seguida: seja a curva $y^3 - x^3 - ax^2 = 0$, e $u_n = 0$ será então: $y^3 - x^3 = 0$. Daí o único fator possível é $y - x = 0$.

Aplicando o processo, encontra a outra equação: $3y'y^2 - 3x'x^2 - ax^2 = 0$, substituindo $y = x$, Gregory (1843, p.44), encontra a equação da assíntota:

$$y' - x' = \frac{a}{3}.$$

O artigo de D. F. Gregory nos mostra o uso da álgebra e do cálculo com uma interpretação geométrica. Temos equações algébricas com a finalidade de representar as curvas que se deseja estudar e ver as características geométricas a partir das operações analíticas. A teoria das curvas já estava bem desenvolvida, como vimos através dos artigos de Cayley influenciados pelos trabalhos de Plücker e Chasles. Porém, esse e o nosso próximo exemplo demonstram um interesse de maior proporção, em que vários matemáticos britânicos estavam pesquisando o uso da álgebra aplicada à geometria.

William Thomson submete um artigo aceito no quarto volume do *Cambridge Mathematical Journal*, com o título: *Reduction of the general equation of surfaces of second order*, que foi publicado na seção “*Solid Geometry*” deste periódico. William Thomson (1824 a 1907) foi o segundo *Wrangler*, em 1845, também no mesmo ano foi eleito um *fellow* de Peterhouse. Thomson e Cayley foram amigos e ambos receberam influência de Duncan Farquharson Gregory, que foi tutor no Trinity College (CRILLY, 2006, p.68).

Em seu artigo, recebido em 1845, ele apresenta um método para reduzir a equação de uma superfície quadrática em uma forma mais simples, na qual as coordenadas são substituídas por outras linearmente independentes. Ele utiliza a seguinte equação de uma superfície quadrática como exemplo: $Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz + Gx + Hy + Iz + J = 0$.

Para transformá-la em uma forma mais simples, ele realiza as seguintes substituições lineares das coordenadas: $x = lx' + my' + nz'$, $y = l'x' + m'y' + n'z'$, $z = l''x' + m''y' + n''z'$. Essas substituições são escolhidas de forma a tornar a equação mais simples, eliminando alguns termos.

Após essas substituições, Cayley obtém a seguinte equação: $Px'^2 + Qy'^2 + Rz'^2 + H' = 0$, na qual P, Q e R são os coeficientes das coordenadas quadráticas, e H' é uma constante.

Cayley então estuda as condições sob as quais essa equação representa um elipsoide, um hiperboloide de uma folha, um hiperboloide de duas folhas ou uma superfície imaginária. Ele

encontra essas condições analisando a equação $\frac{f}{P-\alpha} + \frac{g}{P-\beta} + \frac{h}{P-\gamma} - 1 = 0$, na qual f, g, h são os coeficientes das coordenadas lineares e α, β, γ são as raízes da equação $Px^2 + Qy^2 + Rz^2 = 0$.

Cayley apresenta as condições de sinais que devem possuir $f, g, h, \alpha, \beta, \gamma$ para que a equação represente cada tipo de superfície. Essas condições são complexas e envolvem a análise de diferentes casos, mas são fundamentais para entender as propriedades dessas superfícies e sua representação em diferentes sistemas de coordenadas.

Destaca-se o uso dos métodos algébricos de transformação linear com a finalidade de estudar as propriedades de uma superfície quadrática. Desde o artigo de Boole de 1841, pode-se perceber a grande atração por métodos que utilizem transformações lineares.

William Walton, como já foi mencionado, incumbiu-se de terminar o livro de D. F. Gregory, reunindo todas as suas notas e desenvolvimentos. O livro apresenta uma síntese de todo trabalho em aplicar métodos analíticos à geometria.

W. Walton publica alguns artigos no mesmo volume do jornal de Cambridge, dos quais podemos destacar seu artigo *On Brianchon's hexagon*, de 1844. Nele, observa-se novamente a influência francesa. Walton toma como referência um artigo de Brianchon publicado no jornal da *École Polytechnique* (WALTON, 1844, p.163).

Além disto, propõe uma demonstração algébrica para o problema, tratando primeiramente do caso da hipérbole e depois da elipse. Ele considera o caso de hipérbole e de elipse, pois, como afirma, havia apenas demonstrações analíticas para o caso da parábola. Logo, Walton pretende, nesse estudo, suprir essa deficiência (WALTON, 1844, p.164).

Apesar de ele não desenvolver seu método com polinômios homogêneos, mostra-nos a importância dos métodos analíticos nesse período na Inglaterra. Esses matemáticos britânicos fazem parte do contexto de pesquisa de aplicar métodos analíticos aos aspectos geométricos.

George Boole publica um novo artigo sobre sua teoria introduzida no artigo de 1841, que destacaremos a seguir, antes de apresentar o primeiro artigo de Cayley sobre transformações lineares.

2.8.4 O artigo de Boole de 1844, a continuação de sua teoria

No artigo de George Boole de 1844, intitulado *Notes on Linear Transformation*, publicado no quarto volume do *Cambridge Mathematical Journal*, o autor começa analisando a redução da função homogênea $ax^2 + by^2 + cz^2 + 2dxy + 2ezx + 2fyz$ para uma forma mais simples $a'x'^2 + b'y'^2 + c'z'^2$ através de transformações lineares das coordenadas. Em seguida, Boole aplica essa técnica na investigação da "atração de um elipsoide", cuja superfície é definida pela equação $\frac{x^2}{h^2} + \frac{y^2}{h_1^2} + \frac{z^2}{h_2^2} = 1$. Onde h, h_1 , e h_2 são comprimentos dos semieixos de um elipsoide. Sendo h é o semieixo correspondente ao eixo x , h_1 ao eixo y , e h_2 ao eixo z .

Boole considera um ponto externo a, b, c , e a força variando com o inverso do quadrado da distância, representada por $\frac{1}{d^2}$. Ele apresenta uma equação para essa força, que é a forma

transformada da equação da superfície do elipsoide. A equação transformada é dada por $\frac{a^2}{\eta^2+h^2} + \frac{b^2}{\eta^2+h_1^2} + \frac{c^2}{\eta^2+h_2^2} = 1$.

Boole conclui sua segunda nota observando que os valores de η^2 são os mesmos de A, B, C na seguinte transformação: $(a^2 - h^2)x^2 + (b^2 - h_1^2)y^2 + (c^2 - h_2^2)z^2 + 2bcyz + 2cezx + 2abxy$, que pode ser escrita na forma $Ax'^2 + By'^2 + Cz'^2$, sendo x, y, z e x', y', z' sistemas de coordenadas retangulares. (BOOLE, 1844, p.168).

Nessa segunda nota, Boole apresenta uma clara aplicação de seu método de transformação das coordenadas. A interpretação geométrica continua acompanhando seus desenvolvimentos, como se pode notar nessa aplicação ao problema da atração de um elipsoide. Sua terceira nota trata de demonstrar a relação que ele propõe em seu artigo de 1841:

$$\theta(Q_n) = \frac{\theta(R_n)}{E^{\frac{\gamma^n}{m}}},$$

onde $\theta(Q_n)$ e (R_n) são expressões formadas pelos coeficientes, respectivamente, da função original Q_n e da função transformada R_n . O termo E é o determinante dos coeficientes da transformação linear. O expoente γ^n é um fator de escala que permite ajustar o tamanho da expressão e é determinado a partir das condições de homogeneidade da equação original. Por fim, o expoente m representa o grau da homogeneidade da equação original. Esse resultado, como já apresentado anteriormente, é a definição de um invariante na teoria que está nascendo.

Em sua última nota, Boole apresenta um polinômio homogêneo do quarto grau em duas variáveis, x, y , e a forma $\theta(Q_n)$ desse polinômio, que seria o invariante dessa quártica. Boole termina suas notas afirmando: “O resultado acima pode, provavelmente, ter algumas aplicações na teoria das equações algébricas de grau superior” (BOOLE, 1844, p.171). Isto sugere que Boole reforça novamente o fato de o tema ser um amplo campo de pesquisa.

Logo, pode-se concluir que ele enfatiza sua teoria com suas implicações geométricas. Como no caso do artigo de 1841, esse também possui clara interpretação geométrica.

2.8.5 O artigo de Cayley de 1845, a sua primeira contribuição no tema iniciado por Boole

O primeiro artigo de Cayley sobre o tema das transformações lineares foi publicado no Cambridge Mathematical Journal em 1844. Cayley se interessou pelo assunto através do trabalho de George Boole em 1841, intitulado “On The Theory of Linear Transformations”. Ele se comunicou com Boole por meio de cartas, apresentando seus próprios resultados.

No artigo, Cayley (1845d) avança na teoria das transformações lineares ao considerar o uso de determinantes. Ele usa a representação matricial para descrever séries de determinantes que podem ser formados a partir de coeficientes de polinômios homogêneos, selecionando qualquer sistema de linhas verticais. Cayley apresenta o que chama de “teorema fundamental” para a multiplicação dos determinantes dados, e chega à definição de “hiperdeterminante”.

O “hiperdeterminante” é uma coleção de determinantes gerados a partir da eliminação dos coeficientes de um determinado número de variáveis. Cayley chega a um sistema de equações diferenciais cuja solução é a forma invariante procurada. A função (u) é o “hiperdeterminante”, que é o mesmo que invariante na nomenclatura posterior. Em resumo, Cayley expandiu suas considerações a formas multilineares e desenvolveu a teoria do “hiperdeterminante” para encontrar invariantes de formas homogêneas.

Cayley apresenta aplicações à geometria, citando alguns artigos seus que relacionam a “teoria da eliminação” à geometria. Nessa temática cita também alguns trabalhos de Hesse, matemático alemão que trabalhou aspectos geométricos da nascente teoria dos invariantes.

Um destaque pode ser dado ao fato de Cayley citar os seguintes artigos de Hesse como referência: *De curvis et superficiebus secundi ordinis*, do volume vinte do jornal do Crelle, e *Ueber die Elimination der Variabeln aus drei algeb. Gleichungen vom zweiter Grade mit zwei Variabeln*, do volume vinte oito do mesmo periódico. Acerca do primeiro artigo, ele diz possuir uma bela demonstração, mas não utilizando determinantes e sim funções quadráticas. Já do segundo, afirma que Hesse relaciona funções do terceiro grau a importantes resultados.

Logo, apesar do artigo de Cayley ser aparentemente apenas algébrico, no contexto do desenvolvimento apresentado, pode-se ver que os aspectos geométricos eram igualmente importantes para Cayley. Suas referências aos artigos de Hesse reforçam isso, em destaque quando cita:

Alguns teoremas sobre funções quadráticas, pertencendo, no entanto, a uma parte diferente do assunto, serão encontrados em meu artigo já citado na Cambridge Philosophical Transactions, e em um artigo no Jornal sobre geometria algébrica de (n) dimensões.²⁰ (CAYLEY, 1845d, p.201, Tradução nossa)

O interesse de Cayley em aplicar a álgebra à geometria fica evidente já em seu primeiro artigo sobre transformações lineares, no qual ele apresenta algumas interpretações geométricas para os resultados obtidos.

Uma das primeiras observações de Cayley é que uma transformação linear pode ser vista como uma mudança de coordenadas em um espaço geométrico. Ele nota que uma transformação linear que leva um ponto (x,y) a um ponto (x',y') pode ser vista como uma mudança de coordenadas de (x,y) para (x',y') . Isso significa que as coordenadas de um ponto em um espaço geométrico não são fixas, mas dependem da escolha de um sistema de coordenadas.

Além disso, Cayley também observa que as transformações lineares podem ser representadas por matrizes, e que a composição de duas transformações lineares corresponde à multiplicação das matrizes correspondentes. Essa observação permite que ele utilize técnicas algébricas para estudar propriedades geométricas das transformações lineares, como por exemplo a invariância de certas quantidades.

²⁰ A few theorems on quadratic functions, belonging, however, to a different part of the subject, will be found in my paper already quoted in the Cambridge Philosophical Transactions; and likewise in a paper in the Journal on the Algebraical Geometry of (n) dimensions.

Cayley também introduz a ideia de uma forma homogênea como uma generalização de uma equação polinomial em duas variáveis. Ele mostra que uma forma homogênea pode ser vista como uma função de um espaço projetivo, e que as transformações lineares podem ser utilizadas para mudar o sistema de coordenadas em que a forma homogênea é escrita. Isso permite que ele estude propriedades invariantes das formas homogêneas, como por exemplo a existência de soluções para certas equações polinomiais.

Em resumo, Cayley demonstra seu interesse em continuar aplicando a álgebra à geometria através de suas interpretações geométricas das transformações lineares e formas homogêneas. Ele mostra como a álgebra pode ser utilizada para estudar propriedades invariantes das transformações lineares e formas homogêneas, e como a geometria pode ser utilizada para interpretar os resultados obtidos pela álgebra.

2.9 Segundo período, de 1845 a 1846

A partir do estudo desse segundo período, pretendemos analisar como prossegue a relação entre álgebra e geometria nos textos de Cayley e de contemporâneos britânicos.

O período inicia logo após o artigo de 1845, nas transformações lineares, e termina com o segundo artigo nesse tema, de 1846. Ambos são considerados por gerações de matemáticos como os fundadores da teoria dos invariantes e apresentam os dois grandes métodos desta teoria no século XIX (CRILLY, 1986, p.242).

Outro fato a ser destacado consiste de, neste período, Cayley ter publicado mais artigos nos jornais internacionais, Crelle e Liouville, do que no *The Cambridge and Dublin Mathematical Journal*. Foram artigos que tratavam da “teoria das curvas”, na linha de Plücker, no uso dos polinômios homogêneos e das teorias de Eisenstein, Hesse e na demonstração de um teorema devido a Chasles.

Antes de ver como Cayley prossegue seus desenvolvimentos algébrico geométricos neste período, é importante notar os novos progressos registrados no periódico *The Cambridge and Dublin Mathematical Journal*.

2.9.1 *The Cambridge and Dublin Mathematical Journal*

Como já foi dito, a partir de 1846, o periódico *Cambridge Mathematical Journal* dá lugar a esta nova versão, que além de pretender ter um caráter de continuidade, sinaliza uma maior abertura a trabalhos internacionais, seguindo os planos da Sociedade Analítica de atualizar a matemática inglesa. Como exemplo disso, já no primeiro volume, aparece um artigo de J. Liouville, e no terceiro volume, um artigo de C. Hermite, ambos matemáticos franceses. Steiner publica no oitavo volume, enquanto no nono aparecem artigos de C. Hermite, Steiner e Brioschi.

O editor passa a ser William Thomson, professor de filosofia natural da universidade de Glasgow, que se interessou pelo tema das transformações lineares e participou do ciclo de

amizade de Cayley. Thomson publica no primeiro volume do novo periódico seu artigo *On The Principal Axes of A Rigid Body*, na seção reservada à mecânica.

Um artigo inovador que utiliza a álgebra com uma abordagem geométrica em sua primeira parte, intitulado *On Circular Sections of the Locus of the General Equation of The Second Order*, foi submetido por Percival Frost e lido em 28 de janeiro de 1846.

Em suas considerações sobre a seção circular de uma superfície quadrática, Frost (1846, p.135) cita o artigo de Sylvester, *Examples of The Dialytic Method of Elimination as Applied to Ternary Systems of Equations*, e o artigo de W. Thomson que trata da redução de uma equação de superfícies do segundo grau, que já apresentamos.

Sylvester (1841, p.232) propõe nesse artigo explorar exemplos do método de eliminação das variáveis, que, como vimos, já estava estabelecido, apresentando um exemplo de três equações homogêneas, como segue:

$$\left. \begin{aligned} Ay^2 - 2C'xy + Bx^2 &= 0 \\ Bz^2 - 2A'yz + Cy^2 &= 0 \\ Cy^2 - 2B'zx + Az^2 &= 0 \end{aligned} \right\},$$

e realiza a eliminação num processo de multiplicar, respectivamente, as equações por $-z^2, x^2, y^2$ e somar seus resultados, dividindo depois por $2xy$. Realizando um processo similar, multiplicando por $z^2, -x^2, y^2$ e $z^2, x^2, -y^2$, ele encontra três equações de onde ele consegue expressar a relação abaixo, formada apenas pelos coeficientes:

$$ABC(ABC - AB'^2 - B'^2 - CA'^2 + 2A'B'C') = 0,$$

de onde obtém a relação:

$$ABC - AB'^2 - B'^2 - CA'^2 + 2A'B'C' = 0.$$

Sylvester (1841, p.233) se utiliza dessa última expressão, sabendo que ela representa o discriminante do polinômio homogêneo de três variáveis:

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2A'yz + 2B'zx + 2C'xy,$$

sendo tais condições necessárias para que o polinômio acima tenha como fator $\lambda x + \mu y + \nu z$.

Foi justamente essa última condição que Frost utilizou em seu artigo, considerando uma equação polinomial homogênea de três variáveis, a qual ele afirma representar o cone que, nessas condições, possuirá duas seções planas paralelas circulares. Ele utiliza o artigo de W. Thomson apenas para tomar uma expressão que relaciona os valores representativos dos cossenos dos ângulos da direção desses planos.

Sem pretender aprofundar nos seus desenvolvimentos, apenas essas observações nos deixam a ideia de que o uso da álgebra aplicada aos problemas geométricos, inclusive com cônicas projetivas, como se pode constatar neste artigo, ganhava cada vez mais adeptos.

Como veremos, Cayley intensifica suas pesquisas que relacionam a álgebra à geometria.

2.9.2 Artigos de “geometria algébrica”

Cayley escreve o artigo *Note sur deux Formules données par M. M. Eisenstein et Hesse*, publicado no jornal do Crelle, no ano de 1845. Nele, apresenta sua teoria do “hiperdeterminante”, desenvolvida no artigo de 1845, utilizando-se de uma fórmula de Eisenstein, que é o invariante de uma forma multilinear. Depois, utiliza uma fórmula de Hesse e a relaciona ao seu método do “hiperdeterminante”. Assim, além de propagar seu novo método, demonstra total conhecimento das pesquisas internacionais na então nascente teoria dos invariantes.

No volume dez do jornal de Liouville, ano 1845, Cayley publica seis artigos, dentre os quais três estão relacionados à álgebra dos polinômios homogêneos com visão geométrica.

No primeiro, *Nouvelles remarques sur les courbes Du troisième ordre*, de 1845, do jornal de Liouville, Cayley trata cônicas utilizando polinômios homogêneos. Ele prossegue a sua investigação das curvas de terceira ordem, iniciadas em seu artigo *Mémoire sur les courbes Du troisième ordre* (1844), acrescentando algumas definições. Ao apresentar o teorema IV, inicia o que chama de “demonstração analítica” da primeira parte desse teorema. Abaixo, temos uma tradução do teorema:

Teorema IV. O lugar geométrico de um ponto P , que se move de maneira que as tangentes formadas por este ponto a três cônicas dadas quaisquer formam sempre um feixe em involução, é uma curva do terceiro grau que passa pelos dezoito centros de homologia das cônicas tomadas duas a duas, estes centros formando seis a seis dos quadriláteros inscritos correspondentes.²¹ (CAYLEY, 1845c, p.104, Tradução nossa).

Cayley (1845c, p.104) propõe uma demonstração analítica, considerando o que ele chama de “coordenadas indefinidas de um ponto” representadas por ele como: $\frac{\xi}{\zeta}, \frac{\eta}{\zeta}$. E para as cônicas, utiliza equações do tipo: $\gamma = A\xi^2 + B\eta^2 + C\zeta^2 + 2F\eta\lambda + 2G\lambda\xi + 2H\xi\eta$, fazendo: $\gamma = 0$, $\gamma' = 0$, $\gamma'' = 0$.

Observamos que trabalha de fato sobre as coordenadas homogêneas de um ponto (ξ, η, ζ) , assim como aparecem nas equações das cônicas. Há nos trabalhos de Cayley certo vai e vem entre o uso de coordenadas homogêneas e das coordenadas cartesianas associadas.

Após isso, ele toma $x/z, y/z$ para as coordenadas do ponto P e apresenta as seguintes expressões:

$$U = Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Fyz + 2Gzx + 2Hxy,$$

$$W = Ax\xi + By\eta + Cz\zeta + F(y\zeta + \eta z) + G(z\xi + \zeta x) + H(x\eta + y\xi),$$

onde $W = 0$ é a equação da reta polar do ponto P . Então Cayley coloca a expressão das duas tangentes a uma das cônicas:

$$U\gamma - W^2 = 0.$$

²¹ Le lieu d'un point P qui se meut de manière que les tangentes menées par ce point à trois coniques données quelconques, forment toujours un faisceau en involution, est une courbe du troisième ordre qui passe par les dix-huit centres d'homologie des coniques prises deux à deux, ces centres formant six à six des quadrilatères inscrits correspondants.

Ou seja, de Cayley começa com a definição do conceito de cônicas em coordenadas homogêneas (trilineares na notação de Salmon), o que permite a ele utilizar ferramentas da álgebra para explorar suas propriedades geométricas. Em particular, ele se concentra na propriedade das tangentes às cônicas e como elas se relacionam entre si.

Para isso, ele encontra uma equação um tanto extensa que reduz ao utilizar simbolismos para representar partes da equação, além disso, coloca a origem no ponto P , reduzindo a equação das tangentes à forma mais simples: $A\xi^2 + B\eta^2 - 2D\xi\eta = 0$. Nessa equação, A , B , e D são coeficientes que dependem da cônica e da posição do ponto P na cônica. A presença do termo $2D\xi\eta$ indica que as tangentes são oblíquas, ou seja, não são perpendiculares aos eixos coordenados. Para as outras duas cônicas: $A'\xi^2 + B'\eta^2 - 2D'\xi\eta = 0$ e $A''\xi^2 + B''\eta^2 - 2D''\xi\eta = 0$. Daí, utiliza-se da relação que garante estarem essas tangentes em involução:

$$\begin{bmatrix} A & B & D \\ A' & B' & D' \\ A'' & B'' & D'' \end{bmatrix} = 0.$$

A demonstração prossegue utilizando propriedades do determinante e Cayley a conclui encontrando a equação do terceiro grau que representa o lugar geométrico do ponto P , conforme descrito na primeira parte do teorema IV do artigo.

Esse artigo mostra que o uso das coordenadas homogêneas por Cayley já era uma prática bem estabelecida. Ele retoma as coordenadas cartesianas, prática sobre a qual também demonstra total domínio. No caso, a propriedade projetiva de involução de pontos é trabalhada em conjunto com o uso do determinante. Involução está associada ao alinhamento de pontos, propriedade projetiva importante.

O artigo seguinte de Cayley, do mesmo volume do Liouville, *Mémoire sur les Cubes à Double Courbure et les Surfaces développables*, é iniciado com alusão à “teoria das curvas algébricas de M. Plücker”, Cayley diz que essa é uma referência nas pesquisas dos números de diferentes singularidades das curvas planas (CAYLEY, 1845b, p.245).

Cayley propõe aplicar os princípios da teoria de Plücker às curvas no espaço de três dimensões e afirma: “Para isso, considere uma sequência contínua de pontos no espaço, as curvas que passam por dois pontos consecutivos, e os planos que passam por três pontos consecutivos;” (CAYLEY, 1845b, p.245). Ele continua esclarecendo as possíveis relações entre pontos, curvas e planos nesta sua abordagem da teoria.

No último artigo do jornal Liouville que destacaremos, cujo título é *Démonstration d'un Théorème de M. Chasles*, além de confirmar nossas afirmações acerca da influência da teoria geométrica de Chasles, ressalta também o uso das coordenadas homogêneas.

Cayley realiza a demonstração do seguinte teorema:

Sejam P, P' os pontos correspondentes de duas figuras homográficas, se a linha PP' passa através de um ponto fixo O , os pontos P estão localizados em uma

curva do terceiro grau, que passa por esse ponto.²² (CAYLEY, 1845a, p.383, Tradução nossa)

Afirma também que $\frac{x}{w}, \frac{y}{w}, \frac{z}{w}$ são as coordenadas do ponto P e $\frac{x'}{w'}, \frac{y'}{w'}, \frac{z'}{w'}$, as coordenadas do ponto P' . Num sistema de coordenadas homogêneas, um ponto no espaço é representado por um sistema de quatro coordenadas que pode ser trabalhado no sistema cartesiano por dividir as três primeiras pela quarta coordenada; Cayley utiliza esse processo e acrescenta o fato das coordenadas x', y', z', w' serem funções lineares das x, y, z, w , o que garante o fato das figuras serem homográficas.

Ele representa o ponto fixo O pelas coordenadas $\frac{\alpha}{\delta}, \frac{\beta}{\delta}, \frac{\gamma}{\delta}$ e um ponto qualquer pelas coordenadas $\frac{\lambda}{\varpi}, \frac{\mu}{\varpi}, \frac{\nu}{\varpi}$. Daí, considera estarem os pontos P, P', O na mesma reta e, com isto, considera o plano que contém os quatro pontos P, P', O, T , apresentando a equação formada pelo determinante das coordenadas igualando-o a zero. A partir dele, o autor chega às relações que garantem que a curva de terceira ordem deve passar também pelo ponto O .

Esse artigo nos informa algumas características do uso da álgebra das substituições lineares aplicada à geometria projetiva. A primeira diz respeito ao uso de coordenadas especiais, que hoje se chamam coordenadas homogêneas, que lhe possibilita trabalhar propriedades projetivas de forma algébrica, conforme a teoria de Plücker das curvas algébricas (DIAS; GRIMBERG, 2021). A segunda remete ao próprio interesse por problemas geométricos na linha de Chasles, com propriedades projetivas como homografia e, por último, há o uso do determinante com a interpretação geométrica de pontos alinhados e de pontos pertencentes ao mesmo plano.

Logo, Cayley pesquisava intensamente sobre as relações entre polinômios homogêneos e as propriedades projetivas, como involução e homografia, e isso antes de seu artigo de 1846, nas substituições lineares. A seguir veremos alguns aspectos do seu segundo artigo na teoria nascente dos Invariantes.

2.9.3 Artigo de 1846

O artigo *On Linear Transformations* foi lido em março de 1846, no *The Cambridge and Dublin Mathematical Journal*. Cayley submete ao jornal do Crelle uma tradução para o francês do primeiro artigo de 1845 e, deste de 1846, com o título *Mémoire sur les hyperdéterminants*.

No artigo de 1846, no *The Cambridge and Dublin Mathematical Journal*, aparece uma nota dizendo que o estudo continua do volume quatro, na página 209, e indica a tradução dos dois artigos, em sequência, no jornal do Crelle (CAYLEY, 1846, p.104).

Logo em sua introdução, Cayley apresenta a questão que o guia em sua investigação e que o conduz por anos de pesquisa sobre o tema. Ele objetiva: “Encontrar todos os derivados de algum número de funções, que possuem a propriedade de preservar sua forma inalterada sobre alguma transformação linear das variáveis.” (CAYLEY, 1846, p.104).

²² Soient P, P' des points correspondants de deux figures homographiques ; si la droite PP' passe toujours par un point fixe O , les points P sont situés sur une courbe du troisième degré, qui passe par ce même point.

“Derivados de algum número de funções” seriam formas algébricas compostas pelos coeficientes dessas funções, podendo estar, ou não, acompanhadas das variáveis. O que Cayley chama de *hyperdeterminant derivative* são os derivados que possuem a propriedade citada de preservar as suas formas inalteradas após transformações lineares.

O processo introduzido em seu artigo, “método do hiperdeterminante derivativo”, ficou conhecido como “processo ω de Cayley” (CRILLY, 1986, p.245). Ele introduz suas ideias utilizando formas multilineares, onde considera p séries de m variáveis: $(x_1, y_1, \dots), (x_2, y_2, \dots), \dots, (x_p, y_p, \dots)$. Toma também p' séries de m' variáveis: $(x'_1, y'_1, \dots), (x'_2, y'_2, \dots), \dots, (x'_{p'}, y'_{p'}, \dots)$, assim por diante. Com a condição de p ser no mínimo igual a m , de igual forma p' e m' , etc.

Então apresenta as substituições lineares:

$$\begin{aligned} x &= \lambda \dot{x} + \mu \dot{y} + \dots \\ y &= \lambda' \dot{x} + \mu' \dot{y} + \dots \\ &\vdots \\ x' &= \lambda' \dot{x}' + \mu' \dot{y}' + \dots \\ y' &= \lambda'' \dot{x}' + \mu'' \dot{y}' + \dots \\ &\vdots \end{aligned}$$

onde $x, y, \dots$ representam as variáveis do primeiro conjunto, de p séries de m variáveis; $x', y', \dots$ representam as variáveis do segundo conjunto, de p' séries de m' variáveis, e assim por diante.

Então Cayley representa $\|\omega\|$, que é uma série de determinantes formados pela escolha de m colunas verticais para compor o determinante, cuja matriz será quadrada $m \times m$, e similarmente $\|\omega'\|$, que representa uma série de determinantes cujas matrizes são $m' \times m'$, etc.

$$\|\omega\| = \begin{vmatrix} \xi_1 & \xi_2 & \dots & \xi_p \\ \eta_1 & \eta_2 & \dots & \eta_p \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \end{vmatrix}$$

onde: $\xi_1 = dx_1, \xi_2 = dx_2, \dots, \xi_p = dx_p; \nu_1 = dx_1, \nu_2 = dx_2, \dots, \nu_p = dx_p$; e assim por diante.

Agora, sendo E o determinante formado pelos coeficientes da substituição das variáveis, então:

$$E = \begin{vmatrix} \lambda & \mu & \dots \\ \lambda' & \mu' & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{vmatrix},$$

e pela propriedade da multiplicação de determinantes, chega à relação:

$$\|\dot{\omega}\| = E\|\omega\|, \|\dot{\omega}'\| = E\|\omega'\|, \text{etc.}$$

Cayley utiliza a seguinte notação para representar os polinômios homogêneos de grau f , formados a partir de seu novo processo:

$$\square = F(\|\omega\|^f, \|\omega'\|^{f'}, \dots), \text{ daí ele conclui:}$$

$$\dot{\square} = E^f E^{f'} \dots \square.$$

Cayley utiliza a seguinte definição:

... se U for qualquer função, sejam quais forem as variáveis $x, y, \dots$ que são transformadas, pelas substituições acima, em U ; então:

$\dot{\square} = E^f E^{f'} \dots \square U$. Ou a função $\square U$ é pela definição acima um hiperdeterminante derivativo.²³ (CAYLEY, 1846, p.106, Tradução nossa)

Cayley define ω como uma série de determinantes formados pela escolha de m colunas verticais para compor o determinante, cuja matriz será quadrada $m \times m$. Similarmente, ele define ω' como uma série de determinantes cujas matrizes são $m' \times m'$, etc.

Ele usa a matriz E , que é o determinante formado pelos coeficientes das substituições lineares, e a propriedade da multiplicação de determinantes para chegar à relação $\|\dot{\omega}\| = E^f \|\omega\|$, $\|\dot{\omega}'\| = E^{f'} \|\omega'\|$, etc.

Cayley usa a notação $\square$ para representar os polinômios homogêneos de grau f formados a partir do processo ω de Cayley. Ele conclui que $\dot{\square} = E^f E^{f'} \dots \square$, e define um “hiperdeterminante derivativo” como a função $\square U$, onde U é qualquer função que é transformada pelas substituições lineares.

Com isso, ele apresenta da forma mais geral sua teoria. Nosso objetivo aqui é de apenas apresentar a principal contribuição de Cayley nesse artigo bastante longo. Nele, demonstra a validade de seu método, além de apresentar exemplos do seu uso no cálculo dos “hiperdeterminantes derivativos”.

O método do “hiperdeterminantes derivativos”, também conhecido como processo ω de Cayley, foi uma importante contribuição de Arthur Cayley para a teoria dos determinantes e das formas multilineares. Através desse método, Cayley introduziu a ideia de polinômios homogêneos de grau f , formados a partir de séries de determinantes que podem ser expressas em termos de substituições lineares entre as variáveis.

Apesar de não apresentar de forma direta as aplicações de seu novo método, Cayley afirma, após seus longos desenvolvimentos: “importantes resultados podem ser obtidos por conectar a teoria dos “hiperdeterminantes” à da eliminação, mas ainda não tenho encontrado algo satisfatório sobre o tema.” (CAYLEY, 1846, p.122). Como apresentamos, a teoria da eliminação foi largamente utilizada, munida de uma visão geométrica de mudança dos eixos coordenados, logo isso sinaliza que Cayley buscava formas de aplicar sua nova teoria.

²³ ... if U be any function whatever of the variables $x, y, \dots$ whicj is transformed by the linear substitutions above into U , then:

$\dot{\square} = E^f E^{f'} \dots \square U$. Or the function $\square U$ is by the above definition a hyperdeterminant derivative.

2.10 Terceiro período, de 1846 a 1854

Após o artigo de 1846 e antes da primeira memória sobre *quantics*, destacam-se vários fatos importantes. A partir de 1850, em parceria com J. J. Sylvester, a teoria dos invariantes ganha novos rumos e gradualmente, chama a atenção de outros matemáticos, com destaque para George Salmon, que contribui largamente com o estudo desse tema.

Evidenciaremos a formação de uma “rede” de matemáticos pertencente à prática comum do uso dos polinômios homogêneos com aplicações em geometria projetiva, na Inglaterra.

2.10.1 Alguns artigos de Cayley

No artigo *On the Theory of Involution in Geometry*, de 1847, Cayley utiliza a álgebra dos polinômios homogêneos estudando a propriedade projetiva de involução de pontos. Ele enuncia: “Quando três cônicas têm os mesmos pontos de interseção, qualquer transversal intersecta o sistema em seis pontos, que são ditos estarem em involução.” (CAYLEY, 1847, p.52).

Antes de apresentar as definições algébricas para o caso de funções em involução, Cayley apresenta a característica geométrica dessa propriedade. Após isso, apresenta a definição em termos algébricos:

Então, se $U, V, \dots$ são funções homogêneas de mesmo grau de algum número de variáveis $x, y, \dots$. Uma função θ , que é uma função linear de $U, V, \dots$, é dita estar em involução com estas funções. De forma mais geral, θ pode ser dito estar em involução com algum sistema de fatores dessas funções: ou se $U, V, \dots$ serem dadas funções de $x, y, z, \dots$, homogêneas de graus $m, n, \dots$, e sendo $u, v, \dots$ arbitrárias funções homogêneas de graus $r - m, r - n, \dots$; então, se $\theta = \mu U + \nu V + \dots$, θ é uma função de grau r , que está em involução com $U, V, \dots$.²⁴ (CAYLEY, 1847, p.53)

Essa passagem se refere ao conceito de “involução” de funções homogêneas. Uma função é homogênea de grau k se, para qualquer constante λ , $f(\lambda x, \lambda y, \dots) = \lambda^k f(x, y, \dots)$. Por exemplo, a função $f(x, y) = x^2 + y^2$ é homogênea de grau 2, já que $f(\lambda x, \lambda y) = (\lambda x)^2 + (\lambda y)^2 = \lambda^2(x^2 + y^2) = \lambda^2 f(x, y)$.

A ideia de involução é que, se temos um conjunto de funções homogêneas de mesmo grau, podemos encontrar uma função linear dessas funções que também é homogênea de mesmo grau e que, quando composta com uma ou mais das funções originais, produz outra função homogênea do mesmo grau. Por exemplo, se U e V são funções homogêneas de grau 2, então podemos definir a função $\theta = U + V$. A função θ é homogênea de grau 2, já que $\theta(\lambda x, \lambda y) = U(\lambda x, \lambda y) + V(\lambda x, \lambda y) = \lambda^2 U(x, y) + \lambda^2 V(x, y) = \lambda^2 \theta(x, y)$. Agora, se compusermos θ com U ou V , obtemos outra função homogênea de grau 2:

²⁴ Thus, if $U, V, \dots$ be homogeneous functions of the same order of any number of variables $x, y, \dots$, a function θ , which is a linear function of $U, V, \dots$, is said to be in involution with these functions. More generally θ may be said to be in involution with any system of factors of these functions: or if $U, V, \dots$ be given functions of $x, y, z, \dots$, homogeneous of the degrees $m, n, \dots$, and $u, v, \dots$ arbitrary homogeneous functions of the degrees $r - m, r - n, \dots$; then, $\theta = \mu U + \nu V + \dots$, θ is a function of the degree r , which is in involution with $U, V, \dots$.

$$\theta(U(x, y), V(x, y)) = U(x, y) + V(x, y) = \theta(x, y).$$

A noção de involução pode ser estendida para conjuntos de funções homogêneas de graus diferentes, desde que as funções estejam relacionadas por fatores homogêneos. O texto menciona o exemplo de funções homogêneas de graus m e n , relacionadas por um fator homogêneo de grau r (isto é, $U(x, y, z) = u(x, y, z)w(x, y, z)^m$ e $V(x, y, z) = v(x, y, z)w(x, y, z)^n$, onde $w(x, y, z)$ é homogênea de grau r). Nesse caso, podemos definir uma função linear $\theta = \mu U + \nu V$, onde μ e ν são constantes, de modo que θ seja homogênea de grau r . Podemos mostrar que, se θ estiver em involução com U e V , então a composição de θ com U ou V produz outra função homogênea de grau r :

$$\theta(U(x, y, z), V(x, y, z)) = \mu u(x, y, z)w(x, y, z)^m + \nu v(x, y, z)w(x, y, z)^n.$$

Se escolhermos $\mu = n$ e $\nu = -m$, então temos:

$$\theta(U(x, y, z), V(x, y, z)).$$

Para exemplificar, considere as funções homogêneas $U(x, y) = x^2 + y^2$ e $V(x, y) = xy$, ambas de grau 2. Suponha que θ seja uma função linear de U e V , dada por $\theta = \mu U + \nu V$, onde μ e ν são constantes. Então, a função θ é homogênea de grau 2, pois:

$$\theta(\lambda x, \lambda y) = \mu(\lambda^2 x^2 + \lambda^2 y^2) + \nu(\lambda x)(\lambda y) = \lambda^2(\mu x^2 + \mu y^2 + \nu xy) = \lambda^2 \theta(x, y).$$

Assim, podemos dizer que θ está em involução com as funções U e V . Em outras palavras, θ satisfaz a seguinte condição:

$$\theta(\lambda x, \lambda y) = \mu U(\lambda x, \lambda y) + \nu V(\lambda x, \lambda y) = \lambda^2(\mu U(x, y) + \nu V(x, y)) = \lambda^2 \theta(x, y).$$

Então a questão que surge, segundo Cayley, é encontrar o grau de generalidade da função θ , ou o número de constantes arbitrárias que ela contém. Para essas considerações, cita Euler, Cramer, Plücker e Hesse. A ideia geral é buscar funções que estejam em involução com um determinado sistema de funções homogêneas, visando obter soluções simplificadas para certos problemas.

No artigo *On geometrical reciprocity*, de 1848, Cayley explicita a fonte que o inspira em seus trabalhos com cônicas e coordenadas homogêneas, iniciando-o por tratar do “teorema fundamental da reciprocidade”, que se refere à dualidade no plano. Trabalha relações importantes nas cônicas, cada uma delas possuindo um teorema dual. E destaca Plücker como a fonte dos teoremas apresentados. Afirma o autor:

As construções anteriores têm sido tomadas inteiramente do *System der Analytischen Geometrie* de Plücker, capítulo 3, *Allgemeine Betrachtungen über Coordinaten-bestimmung*. Tenho acrescentado demonstrações analíticas de alguns dos teoremas em questão.²⁵ (CAYLEY, 1848, p.177, Tradução nossa)

Nesse artigo, cita, como origem de alguns de seus desenvolvimentos, o trabalho geométrico e os desenvolvimentos de Plücker, trabalho considerado como o que estabelece o uso das coordenadas homogêneas. Apesar de Cayley se utilizar deste sistema de coordenadas, ele não apresenta justificativa, o que indica ser esta uma prática matemática comum.

É o primeiro artigo em que Cayley explicita o uso desse novo sistema de coordenadas. Foi publicado no *Philosophical Magazine*, em 1853, *On the homographic transformation of a surface of the second order into itself*. Cayley utiliza uma nota de rodapé para explicar o uso do sistema de coordenadas e sua nova notação para os polinômios homogêneos. Tais ferramentas são utilizadas em suas memórias sobre *quantics*. Ele explica:

Estritamente falando, é a razão dessas quantidades, exemplo $x : w, y : w, z : w$, que são as coordenadas, e consequentemente, mesmo quando o ponto é dado, os valores x, y, z, w são essencialmente indeterminados a um fator pré-determinado. Assim assumindo que um ponto é dado, nós deveríamos escrever $x : y : z : w = \alpha : \beta : \gamma : \delta$, e que quando um ponto é obtido como o resultado de um processo analítico, a conclusão é necessariamente da forma que acabei de mencionar: mas uma vez entendido, a linguagem do texto pode ser propriamente empregada. Pode ser próprio explicar aqui a notação utilizada no texto: tomando por grande simplicidade o caso das formas de duas variáveis, $(l, m)(x, y)$ significa $lx + my$; $(a, b, c)(x, y)^2$ significa $ax^2 + 2bxy + cy^2$; $(a, b, c)(xi, \eta)(x, y)$ significa $a\xi x + b(\xi y + \eta x) + c\eta y$. O sistema de coeficientes pode frequentemente ser indicado por um único coeficiente: então $(a, \dots)(x, y, z, w)^2$ representa a mais geral função quadrática de quatro variáveis.²⁶ (CAYLEY, 1853, p.106, Tradução nossa)

Nesse artigo, Cayley trabalha com uma superfície que ele representa analiticamente, ou seja, $(a, \dots)(x, y, z, w)^2$, e a chama de superfície de segunda ordem²⁷. Considera transformações dessas formas quadráticas de quatro variáveis nelas mesmas, chamadas transformações homo-

²⁵ The prededing constructions have been almost entirely taken from Plücker's *System der Analytischen Geometrie*, § 3, *Allgemeine Betrachtungen über Coordinatenbestimmung*. I subjoin analytical demonstrations of some of the theorems in question.

