UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO

ALINE MENDES PENTEADO FARVES

COMPREENSÃO CONCEITUAL DOS NÚMEROS RACIONAIS NO ENSINO MÉDIO E ENSINO SUPERIOR EM PAÍSES DA AMÉRICA LATINA: uma revisão sistemática

RIO DE JANEIRO

2022

ALINE MENDES PENTEADO FARVES

COMPREENSÃO CONCEITUAL DOS NÚMEROS RACIONAIS NO ENSINO MÉDIO E ENSINO SUPERIOR EM PAÍSES DA AMÉRICA LATINA: uma revisão sistemática

Tese de doutorado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Ensino de Matemática do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Doutor em Ensino e História da Matemática e da Física.

Orientadora: Marcia Maria Fusaro Pinto

Rio de Janeiro
2022

CIP - Catalogação na Publicação

M247c

Mendes Penteado Farves, Aline
COMPREENSÃO CONCEITUAL DOS NÚMEROS RACIONAIS NO ENSINO MÉDIO E ENSINO SUPERIOR EM PAÍSES DA AMÉRICA LATINA: uma revisão sistemática / Aline Mendes Penteado Farves. -- Rio de Janeiro, 2022.
190 f.

Orientadora: Marcia Maria Fusaro Pinto.
Tese (doutorado) - Universidade Federal do Rio de Janeiro, Instituto de Matemática, Programa de Pós Graduação em Ensino de Matemática, 2022.

1. Revisão Sistemática de Literatura. 2. Números Racionais. 3. Frações. 4. Ensino Médio. 5. Ensino Superior. I. Maria Fusaro Pinto, Marcia, orient. II. Título.

Elaborado pelo Sistema de Geração Automática da UFRJ com os dados fornecidos pelo(a) autor(a), sob a responsabilidade de Miguel Romeu Amorim Neto - CRB-7/6283.

ALINE MENDES PENTEADO FARVES

COMPREENSÃO CONCEITUAL DOS NÚMEROS RACIONAIS NO ENSINO MÉDIO E ENSINO SUPERIOR EM PAÍSES DA AMÉRICA LATINA: uma revisão sistemática

Tese de doutorado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Ensino de Matemática do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Doutor em Ensino e História da Matemática e da Física.

Aprovada em 17/10/2022

Prof.ª Dr.ª Marcia Maria Fusaro Pinto – UFRJ (Orientadora)

Assinatura dispensada (Res. CEPG/UFRJ n° 03/2019)

Prof. Dr. Plínio Cavalcanti Moreira - UFOP

Assinatura dispensada (Res. CEPG/UFRJ n° 03/2019)

Prof.ª Dr.ª Ana Teresa de Carvalho Correa de Oliveira - UFRJ

Assinatura dispensada (Res. CEPG/UFRJ n° 03/2019)

Prof.ª Dr.ª Luciane de Souza Velasque - Unirio

Assinatura dispensada (Res. CEPG/UFRJ n° 03/2019)

Prof.ª Dr.ª Claudia Coelho de Segadas Vianna - UFRJ

AGRADECIMENTOS

Ao finalizar esta tese de doutorado, lembro-me com muita alegria de pessoas que compartilharam comigo cada momento e contribuíram para que eu concluísse esta etapa tão importante de minha vida. Sou imensamente grata a cada um de vocês. Foram momentos difíceis, em meio a uma pandemia, mas com a graça de Deus, que me sustentou durante todo este percurso, consegui finalizar.

À minha orientadora Marcia Maria Fusaro Pinto um agradecimento especial pelas orientações, contribuições sempre muito pertinentes, apoio constante e ensinamentos durante toda a trajetória.

Aos colegas que fazem parte do LEME, pelas discussões e sugestões durantes todo o percurso.

Ao IFRJ, pela licença concedida, para que eu me dedicasse exclusivamente a esta tese. E aos professores da equipe de Matemática que me auxiliaram em todo o processo.

Aos meus pais e irmãos, que sempre me apoiaram para que eu concluísse esta etapa.

À banca de qualificação e de defesa pelas contribuições valiosas.

Meu agradecimento mais profundo é dedicado ao meu marido, que esteve ao meu lado o tempo todo, incondicionalmente. Foram muitos momentos desafiadores, mas sua presença ao meu lado me fortaleceu. Também agradeço à sua família, que me deu suporte em diversos momentos.

Finalizo agradecendo a todos que direta ou indiretamente fizeram parte da minha formação e peço que Deus continue abençoando a vida de vocês.

Não a nós, Senhor, nenhuma glória para nós, mas sim ao teu nome, por teu amor e por tua fidelidade! Salmos 115:1

RESUMO

FARVES, Aline Mendes Penteado. **Compreensão conceitual dos números racionais no ensino médio e ensino superior em países da américa latina:** uma revisão sistemática. 2022. Tese (Doutorado em Ensino e História da Matemática e da Física). Instituto de Matemática, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2022.

Esta tese de doutorado tem como foco o ensino e a aprendizagem dos números racionais por alunos dos ensinos médio e superior, tema relevante no contexto escolar, cuja complexidade tem despertado interesse de diversas pesquisas ao longo dos anos, pois os alunos continuam a vida acadêmica sem compreender o conceito. Esta pesquisa caracteriza-se como bibliográfica e visa contribuir para a área de maneira mais ampla, por meio de um Estado da Arte com pressupostos de uma Revisão Sistemática de Literatura, a partir da análise de artigos indexados nas principais bases de dados da América Latina, nos últimos dez anos. Duas questões centrais orientaram esta pesquisa: 'Quais temáticas sobre o ensino de números racionais estão presentes nas pesquisas analisadas?' e 'Quais concepções os alunos do ensino médio e do ensino superior evocam em situações com números racionais, interpretando-os como parte-todo, medida, quociente, operador e razão?', a partir das pesquisas analisadas. As etapas da Revisão Sistemática de Literatura foram observadas, resultando em um corpus com 45 artigos. Dois momentos de análise foram previstos: análise descritiva e análise dos temas. Da análise descritiva destacam-se 4 temáticas principais: i) razão e pensamento proporcional; ii) operações com números racionais; iii) representações dos números racionais; e iv) o conceito de número racional e suas interpretações. Da análise de cada tema, relacionamos as principais concepções dos alunos identificadas aos subconstructos de número racional estudados na literatura e à natureza das questões percebidas em sala de aula ao utilizar o conceito. Os resultados do tema 'razão e pensamento proporcional' indicam que o conhecimento de grande parte dos futuros professores e de alunos do ensino médio é caracterizado por uma concepção pré-proporcional, por incorporar uma noção restrita a execução de procedimentos e a concepções aditivas. Dos resultados do tema 'operações com números nacionais', destacamos que o uso de conceito de números racionais como instrumento é predominantemente procedimental ou intuitivo, em detrimento do relacional. O tema 'representações dos números racionais' aponta que as concepções de um número racional estão restritas a um monorregistro, ficando evidente uma predominância do registro numérico. Quanto ao tema 'conceito de números racionais e suas

interpretações’, uma identificação do conceito com o subconstructo parte-todo emerge como concepção predominante e persistente, que parece dar origem ao entendimento de que números racionais são sempre menores que 1. Atividades de particionamento, quando relacionadas ao subconstructo parte-todo revelam, muitas vezes, concepções de partição desigual. Já concepções de partilha impossível, também identificadas, são relacionadas ao subconstructo quociente. Em referência aos subconstructo medida, identificamos as concepções discreta e finitista. Tais concepções persistem até a vida adulta e por isso, há necessidade de promover mudanças no processo de ensino aprendizagem do conceito que permitam a transição do conjunto dos números naturais para o conjunto dos números racionais. Concluímos que a compreensão do conceito de números racionais e de todas as relações presentes entre suas principais ideias envolve um longo processo de aprendizagem, pois necessita de experiências com diversas noções e abrange a compreensão: das múltiplas interpretações, das ideias associadas e das representações.

Palavras-chave: Revisão Sistemática de Literatura; Estado da Arte; Números Racionais; Frações; Ensino Médio; Ensino Superior.

ABSTRACT

FARVES, Aline Mendes Penteado. **Conceptual understanding of rational numbers in high school and college education in Latin American countries: a systematic review**. 2022. Thesis (Doctorate in Teaching and History of Mathematics and Physics). Institute of Mathematics, Federal University of Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2022.

This doctoral thesis focuses on the teaching and learning of rational numbers by high school and college students, a relevant topic in the school context, whose complexity has aroused the interest of several researchers over the years, as students continue their academic lives without understanding the concept. This research is characterized as bibliographic and aims to contribute to the area in a broader way, through a State of the Art with assumptions of a Systematic Literature Review, from the analysis of articles indexed in major Latin American databases in the last ten years. Two central questions guided this research: 'What themes about the teaching of rational numbers are present in the analyzed research?' and 'What conceptions do high school and college students evoke in situations with rational numbers, interpreting them as part-whole, measure, quotient, operator, and ratio?', based on the analyzed research. The steps of the Systematic Review of Literature were observed, resulting in a corpus with 45 articles. Two moments of analysis were foreseen: descriptive analysis and analysis of themes. From the descriptive analysis 4 main themes stand out: i) ratio and proportional reasoning; ii) rational number operations; iii) rational number representations; and iv) rational number concept and its interpretations. From the analysis of each theme, we relate the main conceptions of the students identified to the sub-constructs of rational number studied in the literature and the nature of the issues perceived in the classroom when using the concept. The results of the theme 'ratio and proportional reasoning' indicate that the knowledge of a large part of future teachers and high school students is characterized by a pre-proportional conception, by incorporating a notion restricted to the execution of procedures and additive conceptions. From the results of the theme 'rational number operations', we highlight that the use of the concept of rational numbers as a tool is predominantly procedural or intuitive, to the detriment of relational. The theme 'Rational Number Representations' points out that the conceptions of a rational number are restricted to a mono-register, making evident a predominance of the numerical register. As for the theme 'concept of rational numbers and their interpretations', an identification of the concept with the sub-construct part-whole emerges as a predominant and