²⁶ Strictly speaking, it is the ratios of these quantities, e.g. $x : w, y : w, z : w$, which are the coordinates, and consequently, even when the point is given, the values x, y, z, w are essentially indeterminate to a factor *près*. So that in assuming that a point is given, we should write $x : y : z : w = \alpha : \beta : \gamma : \delta$, and that when a point is obtained as the result of an analytical process, the conclusion is necessarily of the form just mentioned: but when this is once understood, the language of the text may be properly employed. It may be proper to explain here a notation made use of in the text: taking for greater simplicity the case of forms of two variables, $(l, m)(x, y)$ means $lx + my$; $(a, b, c)(x, y)^2$ means $ax^2 + 2bxy + cy^2$; $(a, b, c)(xi, \eta)(x, y)$ means $a\xi x + b(\xi y + \eta x) + c\eta y$. The system of coefficients may frequently be indicated by a single coefficient only: thus in the text $(a, \dots)(x, y, z, w)^2$; stands for the most general quadratic function of four variables

²⁷ Cayley introduz a notação dos parênteses duplos, que para ele facilita a representação de sistemas de equações homogêneas. Essa notação foi usada para representar uma forma bilinear ou quadrática em duas ou mais variáveis. No caso das formas de duas variáveis, $(l, m)(x, y)$ representa a expressão $lx + my$, onde l e m são os coeficientes e x e y são as variáveis. Por exemplo, $(3, 4)(x, y)$ seria $3x + 4y$. Já para as formas quadráticas de duas variáveis, $(a, b, c)(x, y)^2$ representa a expressão $ax^2 + 2bxy + cy^2$, onde a , b e c são os coeficientes e x e y são as variáveis. Por exemplo, $(1, 2, 3)(x, y)^2$ seria $x^2 + 4xy + 3y^2$.

gráficas, as quais consideram substituições lineares das variáveis. São apresentados resultados relacionando pontos, retas e essas superfícies quadráticas.

2.10.2 Alguns artigos de Sylvester

Em 1828, aos quatorze anos, Sylvester ingressou no *University College London* e começou seus estudos no primeiro ano em que o *College* recebeu alunos. Essa foi uma escolha sensata, pois, diferentemente de outras universidades britânicas, não era sectária. Ele também teve o talentoso De Morgan como professor de matemática.

Em 7 de julho de 1831, Sylvester se matriculou como estudante no *St. John's College*, Cambridge. Ele fez o exame de *tripos* matemáticos em 1837. Dois outros matemáticos famosos fizeram o exame de *tripos* no mesmo ano que Sylvester, a saber, Duncan Gregory e George Green. Sylvester ficou em segundo. Green ficou em quarto e Gregory em quinto lugar.

Ele decidiu estudar direito e, por sorte, Cayley também estudava para se tornar advogado. Ambos se conheceram nas cortes do Lincoln's Inn, em Londres, e discutiram matemática enquanto andavam pelas cortes e, embora de temperamento muito diferente, tornaram-se amigos ao longo da vida. Na década de 1850, Cayley e Sylvester trabalharam na teoria dos invariantes. Sylvester propõe substituir a nomenclatura como a teoria era conhecida, *hyperdeterminants*, para teoria dos invariantes. Em seu longo artigo *Note on Calculus of Forms* (1853), que fica dividido em muitas partes do *Camb. Dub. Math. J.*. Ele afirma: “Eu posso dizer que o Cálculo das formas pode ser agora corretamente denominado o Cálculo dos Invariantes [...]”²⁸(SYLVESTER, 1853, p.64, Tradução nossa).

Efetivamente, como afirma Crilly (2006, p.177), Cayley, Sylvester e Salmon trabalharam na teoria dos invariantes a partir de 1850, de uma forma tão coesa que formavam *The Invariant Trinity*. Em nossa análise isso fica bem claro: que eles possuíam um tema em comum de pesquisa que se estende na “rede de textos” que temos apresentado.

²⁸ I may notice that the Calculus of Forms may now with correctness be termed the Calculus of Invariants, [...].

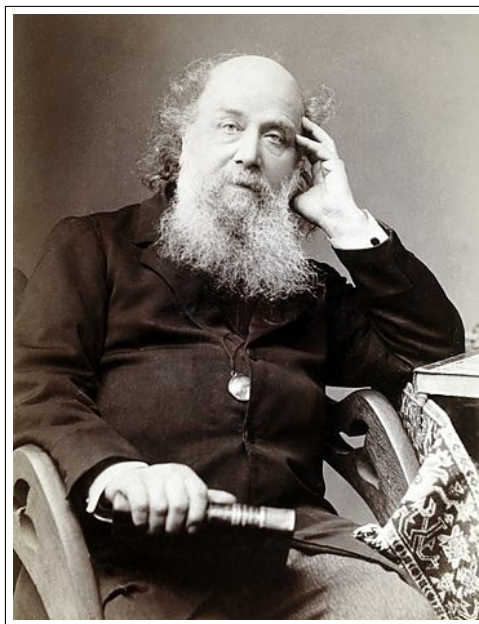


Figura 2.2 – James Joseph Sylvester

Fonte: FixQuotes 2019²⁹.

Sylvester contribui com diversos artigos, no período de 1850 a 1853, relacionados às teorias dos polinômios homogêneos e, principalmente, às propriedades projetivas das cônicas e trata, por exemplo, das relações entre duas cônicas em seu artigo de 1850, *On the intersections, contacts, and other correlations of two conics expressed by indeterminate coordinates*. Nele, Sylvester usa polinômios homogêneos do segundo grau e trata das cônicas utilizando as coordenadas projetivas para analisar as relações entre duas cônicas. Um fato a ser destacado é a utilização da definição de interseção de duas cônicas de Cayley, que afirmou que a interseção de duas cônicas projetivas formava sempre um quadrângulo. Sylvester utiliza esse resultado:

Adotando excelente designação do Sr. Cayley, onde os quatro pontos de intersecção das duas cônicas são chamados de quadrângulo. Este quadrângulo terá três pares de lados; as interseções de cada par, a partir de princípios de analogia, eu os chamo de vértices do quadrângulo.³⁰ (SYLVESTER, 1850, p.262, Tradução nossa)

Ainda no mesmo artigo, Sylvester considera o fato da interseção entre as cônicas poderem possuir pontos imaginários, ou seja, considera as soluções no conjunto dos números complexos e traz as interpretações geométricas de cada caso:

Se todos os quatro pontos de intersecção do quadrângulo são reais, os três vértices e os três pares de lados são todos reais. Se apenas dois pontos do quadrângulo são reais, um vértice e um dos três pares de lados serão reais; os outros dois vértices e dois pares de lados sendo imaginários. Se todos os quatro pontos do quadrângulo não são reais, um par de lados será real e os

²⁹ Retirada do site http://s.fixquotes.com/files/author/jamesjosephsylvester_ZMfGp.jpg, acessado em 03/10/2019.

³⁰ Adopting Mr Cayley's excellent designation, let the four points of intersection of the two conics be called a quadrangle. This quadrangle will have three pairs of sides; the intersections of each pair, from principles of analogy, I call the vertices of quadrangle.

outros dois pares imaginários, como no último caso; mas todos os três vértices permaneceram reais, como no primeiro caso. Assim, temos um critério direto e simples para distinguir o caso de intersecção mista de intersecção totalmente real ou totalmente imaginária, ou seja, que a equação cúbica das raízes das quais as coordenadas dos vértices são funções lineares reais terá um par de raízes imaginárias. Essa é a única e inequívoca condição exigida.³¹ (SYLVESTER, 1850, p.263, Tradução nossa)

Isso mostra que o trabalho de Sylvester nesse artigo possui claras perspectivas geométricas, apesar de não possuir figuras que representem esses casos possíveis de intersecção de duas cônicas. Isso não ocorre apenas no referido artigo e pode ser considerado uma prática desses matemáticos britânicos, ou seja, eles não apresentam figuras para exemplificar as relações geométricas. Pode-se dizer que isso se deve à herança da Sociedade Analítica, em que a geometria sintética deixou de ser padrão de rigor nas demonstrações.

Brechenmacher (2006, p.10), ao estudar a história das matrizes, faz sobressair esse artigo como aquele no qual Sylvester apresenta características importantes no desenvolvimento da teoria dos determinantes. Ele destaca a visualização geométrica apresentando figuras que representam os casos de intersecção que Sylvester mostra em seu artigo de 1850.

O desenvolvimento de Sylvester se desencadeia na interpretação da seguinte relação polinomial: $U + \mu V = 0$, onde U e V são as expressões das duas cônicas dadas. Suas considerações durante esse artigo demonstram as condições para que as intersecções entre as cônicas possam ser todas reais, ou dois pares reais e dois pares imaginários, ou, por último, todos os pares imaginários.

Após esse artigo, Sylvester escreve outro, tratando analiticamente propriedades projetivas, como: *An instantaneous demonstration of Pascal's theorem by the method of indeterminate coordinates*, no *Philosophical magazine*, também em 1850. Segue-se a esse, um em que ele trata da teoria da eliminação, *On a new class of theorems in elimination between quadratic functions*, do mesmo ano.

Em 1851, Sylvester publica mais dois artigos que tratam de cônicas e funções homogêneas que são: *On the intersections of two conics* e *On certain general properties of homogeneous functions*. O primeiro é uma extensão dos anteriores, que utilizam a expressão $U + \mu V = 0$ para determinar a intersecção entre cônicas; já o segundo artigo traz alguns desenvolvimentos ligados à teoria da eliminação. Nele, Sylvester (1851, p.168) considera que as funções polinomiais representam e são representados por um lócus, dando assim uma clara interpretação geométrica ao seu trabalho, da mesma forma como Cayley fez em suas memórias sobre *quantics*.

³¹ If all the four points of the quadrangle of intersection are real, the three vertices and the three pairs of sides are all real. If only two points of the quadrangle are real, one vertex and one of the three pairs of sides will be real; the other two vertices and two pairs of sides being imaginary. If all four points of the quadrangle are unreal, one pair of sides will be real and the other two pairs imaginary, as in the last case; but all the three vertices will remain real, as in the first case. Hence we have a direct and simple criterion for distinguishing the case of mixed intersection from intersection wholly real or wholly imaginary; namely, that the cubic equation of the roots of which the coordinates of the vertices are real linear functions shall have a pair of imaginary roots. This is the sole and unequivocal condition required.

Em seu *On the general theory of associated algebraical forms*, também de 1851, Sylvester apresenta a nova nomenclatura dos principais componentes da teoria dos invariantes. Inclusive é aí que a teoria recebe este nome, conforme Sylvester escreve em seu artigo.

2.10.3 Alguns artigos de Salmon

George Salmon (1819 - 1904) frequentou a escola do Sr. Porter em sua cidade natal, Cork, no sul da Irlanda, e depois ingressou no Trinity College, Dublin, em 1834. Estudou matemática e clássicos no Trinity, ganhando uma bolsa de estudos em 1837 e se formou como o primeiro da classe em matemática, em 1838.



Figura 2.3 – George Salmon

Fonte: JOC/EFR April 2019³².

Em 1848, foi nomeado professor de matemática de Donegall na Trinity. O departamento de matemática do Trinity College contava com alguns matemáticos de destaque quando Salmon se juntou a eles em 1841. Hamilton e MacCullagh estavam na equipe de lá, assim como Charles Graves e Humphrey Lloyd. Embora o principal tópico de interesse fosse a geometria sintética, Salmon trabalhou nesta área por um curto período antes de passar para a área da geometria algébrica.

Ao estudar seus artigos, percebe-se que ele utiliza polinômios homogêneos, e tratando de superfícies e propriedades projetivas num artigo de 1846, *On the degree of a surface reciprocal to a given one*. Nesse artigo, dentre as várias relações apresentadas, destacamos a seguinte propriedade: “A projeção em algum plano da interseção de duas superfícies do segundo grau será em geral uma curva do quarto grau tendo dois pontos duplos” (SALMON, 1846, p.68).

³² Retirada do site <https://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/PictDisplay/Salmon.html>, acessado em 04/10/2019.

Salmon publica dois artigos no *The Cambridge and Dublin Mathematical Journal*, de 1847, *On The Condition that a Plane should Touch a Surface along a Curve Line* e *On the Number of Normals which Can Be Drawn from a Given Point to a Given Surface*. Esses fazem referência ao uso de equações diferenciais e abordam uma visão geométrica através dos desenvolvimentos algébricos apresentados.

Salmon também escreveu artigos que relacionam as propriedades projetivas à álgebra dos polinômios homogêneos, como: *Théorèmes sur les courbes de troisième degré*, de 1851, e *Sur La formation de l'équation de La courbe reciproque à une courbe donnée*, também de 1851.

2.10.4 A “prática comum” inglesa

Percebe-se que Boole influenciou fortemente os trabalhos de Cayley (CRILLY, 1986, p.241) e consecutivamente os de Sylvester e Salmon. Como temos apresentado, o tema comum entre os vários textos é o tratamento da álgebra de polinômios homogêneos com uma visão geométrica ligada às propriedades projetivas dessas curvas que estes polinômios representam. Logo, nosso campo de pesquisa na Inglaterra fica bem determinado por essa característica comum.

Observamos que os textos se comunicam, uma vez que um determinado artigo de Cayley, por exemplo, cita um de Salmon; dessa relação entre os diversos artigos montamos alguns “fios” dessa rede de pesquisa, conforme Brechenmacher (2006) fez para representar as diversas práticas relacionadas às matrizes. Abaixo há alguns exemplos dessa “comunicação” entre textos.

Sylvester usa um importante resultado no qual cita um artigo de Cayley como referência (SYLVESTER, 1850, p.119). Esse teorema trata das possíveis interseções entre cônicas, utilizando-se de pontos reais e complexos. O trabalho de Cayley, referenciado por Sylvester, *Sur Le problème des contacts*, de 1850, afirma que a interseção de duas cônicas forma um quadrângulo.

Abaixo a afirmação de Cayley em seu artigo de 1850:

Duas cônicas quaisquer se cortam em quatro pontos que formam um quadrângulo inscrito às duas cônicas. Elas possuem quatro tangentes comuns que formam um quadrilátero circunscrito às duas cônicas. O quadrângulo inscrito e o quadrilátero circunscrito possuem mesmos centros e mesmos eixos.³³ (CAYLEY, 1850, p.4, Tradução nossa)

Sylvester tratou desse fato em seus desenvolvimentos, conforme apresentamos em seção anterior. Logo, ele, assim como Cayley, pesquisava as relações geométricas das cônicas através de polinômios homogêneos.

Como se pode ver em *On The Degree of a superface reciprocal to a given one*, de 1846, Salmon também trabalhou sobre o assunto das cônicas e sua relação algébrica (SALMON, 1846,

³³ Deux coniques quelconques se coupent en quatre points qui forment un quadrangle inscrit aux deux coniques. Elles ont quatre tangentes communes qui forment un quadrilatère circonscrit aux deux coniques. Le quadrangle inscrit et le quadrilatère circonscrit ont les même centres et mêmes axes.

p.65). Esse trabalho é citado por Cayley em *On the triple tangent planes of surfaces of the third order* (CAYLEY, 1849, p.118). Tanto Cayley quanto Salmon pesquisaram o método do polar recíproco e destacam o caso no qual a superfície é de segunda ordem.

Salmon também considera teoremas nas curvas de terceira ordem como Cayley, e relaciona a geometria projetiva de retas e cônicas. Em seu artigo *Théorèmes sur les courbes de troisième degré* (1851), apresenta três teoremas, sendo que, no terceiro, utiliza uma definição de Plücker. Nesse artigo, Salmon utiliza polinômios homogêneos e relaciona a interseções de cônicas, entre outras propriedades ligadas à geometria projetiva.

As diversas comunicações entre os diferentes textos podem ser representadas graficamente, conforme na figura abaixo:

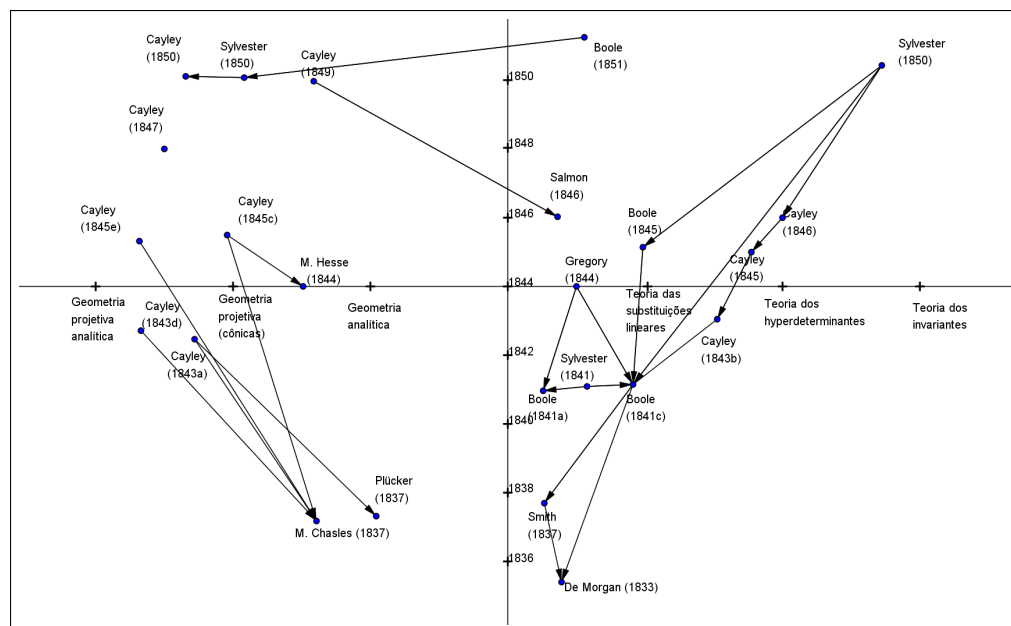


Figura 2.4 – Rede de Textos

Fonte: próprio autor

As setas demonstram essa comunicação, na qual a origem (início, a saída) é o texto que fez referência ao artigo da extremidade (ponta da seta). O eixo horizontal é formado pelos diversos assuntos contidos nesses artigos e o eixo vertical é o ano de submissão do artigo. Além disso, quanto mais à esquerda estiver o ponto que representa um texto, significa que este possui uma ênfase nas teorias geométricas; já quanto mais à direita ficar o ponto, maior é o destaque às teorias algébricas ligadas aos invariantes. Deve-se observar também o fato de o gráfico possuir uma região de “interseção” entre as teorias geométricas e algébricas, mais especificamente na região delimitada pelos seguintes temas: geometria analítica e teoria das substituições lineares.

Dito isso, o gráfico representa a comunicação entre textos em uma “rede”, o que indica algumas conclusões interessantes para nossa pesquisa. Uma delas dá conta da origem do interesse por Cayley em relação à geometria projetiva e, mais especificamente, à geometria projetiva analítica. O lado esquerdo do nosso gráfico, destaca bem a origem da abordagem analítica da geometria projetiva com uma forte influência de Plücker (1837) e Chasles (1837).

Aliás, em relação aos demais matemáticos britânicos, somente os textos de Cayley aparecem do lado esquerdo, demonstrando que ele toma como referência para seus trabalhos em geometria apenas matemáticos externos à Inglaterra, como o francês Chasles e os alemães Plücker e Hesse. Já a teoria algébrica é mais interna à comunidade britânica, destacando-se a comunicação entre os textos de Boole, Cayley, Sylvester e Salmon.

Outro aspecto visível é o fato de a teoria geométrica ser desenvolvida antes dos artigos de 1845 e 1846, que desenvolvem a teoria dos invariantes, e bem antes das memórias sobre *quantics*, cuja primeira memória data de 1854. Isso é plausível e concorda com a mudança de perspectiva da matemática britânica, passando de uma abordagem sintética para uma que considera a análise e os desenvolvimentos algébricos. A geometria permanece guiando o pensamento algébrico de Cayley.

Em relação ao período bem inicial das pesquisas de Cayley, relacionadas à geometria projetiva (1843-1845), esse aspecto nos mostra que bem antes das memórias sobre *quantics* Cayley examinava os aspectos geométricos, inclusive ligados a polinômios homogêneos, conforme temos apontado na leitura dos seus artigos (DIAS; GRIMBERG, 2015). Logo, a sexta memória de forma nenhuma pode ser considerada como um caso isolado quando se trata dessa relação entre álgebra e geometria.

Torna-se clara a influência do artigo de George Boole (*Exposition of a General Theory of Linear Transformations*, 1841), considerado o embrião da teoria dos invariantes. O estudo é citado diretamente por Cayley em seus artigos de 1845 e 1846, que desenvolvem a teoria dos Invariantes, bem como por Sylvester em seu artigo que trata dessa mesma teoria. A abordagem algébrica é bem interna aos matemáticos ingleses. Partindo de De Morgan (1833), observamos um desenvolvimento progressivo em direção aos artigos que tratam da teoria dos invariantes.

2.11 Conclusões

Este capítulo apresentou o contexto de pesquisas matemáticas do período de formação do matemático Arthur Cayley. Além de mostrar que a prática matemática britânica desse período passou por transformações importantes, destacando-se a Sociedade Analítica, que explicam inclusive o retorno à cooperação internacional, retirando os ingleses do isolamento que a produção matemática vivia no século XVIII. Retomaremos alguns pontos importantes para responder às nossas questões iniciais.

Primeiro, a leitura dos artigos de Cayley nos mostrou que a relação entre álgebra dos polinômios homogêneos e geometria projetiva é uma constante em suas pesquisas no período de 1841 a 1853. Essa dinâmica entre álgebra e geometria, na qual o trabalho algébrico conta com uma visão geométrica que guia o desenvolvimento algébrico, é um fator comum aos matemáticos britânicos a partir da década de 1840. Também destacamos a influência da Sociedade Analítica nesse fator.

Além disso, Cayley aprimora seus conhecimentos em geometria projetiva e nos métodos

analíticos que culminaram na teoria dos invariantes de forma simultânea. Na realidade os aspectos geométricos sempre estão presentes, mesmo quando não são evidenciados num determinado artigo. Ademais, a partir de Cayley, pode-se criar uma rede de matemáticos britânicos que possuem essa prática comum. Sylvester e Salmon também pesquisaram com polinômios homogêneos e geometria projetiva com cônicas. Além disso, percebemos que a abordagem de Cayley possui uma influência do trabalho de Plücker, de 1837. Ou seja, o trabalho sobre coordenadas homogêneas, como chamamos atualmente, do matemático alemão, permitiu o estudo geométrico das cônicas e quádras, e essa técnica foi incorporada às pesquisas de Cayley sobre teoria dos invariantes.

Apesar disso, os diversos textos raramente apresentam figuras, nem mesmo para exemplificar. Isso pode ser compreendido como uma mudança de postura a partir da Sociedade Analítica, retirando a geometria sintética da posição de único padrão de rigor, mantendo-se, porém, uma visão geométrica que ajuda no raciocínio matemático das diversas teorias algébricas. Aliás, a visão geométrica é mais do que um ferramenta, pois, se por um lado influencia diretamente a interpretação dos resultados da teoria dos invariantes; por outro, irá revolucionar a relação da geometria projetiva com as geometrias euclidiana e não euclidianas, a partir da leitura de Felix Klein dos artigos de Cayley sobre os *quantics*.

Além disso, percebe-se o quanto Cayley aprofunda seu conhecimento de geometria projetiva, o que será fundamental para estabelecer sua noção geral de perpendicularidade que será explorada a partir do artigo sobre as normais a uma cônica, publicado no jornal do Crelle, em 1857. Essa noção está na origem da conceitualização de “absoluto”, que é fundamental para métrica de Cayley.

Assim, os artigos anteriores, de Cayley e seus contemporâneos, ajudam-nos a entender o campo de pesquisa dessa rede de matemáticos britânicos que culminou em trabalhos como as memórias sobre *quantics* de Cayley e *A Treatise on the higher plane curves* de Salmon. Esses fatores nos ajudarão a fazer uma análise da sexta memória, bem como entender sua recepção.

As Memórias sobre as *normais*

3.1 Introdução

Conforme apresentado no capítulo anterior, a teoria dos invariantes desenvolvida por Cayley foi fortemente influenciada por abordagens geométricas, que guiaram seus trabalhos com coordenadas homogêneas e polinômios homogêneos. No caso das memórias sobre os *quantics*, percebe-se que ele faz um trabalho mais voltado aos aspectos geométricos nas quinta e sexta memórias, onde ele desenvolve o conteúdo matemático que culmina no estabelecimento das métricas. Neste capítulo, analisaremos os textos que abordam os conceitos envolvidos na definição de métrica de Cayley.

Nossa análise parte de uma busca das publicações de Cayley que tratam do assunto. Fazer isso é fácil por um lado e difícil por outro. Como Cayley possui a coletânea de suas obras organizadas em livros, não há necessidade de procurar nos diversos meios de publicação se há ou não trabalhos de Cayley. Porém, a coletânea é composta por treze volumes, cada um com em média quinhentas páginas, totalizando 967 artigos científicos ou textos acadêmicos, o que torna a busca não tão simples. Além disso, a coletânea não é estruturada em ordem cronológica, então a sexta memória está no volume 2; enquanto no volume 4 há o artigo sobre as normais de uma cônica. Com isso, quase nos passou despercebido o artigo que será detalhado a seguir, publicado no jornal de Crelle, onde pela primeira vez apareceu o verbete “absoluto”.

Publicado no volume de 1859, do Crelle, nesse artigo Cayley apresenta uma forma mais geral da noção de perpendicularidade. Percebe-se que, para Cayley, duas retas são perpendiculares quando são harmônicas em relação a uma dada cônica, esta chamada de “absoluto”. As métricas que Cayley estabelece a partir de sua sexta memória utilizam essa noção generalizada de perpendicularidade que se desenvolveu a partir de seus estudos sobre as normais de uma cônica. Este é um dos motivos para trocarmos no título deste capítulo a palavra “*quantics*” por “normais”: devido a importância do termo para as métricas. Destaca-se que a historiografia nem chega a mencionar esse artigo que nos parece fundamental para compreender o germe das ideias de Cayley ao escrever a sexta memória.

Outro fato a ser destacado é o de ele estar publicado no jornal do Crelle. Nesse periódico, Cayley desejava divulgar seus principais trabalhos para um público mais amplo, principalmente estudos relacionados à teoria dos invariantes. Além disso, Cayley faz questão de destacar a relação desse artigo com o trabalho de outro matemático, Joaquinthal, inserindo-o num contexto de pesquisas anteriores.

Nesse capítulo pretendemos responder à seguinte questão: Como Cayley desenvolve o conceito de métrica na sexta memória? Para isso, organizamos as seguintes questões específicas: Quais os aspectos envolvidos no seu pensamento científico? Como se estruturou métrica de Cayley? Como ele chega a uma métrica projetiva? Como chega as métricas euclidianas e elíptica? Como esse trabalho se insere no contexto de suas publicações? Para responder a tais perguntas, organizamos a seguinte estrutura: iniciamos analisando a primeira memória que apresenta o carácter geométrico da teoria dos invariantes; depois, a quinta memória, vendo o que é retomado na sexta; e, em seguida, examinamos o artigo sobre as normais; então, apresentamos a sexta memória, esclarecendo seus desenvolvimentos e relacionando-os com o que Cayley já fazia; exploramos a nota à sexta memória, para reforçar nossas conclusões sobre a sexta memória; e, por fim, vemos, brevemente, que Salmon inclui no seu livro sobre as seções cônicas a noção de perpendicularidade de Cayley, além de apresentar a definição de “absoluto”.

Ao final do capítulo, teremos várias respostas que nos ajudarão na recepção da métrica de Cayley. Essa será analisada no próximo capítulo, buscando ir além da relação entre Cayley e Klein, já muito explorada na historiografia da matemática.

3.2 Cayley e a teoria dos invariantes

No capítulo anterior, apresentamos o contexto de produção matemática entre 1841 e 1854, com o objetivo de compreender a gênese da teoria dos invariantes britânica. Verificamos que essa teoria possui forte relação com a geometria projetiva, tendo como uma das principais inspirações para a pesquisa de Cayley, por um lado, George Boole e, por outro lado, Plücker, que trabalhou com a geometria analítica projetiva. Isso nos levou a perceber uma estreita relação entre a teoria dos invariantes e a geometria desde os primeiros trabalhos.

Em 1854, Cayley iniciou uma série de artigos intitulados “memórias sobre os *quantics*”, que totalizaram dez trabalhos sobre o tema. Dessas memórias, a sexta é a mais conhecida devido às suas aplicações geométricas advindas do estabelecimento das métricas de Cayley. Além dessa, a primeira e a quinta memórias também possuem relação direta com aspectos geométricos. Com isso, nossa pesquisa sobre as métricas nesta tese inclui apenas essas memórias, não nos interessando as demais.

Aqui, iniciaremos a apresentação da relação entre geometria e teoria dos invariantes presente na primeira memória sobre os *quantics*. Ao analisá-la, percebemos que desde essa primeira memória, Cayley pretendia explorar o carácter geométrico no âmbito dessa teoria. Isso fica claro com a quantidade de considerações geométricas presentes na primeira memória.

Destacamos que *quantic* é um polinômio homogêneo com um dado número de variáveis e de um dado grau; exemplo: $ax^2 + 2bxy + cy^2$ é uma quádriga binária, pois possui grau 2 e duas variáveis - na simbologia de Cayley: $(a,b,c)(x,y)^2$.

Quando um *quantic* é igualada a zero, temos uma equação. Uma equação ou sistema de equações possui coordenadas soluções, que seriam as raízes, identificadas como pontos no espaço por Cayley, que afirma:

Uma equação ou sistema de equações representa, ou é representado por um lugar geométrico. Isso pressupõe que os coeficientes¹ dependem de quantidades $x, y, \dots$ que são as coordenadas de um ponto no espaço; a série inteira de pontos, cujas coordenadas satisfazem a equação ou sistema de equações, constitui o lugar geométrico. Para evitar complexidade, é adequado considerar os próprios coeficientes como coordenadas, ou pelo menos considerar esses coeficientes como funções lineares das coordenadas; neste caso, a ordem do lugar geométrico será a ordem da equação ou sistema de equações.² (CAYLEY, 1854, p.222, Tradução nossa)

Cayley identifica as coordenadas que satisfazem essas equações ou sistemas de equações com um “locus”. Além disso, define bem o espaço no qual podem ser representadas estas *quantics* e afirma:

Tenho falado de coordenadas de um ponto no espaço. Penso que existe um espaço ideal de qualquer número de dimensões, mas, naturalmente, na aceitação comum da palavra, o espaço é de três dimensões; contudo, o plano (o espaço da geometria plana) é um espaço de duas dimensões, e podemos considerar a curva como um espaço de uma dimensão. Deve ser observado que eu não disse que a única ideia de que pode ser formada de um espaço de duas dimensões é o plano, ou que a ideia de que apenas pode ser formado por um espaço de dimensão é a curva; esse não é o caso.³ (CAYLEY, 1854, p.222, Tradução nossa)

Ele considera um espaço “ideal” de n dimensões, porém o espaço natural como sendo o de três dimensões. Logo, *quantics* de duas variáveis representariam pontos na curva, que Cayley chama de geometria de uma dimensão; *quantics* de três variáveis sendo representadas numa geometria de duas dimensões; e assim por diante.

Eu digo, portanto, simplesmente que x, y, z são as coordenadas de um ponto (estritamente falando, são as razões dessas quantidades que são as coordenadas,

¹ Utilizamos coeficientes para traduzir “facients”, pois no contexto do texto mencionado, os “facients” são as quantidades que dependem das coordenadas x, y etc. e que são usadas para representar a equação ou sistema de equações.

² An equation or system of equations represents, or is represented by a locus. This assumes that the facients depend upon quantities $x, y, \dots$ the coordinates of a point in space; the entire series of points, the coordinates of which satisfy the equation or system of equations, constitutes the locus. To avoid complexity, it is proper to take the facients themselves as coordinates, or at all events to consider these facients as linear functions of the coordinates; this being the case, the order of the locus will be the order of the equation, or system of equations.

³ I have spoken of the coordinates of a point in space. I consider that there is an ideal space of any number of dimensions, but of course, in the ordinary acceptance of the word, space is of three dimensions; however, the plane (the space of ordinary plane geometry) is a space of two dimensions, and we may consider the line as a space of one dimension. I do not, it should be observed, say that the only idea which can be formed of a space of two dimensions is the plane, or the only idea which can be formed of space of one dimension is the line; this is not the case.

e as quantidades x, y, z em si são indeterminadas, isto é, são determinadas apenas por um fator comum, de modo que, ao assumir que as coordenadas de um ponto são α, β, γ , significamos apenas que $x : y : z = \alpha : \beta : \gamma$, e nunca obtemos como resultado $x, y, z = \alpha, \beta, \gamma$, mas apenas $x : y : z = \alpha : \beta : \gamma$; mas isso sendo uma vez entendido, não há objeção em falar em x, y, z como coordenadas). Agora, as noções de coordenadas e de ponto são meramente relativas; podemos, se quisermos, considerar $x : y : z$ como parâmetros de uma curva contendo dois parâmetros variáveis; tal curva se torna, é claro, determinada quando assumimos $x : y : z = \alpha : \beta : \gamma$, e essa mesma curva não é nada além do ponto cujas coordenadas são α, β, γ , ou como podemos chamar, o ponto (α, β, γ) . E se as coordenadas (x, y, z) são conectadas por uma equação, então dando a essas coordenadas todo o sistema de valores que satisfaz a equação, o lugar geométrico dos pontos correspondentes a esses valores é o lugar geométrico que representa ou é representado pela equação; isto é claro, fixa a noção de uma curva de qualquer ordem, e em particular a noção de uma linha como a curva de primeira ordem.⁴ (CAYLEY, 1854, p.222, Tradução nossa)

São apresentadas x, y, z coordenadas de um ponto, em que Cayley usa o que hoje chamamos de coordenadas homogêneas, ou seja, para ele, x, y, z não são iguais a α, β, γ , e sim, que $x : y : z = \alpha : \beta : \gamma$, dado o resultado depender da razão entre os termos.

O autor usa ainda a “teoria da reciprocidade”, que equivale às relações de dualidade da geometria projetiva atual – ele diz que a palavra “ponto” pode significar “linha” e a palavra “linha” pode significar “ponto”.

Todas essas definições são retomadas e utilizadas nas quinta e sexta memórias sobre os *quantics*. Já na quinta memória há diversas aplicações geométricas para a Teoria dos Invariantes. Na sexta memória, ele apresenta a definição de “absoluto” que é fundamental para a estabelecer a métrica de Cayley.

3.3 A quinta memória sobre os *quantics*

Como já dissemos, pode-se observar a clara importância dos aspectos algébricos geométricos trabalhados na quinta memória para os desenvolvimentos encontrados na sexta memória. Ela traz os principais resultados dessa teoria projetiva relacionada aos *quantics*.

Na introdução da quinta memória sobre *quantics*, Cayley diz pretender compor sistemas de duas ou mais quádras e os resultados das teorias da relação harmônica e da involução. Con-

⁴ I say, therefore, simply that x, y, z are the coordinates of a point (strictly speaking, it is the ratios of these quantities which are the coordinates, and the quantities x, y, z themselves are indeterminates, i.e. they are only determinate to a common factor prês, so that in assuming that the coordinates of a point are α, β, γ , we mean only that $x : y : z = \alpha : \beta : \gamma$, and we never as a result obtain $x, y, z = \alpha, \beta, \gamma$, but only $x : y : z = \alpha : \beta : \gamma$; but this being once understood, there is no objection to speaking of x, y, z as coordinates). Now the notions of coordinates and of a point are merely relative; we may, if we please, consider $x : y : z$ as the parameters of a curve containing two variable parameters; such curve becomes of course determinate when we assume $x : y : z = \alpha : \beta : \gamma$, and this very curve is nothing else than the point whose coordinates are α, β, γ , or as we may for shortness call it, the point (α, β, γ) . And if the coordinates (x, y, z) are connected by an equation, then giving to these coordinates the entire system of values which satisfy the equation, the locus of the points corresponding to these values is the locus representing or represented by the equation; this of course fixes the notion of a curve of any order, and in particular the notion of a line as the curve of the first order.

sidera também quádricas binárias bipartidas e sua relação com a chamada teoria da homografia, ou relação anarmônica. Ele afirma:

Esta memória foi originalmente destinada a conter um desenvolvimento das teorias dos covariantes de um determinado *quantic* binário, isto é, das quádricas, das cúbicas e dos quárticos, mas no que diz respeito às teorias das cúbicas e dos quárticos, verificou-se ser necessário considerar o caso de duas ou mais quádricas, e tenho, portanto, composto por tais sistemas de duas ou mais quádricas, e as teorias resultantes da relação harmônica e de involução, no assunto da memória e, apesar da teoria da homografia ou da relação anarmônica pertencerem ao tema das quádricas binárias bipartidas, até mesmo por sua relação com as teorias referidas, também são consideradas nesta memória.⁵ (CAYLEY, 1858, p.527, Tradução nossa)

No caso do sistema formado por duas quádricas, $ax^2 + 2bxy + cy^2$ e $a'x^2 + 2b'xy + c'y^2$, Cayley (1858b, p. 530) apresenta as principais relações e, no parágrafo 99 da quinta memória, mostra uma característica importante do invariante $ac' - 2bb' + ca'$, que chama de conectivo, por relacionar coeficientes das duas quádricas. Quando esse invariante é igual a zero, as quádricas são ditas harmonicamente relacionadas. Cayley desenvolve essa característica e conclui que, quando $ac' - 2bb' + ca' = 0$, então as raízes das quádricas, (α, β) e (α', β') , estão harmonicamente relacionadas e daí extrai-se a definição de relação harmônica de duas quádricas.

Outro aspecto importante dessa relação entre álgebra dos invariantes e geometria projetiva pode ser notado quando Cayley (1858b, p. 533) analisa um sistema de três quádricas, no parágrafo 104 da quinta memória sobre *quantic*. Tomando as quádricas $U = ax^2 + 2bxy + cy^2$, $U' = a'x^2 + 2b'xy + c'y^2$ e $U'' = a''x^2 + 2b''xy + c''y^2$, apresenta o determinante abaixo:

$$\Omega = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix}.$$

Observe que as linhas são formadas pelos coeficientes das respectivas quádricas. A equação $\Omega = 0$ garante que as quádricas possuem o que era chamado de uma relação de “syzygetic” que pode ser expresso como $\lambda U + \mu U' + \nu U'' = 0$, que significa que as três quádricas estão em involução. O determinante utilizando as raízes das quádricas:

$$\begin{vmatrix} 1 & \alpha + \beta & \alpha\beta \\ 1 & \alpha' + \beta' & \alpha'\beta' \\ 1 & \alpha'' + \beta'' & \alpha''\beta'' \end{vmatrix}.$$

⁵ The present memoir was originally intended to contain a development of the theories of the covariants of certain binary *quantic*, viz. the quadric, the cubic, and the quartic; but as regards the theories of the cubic and the quartic, it was found necessary to consider the case of two or more quadrics, and I have therefore comprised such systems of two or more quadrics, and the resulting theories of the harmonic relation and of involution, in the subject of the memoir; and although the theory of homography or of the anharmonic relation belongs rather to the subject of bipartite binary quadrics, yet from its connexion with the theories just referred to, it is also considered in the memoir.

Quando o determinante acima possui valor nulo, expressa que os três pares de raízes estão em involução. Observa-se que na quinta memória as teorias da razão anarmônica e da homografia pertencem analiticamente ao assunto da *quantic* binária bipartida (lineo-linear); isso pode ser ilustrado geometricamente da seguinte maneira: podemos imaginar dois espaços distintos de uma dimensão, ou curvas, uma delas o lugar geométrico de coordenadas (x, y) e a outra das coordenadas (X, Y) , que são absolutamente independentes e não estão de forma alguma relacionadas com as coordenadas do primeiro sistema mencionado. A partir desse raciocínio, Cayley explora toda a teoria dessas *quantics* onde duas involuções possuem relação de homografia, apresentando os determinantes para diversos casos. Por exemplo, apresenta o determinante que quando igualado a zero representa a relação de homografia entre dois conjuntos de quatro pontos cada.

Cayley chama esse estudo de “teoria analítica da homografia” e a desenvolve na quinta memória. Como a relação de homografia e involução são fundamentais para o trabalho da sexta memória, julgamos que Cayley ao escrever a quinta já tinha em mente a sexta memória. Outro fato é quantidade de vezes que ele fez no texto da sexta memória referência à quinta memória: mais de cinco vezes, o que não era de sua prática.

Os desenvolvimentos presentes na quinta memória sobre *quantics* ilustram bem a íntima relação entre desenvolvimento algébrico e teoria geométrica investigada por Cayley que culmina em seus famosos resultados da sexta memória. Tais desenvolvimentos são retomados no início da sexta memória e servem de aporte teórico para que Cayley consiga desenvolver sua apresentação de uma métrica projetiva em sua geometria de uma dimensão. Essas relações entre as duas memórias ficarão ainda mais claras na análise da sexta memória.