persistent conception, which seems to give rise to the understanding that rational numbers are always less than 1. Partitioning activities, when related to the sub-construct part-whole, reveal, many times, conceptions of unequal partition. Conceptions of impossible sharing, also identified, are related to the quotient sub-construct. In reference to the measure sub-construct, we identified the discrete and finite conceptions. Such conceptions persist until adulthood and, therefore, there is a need to promote changes in the teaching-learning process of the concept that allow the transition from the set of natural numbers to the set of rational numbers. We have come to the conclusion that understanding the concept of rational numbers and all the relationships present among its main ideas entails a long learning process, as it requires experiences with several notions and encompasses the understanding of: multiple interpretations, associated ideas, and representations.

Key words: Systematic Review of Literature; State of the Art; Rational Numbers; Fractions; High School; Higher Education.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 - Exemplo parte-todo.....21
Figura 2 - Exemplo medida. 21
Figura 3 - Exemplo quociente. 22
Figura 4 - Exemplo operador.....22
Figura 5 - Exemplo razão. 22
Figura 6 - Modelo teórico do processo de ensino-aprendizagem dos números racionais. 23
Figura 7 - Descrição das etapas realizadas para a seleção dos dados.....47
Figura 8 - Distribuição de frequência relativa conforme o ano de publicação dos artigos incluídos na Revisão Sistemática de Literatura no período de 2010 a 2021. 48
Figura 9 - Distribuição de frequência relativa conforme as revistas de publicação dos artigos incluídos na Revisão Sistemática de Literatura.....49
Figura 10 - Distribuição de frequência relativa conforme os países de publicação dos artigos incluídos na Revisão Sistemática de Literatura.....49
Figura 11 - Distribuição de frequência relativa conforme os países em que as pesquisas foram realizadas. 50
Figura 12 - Resolução por meio da estratégia da subtração. 72
Figura 13 - Resolução utilizando a proporção ao contrário. 73
Figura 14 - Regra do Peixinho.....82
Figura 15 - Exemplo de resolução das operações de soma e subtração de frações de Etcheverria et al. (2019).....83
Figura 16 - Exemplo de resolução com algoritmo de operar com decimais para operar com frações.....83
Figura 17 - Exemplo da operação de soma com números decimais realizada por um aluno do ensino superior.....83
Figura 18 - Exemplo de concepção não relacional das operações em Retana e Muñoz (2018). 84
Figura 19 - Representações do número racional 0,5. 87
Figura 20 - Exemplo de representação errônea no registro decimal de um aluno do ensino fundamental. 89
Figura 21 - Resolução de uma tarefa da pesquisa de Parra-Zapata (2021). 91

Figura 22 - Atividade 1 e resposta do licenciando na pesquisa de Etcheverria e Amorim (2020). 95
Figura 23 - Atividade 1 da pesquisa de Menegazzi e Dalcin (2016). 96
Figura 24 - Atividade 3 da pesquisa de Justulin (2017). 97
Figura 25 - Resposta de um aluno do ensino médio da pesquisa de Paraol e Rodriguês (2018). 97
Figura 26 - Atividade 3 da pesquisa de García e Cabañas -Sánchez (2013). 97
Figura 27 - Resposta do aluno à questão 3 da pesquisa de Menegazzi (2013) 102
Figura 28 - Resolução do problema 4 da pesquisa de García (2019). 102
Figura 29 - Resolução do problema 4 da pesquisa de García (2019) por outro futuro professor. 103
Figura 30 - Atividade 8 da pesquisa de Menegazzi (2013). 107
Figura 31 - Atividade 1 da pesquisa de Abrahão (2016). 107
Figura 32 - Atividade 7 da pesquisa de Oliveira e Araman (2017). 108
Figura 33 - Relações entre as ideias fundamentais e os subconstructos. 149
Figura 34 - Sistema de Representação dos números racionais. 161
Figura 35 - Exemplo de uma cartela do jogo bingo das frações. 166
Figura 36 - Questão 1 da pesquisa de Etcheverria et al. (2019). 171
Figura 37 - Exercício da Prova Conceitual da pesquisa de Justulin (2017). 175
Figura 38 - Notas racionais da pesquisa de Parra Zapata et al. (2021). 181
Figura 39 - Vista lateral de um guindaste torre. 184
Figura 40 - Atividades da pesquisa de Silva et al. (2018). 187