3.4 O artigo sobre as normais de uma cônica

Cayley submeteu, em 10 de março de 1857, o artigo *Note sur les normales d'une conique* para o jornal do Crelle, que o publicou no volume 56 de 1859. Neste, ele cita o trabalho de M. Joachimsthal, *Ueber die Normalen der Ellipse und des Ellipsoids* (Crelle t. 26, p. 172 – 180), em particular o seguinte teorema:

Supondo que 1, 2, 3 e 4 sejam pontos de uma cônica, tais que as quatro normais se encontrem num mesmo ponto, tomando o polo da reta (1, 2) em relação a cônica e traçando por este mesmo polo perpendiculares aos diâmetros da cônica; sendo assim, assumindo em cada diâmetro na direção oposta um ponto cuja distância do centro é igual à distância do pé da perpendicular nesse mesmo diâmetro, a reta traçada por esses dois pontos passa pelos dois pontos 3 e 4.⁶ (CAYLEY, 1859a, p.182, Tradução nossa)

⁶ en supposant que 1, 2, 3, 4 soient des points d'une conique tels que les quatre normales se rencontrent dans un même point, on prend le pôle de la droite (1,2) par rapport à la conique et on mène par ce pôle des perpendiculaires aux diamètres de la conique ; cela étant, en prenant sur chaque diamètre dans le sens opposé un point dont la distance du centre est égale à la distance du pied de la perpendiculaire sur ce même diamètre, la droite menée par ces deux points passe par les deux points 3 et 4.

Cayley apresenta de uma forma mais simples: “a reta em questão é a polar (ou, em outras palavras, a harmônica) em relação ao triângulo formado pelos dois diâmetros e a linha localizada no infinito do polo da reta (1, 2) em relação à cônica”. Ao que Cayley completa:

Sabemos que a ideia da perpendicular pode ser generalizada. Tomando uma cônica qualquer que chamamos de cônica absoluta, duas retas harmônicas em relação a essa cônica podem ser chamadas de perpendiculares (e da mesma forma dois pontos harmônicos em relação à cônica absoluta podem ser chamados de perpendiculares). Dito isso, podemos falar em um sentido mais geral de normais etc. de qualquer curva.⁷ (CAYLEY, 1859a, p.182, Tradução nossa)

O termo “sabemos que”, no original “on sait que”, nos leva a pensar que se trata de um conhecimento comum, ou seja, que os leitores do jornal facilmente identificariam. Porém, praticamente todo o artigo é dedicado a mostrar que tal afirmação é válida e no final o autor destaca que na geometria esférica fica mais nítida a relação de perpendicularidade. Então, entendemos que a expressão tem o intuito de Cayley se colocar na mesma prática de matemáticos como Joachimsthal ao tratar do tema sobre as normais de uma cônica. Há vários trabalhos sobre isso no jornal do Crelle, logo essa forma de apresentar a relação de perpendicularidade é uma generalização importante para esse público.

O trecho citado por Cayley é trabalhado por Joachimsthal na parte cinco de seu artigo. Antes este matemático trata da seguinte propriedade: “Se dois pontos a e b da elipse são dados, pode-se encontrar dois outros pontos da elipse α, β cujas normais encontram as de a e b em um ponto”.⁸ (JOACHIMSTHAL, 1843, p.173, Tradução nossa). Em seguida, ele apresenta algumas variações dessa propriedade. Mais à frente, na parte cinco do artigo, Joachimsthal apresenta a propriedade que Cayley cita:

Como as cordas a e b e α e β são paralelas a diâmetros que são do tamanho de dois diâmetros conjugados associados, o seguinte teorema é obtido: “As normais dos quatro pontos a, b, α, β de uma elipse se cruzam no ponto l , e se as distâncias das tangentes nesses pontos a partir do ponto central são denotadas por p, p', p'', p''' , os comprimentos normais $la, lb, l\alpha, l\beta$ através de n, n', n'', n''' , então é

$$np + n'p' + n''p'' + n'''p''' = 2(A^2 + B^2),$$

onde A e B significam os semieixos da curva”. Todas essas proposições valem quase igualmente para a hipérbole; mudanças essenciais são necessárias para a parábola.⁹ (JOACHIMSTHAL, 1843, p.178, Tradução nossa)

⁷ Or on sait que l'idée de la perpendiculaire peut être généralisée. Savoir en prenant une conique quelconque que nous appelons la conique absolue, deux droites harmoniques par rapport à cette conique peuvent être appelées perpendiculaires (et de même deux points harmoniques par rapport à la conique absolue peuvent être appelés perpendiculaires). Cela posé, on peut parler dans un sens plus général des normales, etc. d'une courbe quelconque.

⁸ Sind 2 Punkte a und b der Ellipse gegeben, so wird man zwei andere Ellipsenpunkte α, β finden können, deren Normalen mit denen von a und b sich in einem Punkte treffen.

⁹ Da die Sehnen a und b und $\alpha\beta$ Durchmesser parallel sind, welche die Größe zweier zusammengehöriger conjugirter Durchmesser haben, so erhält man folgenden Satz: “Schneiden sich die Normalen der vier Punkte a, b, α, β einer Ellipse im Punkte l , und bezeichnet man die Abstände der Tangenten an diesen Punkten vom Mittelpunkte durch p, p', p'', p''' , die Normallängen $la, lb, l\alpha, l\beta$ durch n, n', n'', n''' , so ist wo A und B die Halb-Axen der Curve bedeuten”. Alle diese Sätze gelten fast gleichmäÙig für die Hyperbel; für die Parabel sind wesentliche Aenderungen nöthig.

Ele desenvolve essas propriedades no contexto de normal à elipse e ao elipsoide. No texto, não fica clara a generalização que Cayley realiza, apesar de ela derivar dessa última propriedade. Então, esse artigo não desenvolve a noção de perpendicularidade conforme Cayley, muito menos faz menção a questões relacionadas à métrica.

Retornando ao texto de Cayley, destacamos que, ao explorar a noção de perpendicularidade, o autor já faz uso da notação envolvendo polinômios homogêneos, usando a terminologia “absoluto” e apresentando no final o caso da geometria esférica que serve de modelo a sexta memória. Nesse sentido, ele consegue divulgar no jornal do Crelle uma abordagem própria que seria desenvolvida de forma mais ampla na sexta memória. A seguir veremos como esse modelo aparece nessa memória.

3.5 A sexta memória sobre os *quantics*

A sexta memória sobre os *quantics* vislumbra estudar a relação entre polinômios homogêneos do segundo grau, em duas ou três variáveis, e a determinação de uma distância a partir de um espaço projetivo. O conceito de espaço projetivo não é definido por Cayley. Esse conceito e essa denominação virão a ser introduzidos a partir da segunda metade do século XIX, com as contribuições de Möbius, Von Staudt, Felix Klein, e se consolidará na primeira metade do século XX, em sinergia com os desdobramentos da álgebra linear. Mas, considerando pontos referenciados por duas ou três coordenadas homogêneas, Cayley toma, de fato, pontos de uma reta ou de um plano projetivo. Cayley afirma na introdução deste artigo: “Um objetivo principal desta memória é a criação, em princípios puramente descritivos, da noção de distância”¹⁰. (CAYLEY, 1859c, p.561, Tradução nossa)

Ele inicia o seu estudo partindo da geometria de uma dimensão, em que se utilizam equações quadráticas homogêneas de duas variáveis que representam um par de pontos sobre a reta projetiva. Depois, examina o caso de equações quadráticas de três variáveis que representam cônicas no plano projetivo. Numa parte posterior da sua memória, Cayley desenvolve a noção de distância para ambos os casos. A estrutura dessa memória se divide, portanto, em cinco partes: Introdução (parágrafos 147 e 148), *On Geometry of One Dimension* (do parágrafo 149 ao 168), *On Geometry of Two Dimensions* (do parágrafo 169 ao 208), *On the Theory of Distance* (do parágrafo 209 ao 229) e conclusão (parágrafo 230).¹¹

Assim, a geometria de uma dimensão é definida por Cayley como: “a geometria de pontos na curva [...]”. Neste caso, vê-se o estudo das relações entre pontos pertencentes a uma mesma reta. Por sua vez, a geometria de duas dimensões é apresentada como “a geometria de pontos e curvas num plano”.

¹⁰ A chief object of the present memoir is the establishment, upon purely descriptive principles, of the notion of distance.

¹¹ As três partes cujos títulos estão em inglês são subtítulos utilizados por Cayley no corpo do texto da Sexta Memória, o uso das outras duas partes (introdução e conclusão) tem a finalidade de esclarecer a organização desta memória, mas não são subtítulos do texto original.

Nesse estudo das relações entre pontos, curvas e retas, Cayley considera a relação de dualidade. Nessa relação, na época chamada de “reciprocidade”, o objeto ponto pode significar o seu dual, ou seja, uma curva ou uma reta, enquanto o objeto curva ou reta pode significar um ponto. Além disso, insiste ainda no significado de coordenadas homogêneas: “[...] é apenas as razões das coordenadas, e não seus valores absolutos, pelos quais são determinados [...]” (CAYLEY, 1859c, p.562, Tradução nossa). E completa:

...portanto, ao dizer que as coordenadas x,y são iguais a,b , ou por escrito, $x,y = a,b$, queremos dizer apenas que $x : y = a : b$, e nunca como resultado obter $x,y = a,b$, mas apenas $x : y = a : b$.¹² (CAYLEY, 1859c, p.562, Tradução nossa).

Ainda na introdução da sexta memória, Cayley diz que inclui a *spherical geometry*, que seria a geometria elíptica nos termos atuais. Cayley afirma que os pontos e as retas podem revestir também o significado dos objetos da geometria esférica tratando do modelo:

O que deve ser observado é que, em virtude da extensão da significação dos termos, ao tratar a geometria de uma dimensão como uma geometria de pontos em uma linha, e a geometria de duas dimensões como uma geometria de pontos e linhas em um plano, na realidade tratamos essas geometrias respectivamente de uma maneira absolutamente geral. Em particular - e noto o caso porque terei ocasião de me referir novamente a ele - fazemos na geometria de duas dimensões incluir a geometria esférica; as palavras plano, ponto e linha, significando para este propósito, superfície esférica, arco (de um grande círculo) e ponto (ou seja, par de pontos opostos) da superfície esférica. E da mesma maneira a geometria de uma dimensão inclui os casos de pontos em um arco e de arcos através de um ponto.¹³ (CAYLEY, 1859c, p.562, Tradução nossa)

Esta reflexão de Cayley é, a nosso ver, essencial, pois, como constataremos, ela norteia todo o encaminhamento da sexta memória. De fato, ao abordar a determinação de uma métrica na reta e no plano projetivo, pensamos que Cayley tem em mente a representação da geometria esférica. Veremos alguns aspectos da reflexão de Cayley que mostram isso claramente. Depois de ter analisado em cada etapa os cálculos de Cayley, adotaremos uma representação da reta projetiva por um círculo, centrado na origem do referencial, onde os pontos diametralmente opostos representam um único ponto; assim como, em duas dimensões, a representação do plano projetivo por uma esfera, onde os pontos antípodas representam o mesmo ponto, para mostrar o quanto a visão de Cayley é tributária deste modelo.

Assim a equação da reta projetiva é: $x^2 + y^2 = 1$, com $y > 0$, acrescida do ponto de coordenada $(1,0)$.

¹² ...hence in saying that the coordinates x,y are equal to a,b , or in writing $x,y = a,b$, we mean only that $x : y = a : b$, and we never as a result obtain $x,y = a,b$, but only $x : y = a : b$.

¹³ The thing to be attended to is, that in virtue of the extension of the signification of the terms, in treating the geometry of one dimension as a geometry of points in a line, and the geometry of two dimensions as a geometry of points and lines in a plane, we do in reality treat these geometries respectively in an absolutely general manner. In particular - and I notice the case because I shall have occasion again to refer to it - we do in the geometry of two dimensions include spherical geometry; the words plane, point, and line, meaning for this purpose, spherical surface, arc (of a great circle) and point (that is, pair of opposite points) of the spherical surface. And in like manner the geometry of one dimension includes the cases of points on an arc, and of arcs through a point.

A equação do plano projetivo é representada pela semiesfera de equação $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, com $z > 0$, acrescida do círculo de equação, $x^2 + y^2 = 1$, os pontos diametralmente opostos do equador representando um único ponto. A razão dessa escolha será justificada mais adiante pelos próprios cálculos de Cayley. Aliás, é esta representação que ele estuda no final da sexta memória (CAYLEY, 1859c, p.561) tornando-a exemplar, e genérica para o problema.

3.5.1 Definição de métrica na reta projetiva

Cayley considera a equação $ax^2 + 2bxy + cy^2 = 0$, que representa dois pontos I e J. Sendo dois pontos A e B da reta projetiva, em involução com I e J, Cayley afirma que as raízes da equação:

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + (lx + my)^2 = 0$$

determinam um outro par de pontos $X(x,y)$ e $X''(x'',y'')$, em involução com os dois outros pares (I,J) e (A,B), a involução deixando fixos os pontos A e B, e enviando I em J, e J em I. O ponto B pode ser definido pela equação $lx + my = 0$, o segundo ponto fixo A é deduzido pelo fato de que os pares (I,J) e (A,B) formam uma divisão harmônica. Utilizamos as coordenadas seguindo a notação de Cayley, para dar conta do raciocínio do autor a partir do texto original, apesar de não utilizarmos toda a sua simbologia. A seguir, apresenta-se uma figura que ilustra os passos iniciais mencionados:

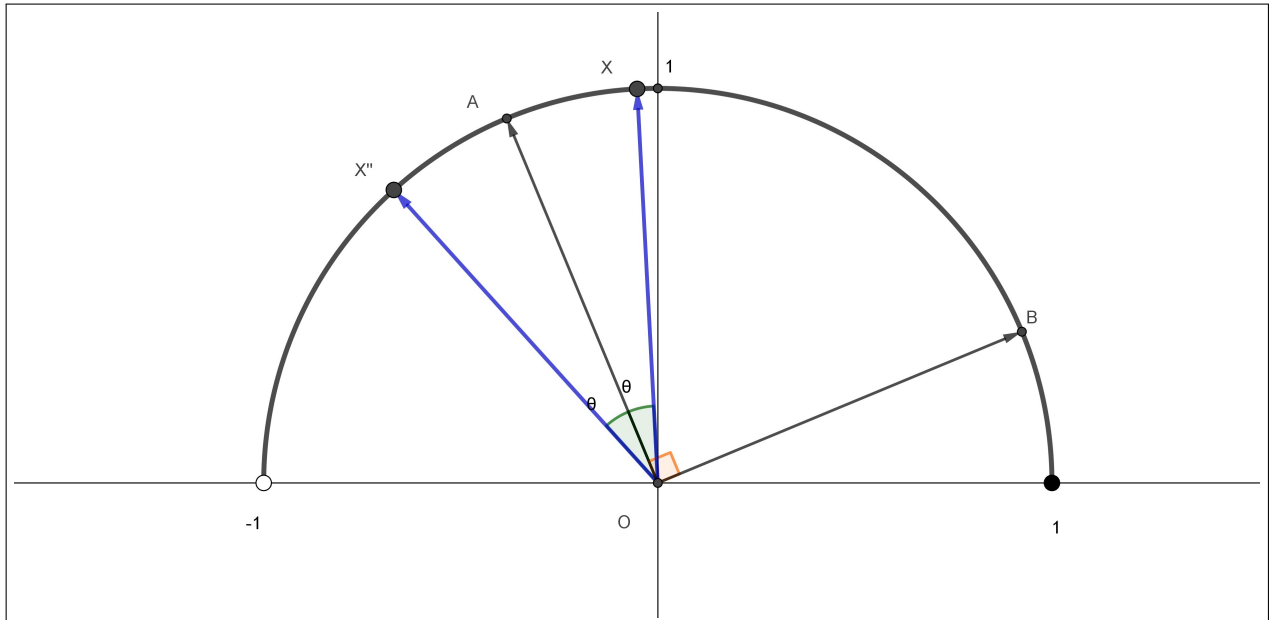


Figura 3.1 – Modelo da reta projetiva

Fonte: próprio autor

Na realidade, Cayley poderia utilizar uma representação mais simples de uma forma quadrática, já que sabia que Sylvester (no teorema da inércia) tinha mostrado em 1852 que, para qualquer forma quadrática, existe um referencial em que a forma quadrática se exprime como

soma ou diferença de quadrados. Por isso, no caso em que os pontos I e J são imaginários, a equação $ax^2 + 2bxy + cy^2 = 0$ pode, através de uma mudança de variável, se a forma quadrática é definida positiva, se tornar a equação $x^2 + y^2 = 0$, os pontos I e J sendo os pontos cíclicos. Nesse caso, os pontos A e B são tais que o produto escalar $\vec{OA} \cdot \vec{OB} = 0$, sendo, portanto, conjugados.

Considerando um ponto qualquer B do semicírculo, $A(x', y')$ é determinado e o ângulo AOB é reto, Cayley prossegue:

Podemos, se quisermos, sendo (x', y') , e θ constantes, exibir a equação do par de pontos inscritos na forma:

$$(ax^2 + 2bxy + cy^2)(ax'^2 + 2bx'y' + cy'^2)\text{sen}^2\theta - (ac - b^2)(xy' - x'y)^2 = 0,$$

onde temos por eixo de inscrição e centro de inscrição, respectivamente, as equações:

$$xy' - x'y = 0,$$

$$axx' + b(xy' + x'y) + cyy' = 0;$$

ou, na forma equivalente,

$$(ax^2 + 2bxy + cy^2)(ax'^2 + 2bx'y' + cy'^2)\cos^2\theta - [axx' + b(xy' + x'y) + cyy']^2 = 0,$$

onde temos, para o eixo da inscrição e o centro de inscrição, respectivamente, as equações:

$$axx' + b(xy' + x'y) + cyy' = 0,$$

$$xy' - x'y = 0. \text{ }^{14}(\text{CAYLEY, 1859c, p.569, Tradução nossa})$$

Cayley considera o ponto de coordenadas $A(x', y')$ fixado. Podemos observar que aparecem, nas equações, os parâmetros $\text{sen}\theta$ e $\cos\theta$, que indicam que as raízes da equação quadrática $ax^2 + 2bxy + cy^2 = 0$ são imaginárias. Com efeito, se Q é uma forma quadrática definida positiva, e P a forma bilinear associada, a razão $\frac{P(\vec{OA}, \vec{OX})^2}{Q(\vec{OA}) \cdot Q(\vec{OX})}$ é menor que 1, e se anula para $X = B$. Essa é uma consequência da relação de Cauchy-Schwarz:

$$[P(\vec{OA}, \vec{OX})]^2 \leq Q(\vec{OA}) \cdot Q(\vec{OX}).$$

Assim, podemos escolher o parâmetro θ , tal que $\cos^2\theta = \frac{P(\vec{OA}, \vec{OX})^2}{Q(\vec{OA}) \cdot Q(\vec{OX})}$. Por isso, pensamos que o quadro do raciocínio de Cayley se situa, intuitivamente, num modelo de geometria que Felix Klein irá chamar de geometria elíptica.

O ponto conjugado de X, o ponto X'' , verifica, também, $\cos^2\theta = \frac{P(\vec{OA}, \vec{OX''})^2}{Q(\vec{OA}) \cdot Q(\vec{OX''})}$, ou seja, os ângulos AOX'' e XOA são iguais.

Cayley (1859c, p.569) justifica as duas expressões (com os parâmetros $\text{sen}\theta$ e $\cos\theta$) pela chamada identidade de Lagrange, que podemos hoje escrever em dimensão dois:

$$Q(\vec{OA}) \cdot Q(\vec{OX}) = [P(\vec{OA}, \vec{OX})]^2 + \det Q \cdot \det^2(\vec{OA}, \vec{OX}).$$

¹⁴ We may, if we please, (x', y') , and θ being constants, exhibit the equation of the inscribed point-pair in the form $(ax^2 + 2bxy + cy^2)(ax'^2 + 2bx'y' + cy'^2)\text{sen}^2\theta - (ac - b^2)(xy' - x'y)^2 = 0$, where we have for the axis of inscription and centre of inscription respectively, the equation $xy' - x'y = 0$, $axx' + b(xy' + x'y) + cyy' = 0$; or in the equivalent form, $(ax^2 + 2bxy + cy^2)(ax'^2 + 2bx'y' + cy'^2)\cos^2\theta - [axx' + b(xy' + x'y) + cyy']^2 = 0$, where we have for the axis of inscription and the centre of inscription respectively, the equations $axx' + b(xy' + x'y) + cyy' = 0$, $xy' - x'y = 0$.

No artigo 168 da Memória, ele considera o que chamamos hoje de determinante de Gram, constituído pelos produtos escalares dois a dois dos três vetores $X(x,y)$, $X'(x',y')$, $X''(x'',y'')$ que são no plano $z = 0$. Sendo coplanares, o determinante de Gram desses vetores é nulo, e no modelo que Cayley tem em vista, se chamarmos os ângulos a, b, c , os ângulos respectivos XOX' , $X'OX''$, XOX'' , considerando as medidas de a e b menores do que c , o determinante de Gram é:

$$D = 0 = \begin{vmatrix} 1 & \cos a & \cos c \\ \cos a & 1 & \cos b \\ \cos c & \cos b & 1 \end{vmatrix} = 1 - \cos^2 a - \cos a(\cos b \cos c) + \cos c(\cos a \cos b - \cos c),$$

ou seja:

$$[\cos(b - a) - \cos c][\cos c - \cos(a + b)] = 0.$$

O primeiro termo sendo diferente de zero ($b - a < c$), temos $c = a + b$, relação que caracteriza a distância sobre a reta. Cayley não realiza o cálculo, e dá apenas o resultado.

Para definir a métrica sobre a reta projetiva, Cayley chama a forma quadrática Q de “absoluto”¹⁵. A interseção desta cônica com a reta determina dois pontos I e J, e dado dois pontos A e B conjugados com I e J, Cayley define assim a distância entre o ponto A e X como sendo:

$$\theta = \arccos \frac{P(\vec{OA} \cdot \vec{OX})}{\sqrt{Q(\vec{OA}) \cdot Q(\vec{OX})}}.$$

Observa também, com essa definição, que o ângulo é zero quando $X = A$, e o ângulo maximal é $\frac{\pi}{2}$.

Todas essas considerações de Cayley dizem respeito a uma forma quadrática definida positiva escolhida como absoluta. Se $Q(X) = x^2 + y^2$, obtemos a métrica do semicírculo considerado acima.

3.5.2 O caso limite

No artigo 213, Cayley aborda o caso de uma forma quadrática degenerada que, portanto, é representada por um ponto duplo P. “Qualquer par de pontos pode ser considerado como um círculo de centro o harmônico do ponto duplo em relação ao par considerado”(CAYLEY, 1859c, p.585). Se enviarmos P ao infinito, o centro será o ponto médio do segmento definido pelo par de pontos, e a métrica da reta, a métrica euclidiana. Mas antes de chegar a este resultado, Cayley observa:

A respeito da expressão analítica, no caso em questão, $ac - b^2$ desvanece, ou a distância é dada como o arco de um seno que desvanece. Reduzindo o arco ao seu seno e omitindo o fator evanescente, temos uma expressão finita

¹⁵ Nós consideramos o termo “absoluto” como um substantivo nesta discussão e, seguindo o que foi escrito por Cayley e Klein em seus artigos sobre o assunto, usamos o substantivo masculino para se referir à forma quadrática de referência ao estabelecer a métrica.

para a distância. Suponha que o Absoluto seja $(qx - py)^2 = 0$, ou, o que é a mesma coisa, seja o Absoluto (tratado como um único ponto), o ponto (p, q) , então encontramos para a distância entre os pontos (x, y) e (x', y') , a expressão: $\frac{(xy' - x'y)}{(qx - py)(qx' - py')}$.¹⁶ (CAYLEY, 1859c, p.585, Tradução nossa)

“Omitindo” e “desvanece” são expressões que mostram que a fórmula obtida é o resultado de um cálculo de limite. Antes de estudar a passagem ao limite que falta no texto de Cayley, observamos que se o ponto (p, q) for $(1, 0)$ obtemos a métrica euclidiana, já que o resultado obtido por Cayley se reduz a $\frac{xy' - x'y}{yy'} = \frac{x}{y} - \frac{x'}{y'}$. Considerando como mapa afim da reta projetiva a reta de equação $y = 1$, essa fórmula da distância é a euclidiana.

Para estudar o caso limite, consideramos a forma quadrática definida positiva (o que Cayley faz no caso geral) de equação $\varepsilon^2 x^2 + y^2 = 0$, que representa um par de pontos imaginários, pois é possível transformá-la na forma fatorada: $(\varepsilon x - iy)(\varepsilon x + iy) = 0$. No caso limite $\varepsilon = 0$, a forma quadrática se torna $y^2 = 0$. O ponto duplo é o ponto ao infinito da reta projetiva.

Nesse caso, a distância é dada pela fórmula: $\sin^2 \theta \approx \theta^2 = \varepsilon^2 \frac{(xy' - x'y)^2}{(\varepsilon x^2 + y^2)(\varepsilon x'^2 + y'^2)}$.

Cayley deve supor que as variáveis θ e ε tendem a zero, de tal modo que a razão $\frac{\theta}{\varepsilon}$ tem um limite finito, limite que se torna a distância no caso $\varepsilon = 0$. Sob essas hipóteses, a distância entre os dois pontos é:

$$d = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{xy' - x'y}{\sqrt{(\varepsilon x^2 + y^2)(\varepsilon x'^2 + y'^2)}} = \frac{xy' - x'y}{yy'}.$$

Encontramos, portanto, a distância euclidiana: se a reta projetiva é representada pela equação da reta afim $y = 1$, com o seu ponto ao infinito $(1, 0)$, obtemos para dois pontos da reta afim $(x, 1)$ e $(x', 1)$, com $x < x'$, a distância $x' - x$.

3.5.3 Definição de métrica no plano projetivo

Na Sexta Memória, após fazer a abordagem para a geometria de uma dimensão, Cayley apresenta a seção de título *On Geometry of Two Dimension*, na qual pretende desenvolver a geometria do plano. No plano projetivo, a teoria é mais geral, pois a teoria da dualidade deve ser levada em conta.

Toda a introdução dessa seção é uma exposição das diferentes propriedades geométricas de incidência entre pontos e retas, via coordenadas homogêneas. Cayley define as condições de alinhamento de três pontos, a concorrência de três retas, através de determinantes, enfatizando as propriedades de dualidade, em relação a uma forma quadrática, que se traduzem em termos de simetrias nas equações entre polos e as suas retas polares respectivas (DIAS; GRIMBERG,

¹⁶ As regards the analytical expression, in the case in question $ac - b^2$ vanishes, or the distance is given as the arc to an evanescent sine. Reducing the arc to its sine and omitting the evanescent factor, we have a finite expression for the distance. Suppose that the equation of the Absolute is $(qx - py)^2 = 0$, or what is the same thing, let the Absolute (treated as a single point) be the point (p, q) , then we find for the distance of the points (x, y) and (x', y') the expression $\frac{(xy' - x'y)}{(qx - py)(qx' - py')}$.

2019). A exposição de Cayley não é original, pois todos esses resultados já se encontram em Plücker.

Em seguida, Cayley aborda as equações de feixe de cônicas. Cayley apresenta sua notação para ponto, reta e cônica, além de expor as principais propriedades geométricas (CAYLEY, 1859c, p.570). Para tornar a exposição mais clara, resumimos em termos matriciais os cálculos de Cayley.

O aspecto original da memória inicia-se pela consideração de um feixe de cônicas gerado por uma cônica C dada de equação $Q(X) = 0$ (Cayley escolhe uma forma quadrática Q imaginária), e uma reta de equação $R(X) = 0$ que ele escreve como:

$$Q(X) + \lambda R(X)^2 = 0.$$

As cônicas degeneradas deste feixe são determinadas por Cayley, considerando a equação, dada em λ , de $\det M_0 = 0$, chamando M_0 , a matriz associada a uma cônica do feixe. Como se trata de uma equação do terceiro grau, há uma raiz real α , que corresponde a um ponto A , e duas raízes complexas conjugadas β e γ , que correspondem a dois pontos imaginários I e J . A reta IJ corta a cônica em I e J e seu polo é o ponto A , o que explica que se trata de um feixe bitangente em I e J . As cônicas degeneradas são a reta dupla IJ , e o par de retas AI e AJ . Cayley chama o ponto $A(x', y', z')$ de centro de inscrição e a reta IJ de eixo de inscrição.

Logo após, Cayley observa que podemos obter o resultado dual considerando as equações tangenciais da cônica C e do ponto P .

Se chamarmos Q a forma quadrática associada à cônica C , e P a sua forma bilinear associada, a equação da polar do ponto A é:

$$P[(x', y', z'), (x, y, z)] = 0.$$

Como Cayley (1859c, p.577) considera o efeito da dualidade, sabemos que se chamamos M a matriz da forma Q associada à cônica C , e o seu determinante $\det M = K$, a matriz da forma dual Q^* é M^{-1} .

Tomando um parâmetro θ , a equação da “cônica inscrita”, como a chama Cayley, é, na nossa notação:

$$Q(x', y', z')Q(x, y, z)\cos^2\theta - (P[(x', y', z'), (x, y, z)])^2 = 0.$$

Ou ainda:

$$Q(x', y', z')Q(x, y, z)\sin^2\theta - KQ^*[(x', y', z') \wedge (x, y, z)] = 0.$$

Para justificar essas duas equações, Cayley invoca a identidade seguinte:

$$Q(x', y', z')Q(x, y, z) - (P[(x', y', z'), (x, y, z)])^2 = KQ^*[(x', y', z') \wedge (x, y, z)].$$

Essa identidade é baseada sobre duas propriedades das formas quadráticas. A primeira é que para uma forma quadrática Q , temos:

$$KQ[(x', y', z') \wedge (x, y, z)] = Q(x', y', z')Q(x, y, z) - (P[(x', y', z'), (x, y, z)])^2.$$

A segunda propriedade é o fato que o produto vetorial $(x', y', z') \wedge (x, y, z)$ pode ser considerado um vetor do espaço ou um elemento do dual, então vale a igualdade:

$$Q[(x', y', z') \wedge (x, y, z)] = Q^*[(x', y', z') \wedge (x, y, z)].$$

Essas duas propriedades explicam a fórmula geral de Cayley.

Cayley chama “cônica inscrita” aquela de equação, para θ fixado, dada por:

$$Q(x', y', z')Q(x, y, z)\cos^2\theta - (P[(x', y', z'), (x, y, z)])^2 = 0.$$

Por ser uma cônica pertencendo ao feixe de cônicas gerado por C e A . Com efeito, essa cônica passa por I e J .

Podemos agora explicar por que pensamos que Cayley escolhe uma forma quadrática imaginária. Certamente, no caso geral que ele estuda, isto é, uma cônica de equação:

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Fxy + Gxz + Hyz = 0,$$

a razão dada por:

$$\frac{x(Ax_1 + Fy_1 + Gz_1) + y(Fx_1 + By_1 + Hz_1) + z(Gx_1 + Hy_1 + Cz_1)}{(Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Fxy + Gxz + Hyz)(Ax_1^2 + By_1^2 + Cz_1^2 + Fx_1y_1 + Gx_1z_1 + Hy_1z_1)},$$

deve estar entre 0 e 1, a fim de escolher como parâmetro $\cos^2\theta$, o que acontece quando a forma quadrática é anisotrópica e definida positiva (teorema de Cauchy-Schwarz). Se Cayley escolhesse uma forma quadrática não imaginária, logo real, a razão acima considerada seria maior do que um, e o parâmetro a ser considerado para o pequeno círculo seria $\cos^2\theta$.

Considerando a cônica associada à forma Q a “cônica absoluta”, Cayley chega a duas expressões da distância entre dois pontos de coordenadas $A(x', y', z')$ e $A(x, y, z)$:

$$\theta = \cos^{-1} \frac{P[(x', y', z'), (x, y, z)]}{\sqrt{Q(x', y', z')Q(x, y, z)}}, \text{ e } \theta = \sin^{-1} \frac{\sqrt{KQ^*[(x', y', z') \wedge (x, y, z)]}}{\sqrt{Q(x', y', z')Q(x, y, z)}}.$$

Cayley dá também as expressões correspondentes do ângulo entre duas retas, assim como a distância de um ponto a uma reta.

3.5.4 O caso limite

Cayley considera o caso em que a cônica degenera em dois pontos $I(p, q, r)$ e $J(p_0, q_0, r_0)$. Nesse caso, o determinante K da forma anula-se, e Cayley como no caso da distância sobre a reta, passa ao limite implicitamente, assimilando o seno ao arco, obtendo a expressão:

$$d = \frac{\sqrt{Q^*[(x', y', z') \wedge (x, y, z)]}}{\sqrt{Q(x', y', z')Q(x, y, z)}}$$

De fato, para chegar a esse resultado devemos supor que a razão $\frac{\theta}{\sqrt{K}}$ possui um limite finito quando θ e K tendem a zero.

Para ilustrar esse fato, Cayley considera o caso da cônica degenerada nos dois pontos cíclicos $I(1, i, 0)$ e $J(1, -i, 0)$. A equação tangencial da cônica se torna: $x^2 + y^2 = 0$, sendo a equação da cônica absoluta $z^2 = 0$. O mapa afim é, neste caso, o plano de equação $z = 1$, a expressão da distância sendo:

$$d = \frac{\sqrt{(yz' - y'z)^2 + (xz' - x'z)^2}}{zz'}$$

Com $z = z' = 1$, temos a expressão habitual da distância euclidiana.

A seguir, Cayley aborda o caso onde cônica absoluta é a de equação:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 0,$$

que representa para ele um caso emblemático. Como já mencionamos, Cayley poderia ter observado que qualquer forma quadrática real, por via de mudança de variáveis no referencial dos autovetores, poderia ser expressa como soma algébrica de quadrados (teorema da inércia, demonstrado por Sylvester (1852)).

No caso da cônica imaginária de equação $x^2 + y^2 + z^2 = 0$, o plano projetivo pode ser representado por uma semiesfera centrada na origem e de raio um, com as condições $z \geq 0$ e $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Conforme a figura 3.2, abaixo:

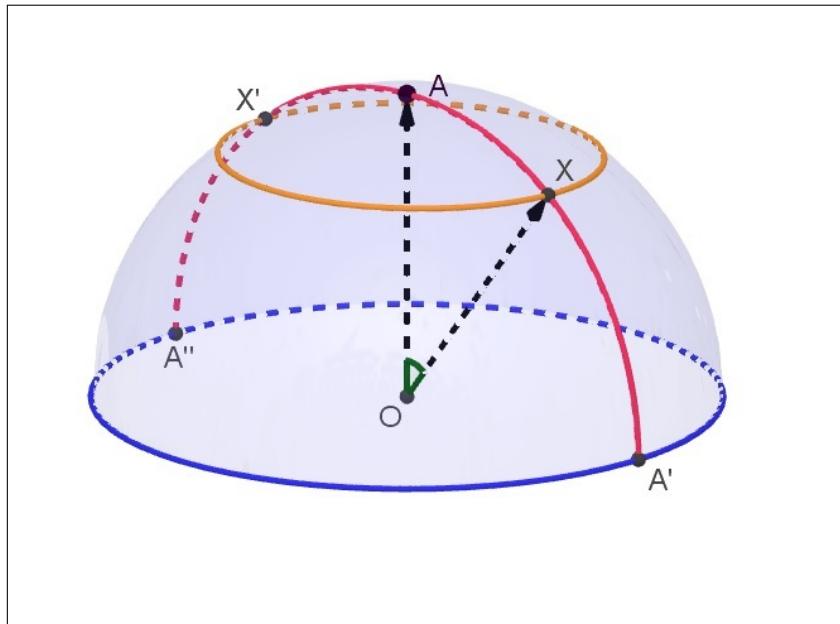


Figura 3.2 – Modelo da geometria esférica

Fonte: próprio autor

Consideramos $A(x_1, y_1, z_1)$ e sua polar, que é o círculo interseção do plano P de equação $xx_1 + yy_1 + zz_1 = 0$ e da semiesfera. Este círculo passa pelos pontos cíclicos I e J que são a interseção deste plano real P com a cônica imaginária.

Cayley considera o pequeno círculo de centro $A(x', y', z')$ e de certo raio r fixado na semiesfera. Considerando qualquer grande círculo passando por A , que corta este pequeno

círculo em dois pontos X e X' e a polar de A em A' , os pontos $AA'XX'$ estão em involução, e X e X' estão a igual distância de A . Essa distância é medida pelo ângulo θ que AO faz com OX . A equação do pequeno círculo se escreve, segundo Cayley:

$$\cos^2 \theta (x^2 + y^2 + z^2)(x_1^2 + y_1^2 + z_1^2) - (xx_1 + yy_1 + zz_1)^2 = 0.$$

Então, a distância entre os dois pontos é:

$$\theta = \cos^{-1} \frac{xx_1 + yy_1 + zz_1}{\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)(x_1^2 + y_1^2 + z_1^2)}}$$

Cayley observa que a diferença essencial entre geometria esférica e geometria euclidiana é que, no caso da geometria esférica, a cônica absoluta é não degenerada, o que possibilita uma dualidade total de todos os teoremas. Com efeito, a dualidade do plano euclidiano se torna completa unicamente levando em conta os pontos ao infinito.

Desse resultado, ele chega à conclusão mais importante dessa memória: “A geometria métrica é, portanto, uma parte da geometria descritiva, e a geometria descritiva é toda a geometria, [...]”¹⁷ (CAYLEY, 1859c, p.592, Tradução nossa). A “geometria métrica” trata da geometria euclidiana e “geometria descritiva” da geometria projetiva, ou seja, Cayley conclui que a geometria mais elementar é a projetiva, o que quebrou o paradigma de a geometria euclidiana ser a mais fundamental, de onde se fundamentava a geometria projetiva até então.

3.6 Nota explicativa sobre a sexta memória

No fim do segundo volume da coletânea dos trabalhos de Cayley, existe uma nota explicativa referente à sexta memória sobre os *quantics*. Lembramos que essa coletânea possui treze volumes e que os sete primeiros foram organizados pelo próprio autor, incluindo valiosas notas explicativas no final dos volumes. Cayley morre no dia 26 de janeiro de 1895, com isso, a partir do oitavo volume, A. R. Forsyth assume a organização dos volumes, seguindo a ordem proposta por Cayley. Forsyth, entretanto, não escreve notas explicativas.

Nessa nota dedicada à sexta memória, Cayley destaca os seguintes artigos para o desenvolvimento da “teoria da distância”, fundada por seu artigo: primeiro, o artigo de Klein de 1871; segundo, um artigo próprio, cujo título é *On the Non-Euclidian Geometry* de 1872; terceiro, o artigo de 1873 de Klein.

Cayley apresenta a definição de Klein utilizando o logaritmo da razão anarmônica, que substitui o arco cosseno utilizado em sua sexta memória. Apesar de aceitar o fato de que a definição de Klein é coerente com a relação fundamental da distância, Cayley coloca uma questão que demonstra sua dificuldade em aceitar a ideia generalizada por Klein em relação à métrica adotada. Para Cayley, isso poderia gerar uma contradição que dificultaria o trabalho com a dupla razão independente da métrica adotada. Cayley reconhece que Klein, em seu artigo de

¹⁷ Metrical geometry is thus a part of descriptive geometry, and descriptive geometry is all geometry, [...]

1871, cita o trabalho de Staudt, *Geometrie der Lage*, que defende a independência da dupla razão de quatro pontos em relação a qualquer noção de distância.

Cayley encerra a sua nota com a seguinte afirmação:

Nessa teoria [Geometria Não Euclidiana] parece que tentamos substituir a nossa noção comum de distância entre dois pontos pelo logaritmo de uma determinada razão anarmônica. Mas essa relação em si envolve a noção de distância medida na forma ordinária. Como então podemos substituir a velha noção de distância pela noção não euclidiana, na medida em que a própria definição da última envolve a antiga?¹⁸(CAYLEY, 1889, p.606, Tradução nossa)

Como a nota foi escrita num período bem posterior à da sexta memória, pode-se concluir que Cayley não acreditava ser possível definir a dupla razão sem utilizar o conceito de distância, como era proposto no trabalho de Klein.

Esse fato também se encontra destacado na biografia de Cayley, escrita por A. R. Forsyth, que foi acrescentada no início do oitavo volume das obras de Cayley. Segundo Forsyth, Cayley utiliza a noção de distância para definir a métrica adotada, logo a dupla razão não fica independente dessa noção.

Mas Cayley pretende mostrar a generalidade do seu ponto de vista: em seu artigo de 1872, o matemático mostra que, a partir da escolha do absoluto no caso hiperbólico, pode-se encontrar também uma fórmula para a distância, completando assim a definição das três métricas sem utilizar a dupla razão.

Klein defendeu a sua posição sobre a definição da distância pela dupla razão em 1873 com base em uma memória de Von Staudt, que alcançou uma definição da dupla razão sem recorrer à noção de distância. É sabido que, nesse assunto, Cayley estava equivocado e que Klein tinha a posição correta.

É importante salientar que muitos historiadores, ao abordar o desenvolvimento das geometrias não euclidianas, enfatizam os artigos de Klein e ignoram os demais trabalhos de Cayley sobre o assunto. Um exemplo disso é o artigo de 1872, que é frequentemente omitido e nunca é levado em consideração. Na maioria das vezes, após relatarmos a importância da sexta memória, os pesquisadores passam a indicar que o tema foi absorvido e conduzido apenas por Klein, numa análise unilateral. Nossa abordagem se diferencia ao considerar os demais trabalhos de Cayley e como estes dialogam com os de Klein. A seguir, apresentaremos o artigo onde Cayley trabalha com geometria hiperbólica.

¹⁸ In that theory [Non-Euclidian Geometry] it seems as if we try to replace our ordinary notion of distance between two points by the logarithm of a certain anharmonic ratio. But this ratio itself involves the notion of distance measured in the ordinary way. How then can we supersede the old notion of distance by the Non-Euclidian notion, inasmuch as the very definition of the latter involves the former?

3.7 O artigo de Cayley *On The Non-Euclidean Geometry* de 1872

Cayley (1872, p.409) inicia afirmando que a teoria referente às geometrias não euclidianas apresentada por Klein pode ser desenvolvida num sistema que permita medir distâncias e ângulos, estabelecendo assim uma trigonometria para cada geometria. Para isso, ele utiliza uma cônica real que é considerada por ele como sendo um círculo, a fim de exemplificar seu método.

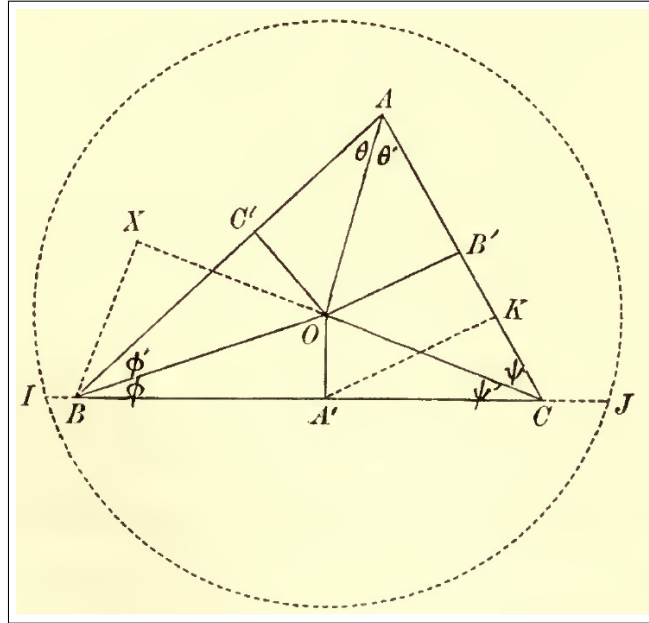


Figura 3.3 – Diagrama de Cayley

Fonte: (CAYLEY, 1872, p.409)

Ele utiliza o caso do círculo de raio unitário, pois simplifica os resultados, uma vez que a distância de um ponto qualquer ao centro passa a ser o seno de um ângulo.

Para calcular a distância BC , ele utiliza o logaritmo da dupla razão dos quatro pontos: B, C, I e J , sendo I e J pontos de interseção com o círculo que é o absoluto. Logo, como ele chama a distância BC de $\bar{a}$, ficamos com a expressão:

$$\bar{a} = \frac{1}{2} \log \frac{BI \cdot CJ}{BJ \cdot CI}.$$

Utilizando a identidade $\cosh \bar{a} = \frac{e^{\bar{a}} + e^{-\bar{a}}}{2}$, e as propriedades do logaritmo e da potenciação, ele encontra a expressão:

$$\cosh \bar{a} = \frac{1}{2} \cdot \frac{BI \cdot CJ + BJ \cdot CI}{\sqrt{BI \cdot BJ} \sqrt{CI \cdot CJ}},$$

considerando OB e OC , sendo O centro do círculo, iguais a, respectivamente, $\text{sen} q$ e $\text{sen} r$, Cayley encontra que $BI \cdot BJ = \cos^2 q$ e $CI \cdot CJ = \cos^2 r$, e assim a relação da distância fica:

$$\cosh \bar{a} = \frac{\cos^2 q + \cos^2 r + a^2}{2 \cdot \cos q \cdot \cos r}.$$

Cayley apresenta expressões para o ângulo na geometria hiperbólica, assim desenvolve as principais expressões para a trigonometria hiperbólica. Seu objetivo é mostrar que essas fórmulas são semelhantes àsquelas da trigonometria esférica, trocando apenas *cosha*, *senha* pelos *cosa* e *sena*. Apesar de ter sido publicado após o artigo de Klein de 1871, esse artigo de Cayley foi publicado antes do segundo artigo de Klein. Isso indica que Cayley, mesmo questionando o método de Klein por utilizar a dupla razão para definir a distância, reconheceu a importância do trabalho de Klein e contribuiu de maneira significativa para o estabelecimento da trigonometria hiperbólica. Além disso, o artigo mostra que Cayley estava familiarizado com a geometria hiperbólica de Lobatchevsky.

3.8 Divulgação e contribuição de Salmon

Salmon publicou quatro livros, com várias edições, e algumas dezenas de artigos. Não há uma coletânea das obras de Salmon, por isso divulgo uma lista no anexo A que construí a partir das informações coletadas nos diversos periódicos britânicos. Em seu livro, *Treatise on conic*, na versão de 1863, Salmon trata dos aspectos geométricos inerentes à teoria dos invariantes, entre eles, destacamos a noção de perpendicularidade. Ele afirma:

A relação então entre duas linhas mutuamente perpendiculares é um caso particular da relação entre duas linhas conjugadas em relação a uma cônica fixa. Assim, o teorema de que as três perpendiculares de um triângulo se encontram num ponto, é um caso particular do teorema de que as linhas se encontram num ponto que participam dos vértices correspondentes de dois conjugados de triângulos em relação a uma cônica fixa, &c. É provado (geometria de três dimensões, cap. IX.) que, na geometria esférica, os dois pontos circulares imaginários no infinito são substituídos por uma cônica imaginária fixa: que todos os círculos em uma esfera devem ser considerados como tendo um duplo contato com a cônica fixa, o centro do círculo sendo o polo da corda de contato; que duas linhas são perpendiculares se cada uma passar através do polo da outra em relação a essa cônica, &c.¹⁹ (SALMON, 1863, p.340, Tradução nossa)

É a noção generalizada de perpendicularidade apresentada por Cayley em seu artigo sobre as normais e é utilizada na sexta memória sobre os *quantics* ao definir a métrica a partir do “cônica absoluta”. O trecho em destaque pertence ao capítulo que trata dos invariantes e covariantes na obra de Salmon. Ou seja, essa definição é aplicada no contexto da teoria que Cayley propõe na sexta memória. A ordem que Salmon escolhe para inserir esse capítulo nos revela uma preocupação de se colocar nos últimos desenvolvimentos da teoria de Cayley. De fato, o conteúdo do livro é estruturado para uma pessoa que tivesse interesse em aprender sobre o que Cayley,

¹⁹ The relation then between two mutually perpendicular lines is a particular case of the relation between two lines conjugate with regard to a fixed conic. Thus, the theorem that the three perpendiculars of a triangle meet in a point, is a particular case of the theorem that the lines meet in a point which join the corresponding vertices of two triangles conjugate with respect to a fixed conic, &c. It is proved (Geometry of Three Dimensions, Chap. ix.) that, in spherical geometry, the two imaginary circular points at infinity are replaced by a fixed imaginary conic: that all circles on a sphere are to be considered as conics having double contact with a fixed conic, the centre of the circle being the pole of the chord of contact; that two lines are perpendicular if each pass through the pole of the other with respect to that conic, &c.

Sylvester, Salmon, dentre outros matemáticos britânicos, estavam pesquisando em relação a temática que o próprio Salmon chama de *Modern Algebra*. Ou seja, nos desenvolvimentos que ligavam geometria e álgebra, teorias como geometria projetiva e polinômios homogêneos, como a teoria dos invariantes.

Os livros de Salmon desempenham um papel importante para a divulgação da matemática britânica. Eles fazem dois movimentos relevantes: influenciam a formação de novos pesquisadores nas escolas inglesas, divulgam pelo continente a prática dos matemáticos britânicos. Esses aspectos ficam claros na quantidade de citações que essas obras recebem, tanto dentro do Reino Unido, quanto nos demais países europeus. Destacaremos no próximo capítulo, por exemplo, a tradução para o alemão de Fiedler que desempenhou um papel fundamental para que a matemática de Cayley fosse conhecida por Felix Klein e outros ilustres matemáticos. O mesmo se repetiu na França e na Itália, ou seja, os livros de Salmon rapidamente foram distribuídos no continente.

Outra informação interessante é que *Treatise on conic* possui algumas edições, sendo possível perceber algumas diferenças entre as de 1855 e 1863. Destaco que são versões impressas entre a publicação do artigo do jornal do Crelle, sobre as normais, e a sexta memória. As grandes mudanças ocorrem a partir do capítulo XV, cujo título é *Reciprocal polars*, e figura como o último capítulo da versão de 1855. Na edição de 1863, o equivalente ao capítulo XV em discussão da versão anterior foi subdividido em três novos capítulos: *Reciprocal polars*, *Harmonic and anharmonic properties* e *The method of projection*. Estes dois últimos eram subitens na versão de 1855 e foram ampliados e transformados em capítulos. Mas a mudança maior está em dois capítulos totalmente novos: o capítulo XVIII, *Invariants and covariants*; e o capítulo XIX (último), *The method of infinitesimals*. O trecho que citamos acima pertence ao capítulo XVIII que trata dos invariantes e covariantes.

Logo, pode-se perceber que o livro foi reeditado para contemplar os novos resultados advindos da teoria dos invariantes, após os desenvolvimentos da sexta memória. Apesar de Salmon não explorar métrica, como Cayley em sua sexta memória, o conteúdo do livro é fundamental para compreender o que Cayley faz ao ligar a teoria dos invariantes a aspectos geométricos. Ou seja, o que Salmon apresenta se insere no contexto dos temas envolvidos nas pesquisas de Cayley sobre as normais, por um lado, e sobre teoria dos invariantes, por outro.

3.9 Conclusões

Como já mencionado, a teoria dos invariantes se desenvolve a partir do artigo de George Boole sobre transformações lineares de 1841. Esse autor aborda aspectos algébricos ligados a uma visão geométrica dessas transformações. Cayley reage a esse artigo e se interessa pelo tema, conforme a carta que escreveu a Boole. Então, podemos perceber que a teorias dos invariantes, conforme os britânicos a desenvolvem, possuía uma relação direta com geometria. Logo, o que Cayley faz na quinta e na sexta memória sobre os *quantics*, ou seja, relacionar teoria dos

invariantes com geometria, era uma prática desses matemáticos britânicos, ou seja, como temos destacado desde o capítulo 2, caracterizava-se como uma prática comum.

Os artigos de Cayley anteriores à sexta memória confirmam essa relação que associa álgebra e geometria. Como vimos, a involução, por exemplo, foi utilizada num contexto de uso de polinômios homogêneos no artigo de 1847, onde ele faz referência a matemáticos como Euler, Cramer, Plücker e Hesse. No artigo de 1848 sobre reciprocidade ele cita diretamente o trabalho de Plücker que trata geometria projetiva de forma algébrica, com uso do sistema de coordenadas atualmente conhecido como coordenadas homogêneas. Em 1853, Cayley em nota destaca as propriedades desse sistema de coordenadas e como ela se relaciona com os polinômios e as transformações. Ou seja, entre 1847 e 1853, ele trabalhou diversas vezes explorando as propriedades geométricas da álgebra dos polinômios homogêneos. Então, antes de publicar a primeira memória sobre os *quantics*, ele já havia trabalhado vários aspectos que ligam álgebra dos polinômios homogêneos às propriedades geométricas, como involução, que são fundamentais para entender a sexta memória. Esse contexto de produção quase nunca é estudado quando são abordadas as métricas de Cayley, parecendo que o que ele faz não se relaciona às suas obras anteriores.

E ao analisarmos a primeira memória sobre os *quantics*, de 1854, destacamos que Cayley apresenta os aspectos geométricos envolvidos no trabalho algébrico da teoria dos invariantes. Logo, isso sinaliza que estes aspectos geométricos são fundamentais para os desenvolvimentos com os *quantics*. Como da segunda à quarta memória ele não explora esses aspectos, se detendo a desenvolver a álgebra da teoria dos invariantes, essa série de artigos sobre os *quantics* muitas vezes é mal interpretada como sendo um teoria puramente algébrica. E então chega-se à conclusão precipitada de que Klein havia interpretado a sexta memória como se não houvesse nela uma teoria pronta sobre as métricas. O que veremos no próximo capítulo, reforçado pelos aspectos que apresentamos aqui, é que a sexta memória possui uma abordagem para as métricas e Klein apresenta a sua nos seus artigos sobre as geometrias não euclidianas. Não queremos dizer que a sexta memória não contribuiu para o que fez Klein, mas sim que Cayley possuía sua própria abordagem para as métricas e que esta difere da do matemático alemão.

A quinta memória sobre os *quantics*, de 1858, já apresenta uma série de resultados que são retomados na sexta memória, com por exemplo o invariante que estabelece a relação harmônica de duas ou mais quádras. O curto espaço de tempo nos faz pensar que ao terminar de escrever a quinta memória, Cayley já tinha em mente seu trabalho com métricas que foi desenvolvido na sexta memória.

O artigo sobre as normais do jornal do Crelle, de 1857, também foi escrito provavelmente quando Cayley já tinha em mente a sexta memória. A noção geral de perpendicularidade aparece usando já a terminologia “absoluto” para quádras de referência da métrica. Esse artigo quase nunca é citado nos diversos trabalhos que tratam das métricas de Cayley-Klein, apesar da sua importância para entender o processo criativo de Cayley que culmina na sexta memória.

A sexta memória foi apresentada de forma a detalhar o trabalho de Cayley que culmina

na definição de métrica. Essa memória raramente é explicada, seja na historiografia que cito na introdução da tese, seja em trabalhos matemáticos. Destaco aqui a visão geométrica de Cayley que partiu do modelo da esfera, aliada à noção generalizada de perpendicularidade. Cayley trabalha o caso limite que recai sobre a métrica euclidiana. Com isso, a partir dos resultados da sexta memória, Cayley trabalha métrica para as geometrias projetiva, euclidiana e elíptica. O caso da geometria hiperbólica foi desenvolvido no artigo de 1872. Com isso, a abordagem de Cayley se mostrou possível para as geometrias não euclidianas.

Salmon já atualiza seu *Treatise on conic*, em 1863, adicionando a noção generalizada de perpendicular de Cayley, bem como a definição de “absoluto”, quase quatro anos depois da publicação da sexta memória. O que percebemos é que a recepção britânica se dá rapidamente, conforme apresentaremos no próximo capítulo. Além disso, analisamos essa recepção nos países: França, Alemanha e Itália, indo além da clássica apresentação historiográfica que mostra apenas uma relação entre Cayley e Klein sobre o tema.

Recepção das métricas de Cayley

Inicialmente, a sexta memória sobre os *quantics* causou impacto entre os britânicos, inspirando Clifford em seus trabalhos sobre métricas. Posteriormente, sua influência se estendeu internacionalmente, tornando-se uma das principais fontes de inspiração para Felix Klein em sua classificação das geometrias não euclidianas, que utilizavam métricas. Porém, percebemos que foi muito maior do que apenas esse fato, na verdade as métricas de Cayley foram recebidas na Alemanha por via dos livros de Fiedler, além dos trabalhos publicados no jornal de Crelle. Além disso, circularam nas comunidades francesas e italianas, mesmo antes dos artigos de Klein. Analisaremos a recepção das métricas de Cayley de forma mais abrangente do que normalmente é apresentada, estudando os contextos nacionais e internacionais, que compreendem diversos protagonistas, além de Klein.

Pretendemos responder a algumas questões que nem sempre são plenamente abordadas pela historiografia que já temos citado nesta tese, uma destas é como Klein conheceu a sexta memória sobre os *quantics*? Apesar de muitos falarem que ele se inspirou na sexta memória, nunca vemos uma clara explicação de como isso se deu. Para responder a essa pergunta, partimos dos artigos de Klein sobre as geometrias não euclidianas e constatamos que ele leu a sexta memória a partir da tradução de Fiedler. Além disso, analisamos o jornal de Crelle e verificamos que Cayley publica nesse periódico os seus resultados, incluindo um artigo sobre cônicas onde ele apresenta o conceito de “absoluto”. Nossas pesquisas ampliam o contexto de recepção dessa teoria na Alemanha, o que responde em parte a nossa questão.

Outra coisa que nos interessa é saber como a métrica de Cayley foi recebida na França. Aqui pode-se perceber que Darboux utiliza o que ele chama de “geometria de Cayley”, em seu livro sobre geometria analítica. Também cabe destacar que Darboux e Klein se comunicaram por volta da década de 1870, principalmente no período de estadia de Klein e Lie em Paris. Mas o interesse pelo trabalho de Cayley aparece depois disso e não supomos que Darboux conheceu a sexta memória a partir de sua comunicação com Klein. Para responder a questão, analisamos os periódicos franceses e os trabalhos onde Darboux trata do tema.

Para finalizar a internacionalização de métrica de Cayley, nos perguntamos como os

italianos a receberam. Nossa questão parte do fato de Beltrami apresentar um modelo de geometria não euclidiana, além dessa comunidade ter pessoas envolvidas em pesquisas sobre temas próximos às métricas de Cayley, como Battaglini e Bellavitis. Estudamos o periódico italiano, cujo editor é Battaglini, e encontramos um extenso artigo deste, no volume de 1870, que trata das métricas de Cayley citando diretamente a sexta memória.

Começaremos a tratar da recepção britânica, o que inclui analisar os periódicos e sua relevância na divulgação de trabalhos matemáticos. Trataremos igualmente do papel desempenhado pelos livros de Salmon, além da colaboração de Clifford.

No que diz respeito à recepção de Klein, abordamos não apenas as opiniões de Fiedler expressas em seus livros, mas também destacamos a importância da estadia de Klein em Paris. Além disso, para entender o contexto alemão, realizamos uma análise do jornal do Crelle, a fim de determinar a repercussão dos conceitos relacionados à métrica de Cayley.

Depois apresentamos o contexto francês, analisaremos principalmente Darboux e os periódicos franceses, nos quais Terquem aparece como divulgador da teoria dos invariantes britânica.

O periódico italiano e o papel de Battaglini nos ajuda a completar um panorama mais completo dos principais centros de pesquisa de matemática na Europa daquele período.

Ao final de nossas investigações, pudemos obter uma série de resultados significativos que contribuem para uma melhor compreensão do impacto que a sexta memória sobre os *quantics* teve sobre a produção matemática no continente europeu no período de 1859 a 1880. Tais resultados ampliam nossa visão sobre o contexto histórico e intelectual da época e permitem traçar uma imagem mais clara das consequências dessa obra sobre a matemática europeia.

4.1 As métricas de Cayley e os britânicos

Como temos analisado, a sexta memória sobre os *quantics* possui um papel fundamental ao estabelecer, a partir do espaço projetivo, uma métrica que pode ser levada a um caso limite a métrica euclidiana. Para analisar a repercussão entre os matemáticos britânicos, utilizamos a metodologia conhecida como “rede de textos”, pois é um método que propicia uma análise global sobre como intervêm diversos autores a cerca de um tema comum. Nossa análise consistiu num total de oito periódicos britânicos no período compreendido entre 1859 até 1880.

4.1.1 Como foi a seleção dos textos

Para investigar a recepção da sexta memória sobre os *quantics*, estudamos os periódicos britânicos de 1859, ou seja, aqueles veiculados a partir da publicação da mesma, até 1890, quando a quantidade de artigos relacionados à abordagem de Cayley diminui significativamente.

Cayley foi um matemático extremamente produtivo, daí a necessidade de avaliar não somente um periódico, mas sim vários. Nossa análise considerou os seguintes:

- Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society;
- The Oxford, Cambridge, and Dublin messenger of mathematics;
- Messenger of Mathematics;
- Philosophical Magazine;
- Proceedings of the London Mathematical Society;
- Proceedings of the Royal Irish Academy;
- The Quarterly journal of pure and applied mathematics; e
- Philosophical Transactions of the Royal Society of London.

A seleção dos periódicos considerou todos aqueles nos quais Cayley publicou, e isto é fácil saber, pois basta observar a lista de artigos de Cayley na coletânea das suas obras. Além de publicar nesses periódicos, Cayley possui poucas publicações no *Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society*, que não interessam à construção da nossa rede de textos por não atenderem aos critérios de seleção que serão apresentados a seguir, daí o fato de este ser o único periódico britânico que não consta na nossa lista, apesar de possuir publicações de Cayley. Antes de indicar os critérios de seleção dos textos, faremos uma breve apresentação dos periódicos analisados.

Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society desde 1843 publica trabalhos de pesquisa originais que cobrem toda a gama de matemática pura e aplicada, física teórica e estatística. Todos os ramos da matemática pura são abordados, com destaque para lógica e fundamentos, teoria dos números, álgebra, geometria, topologia algébrica e geométrica, análise clássica e funcional, equações diferenciais, probabilidade e estatística. Com relação à matemática aplicada tem-se: mecânica, física matemática, relatividade e cosmologia. Além disso, inclui o relato das atividades da sociedade, bem como resumos e divulgação de livros, constituindo uma rica fonte historiográfica.

The Oxford, Cambridge, and Dublin messenger of mathematics foi um periódico dirigido por jovens matemáticos das três universidades. Tem início em 1862, e a partir de 1872 passa a se chamar *Messenger of Mathematics*, pois os únicos três editores que continuam eram todos de Cambridge, o que resultou na exclusão das outras universidades no título. Alguns editores migraram para o *Quartely Journal*.

Philosophical Magazine é uma das mais antigas revistas científicas publicadas em inglês. Foi fundada por Alexander Tilloch em 1798; em 1822, Richard Taylor tornou-se editor conjunto, sendo o periódico publicado continuamente por Taylor & Francis.

Proceedings of the London Mathematical Society além de apresentar as atividades da sociedade, foi um ótimo meio de divulgação dos trabalhos de diversos matemáticos. O primeiro editor foi Glaisher e os principais membros são Thomas Archer Hirst, Henry Smith e Arthur Cayley.

Proceedings of the Royal Irish Academy é o jornal da *Royal Irish Academy*, fundada em 1785 para promover o estudo da ciência, literatura educada e antiguidades. Foi conhecido como vários títulos ao longo dos anos. Entre, 1836 e 1866, *Proceedings of the Royal Irish Academy*; entre, 1870 e 1884, *Proceedings of the Royal Irish Academy. Science*; em 1879: *Proceedings of the Royal Irish Academy. Polite Literature and Antiquities*; entre, 1889 e 1901, *Proceedings of the Royal Irish Academy*; e de 1902 até os dias atuais, *Mathematical Proceedings of the Royal Irish Academy*.

The Quarterly journal of pure and applied mathematics foi um periódico de matemática que apareceu pela primeira vez como tal em 1855, mas se trata de uma continuação do *Cambridge Mathematics Journal*, lançado em 1836 e executado em quatro volumes antes de mudar o título para *Cambridge and Dublin Mathematics Journal* por mais nove volumes (estes últimos continham numeração dupla). Os documentos da primeira edição, que continham um prefácio datado de abril de 1855, prometiam edições adicionais em uma programação trimestral em junho, setembro, dezembro e março, e têm datas que remontam a novembro de 1854. O primeiro volume continha outro prefácio datado de janeiro de 1857.

Philosophical Transactions of the Royal Society of London é uma revista científica publicada pela *Royal Society* (Sociedade Real de Londres). Começou a ser publicada em 1665, sendo por isso a publicação científica mais antiga do mundo anglófono, e uma das mais antigas revistas científicas. É ainda a revista que há mais tempo é editada. O uso da palavra *Philosophical* no seu nome é derivada da expressão *natural philosophy* (filosofia natural), que naquele tempo era utilizada para denominar o que hoje chamamos de ciência.

4.1.2 Critérios de seleção dos textos

Definido o conjunto de periódicos e a periodicidade, falta estabelecer os critérios para a seleção dos textos que devem compor a rede.

Esses critérios partiram de dois trabalhos: a sexta memória sobre os *quantics* de Cayley e das definições apresentadas no *Principes de Géométrie Analytique* de Darboux. Numa leitura desses textos percebe-se que há algumas características comuns, que compõem o que Darboux (1917, p.289) chama de “geometria de Cayley”. Darboux considera, inicialmente, as geometrias esféricas e plana, e por projeção, utilizando a razão anarmônica, mostra que é possível estabelecer as noções de ângulo e distância uma forma única, ou seja, que se mantém ao passar da geometria esférica para a plana. Ele afirma: “Nosso objetivo agora é estudar uma geometria devido ao grande geômetra inglês Cayley, e no qual todas as noções métricas são obtidas por um processo uniforme” (DARBOUX, 1917, p.290)¹. Darboux explora em seu livro o pensamento de Cayley, já apresentado nesta tese, que parte da geometria esférica com o objetivo de estabelecer uma métrica que dá conta, inclusive, da métrica euclidiana.

¹ Notre but est d’étudier maintenant une Géométrie due au grand géomètre anglais Cayley, et dans laquelle toutes les notions métriques sont obtenues par un procédé uniforme

Quatro foram os nossos critérios para a seleção dos textos. Primeiro, a utilização de noções de distância e/ou ângulos numa abordagem analítica com uso de coordenadas homogêneas, a partir de princípios da geometria projetiva.

Segundo, a citação direta a uma das memórias sobre os *quantics*, ou a menção do termo *quantic*, acrescido do uso de propriedades geométricas. Consideraram-se também termos relacionados à teoria dos invariantes: “invariante”, “covariante”, “hessiano”, “jacobiano”, “discriminante”, etc., sempre associados a propriedades geométricas.

Terceiro, a utilização dos termos “distância”, “métrica”, “ângulo” e “trigonometria” associados aos métodos analíticos em coordenadas homogêneas ou às geometrias não euclidianas.

Quarto e último, a citação direta dos trabalhos de Felix Klein sobre as geometrias não euclidianas ou sobre as formas binárias.

Para definir o domínio ao qual pertencem os artigos, utilizamos como referência a classificação proposta no site do *Répertoire Bibliographique des Sciences Mathématiques* de LPHS-AHP Nancy; Grenoble (2019), que é uma excelente ferramenta bibliográfica dedicada às fontes matemáticas digitalizadas pela Biblioteca Nacional da França². A classificação adotada por eles parte de três grandes áreas: análise matemática, geometria e matemáticas aplicadas. Nossos artigos se enquadram em análise matemática, na subclassificação **B: determinantes; substituições lineares; eliminação; teoria algébrica das formas; invariantes e covariantes; quatérnios, equipolências e quantidades complexas**. Subitem **B4: Teoria geral dos invariantes e covariantes de uma forma** e ainda mais um subitem **B4f: Teoria, propriedades e formação de émanants, contra variantes, covariantes mistos, évectantes, etc. Interpretações geométricas**. Apesar de o site disponibilizar apenas nove artigos classificados como **B4f**, estes não compõem a nossa rede, pelo fato de os textos de nossa rede pertencerem a periódicos britânicos; conseguimos, no entanto, verificar que esses nove textos são de autores citados na rede. Além disso, identificamos que há, entre os nove artigos disponibilizados, quatro da autoria de Sylvester sobre o tema da nossa rede, publicados nos *Comptes Rendus des Séances de l'Académie des Sciences*. A Tabela 4.1 lista esses artigos.

² Esta classificação é o resultado de uma colaboração entre *Cellule MathDoc*, o Laboratório de Filosofia e História das Ciências (Arquivos H. Poincaré, CNRS / UN2, Nancy) e o BnF, dentro da estrutura do polo BnF / Mathdoc associado.

Autor	Ano	Título	Periódico
Brioschi F.	1854	Intorno ad una proprietà degli invarianti.	Annali di Scienze Matematiche e fisiche. Rome.
Igel B.	1887	Zur Theorie der Combinanten und zur Theorie der Jerrard'schen Transformationen.	Denkschriften der Kais. Akademie der Wissenschaften in Wien. Vienne.
Laguerre E.	1874	Sur l'application de la théorie des formes binaires à la Géométrie plane.	Comptes Rendus des Séances de l'Académie des Sciences. Paris.
Perrin R.	1886	Sur la théorie des réciproquants.	Comptes Rendus des Séances de l'Académie des Sciences. Paris.
Studnicka F.-J.	1880	Sur la représentation indépendante des variantes et rétrovariantes des équations	Casopis pro pěstování matematiky a fysiky. Prague.
Sylvester J.-J.	1864	Sur une extension de la théorie des résultants algébriques.	Comptes Rendus des Séances de l'Académie des Sciences. Paris.
Sylvester J.-J.	1877	Théorie pour trouver le nombre des covariants et des contrevariants d'ordre et de degré donnés, linéairement indépendants, d'un système quelconque de formes simultanées contenant un nombre quelconque de variables.	Comptes Rendus des Séances de l'Académie des Sciences. Paris.
Sylvester J.-J.	1878	Sur les actions mutuelles des formes invariantives dérivées.	Comptes Rendus des Séances de l'Académie des Sciences. Paris.
Sylvester J.-J.	1885	Sur une nouvelle théorie de formes algébriques.	Comptes Rendus des Séances de l'Académie des Sciences. Paris.

Tabela 4.1 – Lista de artigos **B4f** do *Cellule MathDoc*

Nas próximas seções esses artigos encontrarão lugar, principalmente na recepção francesa dos métodos utilizados pelos britânicos.

Ao tratar da “geometria de Cayley”, estamos nos referindo aos trabalhos que conectam as teorias dos polinômios homogêneos - conhecidas como teoria das formas ou teoria dos invariantes - com as propriedades geométricas, tais como tangência, involução, razão dupla, métricas e assim por diante.

Com isso, foram selecionados 51 textos pertencentes ao conjunto de sete periódicos já apresentados, o que resultou nas tabelas veiculadas no Apêndice B desta tese. Na Tabela B.6, temos a quantidade de textos por periódico; nela, constatamos que o periódico que possui mais produções sobre a geometria de Cayley é o *Philosophical Magazine*, com 16 produções. Além disso, percebe-se que 37 desses textos, ou seja, um pouco mais que 70% do total, pertencem a três periódicos apenas, sendo eles: *Philosophical Magazine*, *Philosophical Transactions of the Royal Society of London* e *Proceedings of the London Mathematical Society*. Isso nos mostra que tais periódicos concentram a maior parte dos trabalhos da rede em torno da geometria de Cayley.

4.1.3 Quem são os participantes desta rede

Um total de 17 autores compõe a rede de textos. Na Tabela B.2, há a relação dos autores com a respectiva quantidade de textos publicados sobre o assunto. Fica evidente que Cayley concentra boa parte das publicações, com um total de 19 textos. Depois de Cayley, temos o que denominamos “editores” com 6 textos, que são editores ou secretários responsáveis pelos resumos, relatórios ou notícias dos diversos periódicos. Na terceira posição, um empate no número de publicações entre Robert Tucker e Clifford, ambos com 4 textos. Em seguida Sylvester e Cotterill, com 3 textos, e Hirst com 2 textos. A partir de então, temos 10 autores cada um com 1 texto apenas.



Figura 4.1 – Robert Tucker

Fonte: JOC/EFR April 2019³.

Cabe aqui uma ressalva para explicar o fato de R. Tucker não ter sido classificado como um dos “editores”, mas ter sido analisado em separado, apesar de todos os seus textos serem registros enquanto secretário da *London Mathematical Society*. Uma das justificativas se dá pelo fato de R. Tucker ser também matemático com uma produção de 40 artigos nas revistas britânicas *Proceedings of the London Mathematical Society*, *Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society*, *Messenger of Mathematics* e *Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics*. Também se destaca pela sua proximidade com matemáticos da rede, como: Cayley, Sylvester, Spottiswoode, entre outros. Além disso, é o editor da coletânea de artigos de Clifford, tendo escrito também várias biografias de matemáticos, como: Gauss, Sylvester, Chasles, Spottiswoode e Hirst. Em sua missão de editar as obras de Clifford, por exemplo, ele contou com a assistência de Spottiswoode, Cayley, Henrici e Smith (CLIFFORD, 1882, p.vi). Por esses motivos, esta tese se interessa pela participação de R. Tucker enquanto constituinte da rede de textos, bem como pela sua participação na divulgação dos métodos de Cayley, daí a necessidade de destacá-lo dos demais editores e secretários.

Clifford, por sua vez, assume uma posição de destaque na rede, pois, diferentemente de Tucker, ele contribui com trabalhos originais e não com relatórios apenas.

³ Retirada do site http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/PictDisplay/Tucker_Robert.html, acessado em 25/09/2019.

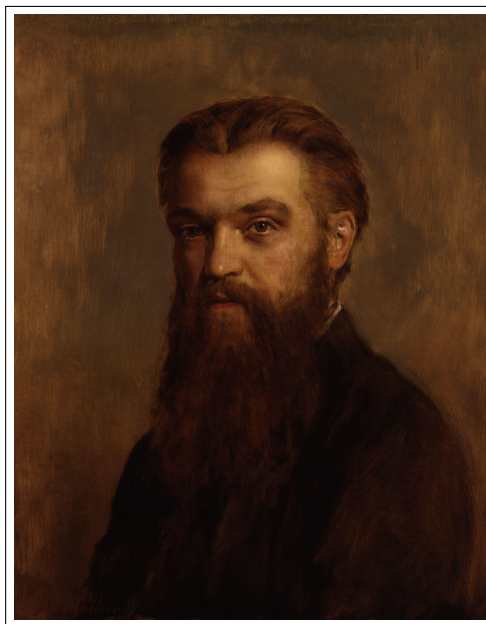


Figura 4.2 – William Kingdon Clifford

Fonte: John Collier⁴.

Seguindo a ordem de número decrescente de produção de textos da Tabela B.2, temos Sylvester e Cotterill. Como já fizemos uma apresentação de Sylvester, cabem aqui algumas informações sobre Thomas Cotterill. Ele foi membro do conselho do *London Mathematical Society*. Segundo Glaisher (1926, p.52), em novembro de 1872, Hirst se torna presidente da Sociedade, quando os vice-presidentes eram Crofton e Spottiswoode; Jenkins e Tucker eram secretários; e como demais membros do conselho figuravam Cayley, Clifford, Cotterill, Harley, Henrici, Merrifield, Smith, Stirling, Walker e o próprio Glaisher.

Cotterill não possui uma biografia, mas podemos extrair algumas informações sobre ele de comentários de contemporâneos, como é o caso de Glaisher, que escreveu sobre matemáticos da sociedade de Londres. Glaisher (1926, p.54) diz que Cotterill foi o terceiro *Wrangler* em 1832 e tornou-se membro do St. John's College em 1834. Além disso, ele foi professor de matemática em uma escola em Brixton, além de preparar alunos para escolas militares. Já no que diz respeito às atividades de Cotterill enquanto membro da Sociedade, Glaisher afirma que a sociedade teve papel fundamental ao aproximar matemáticos “isolados”, como Cotterill, aos de grande inserção na pesquisa matemática, como Cayley, Sylvester, entre outros. A sociedade dava visibilidade aos “trabalhadores isolados” mostrando seus interesses pelo progresso das pesquisas. Ele afirma:

Clifford observou que a Sociedade Matemática “descobriu Cotterill”. Ele parece ter sido bastante desconhecido por seus contemporâneos, mas surpreendeu a todos que o conheceram na Sociedade por seu conhecimento de tantos ramos da matemática e seus desenvolvimentos recentes. Conversas sobre esses assuntos, no Conselho, surgiram principalmente sobre a seleção de árbitros e, nas reuniões da Sociedade, sobre a discussão de artigos, e Cotterill mostrou uma profunda apreciação do trabalho de outros; suas próprias contribuições para as reuniões também sempre foram interessantes.⁵ (GLAISHER, 1926, p.55, Tradução nossa)

⁴ Retirada do site https://en.wikipedia.org/wiki/William_Kingdon_Clifford, acessado em 26/09/2019.

⁵ Clifford remarked that the Mathematical Society “discovered Cotterill”. He seems to have been quite unknown to his contemporaries, but he surprised all who met him at the Society by his knowledge of so many branches of

Mas à frente apresentaremos os artigos de Cotterill que compõem a rede textos, percebe-se que ele estava em sintonia com os desenvolvimentos recentes de pesquisa, conforme Glaisher afirma. Apesar de não encontrarmos uma foto de Cotterill, temos a seguinte descrição de Glaisher (1926, p.62, Tradução nossa): “[...] Jele era um homem grande e usava um par de óculos suspensos sobre os ombros; ele era alegre, e o assunto de seus comentários era sempre divertido”⁶.



Figura 4.3 – Thomas Archer Hirst

Fonte: JOC/EFR April 2019⁷.

Thomas Archer Hirst (1830 - 1892), nasceu em Heckmondwike, Yorkshire, Inglaterra, seus pais vieram de famílias do comércio de lã. No final da adolescência, por iniciativa de Tyndall, Hirst decidiu ir à Alemanha para estudar, inicialmente química. Ele finalmente obteve um doutorado em matemática pela Universidade de Marburg em 1852 (tutor: Friedrich Ludwig Stegmann). Em 1853, participou de palestras de geometria de Jakob Steiner na Universidade de Berlim.

De 1860 a 1864, Hirst ensinou na University College School, mas renunciou porque queria mais tempo para suas pesquisas matemáticas. Foi nomeado professor de física na University College London em 1865 e sucedeu a Augustus de Morgan na cadeira de matemática da UCL em 1867. Ainda na década de 1860, Hirst também dedicou grande parte de seu tempo na Inglaterra aos comitês administrativos da ciência britânica. Ele era um membro ativo dos conselhos de governo da Royal Society, da Associação Britânica para o Avanço da Ciência e da

mathematics and their recent developments. Conversation on such subjects, in the Council, mainly arose on the selection of referees, and, in the Society's meetings, on the discussion of papers, and Cotterill showed a keen appreciation of the work of others; his own contributions to the meetings were also always interesting.

⁶ [...] he was a large man and wore a pair of field-glasses suspended over his shoulders; he was cheerful in manner, and the matter of his remarks was always entertaining.

⁷ Retirada do site <https://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/PictDisplay/Hirst.html>, acessado em 28/09/2019.

London Mathematics Society. Ele foi o presidente dessa sociedade a partir de novembro de 1872, conforme já dissemos na nossa apresentação de Cotterill.

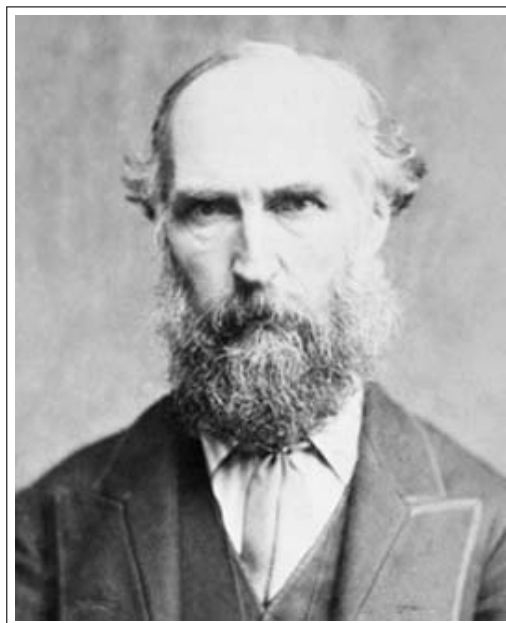


Figura 4.4 – William Spottiswoode

Fonte: JOC/EFR April 2019⁸.

William Spottiswoode (1825 - 1883) estudou no Balliol College, Oxford, se formou em 1846 e obteve seu mestrado em 1848. Ele foi um dos primeiros matemáticos ingleses a publicar trabalhos em revistas continentais e, assim, quebrar a introspecção que se apossava da matemática inglesa por mais de um século. Seu interesse em matemática era amplo, publicou em teoria dos invariantes, geometria e cálculo diferencial. Em 1870 foi presidente da sociedade de Londres.

Ele permaneceu presidente da Royal Society até sua morte. Recebeu os diplomas honorários de LLD em Cambridge, Dublin e Edimburgo, e DCL em Oxford; tornou-se correspondente do Instituto de França (*Académie des Sciences*) para a seção geométrica, depois de uma disputa acirrada com M. Borchardt em 1876. Ele não era apenas matemático e físico, mas também um linguista experiente, possuindo um conhecimento notável dos conhecimentos europeus e línguas orientais. Ele traduziu a literatura judaica do século VIII ao XVIII (1857) do original de Moritz Steinschneider e mergulhou na história da matemática e da astronomia na Índia, lendo fontes originais. Os resultados foram publicados pela *Royal Asiatic Society*.

⁸ Retirada do site <https://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/PictDisplay/Spottiswoode.html>, acessado em 28/09/2019.



Figura 4.5 – Norman Macleod Ferrers

Fonte: Gonville & Caius College, University of Cambridge⁹.

Norman Ferrers era de uma família com boas condições financeiras, então ele teve uma educação privilegiada no Eton College de 1844 a 1846, depois finalizou sua educação pré-universitária, passando um ano morando na casa do matemático Harvey Goodwin, vigário de St Edward's, Cambridge, que lhe deu treinamento particular.

Ferrers ingressou no Gonville e no Caius College, Cambridge, em 6 de março de 1847 e, nos quatro anos seguintes, estudou para as *mathematical tripos*. Ele era um aluno notável e foi *Senior Wrangler*¹⁰ em 1851. Ele também foi o primeiro a receber o prêmio Smith em 1851 e, no ano seguinte, foi eleito membro do Gonville e do Caius College. No entanto, assim como Cayley havia feito alguns anos antes, Ferrers foi a Londres para estudar direito e foi chamado ao tribunal em 1855. Ao contrário de Cayley, ele não praticava direito, mas retornou a Cambridge onde estudou para o sacerdócio. Foi ordenado diácono em 1859 e sacerdote em 1860. Embora Ferrers estivesse estudando para o sacerdócio, pouco depois de retornar a Cambridge, ele recebeu o cargo de professor de matemática, resultante de mudanças na equipe de tutores do Caius College.

Outro fato importante é a presença de matemáticos não britânicos na constituição da rede. Apesar de serem apenas quatro, Faà de Bruno (italiano), Henrici (Olaus M. F. E.- alemão), P. Mansion (belga) e Plücker (alemão), nos ajudam a compreender o processo de internacionalização dos métodos de Cayley. Essa evidência nos permite compará-lo a matemáticos estrangeiros que possuem trabalhos citados, como Plücker, Clebsch, Klein, M. Aronhold, Chasles, Cremona, Grasmann, Hermite, Lobatschewsky e Möbius, veja Tabela B.4.