LISTA DE QUADROS

Quadro 1 - A complexidade do conceito de número racional e a noção dos subconstructos...21
Quadro 2 - Visão geral das habilidades relacionadas ao conceito de número racional do ensino fundamental. 26
Quadro 3 - Procedimentos para uma Revisão Sistemática de Literatura. 37
Quadro 4 - Descritores utilizados nesta pesquisa. 44
Quadro 5 - Critérios de Inclusão e Exclusão. 45
Quadro 6 - Características teórico-metodológicas do tema 1. 59
Quadro 7 - Características teórico-metodológicas do tema 2. 60
Quadro 8 - Características teórico-metodológicas do tema 3. 61
Quadro 9 - Características teórico-metodológicas do tema 4. 63
Quadro 10 - Distribuição de frequências por escolaridade dos participantes do Tema 4. 64
Quadro 11 - Mapa da Literatura. 65
Quadro 12 - Descrição das pesquisas do subtema Pensamento Proporcional e Conhecimento Especializado para o Ensino. 68
Quadro 13 - Descrição das pesquisas do subtema estratégias e uso do pensamento proporcional 71
Quadro 14 - Tipos de Problemas nas pesquisas de Trevisan e Domingues (2017) e Silva, Cândido e Souza (2018). 72
Quadro 15 - Descrição das pesquisas do subtema pensamento proporcional e seu uso em situações da vida real. 75
Quadro 16 - Descrição das pesquisas do subtema jogos e apoios virtuais como alternativa para a revisão das 4 operações com números racionais. 76
Quadro 17 - Descrição das pesquisas do subtema Desempenho e Dificuldades dos Alunos dos Ensinos Médio e Superior nas quatro Operações com Números Racionais. 77
Quadro 18 - Exemplo de concepção intuitiva na adição de frações. 83
Quadro 19 - Descrição das pesquisas do subtema operações com números racionais e conhecimento especializado para o ensino. 85
Quadro 20 - Descrição das pesquisas do tema representações dos números racionais. 88
Quadro 21 - Características das pesquisas números racionais como parte-todo. 93
Quadro 22 - Características das pesquisas do subtema números racionais como quociente....99
Quadro 23 - Características das pesquisas do subtema números racionais como medidas....104

Quadro 24 - Porcentagem de acertos em alguns tópicos da pesquisa de Retana e Muñoz (2018). 106
Quadro 25 - Características das pesquisas do subtema números racionais como operadores. 109
Quadro 26 - Frequência de cada subconstructo nas questões do ENEM e os respectivos objetos do conhecimento. 110
Quadro 27 - Temas e Subtemas. 113
Quadro 28 - Concepções dos alunos do ensino médio e ensino superior acerca do conceito de número racional. 135
Quadro 29 - Características dos artigos selecionados. 150
Quadro 30 - Frequência das palavras-chave. 156
Quadro 31 - Exemplos de concepções procedimentais na soma e subtração de frações. 159
Quadro 32 - Exemplos de concepções procedimentais na multiplicação de frações. 159
Quadro 33 - Exemplos de concepções procedimentais na divisão de frações. 160
Quadro 34 - Exemplos de registros de representação do mesmo número racional. 162

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 - Distribuição de frequências por qualis. 50
Tabela 2 - Distribuição de frequências por escolaridade dos participantes. 51
Tabela 3 - Distribuição de frequências por cursos do ensino superior. 52
Tabela 4 - Distribuição de frequências da produção científica conforme as categorias do enfoque metodológico “Ensino-Aprendizagem”. 53
Tabela 5 - Distribuição de frequências da produção científica de acordo com procedimentos adotados para obtenção dos dados. 54
Tabela 6 - Distribuição de frequências da produção científica conforme a classificação do referencial teórico principal. 54
Tabela 7 - Distribuição de frequências conforme conteúdo principal dos artigos. 55
Tabela 8 - Palavras-Chave separadas por grupos. 56
Tabela 9 - Índice de acertos nas atividades de operações com frações. 78
Tabela 10 - Índices de acertos nas atividades de operações com decimais. 79
Tabela 11 - Distribuição de frequências conforme revistas de publicação dos artigos. 154
Tabela 12 - Palavras-chave separadas por grupos. 157

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

Alme	Acta Latinoamericana de Matemática Educativa
APM	Atividade Provocadora de Modelos
AV	Análise Vertical
AH	Análise Horizontal
BNCC	Base Nacional Comum Curricular
Bolema	Boletim de Educação Matemática
Capes	Capes Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior
EF	Ensino Fundamental
EM	Ensino Médio
Enem	Exame Nacional do Ensino Médio
EOS	Enfoque Ontossemiótico
Eric	Education Resources Information Center
ES	Ensino Superior
IFRJ	Instituto Federal do Rio de Janeiro
KMT	Conhecimento do Ensino de Matemática
Kot	Conhecimento dos Temas
MDC	Máximo Divisor Comum
MMC	Mínimo Múltiplo Comum
MTSK	Mathematics Teacher´s Specialised Knowledge
Naep	National Assessment of Educational Progress
OCDE	Organização para a Cooperação e Desenvolvimento Econômico
PCN	Parâmetros Curriculares Nacionais
Pisa	Programa Internacional de Avaliação de Estudantes
PMA	Pensamento Matemático Avançado
Relme	Reunión LAtionoamericana de Matemática Educativa
REMAT	Revista Eletrônica da Matemática
Revemat	Revista Eletrônica de Educação Matemática
RNP	Rational Number Project
Saeb	Saeb Sistema de Avaliação da Educação Básica
TAD	Teoria Antropológica do Didático
TCC	Teoria dos Campos Conceituais
TRRS	Teoria de Registros de Representação Semiótica