⁹ Retirada do site <https://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/PictDisplay/Ferrers.html>, acessado em 07/10/2019.

¹⁰ Isso significa que ele foi classificado em primeiro lugar na lista daqueles que receberam os diplomas de primeiro da classe.

4.1.4 Como é a dinâmica da rede

A concentração de textos sobre a “geometria de Cayley” se mostra decrescente conforme nos afastamos da publicação da sexta memória e chegamos próximo ao fim do século XIX, conforme Tabela B.3.

Em sete anos temos quase metade dos textos, e antes de 1871 temos 35 textos, ou seja, a publicação do primeiro artigo de Felix Klein sobre as geometrias não euclidianas teve pouco impacto na comunidade britânica. Como veremos, apenas Clifford cita o trabalho de Klein, além de um comentário no relatório de maio de 1873, no *Proceedings of the London Mathematical Society*, sobre o texto que trata das formas binárias.

O primeiro artigo selecionado é de Cayley, intitulado *On the Double Tangents of a Plane Curve*, publicado no *Philos. Trans. R. Soc.*, em 1859. Trata-se do mesmo volume em que consta a sexta memória sobre os *quantics*. Nesse artigo, Cayley investiga os casos de tangente dupla de curvas planas de *quantics* ternárias. Tangente múltipla era definida conforme Salmon (1852, p.34) como: “[...] retas que tocam a curva em dois ou mais pontos”¹¹, nesse contexto tangente dupla é aquela que toca a curva em dois pontos. Cayley cita os trabalhos de Plücker, *Solution d’une question fondamentale concernant la théorie generale des Courbes* (1834) e *Theorie der algebraischen Curven* (1839), ambos do jornal do Crelle. Além do trabalho de Hesse, *Ueber die Wendepunkte der Curven dritter Ordnung* (1844), também do jornal do Crelle; e ainda, Jacobi, *Beweiss des Satzes, dass eine Curve w-ten Grades im allgemeinen $\frac{1}{2} \cdot n \cdot (n - 2) \cdot (n^2 - 9)$ Doppeltangenten hat* (1844), também a respeito do número de tangentes de uma curva dado o seu grau. Essas citações nos ajudam a entender a dinâmica da pesquisa de Cayley, com destaque a como a geometria algébrica desempenhou um papel importante no trabalho com os *quantics*, que desencadeou nas considerações métricas presentes na sexta memória. Nesse caso, estas citações a Plücker, Hesse e Jacobi testemunham o quanto estas pesquisas eram internacionalizadas.

Além dos matemáticos estrangeiros, verifica-se uma estreita relação entre os trabalhos de Cayley e Salmon, tendo especial relevância o livro de Salmon, *Treatise on the Higher Plane Curves* (1852), citado para tratar de métodos para encontrar os pontos da tangente dupla de uma curva. Para o caso de tangentes a curvas de terceiro grau, Cayley cita o artigo de Salmon *On Curves of the Third Order*, além do artigo *On the Double Tangents to Plane Curves* (1858) do *Philos. Mag.*, que trata do mesmo tema que Cayley desenvolve no artigo de 1859. Apesar desta relação já ser bem explorada pela historiografia, nos interessa pelo fato de mostrar como Salmon participou na constituição do que seria chamado por Darboux de “geometria de Cayley”.

Logo em janeiro de 1859, Cayley submete uma nota intitulada *Note on a theorem in spherical trigonometry* ao *Philos. Mag.*. Como já mostramos em nossa apresentação da sexta memória, a geometria esférica desempenha um papel importante no processo criativo de Cayley ao redigir sobre a métrica no contexto dos *quantics*. Essa nota nos mostra que alguns teoremas da trigonometria esférica faziam parte das investigações de Cayley. Nessa nota, ele faz uma breve

¹¹ [...] lines which touch the curve in two or more points

demonstração do teorema que diz que dado a, b, c serem os lados de um triângulo e A, B, C , seus respectivos ângulos opostos, então valem as relações:

$$\begin{aligned}\sin b \sin c + \cos b \cos c \cos A &= \sin B \sin C - \cos B \cos C \cos a, \\ \sin c \sin a + \cos c \cos a \cos B &= \sin C \sin A - \cos C \cos A \cos b, \text{ e} \\ \sin a \sin b + \cos a \cos b \cos C &= \sin A \sin B - \cos A \cos B \cos c.\end{aligned}$$

No mesmo periódico, no mesmo ano e volume, G. B. Airy possui um artigo que faz observações ao teorema de geometria esférica de Cayley que acabamos de apresentar. Intitulado *The Astronomer Royal's Remarks on Mr. Cayley's Trigonometrical Theorem, and on Professor Challis's Proof that Equations have as many Routs, &c*, é um pequeno artigo com duas partes, uma dedicada ao teorema de Cayley e outra a uma prova apresentada por Challis's. Essas partes não possuem nada em comum. Destaca-se aqui o interesse pelo teorema em trigonometria esférica apresentado por Cayley.

Ainda no mesmo volume do *Philos. Mag.*, há uma notícia sobre a publicação do livro de Salmon, *Lessons Introductory to the Modern Higher Algebra*, que é interessante, pois testemunha a recepção dos trabalhos sobre teoria dos invariantes, com sua aplicação geométrica. O editor começa dizendo que:

Nos últimos dezoito anos, o campo antigo e bem trilhado da Álgebra foi invadido por uma série de novos e estranhos intrusos, com nomes estranhos de “Determinantes”, “Hiperdeterminantes”, “Discriminantes”, “Emanantes”, “Invariants”, “Evectants”, “Bezoutiants”, “Hessians” (sem conexão, no entanto, com “Botas” ou “Cadinhos”), “Canonizants” (sem religião), “Dialytics / e “Quantics”.¹²(BREWSTER et al., 1859, p.67, Tradução nossa)

Os dezoito anos são contados a partir do trabalho sobre transformações lineares de 1841, de George Boole, que é citado nessa notícia como iniciador do que o editor chama de “álgebra de transformações lineares”¹³(BREWSTER et al., 1859, p.67). O editor relata que a partir do artigo de Boole, Cayley descobre que a propriedade de invariância não era peculiar somente às funções apresentadas por Boole, trazendo à luz outras que possuíam essa mesma propriedade. Destaca também a relevância geométrica dessa teoria, dando como exemplos: primeiro, que dada a equação de uma curva ou superfície, pode-se encontrar uma outra equação de curva ou superfície que possui relações permanentes com a primeira, independente da mudança dos eixos coordenados; segundo, que a teoria nos apresenta uma função dos coeficientes da equação dada que quando igualada a zero expressa uma propriedade da curva ou superfície, também independente dos eixos coordenados.

Outro fato interessante a se destacar é que o editor considera que, mesmo para matemáticos experientes que por algum motivo não acompanharam o desenvolvimento da teoria, os textos

¹² Within the last eighteen years the old and well-trodden field of Algebra has been invaded by a host of new and strange intruders, with the odd-sounding names of “Determinants”, “Hyperdeterminants”, “Discriminants”, “Emanants”, “Invariants”, “Evectants”, “Bezoutiants”, “Hessians” (having no connexion, however, with either “Boots” or “Crucibles”), “Canonizants” (of no religion), “Dialytics”, and “Quantics”.

¹³ *Algebra of Linear Transformations*.

com tantos termos/conceitos novos se mostravam “ininteligíveis”. Além de dizer que, no início, não se mostrava um campo de pesquisa frutífero, mas que naquele momento já demonstrava possuir muitos resultados importantes. Daí o editor destacar a importância do livro de Salmon, dizendo que o tema é muito valioso para que seja desconhecido por muitos matemáticos. O editor afirma: “sinto que essas pessoas estarão prontas para receber um guia elementar para este ramo da Álgebra”(BREWSTER et al., 1859, p.68)¹⁴. No final da divulgação do livro, há uma sugestão de leitura para quem deseja aprender sobre o tema:

A partir deste livro do Sr. Salmon, tomado em conjunto com o do Spottiswoode sobre 'Determinantes', e o trabalho de Brioschi (traduzido do italiano para o francês por Combescure), qualquer um pode aprender o suficiente sobre o assunto para qualificá-lo para ler as memórias originais dos Srs. Cayley, Sylvester, etc.¹⁵(BREWSTER et al., 1859, p.68, Tradução nossa)

A pesquisa dos diversos textos que integram a “rede” nos ajudou a elaborar a Tabela B.7 que identifica os diversos autores e suas respectivas obras citadas. Então, pode-se perceber que o livro de Spottiswoode citado acima, intitulado *Elementary Theorems Relating to Determinants* (1851), foi mencionado apenas essa vez na “rede de textos”. O mesmo ocorreu com o livro de Brioschi, *Théorie des Déterminants* (1856). Isso se deve ao fato de serem obras elementares sobre o assunto, como afirma a próprio editor, não sendo trabalhos de primeira linha, como eram os artigos de Cayley ou Sylvester, por exemplo. Mas tais obras testemunham como o tema era ensinado nas universidades britânicas, principalmente pelo fato de os livros de Spottiswoode serem muito utilizados por estudantes. O livro de Brioschi nos remete a um panorama mais geral, pois perpassa muitas fronteiras de países, como Itália, França e Reino Unido. Além disso, identificamos que a tradução francesa é acrescida de um extenso apêndice, com várias notas, sendo as duas últimas dedicadas à teoria dos invariantes de Cayley, Sylvester e Salmon. Nesse contexto, o livro noticiado de Salmon preenche as lacunas existentes no ensino e divulgação do que era chamado de “álgebra moderna”.

No mesmo ano, no *Philos. Trans. R. Soc.*, Cayley publica a sexta memória sobre os *quantis*. Nesse mesmo volume, Cayley publica o artigo, intitulado *On the Conic of Five-pointic Contact at any point of a Plane Curve* (1859), no qual trabalha diversos teoremas geométricos utilizando a álgebra dos *quantics*. Em seu texto, Cayley cita teorias, relacionadas a essa nova álgebra, de Plücker, Steiner e Sylvester, além de citar o livro *Higher Plane Curves*, de Salmon. Esse livro de Salmon é o texto mais citado dentre os artigos de nossa “rede de textos”, conforme registra a Tabela B.7.

O artigo de Cayley analisa as cônicas que passam por cinco pontos consecutivos de uma curva plana. O problema foi investigado por Salmon num artigo anterior, porém Cayley pesquisa o caso mais geral onde a curva é de grau qualquer. Cayley utiliza a notação que já temos

¹⁴ I feel that such persons will be ready to welcome an elementary guide to this branch of Algebra.

¹⁵ From this book of Mr. Salmon, taken in conjunction with Mr. Spottiswoode's on 'Determinants,' and the work of Brioschi (translated from the Italian into French by Combescure), any one may learn enough of the subject to qualify him for reading the original memoirs of Messrs. Cayley, Sylvester, &c.

apresentado, então para representar uma curva de grau “ m ” ele toma a equação $\Upsilon = (*)(X,Y,Z)^m$, a partir da qual encontra a equação da cônica. Não vamos detalhar o extenso processo que Cayley desenvolve para encontrar a equação da cônica, porém percebe-se a todo momento um cuidadoso trabalho que envolve a álgebra dos *quantics* aliada a aspectos geométricos.

Segue um exemplo de um dos teoremas demonstrados por Cayley no artigo em discussão: “A corda comum da cônica de cinco pontos de contato e da cônica polar é a tangente à curva cúbica no ponto tangencial dado”¹⁶ (CAYLEY, 1859b, p.388). Realmente, Cayley, Sylvester e Salmon pesquisaram sobre os casos de contato envolvendo cônicas e curvas planas, que fazem parte das pesquisas dessa chamada “álgebra moderna”.

Seguindo os artigos de nossa rede de textos, em 1860, ainda no *Philos. Trans. R. Soc.*, há um artigo de Salmon, intitulado *On Quaternary Cubics*, que foi comunicado por Cayley e se coloca no contexto das memórias sobre os *quantics*. Salmon afirma:

No livro de memórias a seguir, proponho uma tentativa de enumeração dos invariantes, covariantes e contravariantes de um cúbico quaternário, isto é, de uma função homogênea de terceira ordem com quatro variáveis, que geometricamente representa uma superfície de terceira ordem. Esta memória, então, continuará as memórias de Cayley sobre *Quantics*, em que uma análise semelhante é realizada completamente para *quantics* binários até a quinta ordem e para *quantics* ternários até a terceira ordem.¹⁷ (SALMON, 1860, p.229, Tradução nossa)

Salmon considera esse artigo uma continuação das memórias sobre os *quantics*, além de objetivar encontrar invariantes para o caso dos polinômios homogêneos de quatro variáveis do terceiro grau, ele também situa geometricamente esses polinômios dizendo que são superfícies de terceira ordem. Esse artigo testemunha o quão geométrico era o trabalho com os invariantes.

Uma das propriedades presentes nas quinta e sexta memórias, e que é retomada por Salmon, diz que o determinante dos coeficientes das cônicas, quando igualado a zero, possui um significado geométrico que relaciona essas cônicas.

Outra notícia presente no *Philos. Mag.*, publicada em 1861, aborda o livro *An Elementary Treatise on Trilinear Coordinates, the Method of Reciprocal Polars, and the Theory of Projections*, de N. M. Ferrers. Esse livro trata de vários aspectos importantes para a geometria de Cayley, conforme vamos discutir, começando pelo papel importante no ensino em Cambridge, pois conforme o editor afirma, esse livro “parece especialmente preparado com referência às necessidades dos estudantes da Universidade de Cambridge e será um complemento valioso para os trabalhos atualmente em uso como livros didáticos”¹⁸ (BREWSTER et al., 1861, p.240).

¹⁶ The common chord of the five-pointic conic and the polar conic is the tangent to the cubic at the tangential of the given point.

¹⁷ In the following memoir I propose to make an attempt at an enumeration of the invariants, covariants, and contravariants of a quaternary cubic, that is to say, of a homogeneous function of the third order in four variables, which geometrically represents a surface of the third order. This memoir, then, will be in continuation of Mr. Cayley’s memoirs on *Quantics*, wherein a similar analysis is very completely performed for binary *quantics* as far as the fifth order, and for ternary *quantics* as far as the third order.

¹⁸ it seems especially prepared with reference to the wants of students in the University of Cambridge, and will prove a valuable complement to the works now in use there as text-books.

Lembramos que, abordando o nosso tema, já havia o livro de Salmon, apresentado anteriormente junto à análise de uma notícia do *Philos. Mag.*, além do livro de Todhunter. Pode-se constatar, portanto, o estabelecimento de uma nova disciplina, enquanto a pesquisa sobre o tema avançava nos periódicos britânicos.

O editor destaca que o livro dá conta de muitos termos, como: “coordenadas trilineares”, “razão anarmônica”, “involução”, “polares recíprocos” etc., que permeiam os trabalhos dos matemáticos Sylvester, Salmon, Boole, Spottiswoode e Cayley. No entanto, não há citação ou especificação das obras desses matemáticos no livro, isso reafirma o que temos encontrado na busca dos textos que compõe nossa rede. Ou seja, há uma comunidade de pesquisa em torno do que chamamos de geometria de Cayley.

Ainda nessa mesma edição do *Philos. Mag.*, temos o artigo de Cayley, *On the Curves situate on a Surface of the second Order*, que trata das curvas em superfícies quadráticas; a partir da quádriga $xw - yz = 0$ Cayley explora combinações possíveis com essa superfície, encontrando expressões de curvas pertencentes a esses planos. No final do artigo, Cayley cita o *Die analytische Geometrie der Curven auf den Flächen zweiter Ordnung und Classe* (1847) de Plücker, informação que nos é útil para entender como os métodos dessa abordagem analítica da geometria projetiva se internacionaliza.

Nesse mesmo ano, no *Philos. Trans. R. Soc.*, Cayley publica sua sétima memória sobre os *quantics*. O objetivo dessa memória é investigar a teoria no caso das cúbica ternárias, ou seja, encontrar invariantes, covariantes etc. para *quantics* deste tipo. Apesar dessa memória se concentrar prioritariamente nos processos algébricos envolvidos no cálculo dos invariantes, covariantes, discriminantes etc., há um parágrafo situando algumas expressões a sua respectiva interpretação geométrica, o que demonstra o fato de a teoria dos invariantes praticada pelos britânicos sempre possuir um viés geométrico importante. Antes de observar esses aspectos, é importante destacar que Cayley cita o trabalho de M. Aronhold, *Theorie der homogenen Functionen dritten Grades von drei Veranderlichen* (1858) do jornal de Crelle, além dos artigos de Hermite, *Sur les formes cubiques a trois indeterminees* (1858) do jornal de Liouville, e *Sur la Resolution des equations du quatrieme degre* (1858) nos *Comptes Rendus*.

Cayley apresenta uma tabela que associa à sua simbologia a adotada por M. Aronhold; percebe-se, então, o quão diferentes elas eram, por exemplo: Cayley chama de U a função homogênea, já Aronhold chama de f ; Cayley usa CU para covariante, Aronhold usa P_{sf} . As diversas notações utilizadas realmente dificultam uma primeira leitura dos trabalhos sobre teoria dos invariantes, principalmente por um leitor da atualidade, pois estas notações deixaram de ser adotadas.

Apesar de possuírem diferentes notações, os trabalhos de Cayley e Aronhold são muito próximos. Desde a terceira memória sobre os *quantics*, Cayley cita diversas colaborações deste matemático à teoria dos invariantes. Especificamente na sétima memória, Cayley identifica algumas relações entre diferentes *quantics*, contendo expressões relacionadas a uma cúbica ternária, que são trabalhadas nos artigos já citados de Hermite e Aronhold.

No *Oxf. Camb. Dub. Messenger Math.*, um artigo, intitulado *On Determinants* (1862), publicado por P. G. Tait, que poderia parecer não pertencer à nossa “rede de textos”, possui algumas informações importantes sobre a comunidade britânica associada à “geometria de Cayley”. Primeiro, Tait situa seu artigo no contexto dos livros de Ferrers, *Trilinear Coordinates* e o editor do periódico faz uma nota que situa esse artigo no contexto do livro de Todhunter, *Theory of equations*, principalmente com relação ao capítulo sobre determinantes. O artigo trata do uso dos determinantes envolvendo sistemas compostos de equações homogêneas, se utilizando de reduções e congruências. Ao final do texto, Tait diz que “para desenvolvimentos mais elaborados desta teoria, e suas aplicações à geometria analítica, equações diferenciais da mecânica, etc., referência deve ser feita aos textos de Jacobi, Cayley, Sylvester, Hermite, Salmon, Boole, e Pierce”¹⁹ (TAIT, 1862, p.37).

Ainda em 1862, no *Philos. Trans. R. Soc.*, Cayley publicou o artigo *On the Analytical Theory of the Conic* que trata da decomposição em fatores lineares das quádricas binárias e ternárias. A partir dos casos onde não há quadrados perfeitos, que seriam muito simples, ele apresenta as vantagens de se escrever utilizando os fatores lineares para investigar propriedades das cônicas, como, por exemplo, as tangentes de um ponto, ou os pontos de contato entre duas cônicas. No final, há uma adição posterior, onde Cayley afirma que Spottiswoode possui fórmulas interessantes que relaciona uma cônica e os pontos de intersecção com uma dada reta. Também cita Aronhold.

Já no primeiro volume do *Philos. Mag.* de 1863, alguns artigos pertencem à nossa “rede de textos”. Um deles é o de título *Note on a Theorem relating to a Triangle, Line, and Conic*, onde Cayley apresenta um teorema que relaciona um triângulo, uma reta e uma cônica na geometria projetiva analítica, usando coordenadas e polinômios homogêneos. Ele afirma que, se você tiver um triângulo e uma seção cônica (uma curva definida por uma equação de grau 2), poderá desenhar três retas conectando cada vértice do triângulo a algum ponto na seção cônica. Daí Cayley explora casos particulares onde a seção cônica degenera em duas retas e em uma reta, que cai no caso da cônica inscrita em um triângulo.

Podemos considerar Clifford o segundo matemático mais produtivo da rede, após Cayley, pois, segundo a Tabela B.2, Cayley possui a autoria de 19 textos; os editores, 6; R. Tucker, 4; e Clifford, 4. Então, desconsiderando os editores das revistas, e dado que R. Tucker publicou algumas notícias e não trabalhos originais, podemos considerar Clifford o segundo mais produtivo da rede. Esse fato é importante, destacando que Sylvester aparece logo em seguida com 3 textos, apesar de a historiografia normalmente enfatizar a tríade: Cayley, Sylvester e Salmon, destacaremos a importância de Clifford na divulgação da “geometria de Cayley”.

Primeiro artigo de Clifford de nossa rede de textos, intitulado *On the General Theory of Anharmonics* (1866), foi publicado no *Proc. Lond. Math. Soc.*. Neste artigo, Clifford busca

¹⁹ For the higher developments of this theory, and their applications to Analytical Geometry, the Differential Equations of Mechanics, &c, reference must be made to the writings of Jacobi, Cayley, Sylvester, Hermite, Salmon, Boole, and Pierce.

estabelecer uma teoria geral a partir da noção de distância. Ele inicia apresentando uma expressão que define a relação de ordem numa dada reta. Para facilitar a leitura utilizaremos termos modernos e figuras. Assim sendo, a expressão fica: $\overline{AB} \cdot \overline{CD} + \overline{AC} \cdot \overline{DB} + \overline{AD} \cdot \overline{BC} = 0$, conforme a figura abaixo.

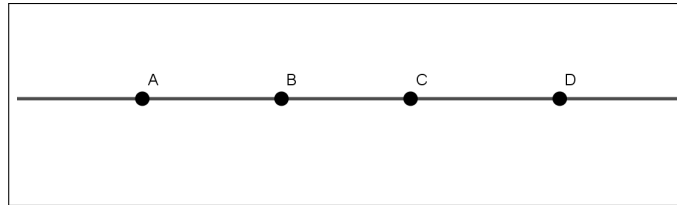


Figura 4.6 – Ilustração reta

Assim, Clifford estabelece uma relação de ordem numa reta, de onde é possível estabelecer as noções de razão harmônica e anarmônica. Ele afirma que essas razões são invariantes sobre projeção ou transformações lineares, além de afirmar que o mesmo ocorre para o caso de quatro retas que se encontram num mesmo ponto, que seria a dualidade em relação aos quatro pontos sobre uma reta.

Ao desenvolver suas ideias acerca das razões, considerando pontos, retas ou planos, o autor sente a necessidade de explicitar sua noção de “distância”. Ele afirma:

É conveniente, para vários propósitos, usar a palavra "distância" como incluindo todas essas noções: assim, falarei da distância de duas linhas em um plano, significando o seno do ângulo entre elas; a distância de três pontos é a área do triângulo; a distância de três linhas retas em um plano, o projetor de seu triângulo; a distância de três planos, o seno dos planos; a distância de três linhas simultâneas no espaço, o seno das linhas.

E terei ocasião depois de definir a distância de quatro pontos e de quatro planos no espaço. Por meio dessas definições, as proposições (i), (ii) podem ser interpretadas de quatro maneiras diferentes, correspondendo aos quatro aspectos da extensão bidimensional: o símbolo 123 sendo sempre entendido como a distância das três coisas consideradas.²⁰ (CLIFFORD, 1866, p.4, Tradução nossa)

Percebe-se que Clifford (1866, p.4) busca definir distância para diversos casos, indicando que pretende uma generalização. Além dos casos já mencionados no trecho citado, ele considera a distância de quatro pontos, na geometria de três dimensões, como sendo o volume do tetraedro formado por esses pontos. A partir daí, ele considera a teoria o uso das razões anarmônicas, que é invariante sobre transformações projetivas, para definir a métrica utilizando a notação de Cayley.

²⁰ It is convenient for several purposes to use the word "distance" as including all these notions: thus I shall speak of the distance of two lines in a plane, meaning the sine of the angle between them; the distance of three points is the area of their triangle; the distance of three straight lines in a plane, the projector of their triangle; the distance of three planes, the sine of the planes; the distance of three concurrent lines in space, the sine of the lines.

And I shall have occasion afterwards to define the distance of four points and of four planes in space. By means of these definitions, the propositions (i-), (ii) may be interpreted in four different ways, corresponding to the four aspects of bi-dimensional extension: the symbol 123 being always understood to mean the distance of the three things considered

Por exemplo, para representar duas quádricas ele usa as letras U e V , e a relação invariante fica representada como $\square(U, V) = 0$.

Como um primeiro artigo no tema, percebe-se que Clifford estava bastante interessado nos métodos analíticos que se utilizavam das razões anarmônicas para definir uma métrica projetiva. Isso se confirma nos próximos trabalhos de Clifford que analisaremos. Continuando no mesmo volume do *Proc. Lond. Math. Soc.*, ele publica o artigo *On a Generalization of the Theory of Polars*, que estabelece a ideia de curva polar de uma dada curva de um certo grau, relacionando a classe. Clifford (1868, p.116) afirma que desejou apresentar essas ideias à Sociedade, porque elas pareciam úteis para outros propósitos além daqueles apresentados no artigo, dizendo que desejava aplicá-los posteriormente, como extensão da análise geométrica de Grasmann. Quem apresentou a leitura de Clifford à Sociedade foi Sylvester que por aquele tempo já havia trabalhado bastante a teoria dos invariantes.

Não há necessidade de detalhar os desenvolvimentos de Clifford, que são bem alinhados ao que já se fazia com Cayley, Sylvester e Salmon. Em linhas gerais, o artigo apresenta as fórmulas analíticas de duas curvas, uma de ordem n e outra de classe m , multiplicando as expressões ele chega a uma nova expressão analítica que ele chama de $c_m B_n$. Desta expressão, ele chega a três considerações possíveis: primeira, se m é menos que n , então $c_m B_n$ é covariante, sendo que Clifford chama de polar da curva de classe m em relação a curva de grau n ; segunda, se m é igual a n , então $c_m B_n$ é um invariante das duas curvas e, quando esta expressão é igual a zero, ele diz que as curvas são harmônicas uma da outra; e por fim, se m é maior que n , então $c_m B_n = 0$ sempre.

Outro fato a ser destacado são as referências de Clifford nesse artigo. Apesar de não citar Cayley, cita Henrici e Salmon. O texto mencionado por Clifford de Henrici é o texto que consta em nossa rede: *On certain formula concerning the Theory of Discriminants; with applications to Discriminants of Discriminants, and to the Theory of Polar Curves*, de 1866. Clifford cita dois teoremas apresentados por Henrici que tratam da relação entre uma curva e sua polar. Clifford cita os seguintes teoremas:

A curva $S^{(m)}$ é o local dos polos das m polares que possuem pontos duplos e é o local dos pontos duplos das $(n - m - 1)$ polares. A curva conjugada $S^{(n-m-1)}$ é o lócus dos pontos duplos das m polares e o lócus dos polos das $(n - m - 1)$ polares com pontos duplos. [...]

As tangentes da curva $S^{(m)}$ são as polares lineares dos pontos na curva conjugada $S^{(n-m-1)}$ em relação às $(m - 1)$ polares dos pontos correspondentes na curva $S^{(m)}$, e esses pontos são os pontos de contato. Eles são ainda as polares lineares dos pontos de contato em relação às $(n - m)$ polares dos pontos correspondentes em $S^{(n-m-1)}$.²¹ (HENRICI, 1866, p.114, p.115, Tradução

²¹ The curve $S^{(m)}$ is the locus of the poles of m^{th} polars which have double points, and it is the locus of the double points of the $(n - m - 1)^{th}$ polars. The conjugate curve $S^{(n-m-1)}$ is the locus of the double points of the m^{th} polars, and the locus of the poles of the $(n - m - 1)^{th}$ polars with double points. [...]

The tangents of the curve $S^{(m)}$ are the linear polars of the points on the conjugate curve $S^{(n-m-1)}$ with respect to the $(m - 1)^{th}$ polars of the corresponding points on the curve $S^{(m)}$, and these points are the points of contact. They are further the linear polars of the points of contact with respect to the $(n - m)^{th}$ polars of the corresponding points on $S^{(n-m-1)}$.

nossa)

Ele utiliza esse trecho, pois investiga o caso onde a polar de C_m em relação a B_n tem um “nó”, dizendo que C_m é harmônico de uma curva de ordem $m(n - m - 1)^2$ que é a curva $S^{(m)}$ de Henrici.

Clifford (1868, p.118) faz referência também ao livro do Salmon, *Higher Algebra*, ao tratar dos invariantes, como o discriminante da cônica.

Um artigo muito importante para entender a recepção dos métodos de Cayley pelos britânicos é de Clifford, *Preliminary Sketch of Biquaternions* de 1873, publicado nos *Proc. Lond. Math. Soc.*. Como apresentaremos, esse é o primeiro artigo que cita a sexta memória sobre os *quantics*, além de citar o trabalho de Klein sobre as geometrias não euclidianas, apresentando a classificação das geometrias para o público inglês. O autor ainda relaciona tudo isso à teoria de Hamilton dos quatérnios.

O artigo se inicia com a definição de vetores por Hamilton. Clifford (1873, p.381) diz que são quantidades possuindo magnitude e direção, porém sem posição definida. Assim sendo, um vetor AB é igual a outro CD quando possuem mesma magnitude, são paralelos e possuem mesmo sentido. Como exemplo, Clifford fala do movimento de translação dos corpos, pois cada partícula do corpo se move em igual direção e sentido, com mesma distância percorrida, se deslocando em linhas paralelas.

Depois ele define o que chama de *rotor*:

O nome vetor pode ser convenientemente associado a uma velocidade de translação, como o tipo mais simples da quantidade denotada por ele. Em analogia a isso, proponho usar o nome rotor (abreviação de rotador) para significar uma quantidade que possui magnitude, direção e posição, cujo tipo mais simples é uma velocidade de rotação em torno de um certo eixo. Um rotor será representado geometricamente por um comprimento proporcional à sua magnitude medida em seu eixo em um determinado sentido. O rotor AB será idêntico a CD se estiverem na mesma linha reta, com o mesmo comprimento e no mesmo sentido; isto é, um vetor pode se mover paralelamente a si mesmo em qualquer direção, mas um rotor somente em sua própria linha.²²(CLIFFORD, 1873, p.381, Tradução nossa)

Clifford (1873, p.386) define um biquatérnio como a razão entre dois quatérnios. Ele faz uma nota comparando sua definição com a de Halmiton, que diz que o biquatérnio é um quatérnio com coeficientes complexos. Ele termina a parte II de seu artigo apresentando as características geométricas de algumas razões, dentre elas destacaremos o quatérnio e o biquatérnio. A respeito do quatérnio, Clifford afirma que representa um vetor no espaço, podendo então representar uma direção no espaço, como as translações. Já o biquatérnio representa um

²² The name vector may be conveniently associated with a velocity of translation, as the simplest type of the quantity denoted by it. In analogy with this, I propose to use the name rotor (short for rotator) to mean a quantity having magnitude, direction, and position, of which the simplest type is a velocity of rotation about a certain axis. A rotor will be geometrically represented by a length proportional to its magnitude measured upon its axis in a certain sense. The rotor AB will be identical with CD if they are in the same straight line, of the same length, and in the same sense; i. e., a vector may move anywise parallel to itself, but a rotor only in its own line.

motor, que define uma forma que ele chama de *screw*, como exemplos apresenta *Twist-Velocity* ou um sistema de forças.

Após esta apresentação dos diversos termos, Clifford (1873, p.387) inicia a parte III de seu artigo apresentando a classificação das geometrias. Ele faz distinção entre a geometria *parabólica*, como Klein chama a geometria euclidiana, e as geometrias elípticas e hiperbólica, dizendo que estas últimas possuem curvatura positiva e negativa, respectivamente. Após isso, ele apresenta o sistema de coordenadas e como ele pode ser definido no espaço projetivo, de forma a poder trabalhar com os elementos: pontos, retas e planos. Essa introdução demonstra que Clifford conhecia bem o que Klein faz em sua obra sobre as geometrias não euclidianas.

Conforme citado por Clifford (1873, p.387), a geometria métrica do espaço é atribuída a Cayley, que é mencionado por sua sexta memória sobre os *quantics*. Clifford descreve essa teoria como baseada nas relações projetivas entre formas geométricas distintas ou nas relações invariantes entre formas algébricas fixas. Essas formas algébricas fixas são chamadas por Clifford e Cayley de “absoluto”. Em outras palavras, Clifford destaca a contribuição de Cayley para a teoria da geometria métrica, especialmente no que diz respeito às relações entre formas geométricas e formas algébricas.

Clifford (1873, p.388) apresenta uma definição particular do “absoluto” em um espaço linear, que é considerada de grande importância. Segundo ele, esse absoluto é aquele em que os pontos pertencem a uma superfície quadrática específica, enquanto as linhas e planos do “absoluto” tangenciam essa superfície ou satisfazem três equações de segundo grau. Clifford destaca que existem apenas três casos possíveis em que o espaço observado pode se enquadrar: geometria elíptica, geometria hiperbólica e geometria parabólica.

Ele apresenta a classificação do espaço, em relação ao “absoluto”, dizendo que na geometria elíptica todos os elementos do “absoluto” são imaginários. Já na geometria hiperbólica, o “absoluto” não contém linhas retas reais e nos rodeia. Nesse caso, pontos reais situados no outro lado da superfície são chamados ideais. Por fim, na geometria parabólica, a superfície degenera em uma cônica imaginária em um plano real. Os pontos do “absoluto” são pontos no plano (real) dessa cônica; as linhas e os planos são as linhas e planos imaginários que se encontram e tocam no cone, respectivamente. Ao apresentar essa classificação, Clifford cita o artigo de Klein de 1871, além de destacar que o segundo caso está associado à geometria de Lobatschewsky e Bolyai.

Clifford (1873, p.388) considera o caso da geometria elíptica durante seu artigo, estabelecendo-o a partir de alguns critérios. O primeiro é o espaço a ser considerado é tal que existe um ponto para cada conjunto de valores das coordenadas x, y, z e um conjunto de valores para cada ponto, sem nenhuma exceção. O segundo, a existência de uma certa superfície quadrática, chamada “absoluto”, cujos pontos e planos tangentes são imaginários, isso para definir a métrica. Então, se uma reta passar por dois pontos a, b ela encontra o absoluto em i, j , e a quantidade:

$$\frac{ab \cdot ij}{\sqrt{(ai \cdot aj \cdot bi \cdot bj)}} \equiv \overline{ab},$$

que é uma função das relações anarmônicas e, portanto, invariável, Clifford chama de *força* dos pontos a, b em relação um ao outro ou de qualquer um em relação ao outro. A distância desses dois pontos é um ângulo θ tal que:

$$\sin \theta = \overline{ab}.$$

Além dessas características, Clifford (1873, p.388) considera que, se dois pontos são conjugados em relação ao “absoluto”, eles estão separados por um ângulo reto; se duas linhas ou planos são conjugados em relação ao “absoluto”, então são perpendiculares entre si. Assim, todos os pontos que estão a uma distância de um ângulo reto de um ponto dado estão situados em seu plano polar em relação ao “absoluto”, e todos os planos que passam por ele cortam esse plano polar em ângulos retos. Toda linha tem uma linha polar em relação ao “absoluto”, de modo que todo ponto na linha polar está a uma distância de um ângulo reto de cada ponto na linha, e toda linha que é perpendicular a uma outra intersecta a outra. A partir de um ponto arbitrário, é possível desenhar uma linha perpendicular a um determinado plano, ou seja, a linha que liga o ponto ao polo do plano. No entanto, se o ponto for o polo do plano, todas as linhas que passam por ele serão perpendiculares ao plano. Da mesma forma, a partir de um ponto que não esteja na polar de uma linha especificada, pode ser desenhada uma e apenas uma linha perpendicular àquela linha, ou seja, a linha que atravessa o ponto e atende à linha especificada e sua polar. Todas essas considerações geométricas são semelhantes às que Cayley apresenta em suas quintas e sextas memórias sobre os *quantics*.

Outra característica utilizada por Clifford diz que duas linhas podem ser traçadas de forma que cada uma encontre duas linhas dadas em ângulos retos, e estas são polares uma da outra. Clifford chama essas linhas de paralelas, pois compara com as propriedades das retas paralelas no caso da geometria euclidiana. Como última característica, ele afirma que a velocidade de torção de um corpo rígido deve ser considerada como tendo dois eixos, justificando pelo fato do movimento de translação ao longo de qualquer eixo ser o mesmo que uma rotação em torno do eixo polar e vice-versa. Depois de indicar essas características, ele se encaminha à última parte de seu artigo, onde relaciona as propriedades da geometria métrica à teoria dos biquaternions.

Outro fato a ser destacado é que Clifford cita nesse texto um artigo de Klein e Lie que foi publicado no mesmo volume do *Math. Annalen* que o artigo sobre as geometrias não euclidianas de 1871. Trata-se de um tipo de transformação do “absoluto” nele mesmo de forma a deixar dois geradores invariantes.

Não vamos esgotar a apresentação desse belo artigo, mas cabe destacar o quanto Clifford estava ciente das implicações geométricas presentes na sexta memória sobre os *quantics*, além de conhecer o trabalho de Klein sobre as geometrias não euclidianas. Também estava consciente da relação existente entre a teoria dos quaternions e as geometrias não euclidianas.

Pode-se encontrar a divulgação de trabalhos de Klein sobre o tema das transformações lineares, como ocorre no *Proc. Lond. Math. Soc.* que, na edição de 1873, divulgou a publicação do artigo *Ueber eine Klasse binärer Formen*. Quanto à divulgação do trabalho de Klein sobre as geometrias não euclidianas, restam apenas Clifford e Cayley, conforme já temos apresentado

nesta tese.

P. Mansion publicou pequenos artigos sobre resultados geométricos utilizando coordenadas homogêneas, no periódico *Messenger Math.*, volume 5, de 1876, que mostram o quanto esse estudo era presente na comunidade matemática britânica. Num dos artigos, intitulado *Trilinear Coordinates of the Circular Points at Infinity*, Mansion (1876, p.159) apresenta a expressão que dá como resultado as coordenadas dos pontos circulares ao infinito. Além disso, ele cita como referência a essa expressão o livro de Salmon, *Higher Plane Curves*, de 1876.

Bruno (1877, p.185) publicou no *Q. J. Math.* de 1877 um resumo de seu livro *Théorie des Formes binaires* que pretendia fazer um apanhado dos trabalhos de Cayley, Sylvester, Hermite, Brioschi, Clebsch, Gordan, entre outros autores, sobre o que era chamado “teoria das formas binárias”. Ele considerou necessário fazer esse trabalho, pois julgou difícil para um aluno ler diretamente os trabalhos originais destes matemáticos. No resumo, ele considera os aspectos geométricos, e afirma o objetivo: “[. . .], para que o aluno possa estudar os assuntos sem recorrer às memórias originais e, ao mesmo tempo, ler as difíceis obras dos geômetras que não poderiam ser expostas em um tratado elementar”²³ (BRUNO, 1877, p.185, Tradução nossa).

Este livro de Faà de Bruno foi citado por Sylvester, em seu artigo *Proof of the hitherto undemonstrated Fundamental Theorem of Invariants*, de 1878, publicado no *Philos. Mag.*. Ao tratar do teorema ainda não demonstrado, Sylvester cita em nota de rodapé um trecho, também de uma nota, do livro de Faà de Bruno que fala sobre as condições deste teorema fundamental, dizendo que nem sempre seriam válidas com os resultados de pesquisas de Gordan sobre o número de covariantes das formas de quinto e sexto grau. Interessante é que Sylvester diz ter percebido essa nota através de Halsted, que era membro da Universidade Johns Hopkins, e o questionou sobre esta relação. Não desenvolveremos os passos da demonstração de Sylvester, apenas destacaremos a importância do livro de Faà de Bruno na divulgação dos métodos envolvidos na teoria dos invariantes praticada pelos britânicos.

Ainda no *Philos. Mag.*, agora no primeiro número de 1879, os editores divulgam o lançamento da revista de matemática americana *American Journal of Mathematics*, cujo editor chefe é Sylvester. Diz que o objetivo dos editores era que o periódico contivesse artigos originais de matemáticos americanos ou estrangeiros. Destacou-se o fato de a publicação ter sido concebida em primeira instância como um meio de comunicação entre matemáticos americanos, embora tenham deixado claro que suas páginas estariam sempre abertas a contribuições do exterior. Seu objetivo principal é a publicação de investigações originais; mas, além disso, eram inseridos resumos concisos de assuntos pelos quais havia interesse especial, além de avisos, revisões críticas e bibliográficas e revisões das publicações matemáticas recentes mais importantes.

O conteúdo do primeiro volume é apresentado de forma sucinta, indicando a presença de diversos artigos originais de americanos. Além disso, é dado destaque à apresentação bibliográfica

²³ [. . .] de sorte que l'élève puisse étudier lui même les matières sans avoir recours aux mémoires originaux, et en même temps se frayer le chemin à la lecture des travaux plus difficiles des Geometres qu'on ne pourrait pas exposer dans un traité élémentaire.

de título: “Bibliografia de Geometria Hiperespacial e Não-Euclidiana”, escrita por Halster, e também ao artigo que tratava da aplicação da nova teoria atômica do professor Sylvester à representação gráfica dos invariantes e covariantes de *quantics* binários. Ou seja, pode-se perceber que Sylvester animava bastante as publicações deste periódico, como já seria de se esperar.

Outro fato destacado foi quanto à forma da obra: era utilizado em bom papel, em um tipo claro e com impressão *in-quarto*²⁴. Essa última circunstância aumentará bastante as despesas da publicação; e como talvez não fossem esperados muitos assinantes, os riscos quanto ao custo mais elevado eram garantidos pelos curadores da Universidade Johns Hopkins.

Continuando a discutir divulgações nos periódicos britânicos de literatura que possuem importantes resultados, Tucker relata no *Messenger Math.*, volume 11 de 1882, que Cayley fez a leitura do artigo *A theorem in Spherical Trigonometry* e, após isso, fez algumas observações sobre o artigo póstumo de Clifford, intitulado *On the Theory of Distances*. Este artigo de Clifford é muito importante para esta tese, uma vez que é o primeiro trabalho a citar a sexta memória sobre os *quantics* e a teoria das distâncias de Cayley.

Último trabalho que consta em nossa lista é o resumo apresentado por Cayley de seu artigo *Non-Euclidean Geometry*. Esse resumo consta no *Math. Proc. Camb. Philos. Soc.*, volume 7 de 1890. Cayley afirma que quando o absoluto é $x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = 0$ as fórmulas obtidas podem ser consideradas pertencentes ao espaço elíptico, ou seja, estamos trabalhando nesta geometria. Porém, ele afirma que parte da métrica na geometria euclidiana e que a modificação foi realizada na noção de distância, o que leva a outras formas de interpretar as propriedades geométricas, como, por exemplo, a quantidade de retas paralelas a uma dada reta.

4.1.5 Clifford e sua contribuição a teoria das distâncias

Clifford apresentou uma comunicação no encontro da associação britânica de 1869, intitulado *On the theory of distances*, sendo publicado, naquele ano, apenas o resumo. Tucker em sua missão de reunir as obras de Clifford, reorganiza os manuscritos do autor da seguinte forma: coloca o título conforme a comunicação de Clifford e conforme o resumo da comunicação apresentada por ele em 1869, depois inicia com o manuscrito que Clifford apresentou no encontro (chamado de conteúdo preliminar, na época entregue a Henrici), após isto, reproduz o artigo póstumo reunido por Tucker e, por fim, insere o resumo publicado em 1869. Ou seja, o artigo póstumo possui uma boa parte que desconhecemos a data, inscrito da página 134 à 157 da coletânea das obras de Clifford.

Apesar de não sabermos a data de elaboração da parte subsequente do artigo, podemos supor que foi escrito entre 1869 e 1871, provavelmente antes da publicação dos artigos de Felix Klein, pois, apesar de ele fazer uso da razão anarmônica para definir a métrica, não faz referência

²⁴ Comiserao uma folha de impressão que era dividida em quatro partes. Isso encarecia muito, em compensação teria um jornal de folhas mais amplas.

ao artigo de 1871 de Klein. A primeira vez que Clifford cita esse artigo ocorre em seu trabalho sobre os biquaternions de que já tratamos.

4.2 Fiedler e as métricas

Otto Wilhelm Fiedler (1832 – 1912) graduou-se na de Escola Superior de Artes e ofícios de Chemnitz em 1849. No período de 1853 a 1864, dedicou-se à sua tese de doutorado em geometria, período sobre o qual se empenhou na leitura de diversos livros, estudando matemáticos, como Michel Chasles, Gabriel Lamé, Jean Claude Barré de Saint-Venant, Jean-Victor Poncelet, Jakob Steiner, Julius Plücker, Karl von Staudt, George Salmon, Arthur Cayley, e James Joseph Sylvester. Trabalhou na tradução de algumas obras, dentre as quais destacamos seus livros de 1860 e 1862, que são traduções dos de Salmon, porém com acréscimos autorais, além da inclusão de resultados de outros matemáticos britânicos, como Cayley ou Sylvester.



Figura 4.7 – Otto Wilhelm Fiedler

Fonte: Wikipédia²⁵.

Fiedler possui um papel importantíssimo na divulgação dos trabalhos de matemáticos britânicos, especialmente das obras de Salmon e Cayley, que foram traduzidas a partir de 1859. Os livros de Salmon, *Section conic* e *Modern Algebra*, foram traduzidos nos livros de Fiedler, *Analytische Geometrie der Kegelschnitte mit Besonderer Berücksichtigung der Neuren Methoden Von George Salmon* de 1860 e *Die Elenente der Neueren Geometrie und der álgebra der Binären Formen* de 1862, respectivamente. O de 1860 teve mais de uma edição, destacando-se uma de 1866. Ambos os livros tratam de apresentar a teoria das formas algébricas praticadas pelos britânicos, que tinha um viés geométrico muito forte, relacionando a teoria dos invariantes à

²⁵ Retirada do site https://pt.wikipedia.org/wiki/Wilhelm_Fiedler, acessado em 03/03/2022.

geometria projetiva. Estão presentes nesses livros diversas citações de artigos de Cayley e uma seção inteira para a sexta memória no livro de 1862. Na edição de 1866, há uma apresentação da métrica de Cayley inspirada na sexta memória.

Já temos dito que estes trabalhos de Fiedler são importantes para entender a divulgação das métricas de Cayley. Isso pelo fato de Klein citar esses trabalhos em seu artigo de 1871 sobre as geometrias não euclidianas. Um fato curioso é que na versão resumida, que foi publicada rapidamente no *Bulletin*, Klein cita a edição de 1860 e não a de 1866 do primeiro livro, além do livro de 1862 em que consta apresentação da sexta memória. Já no trabalho completo de 1871, ele faz referência à edição de 1866 e não à de 1860. Provavelmente atualizou para a edição mais moderna quando publicou o texto inteiro. Fato é que esse livros foram importantes para a compreensão de Klein acerca dos trabalhos britânicos sobre a teoria dos invariantes e especificamente sobre a sexta memória.

Fiedler (1866) dedica boa parte do conteúdo a uma livre tradução do *Treatise on Conic Sections*, de George Salmon, de 1855. Por se tratar de uma livre tradução²⁶, pode-se perceber que Fiedler acrescentou muitos outros aspectos à obra inicial de Salmon, incluindo observações acerca de seu outro livro: *Lessons Introductory to the Modern Higher Algebra*, de 1859. Já no trabalho de 1862, Fiedler além de tratar da obra de Salmon, apresenta a tradução e comentários acerca dos resultados principais da sexta memória sobre os *quantics* de Cayley.

Pode-se afirmar que, em uma primeira leitura, Klein tomou conhecimento da sexta memória através dos livros de Fiedler. No entanto, não é possível determinar se e quando ele leu o texto original de Cayley. Independentemente disso, o papel de Fiedler foi fundamental no processo de recepção das obras dos matemáticos britânicos na teoria dos invariantes.

Uma tradução do título do primeiro livro pode ser: “Geometria analítica das seções cônicas, com consideração especial dos métodos mais novos de George Salmon, sob a participação do autor e editado para o alemão por Wilhelm Fiedler”. Ou seja, o título já nos diz que não se trata apenas de uma tradução, além do papel de Fiedler não ser apenas de editor, mas sim de um colaborador, uma vez que se insere na autoria da obra alemã. Realmente, Salmon e Fiedler possuíam uma boa relação, uma vez que Salmon agradece a colaboração de Fiedler no prefácio de um de seus livros.

Neste primeiro livro, Fiedler não trata da sexta memória sobre os *quantics*, nem de métrica, ele segue o conteúdo de Salmon e acrescenta vários resultados que os britânicos encontraram na relação álgebra de polinômios homogêneos e propriedades geométricas sobre as cônicas. O livro seria indispensável para uma compreensão ampla desses temas para um leitor alemão, que não tivesse contato constante com a produção matemática britânica.

²⁶ Os dois trabalhos de Fiedler são, respectivamente, traduções livres dos livros de Salmons, *Conic Sections* e *Modern Algebra*. É importante destacar que por “tradução livre” entendemos que Fiedler trouxe o conteúdo dos livros de Salmon para o público alemão. No entanto, Fiedler foi além disso, compilando os principais resultados dos britânicos sobre o assunto e adicionando notas explicativas de sua autoria. Isso diferencia completamente seu trabalho de uma simples tradução.

4.2.1 Livro de 1862

Quanto ao livro de 1862, numa tradução direta, o título poderia ser: “Os elementos da nova geometria e da álgebra das formas binárias, uma contribuição para a introdução da álgebra das transformações lineares de Dr. Wilhelm Fiedler”. Aqui nem há menção ao nome de Salmon, justamente porque esse livro é muito maior que o livro de Salmon sobre a álgebra moderna, na realidade traz os principais trabalhos que relacionam álgebra dos polinômios homogêneos e geometria.

Página 217, Fiedler começa a tratar da sexta memória. De início, diz que os fundamentos gerais da nova geometria foram demonstrados a partir da teoria algébrica das formas binárias, então, para completar essa informação, a demonstração da origem analítica das relações métricas pode ser acrescentada. Para isso, Fiedler vê a necessidade de referir-se à geometria de duas dimensões ou às formas ternárias; com isso, estabelece-se os fundamentos da teoria geral da métrica no espaço. Em nota de rodapé, ele diz que Cayley apresentou esta teoria, citando a sexta memória sobre os *quantics*.

Fiedler começa considerando a forma binária $ax^2 + 2bxy + cy^2 = 0$, que representa dois pontos I e J. Sendo dois pontos A e B da reta projetiva, em involução com I e J, ele afirma que as raízes da equação:

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + (lx + my)^2 = 0$$

determinam um outro par de pontos $X(x,y)$ e $X''(x'',y'')$, em involução com os dois outros pares (I,J) e (A,B), a involução deixando fixos os pontos A e B, e enviando I em J, e J em I. O ponto B pode ser definido pela equação $lx + my = 0$, o segundo ponto fixo A é deduzido pelo fato de que os pares (I,J) e (A,B) formam uma divisão harmônica.

Depois, o autor apresenta a equação $xy' - x'y = 0$ com sendo a do eixo de inscrição e $axx' + b(xy' + x'y) + cyy' = 0$ que representa o centro de inscrição. Assim, ele chega às expressões:

$$(ax^2 + 2bxy + cy^2)(ax'^2 + 2bx'y' + cy'^2)\cos^2\theta - [axx' + b(xy' + x'y) + cyy']^2 = 0,$$

$$(ax^2 + 2bxy + cy^2)(ax'^2 + 2bx'y' + cy'^2)\sin^2\theta - (ac - b^2)(xy' - x'y)^2 = 0$$

seguindo exatamente os passos tomados por Cayley em sua sexta memória. De igual forma, mostra que a expressão da distância obedece à lei fundamental $AB + BC = AC$. Além de dizer que quando $xy' - x'y = 0$ os pontos (x,y) e (x',y') são coincidentes. Além do fato de que quando $axx' + b(xy' + x'y) + cyy' = 0$, então $\theta = \frac{\pi}{2}$, pois na expressão do cosseno o numerador seria anulado, e os pontos (x,y) e (x',y') são conjugados harmônicos em relação ao absoluto. Ele finaliza o trecho que trata da distância na reta, apresentando o caso onde o absoluto é um par de pontos coincidentes, da mesma forma que fez Cayley. Nesse caso, a unidade não fica determinada pelo fato da involução ficar indeterminada, daí a unidade também não é fixa, pois foi definida a partir do caso onde tem-se $\theta = \frac{\pi}{2}$, que Cayley chama de *quadrant*²⁷.

²⁷ Fiedler usa o termo *quadrantal*.

Fiedler segue a proposta de Cayley, apresentando a parte da teoria da distância, usando a mesma ordem e linguagem algébrica da sexta memória. Fiedler retrata integralmente a visão geométrica de Cayley, segundo a qual o par de pontos do “absoluto” é um círculo, ou seja, possui a mesma distância em relação ao centro de inscrição (página 219). Com isso, dado o par de pontos do círculo e o centro, o outro ponto fica determinado pela involução. Assim, as expressões do arco-cosseno e arco-seno representam um sistema métrico, respeitando a propriedade fundamental da distância.

Após isto, Fiedler trata da geometria de duas dimensões. Pode-se perceber que a tradução de Fiedler daria ao leitor alemão condições totais de seguir o desenvolvimento de Cayley.

4.3 A estadia de Felix Klein em Paris

No primeiro semestre 1870, Felix Klein e Sophus Lie se encontram em Paris, Rowe (1989, p.210) destaca que por este período eles se familiarizaram com os trabalhos de matemáticos franceses, tais como: Michel Chasles, Camille Jordan e Gaston Darboux. Nesse período, Jordan havia recentemente publicado seu *Traité des substitutions et des équations algébriques*.

Darboux desempenhou um papel importante na vivência de Klein e Lie com a matemática francesa. Eles trabalhavam num mesmo tema, nomeado a teoria das *W-curves*, publicado nos *Comptes rendus* da academia de Paris. Em julho, a guerra interrompe a permanência destes matemáticos na França, forçando Klein a retornar à Alemanha. Desse período na França, Rowe destaca o fato que Lie e Klein leram sobre teoria dos grupos presente no tratado de Jordan, Lie se dedicando ao estudo dos grupos contínuos e Klein aos descontínuos. Como confirma Rowe (1989, p.211): “Klein estava certamente ciente das aplicações da teoria dos grupos feitas por Jordan à geometria bem antes de sua chegada a Paris, e não há razão para acreditar que ele ou Lie realmente estudaram o *Traité* de Jordan, aquele ‘livro com sete selos’, em detalhes.”

Hawkins (1989, p.287) afirma que o conceito de grupo foi fundamental nos trabalhos de Klein no início de 1871, e fica nítida a influência do trabalho de Jordan sobre a noção de grupo presente em Klein.

Eles estavam plenamente conscientes de que o que estavam fazendo era análogo à teoria das substituições e equações algébricas (teoria de Galois), para as quais a referência padrão era a obra *Traité des substitutions* de Jordan [1870], uma obra a que se referiam [1871: 233n.1], e que parece ter impressionado Klein.²⁸ (HAWKINS, 1989, p.287, Tradução nossa)

Realmente, quando Klein trata de grupo das transformações em seu artigo de 1871, ele o faz seguindo uma abordagem muito próxima à de Jordan. Por exemplo, a classificação destes grupos no texto de Klein de 1871 segue muito próxima àquela de Jordan, como veremos a seguir.

²⁸ They were fully aware that what they were doing was analogous to the theory of substitutions and algebraic equations (Galois’ theory), for which by now the standard reference was Jordan’s *Traité des substitutions* [1870], a work to which they referred [1871:233n.1], and which seems to have impressed Klein.

4.4 O artigo de 1871 de Felix Klein

Klein (1871b) expõe suas considerações acerca da classificação das geometrias não euclidianas num artigo intitulado *Über die sogenannte nichteuklidische Geometrie* (Sobre as chamadas geometrias não euclidianas), publicado no *Mathematische Annalen de Göttingen*, em 30 de agosto de 1871.

Klein aborda o problema numa perspectiva diferente da de Cayley. Enquanto Cayley estudava apenas aspectos analíticos ligados à teoria das formas quadráticas no quadro das coordenadas homogêneas, Klein realiza uma síntese dos trabalhos de Gauss, Lobatchevski, Bolyai que deram uma axiomática das geometrias não euclidianas (o termo é de Gauss) e dos trabalhos de Riemann (1867), Helmholtz, Beltrami (1868-1869). Dez anos após a memória de Cayley, a questão da interpretação das geometrias não euclidianas está em parte resolvida pelos artigos de Beltrami que fornecem os primeiros modelos da geometria que Klein chama de hiperbólica. O propósito de Klein consiste em mostrar como se pode construir modelos das diferentes geometrias a partir de um modelo analítico da geometria projetiva. Klein encontra um quadro que relaciona os trabalhos de autores já citados com a sexta Memória de Cayley.

Mas Klein explica por que sua abordagem é mais geral que a de Cayley, afirmando:

Para Cayley, o objetivo é demonstrar que a geometria métrica usual (euclidiana) pode ser apresentada como um caso especial de geometria projetiva. Para este propósito ele estabelece a métrica projetiva geral e então mostra que de suas fórmulas procedem às fórmulas da geometria métrica usual, quando a superfície fundamental degenera em uma dada seção cônica, o círculo imaginário ao infinito. Em nosso estudo, pelo contrário, é uma questão de apresentar tão claramente quanto possível o conteúdo geométrico da métrica geral de Cayley e de reconhecer não somente como ela nos fornece uma particularização apropriadamente escolhida da geometria métrica euclidiana, mas também, e acima de tudo, que tem as mesmas relações com as várias geometrias métricas que derivam das várias teorias das paralelas.²⁹ (KLEIN, 1871b, p.574, Tradução nossa)

Podemos notar que Klein expande o escopo do estudo de Cayley. Enquanto Cayley apresenta uma expressão para a distância de um plano elíptico, mostrando que o caso da geometria euclidiana é um caso limite e não abordando outras geometrias nesse artigo, Klein tem um objetivo diferente. Ele pretende fundamentar o conceito de distância de uma maneira distinta, o que será apresentado a seguir.

²⁹ Bei Cayley handelt es sich darum, nachzuweisen, dass die gewöhnliche (Euklidische) Massgeometrie als ein besonderer Theil der projectivischen Geometrie aufgefasst werden kann. Zu diesem Zwecke stellt er die allgemeine projectivische Massbestimmung auf und zeigt sodann, dass aus ihren Formeln die Formeln der gewöhnlichen Massgeometrie hervorgehen, wenn die fundamentale Fläche in einen bestimmten Kegelschnitt, den unendlich fernen imaginären Kreis, degenerirt. Hier dagegen handelt es sich darum, den geometrischen Inhalt der allgemeinen Cayley'schen Massbestimmung möglichst deutlich darzulegen und zu erkennen, nicht nur, wie sie durch eine geeignete Particularisation die Euklidische: Massgeometrie ergibt, sondern wesentlich, dass sie in ganz derselben Beziehung zu den verschiedenen Massgeometrien steht, die sich den genannten Parallelentheorien anschliessen.

4.4.1 Definição da métrica sobre a reta projetiva

Klein apresenta a métrica para a reta projetiva já na primeira parte de seu texto:

Para determinar a distância de dois pontos, suponho que eles se ligam por uma reta. Esta corta a superfície fundamental em dois outros pontos que, com os dois pontos dados, formam certa razão anarmônica. O produto do logaritmo desta razão anarmônica por uma constante c , uma vez escolhida, é o que eu chamo de distância de pontos.³⁰ (KLEIN, 1871b, p.574, Tradução nossa)

O importante é como Felix Klein chega a tal definição. Depois de ter lembrado as propriedades elementares de distância sobre uma reta, procura todas as transformações projetivas (Klein as chama de transformações lineares) que podem deixar invariante uma distância entre dois pontos. Há dois tipos de tais transformações, segundo o número de pontos fixos. Estuda o primeiro caso em que uma transformação tem dois pontos fixos que ele chama de elementos fundamentais. Num mapa afim da reta projetiva, podemos escolher $z = 0$ e $z = \infty$ como os dois elementos fundamentais. Para conseguir um referencial da reta, apenas precisa de outro ponto que ele nota z_1 . A expressão analítica de tal transformação é logo $z' = \lambda z$. Assim, fixado o elemento z_1 , consegue uma escala em partes iguais da reta: $z_1, \lambda z_1, \lambda^2 z_1, \lambda^3 z_1$, etc. O intervalo entre $z_1, \lambda z_1$, pode ser dividido em n partes, o primeiro passo sendo $z_1, \lambda^{\frac{1}{n}} z_1$. Assim o p -ésimo passo sendo limitado por $\lambda^{\frac{p}{n}} z_1$. Enfim, considerando que um número real é limite de uma sequência de racionais, chega a relacionar qualquer ponto da reta z em relação à z_1 , a certo número real α tal que, $z = \lambda^\alpha z_1$. A distância entre esses dois pontos é dada pelo número $\alpha = \ln \frac{z}{z_1} / \ln \lambda = c \ln \frac{z}{z_1}$. A constante c depende do elemento unidade escolhido z_1 . Assim a expressão geral da distância entre dois pontos z e z' é $c \cdot \log(z/z')$, a razão z/z' sendo a razão anarmônica dos pontos, $z, z', \infty, 0$.

Klein destaca que a expressão da distância respeita a relação fundamental, ou seja, tomando $z, z' e z''$, temos: $c \cdot \log(z/z'') = c \cdot \log(z/z') + c \cdot \log(z'/z'')$. Além da distância de um elemento a ele mesmo ser igual a zero: $c \cdot \log(z/z) = 0$.

Klein mostra que a expressão da distância recobre aquela de Cayley. Para isso, ele considera que a expressão geral: $\Omega = ax_1^2 + 2bx_1x_2 + cx_2^2 = 0$.

Ele utiliza as coordenadas de dois pontos x_1, x_2 e y_1, y_2 , e os seguintes simbolismos, para as substituições na expressão de Ω :

$$\Omega_{XX} = ax_1^2 + 2bx_1x_2 + cx_2^2, \Omega_{YY} = ay_1^2 + 2by_1y_2 + cy_2^2, \Omega_{XY} = ax_1y_1 + b(x_1y_2 + x_2y_1) + cx_2y_2.$$

Exprime a razão anarmônica de dois pontos (x_1, x_2) e (y_1, y_2) da maneira seguinte:

$$\frac{\Omega_{XY} + \sqrt{\Omega_{XY}^2 - \Omega_{XX}\Omega_{YY}}}{\Omega_{XY} - \sqrt{\Omega_{XY}^2 - \Omega_{XX}\Omega_{YY}}},$$

³⁰ Um die Entfernung zweier Punkte zu bestimmen, denke ich mir dieselben durch eine gerade Linie verbunden. Dieselbe schneidet die Fundamentalfläche in 2 weiteren Punkten, welche mit den beiden gegebenen ein gewisses Doppelverhältniss besitzen. Den mit einer willkürlichen, aber fest gewählten Constante c multiplicirten. Logarithmus dieses Doppelverhältnisses bezeichne ich als die Entfernung der beiden Punkte.

e o logaritmo por:

$$c \cdot \log \frac{\Omega_{XY} + \sqrt{\Omega_{XY}^2 - \Omega_{XX}\Omega_{YY}}}{\Omega_{XY} - \sqrt{\Omega_{XY}^2 - \Omega_{XX}\Omega_{YY}}}.$$

Utilizando a identidade:

$$c \cdot \log a = 2ic \cdot \arccos \frac{a+1}{2\sqrt{a}},$$

Klein encontra a expressão de Cayley, a menos da constante que deve ser substituída por $c = i/2$:

$$2ic \cdot \arccos \frac{\Omega_{XY}}{\sqrt{\Omega_{XX}\Omega_{YY}}}.$$

Essa expressão geral da distância, segundo Klein, envolve dois casos, conforme os pontos fixos da transformação são ambos reais ou ambos imaginários. No primeiro caso, temos uma distância definida entre os dois pontos reais, (métrica hiperbólica), no segundo, uma métrica elíptica.

O caso da transformação onde o ponto fixo é duplo, que envolve a métrica euclidiana, é tratado por Klein do mesmo modo que Cayley, passando a expressão para o caso limite.

4.4.2 Métrica no plano projetivo

Klein apresenta a métrica no plano utilizando a escolha de uma cônica fundamental, a absoluta de Cayley. No caso de uma cônica não degenerada, toda reta encontra esta cônica em dois pontos reais ou imaginários, e a definição da distância segue, considerando, sobre a reta, os dois pontos iguais, respectivamente, a escolher $z = 0$ e $z = \infty$. Chega também, assim como Cayley, a uma expressão dual para a distância (ângulo) de duas retas. No caso em que a cônica fundamental é degenerada, leva a geometria chamada parabólica, ou seja, a distância euclidiana.

4.4.3 Curvatura gaussiana

Um dos aspectos talvez mais interessantes do artigo de Klein é a relação entre a curvatura da superfície escolhida e a constante c da expressão, que é:

$$d(z, z') = c \cdot \log(z/z').$$

Mostra que a curvatura gaussiana da superfície é igual a:

$$K = -1/4c^2.$$

Com esta perspectiva, Klein faz a síntese dos trabalhos de Cayley de um lado e, por outro lado, recupera a memória de Riemann sobre os fundamentos da geometria, e os artigos de Beltrami. A compreensão da conexão entre geometria diferencial e as geometrias não euclidianas se torna completa.

A independência entre a geometria projetiva e a teoria das paralelas também fica clara. Klein acaba o seu artigo com uma observação importante: devido aos trabalhos de Von Staudt, o conceito de razão anarmônica é independente da teoria das paralelas. Assim, a geometria projetiva é a mãe das geometrias não euclidianas.

4.5 Recepção italiana

Logo no primeiro volume do *Giornale di Matematiche*, pode-se observar uma sequência de artigos que tratam dos seguintes temas: teoria das formas, coordenadas homogêneas e teoria dos invariantes. Battaglini publica praticamente em todos esses temas, seu primeiro artigo nesse periódico, por exemplo, trata da teoria das formas, *Teoria Elementare delle Forme Geometriche*, de 1863, que, além de extenso, mostra o interesse do editor em divulgar relações como: razão anarmônica, involução, transformações lineares, etc.. Outros escreveram sobre estes temas, como G. Janni com o *Teorica del Contravarianti, Degl'Invarianti e De'Covarianti* que é longo, possui continuação, e apresenta a teoria a partir do livro de Salmon sobre as seções cônicas. Analisamos essa publicação até o volume 18, e percebemos que os temas continuam sendo explorados, acrescentado-se as geometrias não euclidianas, principalmente por Battaglini.

Para abordar brevemente a recepção das métricas de Cayley pelos italianos na segunda metade do século XIX, precisamos falar das contribuições de Giuseppe Battaglini (1826 - 1894). Conhecido por seu trabalho em geometria não-euclidiana e por ser um dos fundadores do *Giornale di Matematiche*, periódico importante na divulgação da matemática na Itália, ele foi editor nos primeiros anos desta publicação. Nesse período, era professor de geometria superior na Universidade de Nápoles. Seu livro sobre geometria não-euclidiana foi publicado em 1867, apresentando a teoria a partir da obra de Lobachevsky. Ele se empenhou em trazer o conhecimento sobre as geometrias não-euclidianas para a Itália, incluindo traduções das obras Pangeometria de Lobachevsky e Apêndice de Bolyai, que foram publicadas no jornal italiano em 1867 e 1868, respectivamente; além dos artigos sobre formas binárias, de que vamos falar mais a frente, onde está presente a métrica de Cayley.

Nossa pesquisa se concentrou no *Giornale di matematiche* no período de 1870 até 1880. A escolha do periódico se justifica pelo simples fato de ser o principal meio de divulgação de matemática da Itália daquele tempo. Logo, tudo que foi relevante para os matemáticos desse país passou necessariamente por essa revista. O período que escolhemos inicia em 1870, por duas razões: primeiro, por ser o ano em que começam a surgir pesquisas sobre as métricas de Cayley, segundo, por se aproximar das publicações de Klein sobre as geometrias não euclidianas. Nossa pesquisa vai até 1880, pois após isso as teorias de Cayley e Klein já estavam bastante estabelecidas no continente europeu e nossa pesquisa se limita às primeiras impressões destas.

Quando pesquisamos sobre a recepção dos italianos das métricas de Cayley, encontramos o artigo sobre as formas ternárias de Battaglini, de 1870, publicado no *Giornale di Matematiche*. Battaglini, editor do jornal, que escreveu não apenas artigos sobre o tema, mas também artigos

sobre as geometrias não euclidianas. Pelo fato de o artigo de 1870 ser bem significativo e anterior ao artigo sobre as geometrias não euclidianas de Klein, julgamos importante verificar a comunidade italiana.

Autor	Título	Referência	Por que tem relação com as métricas de Cayley?
Battaglini	Sulle Forme Ternarie Quadratiche	1870, v. 8, p. 38	Cita a sexta memória e apresenta a métrica de Cayley, apesar da notação ser ligeiramente diferente da de Cayley.
Battaglini	Sulle Forme Ternarie Quadratiche	1870, v. 8, p. 129	Continuação do artigo, apresenta casos onde o absoluto é imaginário.
E. D'Ovidio	Nota Su' Punti, Plani e Rette in Coordinate Omogenee	1870, v. 8, p. 241	Trabalha em coordenadas homogêneas e é citado no artigo de 1873 sobre métricas.
E. D'Ovidio	Alcune Relazioni Fra le Mutue Distanze di Piu' Punti	1871, v. 9, p. 211	Cita trabalho de Cayley sobre a distância de cinco pontos no espaço. D'Ovidio cita no trabalho de 1873.
Beltrami	Del Moto Geometrico di un Solido che Ruzzola Sopra un Altro Solido	1872, v. 10, p. 103	Ao tratar de formas quadráticas e o jacobiano, cita quinta memória sobre os quantic e Teoria das formas de Clebsch.
E. D'Ovidio	Sulle Relazioni Metriche in Coordinate Omogenee	1873, v. 11, p. 197	Trata das métricas em coordenadas homogêneas, cita Cayley, Klein, Plücker, dentre outros.
Battaglini	Intorno Alle Opere di Alfredo Clebsch	1874, v. 12, p. 29	Trata de aspectos geométricos ligados a teoria dos invariantes, citando Sylvester, Cayley e Salmon e a contribuição de Clebsch.
Battaglini	Nota sul Rapporto Anarmonico Sezionale e Tangenziale delle Coniche	1874, v. 12, p. 193	Apresentação da razão anarmônica de forma analítica.
Battaglini	Nota sui circoli' nella Geometria Non-euclidea	1874, v. 12, p. 213	Trata de apresentar casos onde o absoluto é real, imaginário ou degenerado no estilo de Cayley.
Valeriano Valeriani	Soluzione Analitica delle Equazioni Biquadratiche Complete	1875, v. 13, p. 99	Cita diversas obras relacionadas a métrica de Cayley: livro de Fiedler, artigo de Battaglini, livro de Salmon, dentre outros.
S. Günther	Sulla Possibilità di dimostrare l'assioma delle parallele mediante considerazioni stereometriche complemento alla geometria assoluta di Bolyai	1876, v. 14, p. 97	Cita a sexta memória sobre os quantic, Felix Klein e a geometria não euclidiana, dentre outros.
Giulio Pittarelli	Sul Significato Geometrico delle Ueberschiebungen nelle Forme Binarie	1879, v. 17, p. 160	Cita Cayley, Clebsch, Gordan, Battaglini sobre o tema das formas binárias.
Ettore Ricordi	I Circoli nella Geometria Non Euclidea	1880, v. 18, p. 255	Se inspira nos artigos de Battaglini, cita Klein. Apesar de não citar Cayley, usa termos como absoluto e formas algébricas similares a da sexta memória.

Tabela 4.2 – Lista de artigos do *Giornale di Matematiche*

O artigo de Battaglini, de duas partes sobre as formas ternárias, é um dos primeiros trabalhos fora dos periódicos britânicos a citar a sexta memória e a explorar seu conteúdo, incluindo a noção de “absoluto”. Infelizmente, não conseguimos relacionar este artigo ao trabalho de Klein sobre as geometrias não euclidianas. Em seus artigos Klein, não cita este trabalho de Battaglini, somente trabalhos anteriores. Apesar de parecer não ter repercussão exterior à Itália, o artigo de Battaglini testemunha a circulação do trabalho de Cayley, daí a importância de ser destacado nesta tese. Como editor da revista, Battaglini acaba influenciando os assuntos que são considerados importantes de serem investigados por aqueles que compõe a comunidade de publicadores deste jornal, como constata as várias referências a Cayley e à “álgebra geométrica” dos polinômios homogêneos presente no periódico.

4.6 Repercussão nos periódicos franceses

Os desenvolvimentos britânicos acerca da teoria dos invariantes e da álgebra geométrica envolvida no período ecoam nos periódicos franceses a partir da década de 1850. Analisaremos alguns artigos que nos indicam uma recepção desses métodos, além das contribuições francesas nos *Nouvelles Annales de Mathématiques*, nos *Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure* e no *Bulletin des Sciences Mathématiques*. No apêndice C encontra-se uma tabela com os artigos de que trataremos aqui.

Cada periódico traz consigo uma relevância particular, por conta dos públicos específicos que são atingidos pelas publicações. Por exemplo, os *Nouvelles Annales* possui como público os candidatos às escolas Politécnica e Normal Superior. Já o *Bulletin* é para um público já especializado, com mais experiência nas pesquisas acadêmicas. Começaremos uma análise dos

Nouvelles Annales, pois além de representarem o contexto de formação dos futuros alunos das escolas superiores francesas, trazem um esforço particular de Terquem em divulgar a teoria dos invariantes na França. Em seguida, analisaremos um artigo dos *Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure*, uma vez que não encontramos nesse periódico muitos resultados referentes ao tema em discussão. Por fim, tratamos do *Bulletin des Sciences Mathématiques*, que nos abre oportunidade de falar de Gaston Darboux, divulgador dos desenvolvimentos de Cayley em seus livros, como veremos mais a diante.

Um dos primeiros artigos franceses a apresentar as coordenadas homogêneas foi publicado por Terquem em seu jornal, no ano de 1849, artigo de título *Théorèmes d'homogénéité*. Terquem inicia creditando a Otto Hesse a representação em coordenadas homogêneas, no plano e no espaço.

Em 1859, Terquem divulga a teoria dos invariantes na tradição dos britânicos no seu artigo *Notions élémentaires sur les invariants, covariants, discriminants et hyperdéterminants*. Na introdução, ele diz que as denominações do título são conceitos chaves da “nova análise e da nova geometria”. Terquem diz que esses novos ramos trabalham sobre as “formas”, logo constituem uma “teoria das formas”, utilizando também o termo “morfologia”. Ou seja, ele faz questão de iniciar o artigo destacando a estreita relação entre teoria dos invariantes e a representação algébrica/geométrica destes. Ele enfatiza que esta relação abre a ciência para um espaço de “horizontes desconhecidos”. Então, os trabalhos dos ingleses neste tema são apresentados como inovadores e detentores de um forte carácter geométrico, conforme temos apresentado.

Na introdução de Terquem, é feita uma menção bem intrigante sobre a forma como ele escreve o artigo, por vezes repetindo alguns conceitos para se tornarem mais acessíveis. E numa frase bem distinta diz: “Eu só peço que leiam bem; pois admito que não sei escrever para quem não quer ler”³¹ (TERQUEM, 1859, p.250, Tradução nossa). Essa parece ser uma resposta um pouco “malcriada”, mas lembremos que a teoria dos invariantes era por vezes vista como de difícil entendimento, pois possuía uma terminologia extensa e nova. Então, nos parece que Terquem joga a responsabilidade para o leitor de buscar compreender os detalhes apresentados no artigo.

Ainda na introdução, Terquem diz que a teoria é apresentada segundo “a última obra de G. Salmon”, que pelo ano de 1859 tratou-se do livro *Lessons introductory to the modern higher algebra*, onde Salmon sintetiza o que será conhecido como teoria dos invariantes. Interessante destacar que Terquem afirma não haver editores na França daquele período para divulgar essa publicação, ou seja, não havia interesse em publicar os resultados apresentados por Salmon até então. Ele usa esse argumento para justificar a publicação do artigo. Interessante destacar que a publicação de traduções francesas dos livros de Salmon são mais tardias, comparadas com a Itália por exemplo, que possuía a tradução deste livro feita por Bellavitis já em 1861.

Pela tabela do apêndice C, vemos que Terquem possui mais trabalhos, depois Darboux a

³¹ Je demande seulement qu'on veuille bien lire; car j'avoue ne pas savoir écrire pour ceux qui ne veulent pas lire.

partir da década de 1870. Destacamos que Hirst publica nos *Nouvelles Annales* um artigo sobre transformação quadrática. Combescure publica nos *Annales Scientifiques de l'École Normal* sobre as formas quadráticas.

No *Bulletin* de 1870, a partir da página 220, aparece uma divulgação do artigo de Battaglini, do jornal de matemática italiano, que cita a sexta memória, que já apresentamos ao tratar da recepção italiana. O editor do *Bulletin* faz um extenso resumo ao apresentar esse trabalho de Battaglini, falando da sexta memória e da sua importância ao estabelecer métrica por método analítico, a partir do trabalho com os *quantics*. Isso reforça que o trabalho sobre as métricas de Cayley já era amplamente divulgado tanto na França quanto na Itália. O *Bulletin* tem Darboux como um dos editores e ele também participa de forma relevante da recepção das métricas de Cayley.

4.7 Darboux e as métricas de Cayley-Klein

Para entender a recepção da métrica de Cayley-Klein na França não se pode deixar de analisar o papel das obras de Jean Gaston Darboux, que muito contribuiu para o desenvolvimento da geometria no século XIX.

4.7.1 Jean Gaston Darboux (1842 - 1917)

Darboux nasceu em Nîmes, catorze de agosto de 1842, e faleceu em Paris, vinte e três de fevereiro de 1917. Darboux inicia seus estudos no Lycée de Nîmes, depois de prestar um exame para se habilitar as ciências, ele continua seus estudos no Lycée de Montpellier, já se especializando em matemática.



Figura 4.8 – Jean-Gaston Darboux

Fonte: J. Colomb-Gérard³².

Charles Berger, professor que lecionava lições especiais de matemática preparando os alunos para o concurso de entrada a École Polytechnique ou École Normale, aconselha Darboux indicando as leituras e estudos de textos científicos.

Berger em 1858 compila um manual, *Leçons sur les séries*, a partir das suas aulas em Montpellier. Em 1859 ele publica o livro *Théorie Élémentaire des Séries*, que reproduz o manual de 1858 com novos desenvolvimentos. No *avertissement* de seu livro, Berger afirma que foram separados os principais teoremas ligados às séries, pois suas lições buscavam trazer os principais resultados de várias obras. Ele justifica dizendo que ter todas essas obras disponíveis para estudo não era tão fácil naquele período, o que explica a necessidade de seu livro para as classes especiais de matemática.

Em 1861, Darboux se apresenta nas duas escolas, École Normale e École Polytechnique. Darboux escolhe a École Normale, cujo Diretor era Pasteur.

Alguns de seus professores na École Normale foram: Bertrand, Puiseux e Briot, dentre os quais Bertrand exerceu maior influência. A primeira publicação de um artigo de Darboux sobre as superfícies ortogonais foi nos *Annales Scientifiques de l'École Normale* em 1865, um tema que se tornaria o de sua tese de doutorado de 1866.

Em 1867, Darboux foi nomeado *professeur de mathématiques spéciales* no Lycée Louis-le-Grand, sucedendo a Bouquet.

4.7.2 *Bulletin des sciences mathématiques*

No primeiro volume, em 1872, Clebsch (1872a) escreveu uma notícia bibliográfica sobre o seu livro, *Theorie der binären algebraischen Formen* (1872), que trata dos assuntos correlatos aos artigos de Clebsch citados em nossa rede de textos. Este livro cita Cayley, Sylvester e Salmon, como importantes matemáticos que contribuíram com o que ele chamava de “teoria das formas”. Clebsch destaca o carácter geométrico da teoria, citando as memórias sobre os *quantics*. Na segunda seção do seu livro ele afirma:

Apresento agora uma interpretação geométrica da qual as formas binárias, assim como os invariantes e covariantes que são capazes e importantes por causa de sua relação com a geometria analítica [...] Uma ordem binária de ordem n , igual a zero, apresenta, como vimos no início, uma equação do enésimo grau, na qual x_1/x_2 é o desconhecido e, portanto, fornece n valores dessa razão. Se pensarmos agora em uma linha reta, em que cada ponto representa um valor dessa relação, uma forma binária é, em certa medida, considerada a expressão analítica do complexo dos n pontos dados pela equação correspondente.³³(CLEBSCH, 1872b, p.44, Tradução nossa)

³² Ernest Lebon's book Gaston Darboux, published by Gauthier-Villars in 1910. Retirada do site <https://commons.wikimedia.org>, acessado em 22/10/2019.

³³ Ich werde jetzt eine geometrische Interpretation darlegen, deren die binären Formen, sowie die dabei auftretenden Invarianten und Covarianten fähig sind, und welche sowohl wegen ihres Zusammenhanges mit der analytischen Geometrie [...] Eine binäre Form n^{ter} Ordnung, gleich Null gesetzt, stellt, wie schon im Eingange bemerkt ist, eine Gleichung n^{ten} Grades vor, in welcher x_1/x_2 die Unbekannte ist und welche also n Werthe dieses Verhältnisses liefert. Denken wir uns nun eine Gerade, deren jeder Punkt einen Werth dieses Verhältnisses repräsentirt, so ist eine binäre Form gewissermassen als der analytische Ausdruck des Complexes der n Punkte zu betrachten, welche durch die entsprechende Gleichung gegeben sind.

Clebsch (1872b, p.44) inicia a seção, como fica claro na citação acima, estabelecendo a relação existente entre os polinômios homogêneos de grau n com a sua respectiva interpretação geométrica. Essa abordagem é idêntica à empregada por Cayley, Sylvester e Salmon. Inclusive Clebsch faz uma nota no início da seção onde cita as memórias sobre os *quantics*, especificamente a quinta memória, e o livro de Fiedler (1862) para a relação entre as substituições lineares com a razão dupla. Destacamos que Fiedler (1862) foi citado também por Felix Klein em seus artigos sobre as geometrias não euclidianas, pois Fiedler traduz para o alemão as seções cônicas de Salmon, além de traduzir a sexta memória sobre os *quantics*. Ou seja, o livro de Clebsch é de suma importância para a compreensão de como os métodos analíticos/geométricos de Cayley foram recebidos pela comunidade matemática internacional.

Retornando à notícia apresentada ao *Bulletin* sobre este livro, podem-se fazer algumas perguntas: primeiro, por que a notícia foi escrita pelo próprio autor e não pelos editores? Segundo, qual o interesse em se publicar uma notícia tão longa, total de onze páginas, neste periódico? Para responder à primeira pergunta, podemos pensar que o tema não era do conhecimento de Darboux, nem de Hoel. O problema desta resposta é que Darboux escreveu sobre a “geometria de Cayley” em seu livro de 1873 sobre as curvas e superfícies algébricas. Houel, por ser um grande divulgador das principais obras de matemática, fazendo diversas traduções, provavelmente já conhecia os trabalhos dos britânicos. Provavelmente, a resposta seria de que os editores privilegiaram o tema, colocando a notícia do próprio autor do livro, no intuito de enriquecer o debate sobre os novos aspectos algébricos/geométricos presentes no livro de Clebsch, bem como sobre os métodos dos demais matemáticos citados por ele. Isso já responde, pelo menos parcialmente, à segunda pergunta, ou seja, o tema era do interesse de Darboux e Hoüel.