SUMÁRIO

AGRADECIMENTOS **3**

RESUMO **5**

ABSTRACT **7**

LISTA DE ILUSTRAÇÕES **9**

LISTA DE QUADROS **11**

LISTA DE TABELAS **13**

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS **14**

1 INTRODUÇÃO **18**

1.1 COMPREENSÃO CONCEITUAL E AS NOÇÕES DE CONCEITO MATEMÁTICO E CONCEPÇÃO MATEMÁTICA 18

1.2 QUESTÕES SOBRE A IMPORTÂNCIA E OBSTÁCULOS DA COMPREENSÃO CONCEITUAL ACERCA DE NÚMEROS RACIONAIS NA LITERATURA DE PESQUISA 20

1.2.1 Obstáculos na compreensão conceitual dos números racionais 20

1.2.2 Importância do conceito de número racional 25

1.3 AS ORIENTAÇÕES EDUCACIONAIS EM ÂMBITO NACIONAL E A EXPERIÊNCIA EM SALA DE AULA 26

1.4 QUESTÃO DE PESQUISA, OBJETIVOS E METODOLOGIA 30

1.5 ESTRUTURA DA TESE 33

2 CONFIGURAÇÃO TEÓRICO-METODOLÓGICA DESTA PESQUISA **34**

2.1 ESTADO DA ARTE COM PRESSUPOSTOS DA REVISÃO SISTEMÁTICA DE LITERATURA 34

2.2 PROCEDIMENTOS PARA UMA REVISÃO SISTEMÁTICA 37

2.2.1 Planejamento: delimitação do tema 37

2.2.2 Seleção: coleta e seleção dos dados 38

2.2.3 Extração e execução: Análise Descritiva e Análise dos Temas 40

2.3 PERCURSO E DESAFIOS. NATUREZA E DELINEAMENTO DA PESQUISA 41

2.4 PROCEDIMENTOS ADOTADOS NESTA PESQUISA 43

2.4.1 Delimitação do tema 43

2.4.2 Coleta dos dados: protocolo 45

2.4.3 Seleção dos dados 46

3 ANÁLISE DESCRITIVA **48**

3.1 ASPECTOS GERAIS DA PRODUÇÃO CIENTÍFICA 48

3.2 CARACTERÍSTICAS DO NÍVEL DE ESCOLARIDADE DOS PARTICIPANTES 51

3.3 CARACTERÍSTICAS TEÓRICO-METODOLÓGICAS DA PRODUÇÃO CIENTÍFICA 52

3.4 TENDÊNCIAS TEMÁTICAS: MAPA DA LITERATURA 55

3.4.1 Características dos conteúdos principais 55

3.4.2 Quais temáticas sobre o conceito de número racional no ensino médio e no ensino superior estão presentes nas pesquisas? 57
3.4.3 Tema 1: Razão e Pensamento Proporcional 58
3.4.4 Tema 2: Operações com Números Racionais 59
3.4.5 Tema 3: Representações dos Números Racionais 61
3.4.6 Tema 4: O Conceito de número racional e as suas Interpretações 62
3.5 MAPA DA LITERATURA 65
4 ANÁLISE DOS TEMAS 66
4.1 TEMA 1: RAZÃO E PENSAMENTO PROPORCIONAL 66
4.1.1 Subtema 1.1: Pensamento proporcional e conhecimento especializado para o ensino. 67
4.1.2 Subtema 1.2: Estratégias e uso do pensamento proporcional 71
4.1.3 Subtema 1.3: Pensamento proporcional e seu uso em situações da vida real 75
4.2 TEMA 2: OPERAÇÕES COM NÚMEROS RACIONAIS 76
4.2.1 Subtema 2.1: Jogos e apoios virtuais como alternativa para a revisão das quatro operações com números racionais. 76
4.2.2 Subtema 2.2: Desempenho e dificuldades dos alunos dos ensinos médio e superior nas quatro operações com números racionais. 77
4.2.3 Subtema 2.3: Operações com números racionais e conhecimento especializado para o ensino 85
4.3 TEMA 3: REPRESENTAÇÕES DOS NÚMEROS RACIONAIS 87
4.4 TEMA 4: O CONCEITO DE NÚMERO RACIONAL E AS SUAS INTERPRETAÇÕES 93
4.4.1 Subtema 4.1: Números racionais como parte-todo 93
4.4.2 Subtema 4.2: Números racionais como quociente 98
4.4.3 Subtema 4.3: Números racionais como medidas 103
4.4.4 Subtema 4.4: Números racionais como operadores 108
5 CONSIDERAÇÕES FINAIS 113
5.1 CONSIDERAÇÕES FINAIS TEMA 1: RAZÃO E PENSAMENTO PROPORCIONAL 114
5.2 CONSIDERAÇÕES FINAIS TEMA 2: OPERAÇÕES COM NÚMEROS RACIONAIS 119
5.3 CONSIDERAÇÕES FINAIS TEMA 3: REPRESENTAÇÕES DOS NÚMEROS RACIONAIS 122
5.4 CONSIDERAÇÕES FINAIS TEMA 4: O CONCEITO DE NÚMERO RACIONAL 125
5.4.1 Parte-todo 125
5.4.2 Quociente 128
5.4.3 Medida 130
5.4.4 Operador 132
5.4.5 Considerações sobre o tema 4 134
5.5 FINALIZANDO 134
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS 139