No mesmo volume do *Bulletin*, os editores divulgaram o livro de Heger, sobre geometria analítica em coordenadas homogêneas, também de 1872. Eles afirmam que as coordenadas homogêneas foram “introduzidas na geometria analítica por Möibus, Plücker, Hesse, Cayley, Salmon, etc.”³⁴ (DARBOUX G.; HOÜEL, 1872, p.257). Afirmam também que já havia muitos tratados contendo exposições satisfatórias em coordenadas homogêneas, citando os trabalhos de Salmon, Fiedler, Briot, Price e Painvin. Para os editores elas contêm o desenvolvimento das fórmulas mais essenciais dessa importante teoria, destacando, porém, que ainda assim o nascimento de novas coordenadas não era tão difundido quanto se desejava. Eles elogiam dizendo que o livro reúne e exhibe de maneira simples, as propriedades mais essenciais das coordenadas trilineares, feixe tangencial, harmônico, quadrilateral completo, colinearidade no plano e no espaço. Além de afirmarem que o estudo dos sistemas de coordenadas pontual e tangencial é realizado simultaneamente.

Os editores citam as seguintes obras para ilustrar os primeiros trabalhos didáticos nos quais esse desenvolvimento paralelo dos sistemas de coordenadas pontual e tangencial foi utilizado pela primeira vez: a geometria superior e as seções cônicas de M. Chasles; além de M. Hesse, em seu *Vorlesungen aus der analytischen Geometrie des Raumes*; e M. Painvin, em seus *Principes*

³⁴ Introduites en Géométrie analytique par Möbius, Plücker, Hesse, Cayley, Salmon, etc..

de la Géométrie analytique. Ou seja, Darboux e Höüel tinham um domínio bem extenso sobre o tema, citando obras de diversos matemáticos, franceses ou de outras nacionalidades.

Ainda no mesmo volume do *Bulletin*, Darboux publicou duas, das três partes, do seu artigo *Sur une méthode nouvelle pour l'étude des courbes traces sur les surfaces algébriques*. O interessante é que este artigo mostra que Darboux conhecia bem o que fazia Cayley, pois cita diversas vezes os trabalhos de Cayley que utilizavam coordenadas homogêneas para tratar aspectos geométricos.

4.7.3 Darboux (1873)

Nosso propósito não é fazer a história das superfícies ortogonais, projeto já realizado por Croizat (2016), e sim destacar o uso de métricas não euclidianas por Darboux. Com isso, examinamos como Darboux aplica e desenvolve ideias em torno de superfícies não euclidianas e revelamos como ele estava consciente dos trabalhos de Klein e Cayley sobre as métricas não euclidianas.

O que é interessante é que até 1870, segundo Croizat, Darboux duvida ainda do interesse das métricas não euclidianas, destacando-se a comunicação de Darboux com Höüel e Beltrami (CROIZAT, 2016). Höüel traduz os trabalhos de Beltrami e Riemann, estando Darboux ciente dessas obras que tratam de superfícies não euclidianas.

Darboux propõe, em sua obra, estudar as superfícies de quarta ordem às quais ele chama de *cyclides*, sendo aquelas que possuem uma cônica dupla especial – o círculo do infinito. Ele faz também um estudo das curvas nomeadas por ele *cycliques*, tendo estas os pontos ao infinito sobre o círculo, ou as curvas esféricas que resultam da intersecção da esfera com uma superfície do segundo grau. Neste caso, o *cyclique* é esférico de quarta ordem e o círculo diretor de segunda ordem.

Na primeira parte, Darboux estuda a transformação por *rayons vecteurs reciproques*, dos focos e das focais. Na segunda parte, ele estuda os *cycliques* planos e esféricos. A terceira parte é dedicada ao estudo dos imaginários. Ele apresenta uma nova forma de demonstrar as propriedades métricas focais das cônicas a partir de uma proposição de Chasles – *Traité des Sections coniques*. Nas duas últimas partes, ele se dedica ao estudo analítico e geométrico das superfícies *cyclides* e do sistema triplo ortogonal que se pode formar com estas superfícies com a métrica de Cayley. Darboux desenvolve os princípios de Cayley em duas notas – a nota IV e V – relacionando-os com princípios e propriedades que ele aplica às superfícies de quarta ordem por ele trabalhadas.

No início do primeiro capítulo, Darboux apresenta a transformação por *rayons vecteurs reciproques*, sendo dadas as expressões:

$$X = \frac{k^2 x}{x^2 + y^2}, Y = \frac{k^2 y}{x^2 + y^2},$$

sendo x, y, X, Y as coordenadas dos pontos correspondentes. Darboux apresenta a forma

complexa da transformação:

$$X + Yi = \frac{k^2}{x-yi}, X - Y = \frac{k^4}{x+yi},$$

Como se pode constatar, esta transformação ocorre na geometria de inversão que num espaço n -dimensional, sendo dada uma esfera de raio r , a inversão na esfera é dada por:

$$X \mapsto \frac{r^2 x_i}{\sum_j x_j^2}.$$

A geometria de inversão preserva a dupla razão, pois sendo dados quatro pontos x, y, z, w , a dupla razão é um invariante sobre uma inversão. Logo, utilizando uma métrica baseada na dupla razão, uma inversão preserva as distâncias e os ângulos. Esta propriedade é fundamental no trabalho de Darboux com transformações por *rayons vecteurs reciproques*.

Darboux apresenta diversas características dos *cyclides* e *cycliques*, mostrando casos onde a transformação opera com *cyclides* de mesmo foco, dentre outros casos particulares, onde ocorre ortogonalidade.

A partir da terceira parte, onde são tratadas propriedades imaginárias em geometria, Darboux desenvolve a seguinte relação métrica:

$$e^{2i(\widehat{PMQ})} = \frac{(u-a)(v-\beta')}{(u-a')(v-\beta)} = \left(\frac{MP'}{MQ'} \right)^2, \text{ que, após extrair a raiz quadrada, fica:}$$

$$e^{i(\widehat{PMQ})} = \left(\frac{MP'}{MQ'} \right). \text{ (DARBOUX, 1873, p.63)}$$

A relação apresentada acima permite determinar o ângulo $\widehat{PMQ}$ e pode ser expressa como o logaritmo da razão anarmônica das quatro retas MA, MB, MI e MJ . Essa abordagem, que utiliza o logaritmo da razão dupla, é conhecida como a métrica de Klein e foi desenvolvida em sua obra sobre geometrias não euclidianas.

A expressão de uma métrica partindo do logaritmo da razão anarmônica foi enunciada de certa forma por Laguerre (1853, p. 64), que em seu estudo sobre a teoria dos focos apresenta o seguinte problema:

Problema. Um sistema de ângulos A, B, C , etc., situado num plano, que estão relacionados por uma equação qualquer $F(A, B, C, \dots) = 0$, encontre a relação que relaciona os ângulos correspondentes A', B', C' , etc., quando se transforma a figura homograficamente.³⁵ (LAGUERRE-VERLY, 1853, p.64, Tradução nossa)

Laguerre apresenta a seguinte relação, sem nenhuma demonstração:

$$F\left(\frac{\log a}{2\sqrt{-1}}, \frac{\log b}{2\sqrt{-1}}, \frac{\log c}{2\sqrt{-1}}\right) = 0.$$

Ou seja, o ângulo A' , sendo “a” a razão anarmônica fica:

³⁵ Problème. Un système d'angles A, B, C , etc., situés dans un plan, étant liés par une équation quelconque $F(A, B, C, \dots) = 0$, trouver la relation qui lie les angles correspondants A', B', C' , etc., quand on transforme la figure homographiquement.

$$A' = \frac{\log a}{2\sqrt{-1}}.$$

Darboux faz menção a Laguerre-Verly (1853) e a Chasles quanto ao histórico da relação métrica acima. Chasles (1870) cita igualmente Laguerre, porém dá crédito a Faure quanto a demonstração da relação métrica. Chasles afirma:

O Senhor Laguerre simplesmente enunciou esta expressão. O Senhor Faure, capitão de artilharia, a demonstrou em um de seus trabalhos sobre a *Transformation des propriétés métriques des figures*.³⁶ (CHASLES, 1870, p.313, Tradução nossa)

Faure trata de questões métricas relacionadas à transformação homográfica ao longo de um segmento de uma dada reta. Utilizando relações entre triângulos homólogos, Faure encontra as seguintes relações para o ângulo a' , homólogo a um ângulo a : $\sin a' = \frac{1}{2} \cdot \frac{1-r}{\sqrt{-r}}$; $\cos a' = \frac{1}{2} \cdot \frac{1+r}{\sqrt{-r}}$, subtraindo estas expressões uma da outra, encontrou: $\cos a' - \sin a' \sqrt{-1} = \sqrt{r}$.

Utilizando a relação de Euler, $e^{ix} = \cos(x) + i \cdot \sin(x)$, ele reduz a expressão acima a forma:

$$a' = -\frac{\log r}{2\sqrt{-1}},$$

sendo r a razão anarmônica de quatro retas: as retas suportes do ângulo e as retas imaginárias $y = \pm\sqrt{-1}x$. (FAURE, 1859, p.387)

4.7.4 Darboux (1873) e a “geometria de Cayley”

No trabalho *Sur une Classe Remarquable de Courbes et de Surfaces Algébriques et sur la Théorie des Imaginaires*, Darboux (DARBOUX, 1873) trata da geometria das relações métricas que ele chama de “geometria de Cayley”. Mais especificamente nos artigos 61 e 62, além das notas III e V, onde ele faz uso das noções de distância, apresentadas inicialmente por Cayley em sua sexta memória sobre os *quantics* de 1859, para tratar dos cicloides e problemas relacionados às superfícies ortogonais.

Esta teoria das relações métricas de Cayley é tratada especialmente na nota V, de título: *Sur les lignes géodésiques et les lignes de courbure dans la géométrie* de M. Cayley. Apesar de Darboux enfatizar a autoria de Cayley, ele faz referência à obra de 1862 de Fiedler sobre as formas binárias, *Die Elemente der Neueren Geometrie und der Algebra der Binären Formen*, que possui de forma resumida o conteúdo da sexta memória de Cayley. Além disso, cita a obra de Felix Klein que trata das geometrias não euclidianas de 1871. Não há citação direta à sexta memória, e o texto nem mesmo consta nas referências de Darboux (1873), o que nos indica que Darboux deve ter tido contato com esta obra de Cayley de forma indireta, muito provavelmente influenciado pela visita de Klein à França na década de 1870.

Nessa nota V, Darboux trata principalmente das linhas geodésicas. E, para isto, ele define para “absoluto” a esfera definida pela seguinte equação:

³⁶ M. Laguerre énonce simplement celle expression. M. Faure, capitaine d’artillerie, l’a démontrée dans un travail sur la *Transformation des propriétés métriques des figures*.

$$x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0. \text{ (DARBOUX, 1873, p.227)}$$

Então, define a distância entre dois pontos de coordenadas (x,y,z) e (x',y',z') sendo dada pelas fórmulas seguintes:

$$\begin{aligned} \cos^2 \delta &= \frac{(xx' + yy' + zz' - R^2)^2}{(x^2 + y^2 + z^2 - R^2)(x'^2 + y'^2 + z'^2 - R^2)} \text{ e} \\ \sin^2 \delta &= \frac{(x^2 + y^2 + z^2 - R^2)(x'^2 + y'^2 + z'^2 - R^2) - (xx' + yy' + zz' - R^2)^2}{(x^2 + y^2 + z^2 - R^2)(x'^2 + y'^2 + z'^2 - R^2)}. \end{aligned}$$

Darboux apresenta a métrica seguindo a mesma notação que Cayley (1859c, p.586) propõe em sua sexta memória sobre os *quantics*. Dado o ponto (x',y',z') ser vizinho ao ponto (x,y,z) , então se tem:

$$d\delta = \frac{(x^2 + y^2 + z^2 - R^2)(dx^2 + dy^2 + dz^2 - R^2) - (xdx + ydy + zdz - R^2)^2}{(x^2 + y^2 + z^2 - R^2)(x'^2 + y'^2 + z'^2 - R^2)}.$$

A partir dessa métrica, Darboux passa a pesquisar as linhas geodésicas de uma superfície definida por uma equação: $f(x,y,z) = 0$ (DARBOUX, 1873, p.228).

Ainda há vários aspectos a serem analisados, porém já podemos observar que Darboux desempenha um papel fundamental na recepção das métricas de Cayley-Klein.

Na parte 61 de seu livro, Darboux trata dos cicloides de um sistema ortogonal dada uma transformação definida. Ele trata de uma transformação que conserva os ângulos das tangentes ao plano e à superfície, utilizando neste caso as relações métricas desenvolvidas por Cayley. Darboux apresenta as seguintes relações métricas:

$$e^{iV} = R, V = \frac{1}{2i} \log R \text{ (DARBOUX, 1873, p.173)}$$

Sendo R a razão anarmônica dos quatro planos, tangentes e ortogonais. Este caso para o cálculo dos ângulos, sendo apresentada a relação que dá a distância, numa fórmula bem parecida, com o uso do logaritmo da razão anarmônica. Darboux utiliza a relação que dá a medida do ângulo para mostrar como a dada transformação conserva os ângulos. Faz uma breve demonstração para a conservação do ângulo entre duas curvas e afirma que ela permanece para o caso de duas superfícies, ou uma superfície e uma curva.

Já na parte 62, Darboux faz generalizações das noções de normal, focais e de linhas de curvatura. Darboux faz uso de uma definição que se utiliza da superfície de uma esfera, que seria o absoluto, para definir a normal de uma superfície. Daí ele define linha de curvatura. (DARBOUX, 1873, p.177)

4.7.5 Métrica de Cayley nos *Leçons sur la théorie générale des surfaces*

Darboux reuniu um belo trabalho de quatro volumes (1887-1896) em que trata da teoria das superfícies, *Leçons sur la Théorie Générale des Surfaces et Les Applications Géométriques du Calcul Infinitésimal*. O primeiro volume traz o resumo das lições que Darboux ministra

em Sorbonne durante os invernos de 1882 a 1885. Darboux pretendeu apresentar a teoria das superfícies com as novas aplicações de seu período, principalmente com as ferramentas do cálculo diferencial. Os quatro volumes são divididos em livros que, normalmente, discutem assuntos distintos. Por exemplo, o primeiro volume é dividido em três livros: o primeiro trata das aplicações à geometria da teoria dos movimentos relativos; o segundo, dos diferentes sistemas de coordenadas curvilíneas; e o terceiro, da teoria das superfícies mínimas.

O terceiro volume tem relevância quanto à recepção da métrica de Cayley-Klein, por abordar a relação desta com a teoria das linhas geodésicas e da curvatura geodésica. Este tópico é estudado no livro VI, sendo que esse terceiro volume se divide em apenas dois livros, livro VI e livro VII (este último trata da deformação das superfícies). Apresentaremos os principais apontamentos de Darboux que relacionam a métrica de Cayley-Klein aos estudos das geodésicas, nos dedicaremos, portanto, ao conteúdo do capítulo XIV do livro VI.

Já no início do capítulo XIV do livro VI, Darboux nos apresenta, em sua lista de matérias a serem abordadas no capítulo, diversos tópicos relacionados às métricas de Cayley-Klein. Os tópicos mais importantes para nosso estudo são: “Significação geométrica dos resultados precedentes; generalização das noções de distância e ângulo devido ao Senhor Cayley”, “As curvas geodésicas na geometria de Cayley”, “As superfícies (M) estudadas no início deste capítulo onde, na geometria Cayleyniana, seus raios de curvaturas são iguais e de sinais contrários” e “Estudo de uma transformação que permite de transportar à geometria euclidiana todas as relações entre ângulos da geometria de Cayley” (DARBOUX, 1894a, p.471). Durante nossa análise ficará claro o que Darboux considera como geometria de Cayley, sendo que, apesar de Darboux citar diversas vezes Cayley, ele considera importante também os trabalhos de Klein que trata das geometrias não euclidianas.

O primeiro tópico que selecionamos, ou seja, significação geométrica dos resultados precedentes; generalização das noções de distância e ângulo devido ao Senhor Cayley, se encontra num quadro do estudo das superfícies mínimas, que Darboux simboliza com “(M)”, relacionadas a uma dada quádrlica, que ele simboliza com “(Q)”. Darboux utiliza a seguinte definição de superfície mínima (M):

Nós temos visto (nº 186) que as superfícies mínimas podem ser caracterizadas pela seguinte propriedade: As duas tangentes de comprimento nulo conduzido por cada ponto da superfície devem ser duas tangentes conjugadas. É natural de se estender essa definição um pouco e buscar superfícies que, se, em cada um dos seus planos tangentes e pelo ponto de contato desse plano, as duas tangentes sejam conduzidas a uma superfície fixa do segundo grau, essas duas tangentes são conjugadas relativamente à superfície procurada. Quando a superfície do segundo grau ou quádrlica é reduzida ao círculo do infinito, a definição anterior coincidirá com a das superfícies mínimas. Se a quádrlica for reduzida a uma cônica, a superfície procurada se tornará a transformada homográfica de uma superfície mínima. Se a quádrlica (Q) se reduz a um cone, a superfície será o correlativo de uma superfície mínima. O único caso realmente novo a considerar é, portanto, o lugar onde a quádrlica pertence à classe mais geral; nós a designaremos, em forma abreviada, pela letra (Q) e as

superfícies procuradas serão chamadas aqui as superfícies (M).³⁷ (DARBOUX, 1894a, p.472, Tradução nossa)

Darboux faz uma extensa análise de como, dada uma superfície quadrática, encontrar a superfície mínima. Até que ele afirma que, para conseguir de uma maneira completa tratar dos casos envolvidos nessa questão, deve-se considerar as generalizações das noções de ângulo e distância que são devidas a Cayley (DARBOUX, 1894a, p.479). Darboux, ao fazer essa afirmação, cita em nota de rodapé três referências: primeira, a sexta memória sobre os *quantics* de Cayley, desta vez fazendo referência ao volume dois da coletânea de artigos de A. Cayley; segunda, à memória de Felix Klein de 1871, *Ueber die sogenannte Nicht-Euklidische Geometrie dos Mathematische Annalen*; e por fim, ao seu próprio trabalho, *Mémoire sur une classe remarquable de courbes et de surfaces algébriques*, cujas principais relações com a abordagem de Cayley já indicamos. Cabe destacar que, de forma inicial, Darboux teria tido contato com as obras de Cayley de forma indireta, por via de Klein conforme analisamos em Darboux (1873), mas nessa nova publicação o autor cita diretamente a sexta memória e, além disso, faz questão de destacar a coletânea das obras de Cayley, propagando assim os métodos de Cayley para os jovens cientistas franceses. Darboux apresenta a métrica de Cayley da seguinte maneira:

Essa generalização começa com a substituição de qualquer quádrlica (Q) pelo círculo no infinito. Dados dois pontos no espaço M, M' , chamamos de distância entre esses dois pontos a função δ definida pela equação (26) $e^{2i\delta} = R$, onde R denota a razão anarmônica de M, M' e os dois pontos em que a reta MM' intersecta a quádrlica (Q). Se $x, y, z, t; x', y', z', t'$ denotam as coordenadas dos dois pontos e se a quádrlica (Q) é definida pela equação homogênea (27) $f(x, y, z, t) = 0$, então teremos (28) $\cos \delta = \frac{1}{2} \frac{(x' \frac{\delta f}{\delta x} + y' \frac{\delta f}{\delta y} + z' \frac{\delta f}{\delta z} + t' \frac{\delta f}{\delta t})}{\sqrt{f(x, y, z, t) f(x', y', z', t')}}.$ ³⁸ (DARBOUX, 1894a, p.479, Tradução nossa)

A equação (26) define a distância entre dois pontos M e M' como uma função da razão anarmônica R desses pontos e dos pontos onde a reta MM' intersecta a quádrlica (Q). A razão anarmônica é uma quantidade invariante sob projeção perspectiva, o que significa que se projetarmos os pontos M e M' e a quádrlica (Q) em um novo plano, a razão anarmônica não muda.

³⁷ Nous avons vu (nº 186) que les surfaces minima peuvent être caractérisées par la propriété suivante : Les deux tangentes de longueur nulle menées par chaque point de la surface doivent être deux tangentes conjuguées. Il est naturel d'étendre un peu cette définition et de chercher les surfaces telles que, si, dans chacun de leurs plans tangents et par le point de contact de ce plan, on mène les deux tangentes à une surface fixe du second degré, ces deux tangentes soient conjuguées relativement à la surface cherchée. Quand la surface du second degré ou quadrique se réduira au cercle de l'infini, la définition précédente coïncidera avec celle des surfaces minima. Si la quadrique se réduit à une conique, la surface cherchée deviendra la transformée homographique d'une surface minima. Si la quadrique (Q) se réduit à un cône, la surface sera la corrélatrice d'une surface minima. Le seul cas réellement nouveau à envisager est donc celui où la quadrique appartient à la classe la plus générale ; nous la désignerons, pour abrégé, par la lettre (Q) et les surfaces cherchées seront appelées ici les surfaces (M).

³⁸ Cette généralisation a pour point de départ la substitution d'une quadrique quelconque (Q) au cercle de l'infini. Étant donnés deux points dans l'espace M, M' , appelons distance de ces deux points la fonction δ définie par l'équation (26) $e^{2i\delta} = R$, R désignant le rapport anharmonique de M, M' et des deux points où la droite MM' rencontre la quadrique (Q). Si $x, y, z, t; x', y', z', t'$ désignent les coordonnées des deux points et si la quadrique (Q) est définie par l'équation homogène (27) $f(x, y, z, t) = 0$, on aura (28) $\cos \delta = \frac{1}{2} \frac{(x' \frac{\delta f}{\delta x} + y' \frac{\delta f}{\delta y} + z' \frac{\delta f}{\delta z} + t' \frac{\delta f}{\delta t})}{\sqrt{f(x, y, z, t) f(x', y', z', t')}}.$

A equação (28) define o cosseno da distância entre dois pontos M e M' em termos das coordenadas dos pontos e da equação da quádrlica (Q). Essa equação é útil para calcular a distância entre dois pontos em uma variedade projetiva a partir da equação da quádrlica que define essa variedade. A distância entre dois pontos é uma quantidade importante em geometria projetiva, e essa equação fornece uma maneira conveniente de calculá-la.

Percebe-se, então, que Darboux (1894a) aplica em seu livro a teoria de Cayley sobre as métricas e faz isso de forma a relaciona-la a geometria diferencial. Para ele o que fez Cayley se traduziu numa abordagem que ele chamou de “geometria de Cayley”. Destaca-se que essa abordagem se tornou uma importante ferramenta para a geometria diferencial e para a teoria das superfícies, a partir das considerações de Darboux.

4.8 Conclusões

A recepção por parte da comunidade matemática britânica foi analisada a partir de pesquisas sobre oito periódicos onde se publicava trabalhos de matemática na época. Selecionamos, a partir da coletânea de Cayley, todos os periódicos britânicos em que ele publicou. Os critérios de seleção nos deram uma quantidade de cinquenta e um artigos, dezessete autores em cinco rubricas que foram determinadas a partir da terminologia empregada nos periódicos. Essa pesquisa nos rendeu sete tabelas que estão no Apêndice B, sendo a tabela B.1 composta por uma lista com todos os textos.

Os textos de Cayley presentes na lista confirmam o quanto os assuntos que possuem intersecção com o que chamamos de “geometria de Cayley” estavam presentes nesses periódicos, além de mostrar que as pesquisas eram conectadas com aquelas do continente europeu, devido às diversas referências aos matemáticos Plücker, Hesse e Jacobi. Os autores com mais textos foram: Cayley, R. Tucker, Clifford, Sylvester, Cotterill e Hirst. Como Tucker era editor de periódico, considerando contribuições matemáticas ao tema das métricas, teríamos Clifford como o que mais interagiu com Cayley. Clifford foi muito importante, contribuindo com trabalhos originais. Sylvester já é um nome muito destacado na historiografia quando se trata de teoria dos invariantes e sua relação com Cayley sobre o tema é bem extensa. Cotterill publica sobre relação anarmônica e sobre a correspondência de pontos numa curva de um dado plano. Hirst trabalhou a teoria dos discriminantes utilizando polares e também apresentou um teorema da trigonometria esférica.

Fiedler é uma das referências para tratar da recepção das propostas de Cayley por Klein, além de sinalizar uma divulgação na comunidade matemática alemã. Seus livros de 1860 e 1862 são traduções “livres” dos livros de Salmon sobre as seções cônicas. Quero dizer que Fiedler não somente traduziu os livros de Salmon, mas adicionou suas colaborações, principalmente em notas de rodapé e acrescentou outros trabalhos sobre a teoria dos invariantes britânica, incluindo artigos de Cayley e Sylvester. A sexta memória consta traduzida no livro de 1862, como apresentamos.

Tratamos da recepção por Klein e de sua contribuição ao tema, principalmente em seu artigo de 1871 sobre as geometrias não euclidianas. Destacamos a versão resumida que foi

rapidamente publicada uma tradução no *Bulletin* de Darboux.

Na Itália, nossa pesquisa se concentrou no periódico *Giornale di matematiche* de Battaglini. De 1870 a 1880, foram selecionados treze artigos, a maioria do próprio Battaglini que possui um artigo sobre as formas ternárias em que o autor cita a sexta memória pela primeira vez fora do território britânico. Esse interesse do editor da revista por assuntos relacionados à teoria dos invariantes influencia os matemáticos leitores, fato que provavelmente justifica a quantidade de artigos relacionados ao tema em dez anos de revista.

No caso da recepção francesa, ela foi abordada por periódicos, dos quais destacamos o jornal de Terquem, além da colaboração de Darboux nos livros que encontramos relação com geometria de Cayley até 1895. Destaque para suas contribuições no livro *Leçons sur la théorie générale des surfaces* de 1894. Nele, Darboux aplica as definições de métrica de Cayley para superfícies quadráticas.

Considerações finais

Desde o início da pesquisa, uma das nossas perguntas foi: por que abordar novamente a sexta memória? Depois dos resultados apresentados, com destaque ao capítulo 3, ficou claro que ainda havia vários aspectos não esclarecidos nos diversos trabalhos que analisaram esta memória, incluindo a própria estrutura do texto de Cayley. Por exemplo, a questão do modelo da geometria esférica utilizado por Cayley, que foi fundamental para a definição do “absoluto”, praticamente nunca é mencionada nos estudos que citam as métricas de Cayley. Além disso, destaca-se a importância da noção generalizada de perpendicularidade, que foi apresentada no jornal do Crelle em 1857 (publicado em 1859), que é fundamental na ideia de distância, pois a perpendicularidade de duas retas é utilizada no processo, para o qual a relação de harmonicidade é fundamental.

Como vimos as métricas de Cayley utilizam conceitos e ferramentas advindas da teoria dos invariantes, que no caso britânico tem uma visão geométrica que inspirava os matemáticos. Como destacamos, as equações homogêneas representavam pontos, retas ou planos no espaço projetivo. Essa prática que se consolida entre as décadas de 1840 a 1860. Isso possibilitou o trabalho de Cayley sobre as métricas, pois a teoria dos invariantes aliada à geometria projetiva, na tradição britânica que apresentamos, serviu de base para a quinta e para a sexta memória sobre os *quantics*, além dos demais trabalhos que relacionavam álgebra e geometria.

Analisamos como se deu o contexto de pesquisas matemáticas do período de formação do matemático Arthur Cayley. A matemática britânica desse período passou por transformações importantes, destacando-se as contribuições da Sociedade Analítica que explicam o retorno à participação internacional, retirando os ingleses do isolamento que os matemáticos viviam no século XVIII.

Ao pesquisar os primeiros artigos de Cayley, percebeu-se que a relação entre álgebra dos polinômios homogêneos e geometria projetiva é uma constante em suas pesquisas no período de 1841 a 1853. Essa dinâmica entre álgebra e geometria, em que o trabalho algébrico conta com uma visão geométrica é um fator comum aos matemáticos britânicos a partir da década de 1840. A Sociedade analítica teve forte influência nessa dinâmica.

Percebeu-se que Cayley desenvolveu seus conhecimentos em geometria projetiva e nos métodos analíticos que culminaram na teoria dos invariantes, esse processo ocorreu conjuntamente. Na realidade, os aspectos geométricos estão presentes, mesmo quando não são evidenciados num determinado artigo. Ademais, a partir de Cayley, pode-se criar uma rede de matemáticos britânicos que possuem essa prática comum. Sylvester e Salmon são participantes desta comunidade de prática comum. Destaca-se a importância do trabalho do matemático alemão Plücker, de 1837, sobre polinômios homogêneos.

Apesar da clara utilização de aspectos geométricos, os diversos textos não apresentam figuras. Isso pode ser compreendido como uma mudança de postura a partir da Sociedade Analítica, retirando a geometria sintética da posição de único padrão de rigor, mantendo-se, porém, uma visão geométrica que ajuda no raciocínio matemático presente nas diversas teorias algébricas. Essa visão geométrica é mais do que uma estratégia, pois, se de um lado influencia diretamente a interpretação dos resultados da teoria dos invariantes; por outro lado, irá revolucionar a relação da geometria projetiva com as geometrias euclidiana e não euclidianas.

A obra de Cayley (1843c) é clara em seu uso das coordenadas homogêneas para explorar os aspectos da geometria projetiva em sua teoria. Como mencionado anteriormente, a teoria dos invariantes pode ser abordada tanto por seus aspectos algébricos quanto por seus aspectos geométricos, situando a teoria em um sistema de coordenadas e trabalhando com entidades geométricas como pontos, retas e planos. Cayley segue essa abordagem em sua obra sobre os *quantics*, deixando claro em sua primeira memória que pretende explorar esses aspectos.

Assim, os artigos anteriores à sexta memória de Cayley e de seus contemporâneos ajudam-nos a entender o campo de pesquisa dessa rede de matemáticos britânicos que culminou no desenvolvimento das métricas de Cayley. Esses fatores foram importantes para fazer uma análise da sexta memória, bem como entender sua recepção, principalmente para compreender o contexto de produção matemática, trazendo sentido ao trabalho de Cayley. A sexta memória não pode ser vista de forma isolada, mas dentro desse contexto de produção e pensamento matemático. Esses fatores também nos auxiliaram a trabalhar a recepção da métrica de Cayley, uma vez que essa análise nos sinalizou os possíveis caminhos para explicá-la.

A teoria dos invariantes se desenvolveu a partir do artigo de George Boole sobre transformações lineares de 1841. Como apresentado, esse trabalho possui uma visão geométrica dessas transformações. Cayley reage a este artigo e se interessa pelo tema, conforme a carta que ele escreveu a Boole. Como vimos, a teorias dos invariantes desde seus primeiros desenvolvimentos possuía uma relação direta com geometria. Logo, o que Cayley faz na quinta e na sexta memória sobre os *quantics*, relacionando teoria dos invariantes com geometria, era uma prática desses matemáticos britânicos.

Os trabalhos anteriores a 1857 de Cayley confirmam essa relação que associa álgebra e geometria. Como vimos, a involução, por exemplo, foi utilizada num contexto de uso de polinômios homogêneos no artigo de 1847, onde ele faz referência a matemáticos como Euler, Cramer, Plücker e Hesse. Já em 1853, Cayley destaca as propriedades do sistema de coordenadas

e como ela se relaciona com os polinômios e as transformações. Ou seja, entre 1847 e 1853, ele trabalhou diversas vezes explorando as propriedades geométricas da álgebra dos polinômios homogêneos. Então, antes de publicar a primeira memória sobre os *quantics*, ele já havia trabalhado vários aspectos que ligam álgebra dos polinômios homogêneos às propriedades geométricas que são fundamentais para a sexta memória. Esse contexto de produção quase nunca é estudado quando tratam das métricas de Cayley, parecendo que estas não se relacionam às suas obras anteriores.

Quanto à primeira memória sobre os *quantics*, de 1854, destacamos que Cayley apresenta os aspectos geométricos envolvidos no trabalho algébrico da teoria dos invariantes, o que mostra que estes aspectos geométricos são fundamentais para os desenvolvimentos com os *quantics*. Já que Cayley não explorou esses aspectos da segunda à quarta memória, focando apenas no desenvolvimento de procedimentos algébricos na teoria dos invariantes, a série de artigos sobre os *quantics* muitas vezes é mal interpretada como sendo puramente algébrica. Algumas pessoas afirmam precipitadamente que Klein interpretou a sexta memória sem levar em conta a teoria das métricas presente nela, o que reflete a visão de Klein sobre o trabalho de Cayley. Porém, a sexta memória possui uma abordagem para as métricas que podia tratar as geometrias não euclidianas. Não queremos dizer que a sexta memória não contribuiu para o que fez Klein, mas sim que Cayley possuía sua própria abordagem para as métricas e que esta difere da do matemático alemão.

A quinta memória sobre os *quantics*, de 1858, já apresenta uma série de resultados que são retomados na sexta memória, como, por exemplo, o invariante que estabelece a relação harmônica de duas ou mais quádras. O curto espaço de tempo entre as publicações da quinta e sexta memória nos faz pensar que, ao escrever a quinta memória, Cayley já tinha em mente seu trabalho com métricas que foi desenvolvido na sexta memória.

O artigo sobre as normais do jornal do Crelle, de 1857, também foi escrito quando Cayley já tinha em mente a sexta memória. A noção geral de perpendicularidade aparece usando já a terminologia “absoluto” para a quádras de referência da métrica. Esse artigo não é citado nos diversos trabalhos que tratam das métricas de Cayley-Klein, apesar da sua importância para entender o processo criativo de Cayley que culminou na sexta memória.

Nossa análise da sexta memória detalhou e esclareceu o trabalho de Cayley, bem como seu método para definir métrica. Esta memória é raramente explicada, seja na historiografia que cito na introdução da tese, seja em trabalhos matemáticos. Destaco aqui a visão geométrica de Cayley que partiu do modelo da esfera, aliada à noção generalizada de perpendicularidade. Cayley trabalha o caso limite que recai sobre a métrica euclidiana. Com isso, a partir dos resultados da sexta memória, Cayley trabalha métrica para as geometrias projetiva, euclidiana e elíptica. O caso da geometria hiperbólica foi desenvolvido no artigo de 1872. Com isso, a abordagem de Cayley se mostrou possível para as geometrias não euclidianas.

Salmon atualizou seu *Treatise on conic*, em 1863, adicionando a noção generalizada de perpendicularidade de Cayley, bem como a definição de “absoluto” apenas quase quatro anos

depois da publicação da sexta memória. O que percebemos é que a recepção britânica se deu rapidamente, conforme apresentamos no capítulo quatro.

Para estudar a recepção da métrica de Cayley pela comunidade britânica, realizamos uma análise dos periódicos daquele período. A partir da coletânea de Cayley, que inclui todos os periódicos britânicos que ele publicou, selecionamos cinquenta e um artigos de dezessete autores em cinco rubricas diferentes, que foram determinadas com base na terminologia empregada nos periódicos. Com isso, organizamos os resultados em sete tabelas que estão no Apêndice B, sendo a tabela B.1 composta por uma lista com todos as referências.

A lista de artigos relacionados à geometria de Cayley, selecionados a partir de periódicos britânicos publicados por Cayley, confirma a presença frequente desses assuntos nesses periódicos e também demonstra a conexão das pesquisas britânicas com as do continente europeu, com diversas referências a Plücker, Hesse e Jacobi. Os autores mais produtivos foram Cayley, R. Tucker, Clifford, Sylvester, Cotterill e Hirst. Como Tucker era editor de periódico, considerando apenas as contribuições matemáticas sobre o tema das métricas, Clifford foi o segundo autor mais produtivo, depois de Cayley, tendo desempenhado um papel importante com trabalhos muito originais. Sylvester, por sua vez, é um nome destacado na historiografia da teoria dos invariantes e sua relação com Cayley sobre o tema é significativa. Cotterill publicou sobre relação anarmônica e sobre a correspondência de pontos em uma curva de um dado plano, enquanto Hirst trabalhou com a teoria dos discriminantes utilizando polares e escreveu sobre um teorema da trigonometria esférica.

Fiedler teve um papel fundamental na recepção do trabalho de Cayley por Klein e na divulgação da teoria dos invariantes na comunidade matemática alemã. Seus livros, publicados em 1860 e 1862, eram traduções “livres” dos livros de Salmon sobre as seções cônicas e incluíam importantes contribuições de Fiedler, especialmente em notas de rodapé. Além disso, ele acrescentou outros trabalhos sobre a teoria dos invariantes britânicos, incluindo artigos de Cayley e Sylvester. A sexta memória consta traduzida no livro de 1862, como apresentamos. Klein afirma em seu artigo sobre as geometrias não euclidianas de 1871 que leu a sexta memória dessa tradução de Fiedler. Este artigo foi estudado e apresentamos a abordagem de Klein para diferenciar daquela de Cayley. Destacamos que a versão resumida foi rapidamente publicada em uma tradução no *Bulletin* de Darboux. Lembramos que Klein foi a Paris e se encontrou com Darboux e Lie em 1870.

Para entender a recepção italiana, analisamos o periódico *Giornale di matematiche* de Battaglini. De 1870 a 1880, selecionamos treze artigos, a maioria do próprio Battaglini que possui um artigo sobre as formas ternárias que cita a sexta memória pela primeira vez, fora do território britânico. Esse interesse do editor da revista por assuntos relacionados à teoria dos invariantes influencia os matemáticos leitores, fato que provavelmente justifica a quantidade de artigos em dez anos de revista.

No caso da recepção francesa, ela foi abordada por periódicos, dentre os quais destacamos o jornal de Terquem, além da colaboração de Darboux nos livros em que encontramos relação

com geometria de Cayley até 1895. Destaque para suas contribuições no livro *Leçons sur la théorie générale des surfaces* de 1894. Nele, Darboux aplica as definições de métrica de Cayley para superfícies quadráticas.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BALL, W. W. R. **A History of the Study of Mathematics at Cambridge**. [S.l.]: University Press, 1889.

BOOLE, G. Analytical geometry. **Cambridge Mathematical Journal**, v. 2, p. 179–188, 1841.

_____. Exposition of a general theory of linear transformations. **The Cambridge Mathematical Journal**, v. 3, p. 1–20, 1841.

_____. Exposition of a general theory of linear transformations– part i. **Cambridge Mathematical Journal**, v. 3, p. 1–20, 1841.

_____. Exposition of a general theory of linear transformations– part ii. **Cambridge Mathematical Journal**, v. 3, p. 106–118, 1841.

_____. Notes on linear transformations. **The Cambridge Mathematical Journal**, v. 4, n. 22, p. 167–171, 1844.

BRECHENMACHER, F. Les matrices: formes de représentations et pratiques opératoires (1850-1930). **Site expert des Ecoles Normales Supérieures**, 2006. Disponível em: <<https://hal.science/hal-00142789/document>>. Acesso em: 03/2023.

BREWSTER, D.; KANE, R.; FRANCIS, W.; TYNDALL, J. **The London, Edinburgh, and Dublin philosophical magazine and journal of science**. [S.l.]: Taylor & Francis, 1859. v. 18.

_____. **The London, Edinburgh, and Dublin philosophical magazine and journal of science**. [S.l.]: Taylor & Francis, 1861. v. 22.

BRUNO, F. F. di. Bibliography. Théorie des formes binaires. **The Quartely Journal of Pure and Applied Mathematics**, v. 14, p. 185–190, 1877.

CAYLEY, A. On a theorem in the geometry of position. **Cambridge Mathematical Journal**, v. 2, p. 267–271, 1841.

_____. Demonstration of Pascal's Theorem. **The Cambridge Mathematical Journal**, v. 4, p. 18–20, 1843.

_____. On the theory of algebraic curves. **The Cambridge and Dublin Mathematical Journal**, v. 4, p. 102–112, 1843.

_____. On the theory of determinantes. **Transactions of The Cambridge Philosophical Society**, v. 8, p. 75–88, 1843.

_____. Chapters in the analytical geometry of (n) dimensions. **Cambridge Mathematical Journal**, v. 4, p. 119–127, 1844.

_____. Démonstration d'un théorème de M. Chasles. **Journal de Mathématiques Pures et Appliquées**, p. 383–384, 1845.

_____. Mémoire sur les courbes à double courbure et les surfaces développables. **Journal de Mathématiques Pures et Appliquées**, p. 245–250, 1845.

_____. Nouvelles remarques sur les courbes du troisième ordre. **Journal de Mathématiques Pures et Appliquées**, p. 102–108, 1845.

_____. On the theory of linear transformations. **The Cambridge Mathematical Journal**, v. 4, p. 193–209, 1845.

_____. On linear transformations. **The Cambridge and Dublin Mathematical Journal**, v. 1, p. 104–122, 1846.

_____. On the theory of involution in geometry. **The Cambridge and Dublin Mathematical Journal**, v. 11, p. 52–61, 1847.

_____. On geometrical reciprocity. **Cambridge and Dublin Mathematical Journal**, v. 3, p. 173–179, 1848.

_____. On the triple tangent planes of surfaces of the third order. **The Cambridge and Dublin mathematical journal**, v. 4, p. 118–132, 1849.

_____. Sur le problème des contacts. **Journal für die reine und angewandte Mathematik**, v. 39, p. 4–13, 1850.

_____. On the homographic transformation of a surface of the second order into itself. In: _____. **The Collected Mathematical Papers of Arthur Cayley**. [S.l.: s.n.], 1853.

_____. An introductory memoir upon quantics. In: _____. **The Collected Mathematical Papers of Arthur Cayley**. [S.l.: s.n.], 1854.

_____. A Fifth Memoir upon Quantics. In: _____. **The Collected Mathematical Papers of Arthur Cayley**. [S.l.: s.n.], 1858.