APÊNDICES **149**
APÊNDICE A - ESQUEMA COM OS SUBCONSTRUCTOS E AS IDEIAS FUNDAMENTAIS 149
APÊNDICE B - CARACTERÍSTICAS DOS ARTIGOS SELECIONADOS 150
APÊNDICE C - CARACTERÍSTICAS DAS REVISTAS DE PUBLICAÇÃO DOS ARTIGOS 154
APÊNDICE D - PALAVRAS-CHAVE 156
APÊNDICE E – EXEMPLOS DE CONCEPÇÕES PROCEDIMENTAIS REFERENTES AO SUBTEMA OPERAÇÕES COM NÚMEROS RACIONAIS 159
APÊNDICE F – BREVE RESUMO SOBRE O REFERENCIAL TEÓRICO DO TEMA REPRESENTAÇÕES 161
APÊNDICE G - RESUMO EXPANDIDO DAS PESQUISAS DO CORPUS SELECIONADO 164

1 INTRODUÇÃO

Esta pesquisa tem como objetivo realizar um Estado da Arte da produção de pesquisa na América Latina acerca do conceito de número racional. A finalidade é apontar quais concepções[1] os alunos evocam ao utilizar os números racionais, especialmente em situações de uso do conceito interpretado como parte-todo ou medida ou quociente ou operador ou razão.

Declaramos, desde já, a importância que atribuímos à *compreensão conceitual* do conhecimento matemático, expressão utilizada no título desta tese. Para esclarecer nosso entendimento sobre a *compreensão conceitual* e as noções de *conceito matemático* e *concepção matemática*, apresentamos, já no início dessa Introdução, as distinções elaboradas por Simon (2017).

1.1 COMPREENSÃO CONCEITUAL E AS NOÇÕES DE CONCEITO MATEMÁTICO E CONCEPÇÃO MATEMÁTICA

Distinguir *concepção matemática* de *conceito matemático*, que são construções teóricas em evolução, não é uma tarefa simples. Envolve outros termos, tais como: compreensão, significado, conhecimento e pensamento, que nem sempre são definidos de maneira precisa (SIMON, 2017).

Simon (2017) destaca que, na organização do pensamento para uma *compreensão conceitual*, os constructos *conceito matemático* e *concepção matemática* são fundamentais (SIMON, 2017, p. 119).

Para o autor,

> a compreensão da matemática não é redutível a definições e teoremas matemáticos (Vergnaud, 1997). Por exemplo, números racionais são definidos como números que podem ser expressos como $\frac{a}{b}$, onde a e b são inteiros, e b não é igual a 0. Essa definição pode ser aprendida, e os alunos podem usá-la para distinguir entre números racionais e números que não são números racionais. No entanto, a definição não fornece informações sobre o que significa entender frações ou razão. (SIMON, 2017, p. 121, tradução nossa)

Simon (2017) define *conceitos matemáticos* como "objetos matemáticos (mentais) e as relações entre esses objetos" (p. 121). Assim, o conceito abrange conhecimentos lógico-

[1] Utilizamos o termo concepções nesta tese conforme Simon (2017), que será explicitado em detalhes na seção 1.1.

matemáticos[2] e implica conhecer não só as relações entre os objetos, mas também a necessidade lógica das relações envolvidas (p. 122). De acordo com o autor, conceitos matemáticos

> são o resultado da abstração reflexiva e não o resultado de um processo de aprendizagem empírico. Os processos empíricos têm seu lugar na Matemática, por exemplo, como base para fazer uma conjectura. (...) um conceito matemático não é o resultado direto de um processo empírico. (SIMON, 2017, p. 122, tradução nossa)[3]

Deste modo, estabelecer um conceito matemático é um objetivo do processo de ensino-aprendizagem de qualquer tópico e, por isso, requer potencialmente um conjunto de intervenções instrucionais.