_____. Note sur les normales d'une conique. **Journal für die reine und angewandte Mathematik**, v. 56, p. 182–185, 1859.

_____. On the conic of five-pointic contact at any point of a plane curve. **Philosophical Transactions of the Royal Society of London**, v. 149, p. 371–400, 1859.

_____. A Sixth Memoir upon Quantics. In: _____. **The Collected Mathematical Papers of Arthur Cayley**. [S.l.: s.n.], 1859.

_____. On the non-euclidian geometry. In: _____. **The Collected Mathematical Papers of Arthur Cayley**. [S.l.: s.n.], 1872.

_____. Note to sixth memoir upon quantics. In: _____. **The Collected Mathematical Papers of Arthur Cayley**. [S.l.: s.n.], 1889.

CHASLES, M. **Rapport sur les progrès de la géométrie**. [S.l.]: Imprimerie nationale, 1870. v. 20.

CLEBSCH, A. Revue bibliographique - Clebsch (a.) Theorie der binären algebraischen formen. **Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques**, v. 3, n. 1, p. 225–234, 1872.

_____. **Theorie der binären algebraischen Formen**. [S.l.]: Teubner, 1872.

CLIFFORD, W. K. On the general theory of anharmonics. **Proceedings of the London Mathematical Society**, Wiley Online Library, v. 1, n. 1, p. 3–8, 1866.

_____. On a generalization of the theory of polars. **Proceedings of the London Mathematical Society**, Wiley Online Library, v. 1, n. 1, p. 116–119, 1868.

_____. A preliminary sketch of biquaternions. **Proceedings of the London Mathematical Society**, Wiley Online Library, v. 4, n. 4, p. 381–395, 1873.

_____. **Mathematical papers**. [S.l.]: Macmillan and Company, 1882.

CORRY, L. Introduction: The history of modern mathematics—writing and rewriting. **Science in Context**, Cambridge University Press, v. 17, n. 1–2, p. 1–21, 2004.

CRILLY, T. The rise of Cayley's invariant theory (1841–1862). **Historia mathematica**, Elsevier, v. 13, n. 3, p. 241–254, 1986.

_____. The decline of Cayley's invariant theory (1863–1895). **Historia mathematica**, Elsevier, v. 15, n. 4, p. 332–347, 1988.

_____. **Arthur Cayley: Mathematician laureate of the Victorian age**. [S.l.]: Johns Hopkins University Press, 2006.

CROIZAT, B. **Gaston Darboux: naissance d'un mathématicien, genèse d'un professeur, chronique d'un rédacteur**. Tese (Doutorado) — Lille 1, 2016.

DARBOUX, G. **Sur une Classe Remarquable de Courbes et de Surfaces Algébriques et sur la Théorie des Imaginaires**. [S.l.]: Gauthier-Villars, 1873.

_____. **Leçons sur la théorie générale des surfaces et Les Applications Géométriques du Calcul Infinitésimal**. [S.l.]: Gauthier-Villars et Fils, 1894. v. 3.

_____. **Leçons sur la théorie générale des surfaces et Les Applications Géométriques du Calcul Infinitésimal**. [S.l.]: Gauthier-Villars et Fils, 1894. v. 4.

_____. **Leçons sur la théorie générale des surfaces et les applications géométriques du calcul infinitésimal: ptie. Déformation infiniment petite et représentation sphérique. Notes et additions: I. Sur les méthodes d'approximations successives dans la théorie des équations différentielles, par E. Picard. II. Sur les géodésiques à intégrales quadratiques, par G. Koenigs. III. Sur la théorie des équations aux dérivées partielles du second ordre, par E. Cosserat. IV-XI. Par l'auteur. 1896**. [S.l.]: Gauthier-Villars, 1896. v. 4.

_____. **Principes de géométrie analytique**. [S.l.]: Gauthier-Villars Paris, 1917. v. 2.

DARBOUX G.; HOÜEL, J. Revue Bibliographique - Heger (D R.) elemente der analytischen geometrie in homogenen koordinaten. **Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques**, v. 3, n. 1, p. 257–258, 1872.

DIAS, L. S. **Geometria e Álgebra nas seis primeiras memórias de Cayley sobre *Quantics***. 86 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) — Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2013.

DIAS, L. S.; GRIMBERG, G. E. Algebra e geometria projectiva analítica na inglaterra dos anos 1841-1853. **Llull: Revista de la Sociedad Española de Historia de las Ciencias y de las Técnicas**, Sociedad Española de Historia de las Ciencias y de las Técnicas, SEHCYT, v. 38, n. 81, p. 11–31, 2015.

_____. Classificação das geometrias: um diálogo entre os textos de arthur cayley e de felix klein. **Revista Brasileira de História da Ciência**, v. 12, n. 2, p. 207–224, 2019.

_____. Álgebra e geometria na primeira metade do século xix: Alguns exemplos da matemática britânica. **Hipátia-Revista Brasileira de História, Educação e Matemática**, Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo, v. 6, p. 427–439, 2021. Disponível em: <<https://ojs.ifsp.edu.br/index.php/hipatia/article/view/1840>>.

ELLIS, R. L. Memoir of the Late DF Gregory, MA, Fellow of Trinity College, Cambridge. **The Cambridge Mathematical Journal**, v. 4, p. 145–152, 1844.

FAURE, C.-R. Transformation des propriétés métriques des figures. **Nouvelles annales de mathématiques: journal des candidats aux écoles polytechnique et normale**, Carilian-Goeury et Vor Dalmont, v. 18, p. 381–388, 1859.

FIEDLER, W. **Die Elemente der neueren Geometrie und der Algebra der binären Formen**. [S.l.]: Teubner, 1862.

_____. **Analytische Geometrie der Kegelschnitte: mit besonderer Berücksichtigung der neueren Methoden**. [S.l.]: Teubner, 1866. v. 1.

FORSYTH, A. R. Arthur Cayley. In: _____. **The Collected Mathematical Papers of Arthur Cayley**. [S.l.: s.n.], 1889.

FROST, P. Circular sections of the locus of the general equation of the second order. **The Cambridge and Dublin Mathematical Journal**, v. 1, p. 133–137, 1846.

GLAISHER, J. W. Notes on the early history of the society. **Journal of the London Mathematical Society**, Wiley Online Library, v. 1, n. 1, p. 51–64, 1926.

GOLDSTEIN, C.; SCHAPPACHER, N.; SCHWERMER, J. **The shaping of arithmetic after CF Gauss's *Disquisitiones Arithmeticae***. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2007.

GREGORY, D. F. Of asymptotes to algebraic curves. **The Cambridge Mathematical Journal**, v. 4, p. 42–47, 1843.

GUICCIARDINI, N. **The development of Newtonian calculus in Britain, 1700-1800**. [S.l.]: Cambridge University Press, 1989.

HAMILTON, H. P. **The Principles of Analytical Geometry Designed for use of students in the University**. [S.l.]: Cambridge University Press, 1826.

HAWKINS, T. Line geometry, differential equations and the birth of Lie's theory of groups. In: **Ideas and their Reception**. [S.l.]: Elsevier, 1989. p. 274–327.

HENRICI, O. M. On certain formula concerning the theory of discriminants; with applications to discriminants of discriminants, and to the theory of polar curves. **Proceedings of the London Mathematical Society**, Wiley Online Library, v. 1, n. 1, p. 104–116, 1866.

JACOBI, C. G. J. De binis quibuslibet functionibus homogeneis secundi ordinis per substitutiones lineares in alias binas tranformandis, quae solis quadratis variabilium constant; una cum variis theorematis de tranformatione et. **Journal für die reine und angewandte Mathematik**, v. 12, p. 1–69, 1834.

_____. De eliminatione variabilis e duabus aequationibus algebraicis. **Journal für die reine und angewandte Mathematik**, v. 15, p. 101–124, 1836.

JOACHIMSTHAL, F. Ueber die normalen der ellipse und des ellipsoids. **Journal für die reine und angewandte Mathematik**, De Gruyter, v. 1843, n. 26, p. 172–180, 1843.

KLEIN, F. Sur la géométrie dite non euclidienne. **Bulletin des Sciences Mathématiques et Astronomiques**, Gauthier-Villars, v. 2, p. 341–351, 1871.

_____. Über die sogenannte nicht-euklidische geometrie. **Mathematische Annalen**, Springer, v. 4, n. 4, p. 573–625, 1871.

_____. Über die sogenannte nicht-euklidische geometrie. **Mathematische Annalen**, Springer, v. 6, n. 2, p. 112–145, 1873.

_____. **Development of Mathematics in the 19th Century: Appendices, “Kleinian Mathematics from an Advanced Standpoint”**. [S.l.]: Math Science Press, 1979. v. 9.

LAGRANGE, J. L. **Mécanique analitique**. [S.l.]: La veuve Desaint, 1788.

LAGUERRE-VERLY, E. Note sur la théorie des foyers. **Nouvelles annales de mathématiques: journal des candidats aux écoles polytechnique et normale**, Carilian-Goeury et Vor Dalmont, v. 12, p. 57–66, 1853.

LPHS-AHP NANCY; GRENOBLE, C. M. **Répertoire bibliographique des sciences mathématiques (1894-1912)**. 2019. Disponível em: <<http://sites.mathdoc.fr/RBSM/>>.

MANSION, P. Notice sur les travaux de Jules Plücker. **Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques**, Gauthier-Villars, v. 5, p. 313–319, 1873.

_____. Trilinear coordinates of the circular points at infinity. **The messenger of mathematics**, v. 5, p. 158–159, 1876.

MCCLEARY, J. A theory of reception for the history of mathematics. In: **Ideas and their Reception**. [S.l.]: Elsevier, 1989. p. 2–14.

MEYER, F. **Bericht über den gegenwärtigen Stand der Invariantentheorie**. [S.l.]: Verlag nicht ermittelbar, 1892.

MEYER FRANZ; DRACH, J. Théorie des formes et des invariants. In: _____. **Encyclopédie des sciences mathématiques pures et appliquées: Tome 1 Volume 2, Algèbre**. [S.l.: s.n.], 1911.

MORGAN, A. D. On the general equation of curves of second degree. **Transactions of The Cambridge Philosophical Society**, v. 4, p. 71–78, 1833.

_____. On the general equation of curves of second degree. **Transactions of The Cambridge Philosophical Society**, v. 5, p. 77–94, 1835.

PARSHALL, K. H. Toward a history of nineteenth-century invariant theory. In: **Ideas and their Reception**. [S.l.]: Elsevier, 1989. p. 155–206.

_____. **James Joseph Sylvester: Jewish Mathematician in a Victorian World**. [S.l.]: JHU Press, 2006.

PIERPONT, J. Non-euclidean geometry, a retrospect. **Bulletin of the American Mathematical Society**, JSTOR, v. 36, n. 2, p. 66–76, 1930.

_____. Cayley's definition of non-euclidean geometry. **American Journal of Mathematics**, JSTOR, v. 53, n. 1, p. 117–126, 1931.

RICHARDS, J. L. The reception of a mathematical theory: non-euclidean geometry in england, 1868–1883. **Natural order: historical studies of scientific culture**, Sage Publications Beverly Hills, v. 143, p. 66, 1979.

ROSENFELD, B. A. **A history of non-Euclidean geometry: evolution of the concept of a geometric space**. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2012. v. 12.

ROWE, D. E. The early geometrical works of Sophus Lie and Felix Klein. In: **Ideas and their Reception**. [S.l.]: Elsevier, 1989. p. 208–273.

SALMON, G. On the degree of a surface reciprocal to a given one. **Cambridge and Dublin mathematical journal**, v. 2, p. 65–75, 1846.

_____. **A Treatise on the Higher Plane Curves**. [S.l.]: Hodges and Smith, Grafton-street, Booksellers to the University, 1852.

_____. On quaternary cubics. **Philosophical Transactions of the Royal Society of London**, v. 150, p. 229–239, 1860.

_____. **A Treatise on conic sections**. [S.l.]: Longman, Brown, Green, Longman, and Roberts, 1863.

SMITH, A. Transformation of certain analytical expressions. **Cambridge Mathematical Journal**, v. 1, p. 169–177, 1837.

SOMMERVILLE, D. Classification of geometries with projective metric. **Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society**, Cambridge University Press, v. 28, p. 25–41, 1910.

_____. Metrical coordinates in non-euclidean geometry. **Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society**, Cambridge University Press, v. 3, n. 1, p. 16–25, 1932.

SYLVESTER, J. J. Examples of the dialytic method of elimination as applied to ternary systems of equations. **Cambridge Mathematical Journal**, v. 2, p. 232–236, 1841.

_____. On the intersections, contacts, and other correlations of two conics expressed by indeterminate coordinates. **Cambridge and Dublin mathematical journal**, v. 5, n. 262–282, p. 162, 1850.

_____. On certain general properties of homogeneous functions. **Cambridge and Dublin mathematical journal**, p. 165–180, 1851.

_____. On the principles of the calculus of forms. **Cambridge and Dublin Mathematical Journal**, v. 7, p. 179–216, 1852.

_____. Note on calculus of forms. **Cambridge and Dublin Mathematical Journal**, v. 8, p. 62–64, 1853.

TAIT, P. G. On determinants. **The Oxford, Cambridge, and Dublin messenger of mathematics**, v. 1, p. 25–37, 1862.

TERQUEM, O. Notions élémentaires sur les invariants, covariants, discriminants et hyperdéterminants. **Nouvelles annales de mathématiques 1re série**, v. 18, p. 249–255, 1859.

THOMSON, W. “Archibald Smith”. **Proceedings of the Royal Society of London**, v. 22, p. i–xxiv, 1874.

VOELKE, J.-D. **Renaissance de la géométrie non euclidienne entre 1860 et 1900**. [S.l.]: Peter Lang, 2005.

WALTON, W. On Brianchon’s Hexagon. **The Cambridge Mathematical Journal**, v. 4, p. 163–167, 1844.

WOLFSON, P. R. George boole and the origins of invariant theory. **Historia Mathematica**, Elsevier, v. 35, n. 1, p. 37–46, 2008.

Apêndices

Obras de George Salmon

Livros:

- A treatise on conic sections (1848, 1850, ...);
- A treatise on the higher plane curves (1852);
- Lessons introductory to the modern higher algebra (1859); e
- A treatise on the analytic geometry of three dimensions (1862).

Artigos de Salmon:

Salmon, George. On the properties of surfaces of the second degree which correspond to the theorems of Pascal and Brianchon on Conic Sections. *Phil. Mag.* XXIV., 1844, pp. 49-51; *Nouv. Ann. Math.* XII., 1853, pp. 287-289.

———. On the degree of a surface reciprocal to a given one. **Camb. and Dubl. Math. Journ.** II., 1847, pp. 65-73.

———. Note on the parabolic points of surfaces. **Camb. and Dubl. Math. Journ.** II., 1847, pp. 74-75.

———. On the generation of surfaces of the second degree. **Irish Acad. Proc.** III., 1847, pp. 536-537.

———. On the condition that a plane should touch a surface along a curve line. **Camb. and Dubl. Math. Journ.** III., 1848, pp. 44-46.

———. On the number of normals which can be drawn from a given point to a given surface. **Camb. and Dubl. Math. Journ.** III., 1848, pp. 46-47; *Nouv. Ann. Math.* IX., 1850, pp. 274-276.

———. Note on a result of elimination. **Camb. and Dubl. Math. Journ.** III., 1848, pp. 169-173.

———. On the cone circumscribing a surface of the m th order. **Camb. and Dubl. Math. Journ.** IV., 1849, pp. 188-191.

- . On the triple tangent planes to a surface of the third order. **Camb. and Dubl. Math. Journ.** IV., 1849, pp. 252-260.
- . On the classification of curves of double curvature. **Camb. and Dubl. Math. Journ.** V., 1850, pp. 23-46.
- . On the conditions that an equation should have equal roots. **Camb. and Dubl. Math. Journ.** V., 1850, pp. 159-165.
- . [Sur les points d'inflexion des courbes de troisième degré.] **Crelle, Journ.** XXXIX., 1850, pp. 365-366.
- . Théorèmes sur les courbes de troisième degré. **Crelle, Journ.** XLII., 1852, pp. 274-276 ; **Nouv. Ann. Math.** XL, 1852, pp. 321-322.
- . Sur la formation de l'équation de la courbe réciproque à une courbe donnée. **Crelle, Journ.** XLII., 1852, pp. 277-278.
- . On a class of ruled surfaces. **Camb. and Dubl. Math. Journ.** VIII., 1853, pp. 45-47.
- . On reciprocal surfaces. **Irish Acad. Proc.** VI., 1853-54, pp. 273-275.
- . Exercises in the hyperdeterminant calculus. **Camb. and Dubl. Math. Journ.** IX., 1854, pp. 19-33.
- . On the problem of the in-and-circumscribed triangle. **Phil. Mag.** XIII., 1857, pp. 190-191, 267-268.
- . On the problem of the in-and-circumscribed polygon. **Phil. Mag.** XIII., 1857, pp. 337-338.
- . Geometrical notes. **Quart. Journ. Math.** I., 1857, pp. 237-241.
- . On the order of certain systems of equations. **Quart. Journ. Math.** I., 1857, pp. 246-257.
- . On the contact of right lines with surfaces. **Quart. Journ. Math.** I., 1857, pp. 329-344.
- . Sur la théorie de deux coniques. **Nouv. Ann. Math.** XVII., 1858, pp. 83-98.
- . On curves of the third order. **Phil. Trans.** 1858, pp. 535-542.
- . On the equation of the surface of centres of an ellipsoid. **Quart. Journ. Math.** II., 1858, pp. 217-222.
- . Rectification d'un théorème de MM. Steiner et Dewulf. [Le lieu des sommets des angles droits circonscrits à une courbe de la classe n est une courbe de degré n^2 .] **Nouv. Ann. Math.** XVIII., 1859, pp. 314-319.
- . On the degree of the surface reciprocal to a given one. [1855.] **Irish Acad. Trans.** XXIII., 1859, pp. 461-488.
- . On quaternary cubics. **Roy. Soc. Proc.** X., 1859-60, pp. 513-514; **Phil. Trans.** 1860, pp. 229-240.
- . Sur le théorème Faure et courbes parallèles. **Nouv. Ann. Math.** XIX., 1860, pp. 345-349.
- . On the relation which connects the mutual distances of five points in space. **Quart. Journ. Math.** III., 1860, pp. 282-288.
- . On the determination of the points of contact of double tangents to an algebraic curve.

- Quart. Journ. Math.** III., 1860, pp. 317-322.
- . Geometrical theorems. **Quart. Journ. Math.** IV., 1861, pp. 152-154.
- . Notes on quadriplanar coordinates. **Quart. Journ. Math.** IV., 1861, pp. 231-232, 271.
- . On the determination of the foci of a conic. **Quart. Journ. Math.** V., 1862, pp. 307-311.
- . Geometrical theorems. **Quart. Journ. Math.** v., 1862, pp. 362-365.
- . On the circle which touches the four circles which touch the sides of a given spherical triangle. **Quart. Journ. Math.** VI., 1863, pp. 67-73.
- . On some points in the theory of elimination. **Quart. Journ. Math.** VII., 1866, pp. 327-337.
- . On the number of surfaces of the second degree which can be described to satisfy nine conditions. **Quart. Journ. Math.** VIII., 1867, pp. 1-7.
- . On some special forms of conics. [1866.] **Quart. Journ. Math.** VIII., 1867, pp. 235-236.
- . On the limiting cases of certain conics. [1867.] **Messenger of Math.** IV., 1868, pp. 129-132.
- . On periods in the reciprocals of primes. [1872.] **Messenger of Math.** II., 1873, pp. 49- 51.

Recepção de métrica de Cayley pelos ingleses

Textos da rede de 1859 - 1890 (51 textos)				
Autor	Revista	Localização	Tipo de texto	Título
Cayley	Philosophical Transactions of the Royal Society of London	1859, V 149, p. 193	Artigo	On the -Double Tangents of a Plane Curve Cayley
G. B. Airy	Philosophical Magazine	1859, N1, p. 177	Artigo	The Astronomer Royal's Remarks on Mr. Cayley's Trigonometrical Theorem, and on Professor Challis's Proof that Equations have as many Routs, &c
Cayley	Philosophical Magazine	1859, N1, p. 151	Artigo	Note on a theorem in spherical trigonometry
Cayley	Philosophical Transactions of the Royal Society of London	1859, V 149, p. 61	Artigo	A Sixth Memoir upon Quantics
Editores	Philosophical Magazine	N2, 1859, p. 67	Notices New Books	Lessons Introductory to the Modern Higher Algebra
Cayley	Philosophical Transactions of the Royal Society of London	1859, V 149, p. 371	Artigo	On the Conic of Five-pointic Contact at any point of a Plane Curve
Cayley	Philosophical Transactions of the Royal Society of London	1860, V 150, p. 229	Artigo	On Quaternary Cubics
Editores	Philosophical Magazine	1861, N2, p. 240	Notices New Books	An Elementary Treatise on Trilinear Coordinates, the Method of Reciprocal Polars, and the Theory of Projections
Cayley	Philosophical Magazine	1861, N2, p. 35	Artigo	On the Curves situate on a Surface of the second Order
Cayley	Philosophical Transactions of the Royal Society of London	1861, V 151, p. 277	Artigo	A Seventh Memoir on Quantics
M. Roberts	The Quarterly journal of pure and applied mathematics	1862, V 5, p. 18	Artigo	On some applications of algebra to the theory of covariants
P. G. Tait	The Oxford, Cambridge, and Dublin messenger of mathematics	1862, V 1, p. 25	Artigo	On Determinants
W. Roberts	Philosophical Magazine	1862, N2, p. 39	Artigo	On some Applications of a Theorem relating to Parallel Surfaces

Textos da rede de 1859 - 1890 (51 textos) - continuação				
Autor	Revista	Localização	Tipo de texto	Título
Cayley	Philosophical Transactions of the Royal Society of London	1862, V 152, p. 658	Artigo	On the Analytical Theory of the Conic
Cayley	Philosophical Magazine	1863, N1, p. 206	Artigo	On the Analytical Theory of the Conic (Acrecimento em 1862, dezembro)
Cayley	Philosophical Magazine	1863, N1, p. 61	Artigo	Theorems relating to the Canonic Roots of a Binary Quantic of na Odd Order
Cayley	Philosophical Magazine	1863, N1, p. 181	Artigo	Note on a Theorem relating to Surfaces
Sylvester	Philosophical Magazine	1863, N1, p. 453	Artigo	Note on a Theorem relating to a Triangle, Line, and Conic
Editores	Philosophical Magazine	1865, N2, p. 376	Proceedings of Learned Societies	Sequel to the Theorems relating to "Canonic Roots" given in the last March Number of this Magazine
Plücker	Philosophical Transactions of the Royal Society of London	1865, V 155, p. 725	Artigo	Communications were made by Professor Cayley "On Abstract Geometry."
Cayley	Philosophical Magazine	1865, N1, p. 231	Artigo	On a New Geometry of Space
W. Spottiswoode	Philosophical Transactions of the Royal Society of London	1865, V 155, p. 653	Artigo	Note on Lobatschewsky's Imaginary Geometry.
Clifford	Proceedings of the London Mathematical Society	1866, N2, p. 3	Artigo	On the Sextactic Points of a Plane Curve
Cotterill	Proceedings of the London Mathematical Society	1866, N2, p. 12	Artigo	On the General Theory of Anharmonics
Cayley	Philosophical Transactions of the Royal Society of London	1867, V 157, p. 513	Artigo	On an Involution System of Oircular Cubics, and description of the curve by points, when the double focus is on the curve
Thomas Cotterill	Proceedings of the London Mathematical Society	1868, p. 119	Artigo	An Eighth Memoir on Quantics
Cayley	Proceedings of the London Mathematical Society	1868, p. 1	Artigo	An Eighth Memoir on Quantics (acrescimento em 1867, outubro)
Cotterill	The Oxford, Cambridge, and Dublin messenger of mathematics	1868, V4, p. 101	Artigo	On a Correspondence of Points, such that a curve of the nth order in one plane corresponds to a curve of the 4 nth in another plane, with three multiple points of the order n on the line of intersection of the planes, and three other multiple points of the order 2n.
Editores	The Oxford, Cambridge, and Dublin messenger of mathematics	1868, V4, p. 191	Notices New Books	Transformation of Plane Curves
Clifford	Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society	1868, V 2, p. 120	Comunicações	Proofs of The Fundamental Formula of The Higher Geometry in Spaces of Two and three Dimensions
Henrici	Proceedings of the London Mathematical Society	1866, p. 104	Artigo	Annali di Matematica pura ed applicata
Clifford	Proceedings of the London Mathematical Society	1868, p. 116	Artigo	On some Porismatic Poblrems
Hirst	Proceedings of the London Mathematical Society	1869, p. 166	Artigo	On certain formula concerning the Theory of Discriminants; with applications to Discriminants of Discriminants, and to the Theory of Polar Curves
Cayley	The Oxford, Cambridge, and Dublin messenger of mathematics	1871, V 5, p. 47	Artigo	On a Generalization of the Theory of Polars.
Robert Stawell Ball	Philosophical Magazine	1871, N2, p. 181	Artigo	On the Degenerate Forms of Conics
R. Tucker	Messenger of Mathematics	1872, V 1, p. 48	Transactions of Societies	A "Smith's Prize" Paper Solutions
Clifford	Proceedings of the London Mathematical Society	1871, p. 381	Artigo	Description of a Model of a Conoidal Cubic Surface called the "Cylindroid," which is presented in the Theory of the Geometrical freedom of a Rigid Body

Textos da rede de 1859 - 1890 (51 textos) - continuação				
Autor	Revista	Localização	Tipo de texto	Título
R. Tucker	Messenger of Mathematics	1873, V 2, p. 32	Transactions of Societies	
Samuel Roberts	Proceedings of the London Mathematical Society	1873, p. 6	Artigo	Preliminary Sketch of Biquaternions
Editores	Proceedings of the London Mathematical Society	1874, p. 140	Reports	
P. Mansion	Messenger of Mathematics	1876, V 5, p. 158	Artigo	
Faà de Bruno	The Quarterly journal of pure and applied mathematics	1877, V 14, p. 185	Artigo	Trilinear Coordinates of the Circular Points at Infinity
Sylvester	Philosophical Magazine	1877, N2, p. 139	Artigo	Bibliography. Théorie des Formes Binaires
Sylvester	Philosophical Magazine	1878, N1, p. 178	Artigo	On a Generalization of Taylor's Theorem
Editores	Philosophical Magazine	1879, N1, p. 366	Notices New Books	Proof of the hitherto undemonstrated Fundamental Theorem of Invariants
R. Tucker	Messenger of Mathematics	1881, V 10, p. 12	Transactions of Societies	American Journal of Mathematics, Pure and Applied. Editor in chief, J. J. Sylvester,
Cayley	Proceedings of the London Mathematical Society	1879, p. 48	Artigo	
Hirst	The Quarterly journal of pure and applied mathematics	1881, V 17, p. 304	Artigo	A Theorem in Spherical Trigonometry
R. Tucker	Messenger of Mathematics	1882, V 11, p. 48	Transactions of Societies	On quadric transformation
R. Tucker	Messenger of Mathematics	1882, V 11, p. 49	Transactions of Societies	
Cayley	Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society	1890, V 7, p. 35	Abstract	Non-Euclidean Geometry

Tabela B.1 – Textos que compõe a rede sobre a recepção da geometria de Cayley.

Quantidade de textos por autores		Quantidade de textos por autores	
Autores	Quantidade de textos	Autores	Quantidade de textos
Cayley	19	G. B. Airy	1
Editores	6	Henrici (Olaus M. F. E.)	1
R. Tucker	4	P. G. Tait	1
Clifford	4	P. Mansion	1
Sylvester	3	Plücker	1
Cotterill	3	Robert Stawell Ball	1
Hirst	2	W. Roberts	1
M. Roberts	1	W. Spottiswoode	1
Faà de Bruno	1		

Tabela B.2 – Quantidade de textos por autores.

Quantidade de textos por ano									
Ano	1859	1860	1861	1862	1863	1864	1865	1866	Total por período
Quantidade de textos	6	1	3	5	4	0	4	2	25
Ano	1867	1868	1869	1870	1871	1872	1873	1874	Total por período
Quantidade de textos	2	7	1	0	2	1	2	1	16
Ano	1875	1876	1877	1878	1879	1880	1881	1882	Total por período
Quantidade de textos	0	1	2	1	1	2	1	1	9
Ano	1883	1884	1885	1886	1887	1888	1889	1890	Total por período
Quantidade de textos	0	0	0	0	0	0	0	1	1
Total de textos	51								

Tabela B.3 – Quantidade de textos por ano.

Mencionado e quem menciona			
Pessoa mencionada	Quantidade de textos em que é mencionado	Quem menciona?	O que foi citado?
Cayley	17	Cayley Clifford Editores Faà de Bruno G. B. Airy Henrici (Olaus M. F. E.) Hirst Plücker R. Tucker Robert Stawell Ball Sylvester W. Spottiswoode	Artigo (8 vezes) Teoria (4 vezes) Observações (2 vezes) Orientação (1 vez) Nota de livro (1 vez) Comunicação (1 vez)
Plücker	3	Cayley	Artigo (2 vezes) Teoria (1 vez)
Clebsch	2	Cayley	Artigo (2 vezes)
Klein	2	Clifford Editores	Artigo (2 vezes)
M. Aronhold	2	Cayley	Artigo (2 vezes)
Sylvester	2	Cayley	Teoria (1 vez) Artigo (1 vez)
Boole	1	Cayley	Teoria (1 vez)
Chasles	1	Cotterill	Teoria (1 vez)
Clifford	1	Editores	Artigo (1 vez)
Cremona	1	Cotterill	Teoria (1 vez)
Ferrers	1	Cotterill	Artigo (1 vez)
Grassmann	1	W. Roberts	Artigo (1 vez)
Hermite	1	R. Tucker	Artigo (1 vez)
Hirst	1	Plücker	Artigo (1 vez)
Lobatschewsky	1	P. Mansion	Livro (1 vez)
Mannheim	1	P. G. Tait	Livro (1 vez)
Möbius	1	Editores	Livro (1 vez)
Salmon	1	Clifford	Teoria (1 vez)
Todhunter	1	Cayley	Artigo (1 vez)

Tabela B.4 – Mencionado e quem menciona

Rubricas / assuntos da rede	
Rubrica / assunto	Quantidade de textos
Analytical Geometry of two and three dimensions	25
Comunicações ou relatórios **	11
Teoria dos Invariantes**	10
Trigonometry	4
Differential and integral calculus and differential equations	1

Tabela B.5 – Rubricas ou assuntos da rede.

Textos por periódico		
Nome do periódico	Quantidade de textos	Quantidade por Rubrica / assunto
Philosophical Magazine	16	Analytical Geometry of two and three dimensions* (5 textos) Comunicações ou relatórios (3 textos) Teoria dos Invariantes*** (3 textos) Trigonometry* (3 textos) Differential and integral calculus and differential equations* (1 texto)
Philosophical Transactions of the Royal Society of London	11	Analytical Geometry of two and three dimensions* (6 textos) Teoria dos Invariantes*** (5 textos)
Proceedings of the London Mathematical Society	10	Analytical Geometry of two and three dimensions* (8 textos) Comunicações ou relatórios (1 texto) Trigonometry* (1 texto)
Messenger of Mathematics	5	Comunicações ou relatórios (4 textos) Analytical Geometry of two and three dimensions (1 texto)
The Oxford, Cambridge, and Dublin messenger of mathematics	4	Analytical Geometry of two and three dimensions (4 textos)
The Quarterly journal of pure and applied mathematics	3	Teoria dos Invariantes*** (2 textos) Analytical Geometry of two and three dimensions* (1 texto)
Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society	2	Comunicações ou relatórios (2 textos)

Tabela B.6 – Textos por periódico.

Textos citados na rede			
Data da citação	Autor do texto citado	Texto citado	Citado por
1859 julho	Boole	Exposition of a General Theory of Linear Transformations	Editores
1861 julho	Boole	Relacionado a Teoria dos Invariantes**	Editores
1868 Janeiro	Brioschi	Sulla teoria delle coordinate curvilinee	Editores
1859 julho	Brioschi (Trad. Combescure)	Théorie des Déterminats	Editores
1859 julho	Cayley	Relacionado a Teoria dos Invariantes**	Editores

Textos citados na rede - continuação			
Data da citação	Autor do texto citado	Texto citado	Citado por
1860 junho	Cayley	Memoirs upon Quantics*	Cayley
1861 julho	Cayley	Relacionado a Teoria dos Invariantes**	Editores
1862 Janeiro	Cayley	A Memoir on the Conditions for the Existence of given Systems of equalities among the Roots of an Equation	M. Roberts
1863 junho	Cayley	Theorems relating to the Canonic Roots of a Binary Quantic of an Odd Order	Sylvester
1865 fevereiro	Cayley	On a New Analytical Representation of Curves in Space, third and fifth volume of the Quarterly Journal of Mathematics	Plücker
1865 junho	Cayley	On the Conic of Five-pointic Contact at any point of a Plane Curve	W. Spottiswoode
1865 junho	Cayley	On the Sextactic Points of a Plane Curve	W. Spottiswoode
1868 Janeiro	Cayley	Sixth Memoir on Quantics	Cotterill
1868 novembro	Cayley	Geometry of Three Dimensions (Nota de rodapé, p. 179)	Henrici (Olaus M. F. E.)
1868 novembro	Cayley	Lessons introductory to the Modern Higher Algebra, 2nd edit, p. 149	Henrici (Olaus M. F. E.)
1869 Março	Cayley	On Curves which satisfy given Conditions	Hirst
1873 Junho	Cayley	Sixth Memoir on Quantics	Clifford
1878 janeiro	Cayley	Second Memoir on Quantics	Sylvester
1880 janeiro	Cayley	A theorem in Spherical Trigonometry	R. Tucker
1882 junho	Cayley	On the Gaussian theory of surfaces	R. Tucker
1890 janeiro	Cayley	Non-Euclidean Geometry	Cayley
1868 janeiro	Clebsch	Ueber diejenigen ebenen Curven deren Coordinaten rationale Functionen eines Parameters sind	Cayley
1868 novembro	Clebsch	Ueber einige von Steiner behandelte Curven	Henrici (Olaus M. F. E.)
1868 Janeiro	Clebsch e Gordan	Sulla rappresentazione tipica delle forme binarie	Editores
1867 janeiro	Clebsch e Gordan	Sulla rappresentazione tipica delle forme binarie	Cayley
1868 Janeiro	Clifford	Analytical Metrics	Cotterill
1880 janeiro	Clifford	On the theory of Distances	R. Tucker
1868 novembro	Cremona	Introduzione ad una teoria geometrica della curve piano	Henrici (Olaus M. F. E.)
1872 junho	Cremona	Sulle trasformazioni razionali nello spazio	R. Tucker
1878 janeiro	Faà Bruno	Theorie des Formes Binaires	Sylvester

Textos citados na rede - continuação			
Data da citação	Autor do texto citado	Texto citado	Citado por
1861 julho	Ferrers	Relacionado a Teoria dos Invariantes**	Editores
1868 novembro	Henrici	On certain formulae concerning the Theory of Discriminants	Clifford
1861 Março	Hermite	Sur les formes cubiques a trois indeterminees	Cayley
1861 Março	Hermite	Sur la Resolution des equations du quatrieme degre	Cayley
1867 janeiro	Hermite	Sur l'équation du cinquième degré	Cayley
1859 abril	Hesse	Über die Wendepuncte der Curven dritter Ordnung	Cayley
1862 junho	Hirst	The first negative derived surface	W. Roberts
1859 abril	Jacobi	Beweis des Satzes daß eine Curve nten Grades im Allgemeinen ... $(n-2)(n-9)$ Doppeltangenten hat	Cayley
1863 junho	Jacobi	De Eliminatione Variabilis e duabus sequationibus	Sylvester
1873 Junho	Klein	Ueber die so-genannte Nicht-Euklidische Geometrie	Clifford
1874 Julho	Klein	Ueber eine Klasse binärer Formen	Editores
1865 fevereiro	L. F. Magnus	Sammlung von Aufgaben und Lehrsätzen aus der analytischen Geometrie des Raumes	Plücker
1865 janeiro	Lobatschewsky	Géométrie Imaginaire	Cayley
1861 Março	M. Aronhold	Theorie der homogenen Functionen dritten Grades von drei Veränderlichen	Cayley
1862 Maio	M. Aronhold	Ueber eine neue algebraische Behandlungsweise der ntegrale irrationaler Differentiale, &c	Cayley
1865 fevereiro	M. Lamé	Théorie mathématique de l'Elasticité	Plücker
1862 junho	Mannheim	Application de la transformation par rayons vecteurs réciproques à l'étude de la surface enveloppe d'une sphère tangente à trois sphères données	W. Roberts
1882 junho	Mannheim	Sur les surfaces parallèles	R. Tucker
1865 fevereiro	Möbius	Über eine besondere Art dualer Verhältnisse zwischen Figuren im Raume	Plücker

Textos citados na rede - continuação			
Data da citação	Autor do texto citado	Texto citado	Citado por
1861 julho	N. M. Ferrers	An Elementary Treatise on Trilinear Coordinates, the Method of Reciprocal Polars, and the Theory of Projections	Editores
1859 abril	Plücker	Solution d'une question fondamentale concernant la théorie générale des courbes	Cayley
1859 abril	Plücker	Theorie der algebraischen Curven	Cayley
1861 maio	Plücker	Die analytische Geometrie der Curven auf den Flächen zweiter Ordnung und Classe	Cayley
1868 janeiro	Riemann	Theorie der Abel'schen Functionen	Cayley
1872 junho	S. Roberts	The motion of a plane under certain conditions.	R. Tucker
1859 abril	Salmon	Treatise on the Higher Plane Curves (1852).	Cayley
1859 julho	Salmon	Lessons Introductory to the Modern Higher Algebra	Editores
1859 março	Salmon	Higher Plane Curves	Cayley
1861 julho	Salmon	Relacionado a Teoria dos Invariantes**	Editores
1866 Novembro	Salmon	Higher Plane Curves	Cotterill
1876 Janeiro	Salmon	Higher Plane Curves	P. Mansion
1877 julho	Salmon	Lessons on Higher Algebra	Sylvester
1868 janeiro	Schwarz	De superficiebus in planum explicabilibus primorum septem ordinum	Cayley
1859 julho	Spottiswoode	Elementary Theorems Relating to Determinants	Editores
1861 julho	Spottiswoode	Relacionado a Teoria dos Invariantes**	Editores
1868 novembro	Steiner	Allgemeine Eigenschaften der algebraischen Curven	Henrici (Olaus M. F. E.)
1859 julho	Sylvester	Relacionados a Teoria dos Invariantes**	Editores
1861 julho	Sylvester	Relacionado a Teoria dos Invariantes**	Editores
1867 janeiro	Sylvester	Algebraical Researches, containing a disquisition on Newton's Rule for the Discovery of Imaginary Roots, and an allied Rule applicable to a particular class of Equations, together with a complete invariantive determination of the character of the Roots of the General Equation of the fifth Degree, &c.	Cayley
1861 julho	Todhunter	A Treatise on Plane co-ordinate Geometry	Editores
1862 Janeiro	Todhunter	An Elementary Treatise on The Theory of Equations	P. G. Tait
1862 Janeiro	Todhunter	Algebra, for the use of colleges and schools	P. G. Tait
1862 junho	W. Roberts	Sur quelques systèmes de surfaces orthogonales, obtenus par la méthode des coordonnées elliptiques	W. Roberts

Tabela B.7 – Textos citados na rede

Artigos dos periódicos franceses

Artigos de periódicos franceses:

Textos das revistas francesas				
Autor	Revista	Localização	Tipo de Texto	Título
Terquem	Nouvelles Annales	1849, p. 113	Artigo	Théorèmes d'homogénéité
Terquem	Nouvelles Annales	1859, p. 249	Artigo	Notions élémentaires sur les invariants, covariants, discriminants et hyperdéterminants
Terquem	Nouvelles Annales	1859, p. 397	Artigo	Méthode d'élimination ; d'après M. Cayley
Painvin	Nouvelles Annales	1864, p. 241	Artigo	Recherche des points multiples à l'infini dans les courbes algébriques
Peaucellier	Nouvelles Annales	1864, p. 414	Carta	Lettre de M. Peaucellier, capitaine du Génie (à Nice).
Terquem	Nouvelles Annales	1865, p. 527	Notícias	Bulletin: Mathematical Questions
E. Barbier	Nouvelles Annales	1866, p. 349	Artigo	Formules de trigonométrie sphérique
T. A. Hirst	Nouvelles Annales	1866, p. 213	Artigo	Sur la transformation quadrique
Terquem	Nouvelles Annales	1866, p. 42	Notícias	Bulletin: Traité de Géométrie Élémentaire ; par mm. Eugène rouchè,
Terquem	Nouvelles Annales	1867, p. 189 e p. 231	Notícias	Publications récentes
Combescure	Annales Scientifiques de l'É.N.	1864, p. 269	Artigo	Aperçu Élémentaire sur les Formes Algébriques
H. G. Zeuthen	Bulletin des Sciences Mathématiques	1870, p. 233	Notícias	Revue Bibliographique: Cremona (dr. Luigi) — Preliminari di una Teoria Geometrica delle Superficie
Darboux	Bulletin des Sciences Mathématiques	1870, p. 124, p. 139 e p. 208	Notícias	Revue des publications périodiques
Darboux	Bulletin des Sciences Mathématiques	1870, p. 348	Artigo	Sur les systèmes linéaires de coniques et de surfaces du second ordre
Darboux	Bulletin des Sciences Mathématiques	1874, p. 53 e p. 228	Notícias	Revue des publications périodiques