Por outro lado, uma *concepção matemática* é "um modelo explicativo usado para explicar habilidades e limitações observadas dos alunos de Matemática em termos de suas formas (inferidas) de saber" (SIMON, 2017, p. 120, tradução nossa). Desta maneira, a *concepção matemática* é "uma invenção de um pesquisador de uma maneira de saber de um aprendiz que produziria a resultados observados" (SIMON, 2017, p. 120, tradução nossa). Assim, a concepção é sempre um conhecimento inferido.

As *concepções matemáticas* servem para explicar um comportamento observado, sendo caracterizada como um modelo explicativo e não como um conceito matemático (SIMON, 2017, p. 125). Neste sentido, as *concepções matemáticas* podem ser entendidas como o resultado de um processo de aprendizagem empírico, e fornecem aos pesquisadores e professores ferramentas para entender o que alunos compreendem e perceber aspectos-chave de seu comportamento (p. 130).

Interessados nas concepções dos alunos do ensino médio e superior sobre o conceito de número racional, este é o olhar que adotamos nessa pesquisa.

No que segue, apresentamos, primeiramente, a discussão dos educadores matemáticos sobre essa complexidade.

---

[2] Simon (2017, p. 122) cita que Piaget distinguiu três tipos de conhecimento: físico (refere-se ao conhecimento das propriedades dos objetos físicos), lógico-matemático (refere-se ao conhecimento que acompanha logicamente outros aspectos do nosso conhecimento) e social (refere-se ao conhecimento que foi arbitrariamente determinado por um grupo social).

[3] O autor exemplifica com um cenário de classe, no qual foi solicitado aos alunos que usassem um elástico azul para fazer um quadrado de um tamanho designado em um geoplano. Em seguida, eles deveriam colocar um elástico vermelho em torno de metade do quadrado, obtendo o quadrado dividido em dois retângulos (realizado pela maioria) e o quadrado dividido em dois triângulos e justificaram que as duas respostas estavam corretas. A seguir, o autor perguntou: qual metade é maior? Aproximadamente um terço dos alunos respondeu uma das opções: a metade com retângulo, a metade com triângulo ou são iguais. Este cenário foi compartilhado com educadores matemáticos e solicitado que eles pensassem em uma intervenção de ensino para esta situação. Grande parte sugeriu cortar a metade triangular e sobrepô-la à metade retangular para demonstrar que as áreas são iguais. Os autores pontuam que "a intervenção proposta não promove a compreensão matemática que precisa ser aprendida" (SIMON, 2017, p. 121, tradução nossa).

1.2 QUESTÕES SOBRE A IMPORTÂNCIA E OBSTÁCULOS DA COMPREENSÃO CONCEITUAL ACERCA DE NÚMEROS RACIONAIS NA LITERATURA DE PESQUISA

O conceito de número racional é considerado por diversos pesquisadores como um dos mais complexos que as crianças encontram em seus anos iniciais da educação básica (ver, por exemplo, CHARALAMBOUS; PITTA-PANTAZI, 2005). Um dos grandes problemas é que as dificuldades de compreensão deste tipo de número, muitas vezes, acompanham os alunos durante toda a vida escolar, podendo persistir, até mesmo, em sua vida adulta.

1.2.1 Obstáculos na compreensão conceitual dos números racionais

Pesquisas sobre o conceito de número racional, de um modo geral, destacam obstáculos de natureza distinta ao longo do processo de ensino-aprendizagem, relacionados: i) à complexidade do conceito; ii) aos processos de pensamento dedutivo formal da Matemática; iii) aos processos de ensino; e iv) ao desenvolvimento cognitivo e à atitude afetiva e emocional dos alunos em relação à Matemática (DODERA et al., 2014). No que segue, discorremos sobre cada um desses obstáculos.

A complexidade do conceito de número racional

A complexidade do conceito faz referência: i) aos múltiplos significados que ele assume, dependendo do contexto em que está inserido: parte-todo, medida, quociente, operador e razão, – denominado por alguns autores como "conceito multifacetado" (BEHR et al., 1983); ii) às múltiplas ideias associadas: particionamento, *unitizing*, equivalência e ordem, noção de quantidade, noção multiplicativa e estruturas para somar e subtrair (MARTINIE, 2007; VENTURA, 2007; WHEELDON, 2008); iii) às múltiplas representações (figural – contínuo e discreto, simbólico – frações, decimais e porcentagem, e língua natural) (PARAOL e RODRIGUÊS, 2018).

Há consenso entre os pesquisadores de que um dos fatores predominantes da complexidade é sua natureza *multifacetada*[4] (subconstructos) (CHARALAMBOUS, 2007). A noção de subconstructo do conceito de número racional busca capturar a ideia principal sugerida no seu uso em determinado contexto, e as relações que são estabelecidas em sua

[4] Ser multifacetado exprime a ideia de apresentar distintos significados, dependendo da situação em que está inserido. Os termos utilizados para se referir a esta natureza multifacetada são variados: facetas, interpretações, personalidades, subconstructos ou significados. Nesta pesquisa escolhemos o termo subconstructo, utilizado por Behr et al (1983) e em alguns momentos utilizamos o termo interpretações.

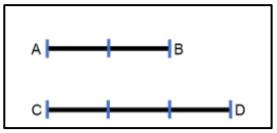
conceituação. Assim, resulta em diferentes significados do conceito a serem assumidos, dependendo da situação em que está inserido.

Ao longo do tempo, diferentes subconstructos foram considerados pelos pesquisadores, sendo que Kieren (1976, 1980)[5], Behr et al. (1983) são os autores mais citados. Behr et al. (1983) propõem interpretar o conceito de número racional de seis modos diferentes: parte-todo, decimal, razão, divisão (quociente), operador e medida.

Embora alguns pesquisadores proponham adicionar outros subconstructos, como podemos citar: probabilidade, coordenada linear ou porcentagem (ROMANATTO, 1997), os subconstructos parte-todo, quociente, medida, operador e razão têm resistido ao longo do tempo e têm sido considerados suficientes para a compreensão dos números racionais (BEHR; POST, 1992).

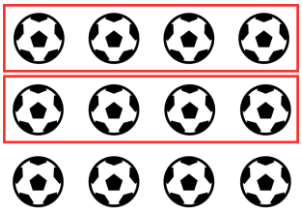
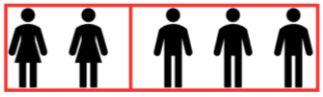
O Quadro 1 apresenta a ideia principal de cada um dos subconstructos, seguida de exemplos:

Quadro 1 - A complexidade do conceito de número racional e a noção dos subconstructos.

Subconstructos **Ideia principal**	**O que é?**	**Exemplos: $\frac{2}{3}$**
Parte-todo • Relação; • Comparação entre a parte e o todo, que é considerado unidade.	$\frac{a}{b}$ representa a relação entre b, o número de partes iguais em que o todo foi dividido (denominador) e a, o número das partes tomadas (numerador) (MAMEDE, 2015).	$\frac{2}{3}$ de uma pizza significa tomar duas partes das 3 partes de tamanhos iguais. Figura 1 - Exemplo parte-todo. Fonte: Apoio escolar[6].
Medida • Medida; • Comparação de uma grandeza com outra tomada como unidade.	Comparação entre duas grandezas (DAMICO, 2007). Envolve quanto há de uma quantidade em relação a uma unidade especificada dessa quantidade (BEHR et al., 1983).	Tomando-se o segmento $CD = 3$ como unidade de medida, quanto mede o segmento $AB = 2$? Figura 2 - Exemplo medida.  Fonte: Elaborada pela autora.

[5] Alguns afirmam que Kieren foi um dos pioneiros na distinção destes subconstructos, servindo de base para diversas pesquisas subsequentes sobre os números racionais (CAMPOS; RODRIGUÊS, 2007; WHEELDON, 2008). Para ele, os números racionais são: Frações (que podem ser comparadas, somadas, subtraídas, etc.; Frações decimais que formam uma extensão natural dos números naturais; Classes de equivalência de frações: $\left\{\frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{3}{6}, \ldots\right\}$ são números racionais; Razão de números, na forma $\frac{a}{b}$, onde a e b são inteiros e $b \neq 0$; Operadores multiplicativos; Elementos de um campo quociente ordenado e infinito. Há números da forma $x = \frac{a}{b}$, onde x satisfaz a equação $bx = a$; Medida ou pontos sobre a reta numérica (KIEREN, 1976).

[6] Apoio Escolar 24horas - Trabalhando com frações. Acesso em 04/02/2022.

Quociente • Resultado de uma operação de divisão; • Elementos de um campo quociente; • Associado à problemas de compartilhamento equitativo, agrupamentos, divisão.	$\frac{p}{q}$ representa a relação entre um número p de itens compartilhados igualmente entre um número q de destinatários. $\frac{p}{q}$ também representa a quantidade recebida por cada destinatário (MAMEDE, 2015). O quociente $\frac{p}{q}$ significa que p é dividido por q. É interpretado como o resultado de uma divisão entre dois números inteiros, partilha e divisão indicada e surgem nos contextos de compartilhamento equitativo (BEHR et al., 1983).	$\frac{2}{3}$ representa 2 barras de chocolate compartilhadas igualmente por três crianças ou $\frac{2}{3}$ pode representar a quantidade de chocolate recebida por cada criança. Figura 3 - Exemplo quociente. Fonte: Elaborada pela autora.
Operador • Função ou transformação aplicadas a algum número, objeto ou conjunto.	Alongar ou encurtar segmentos de linha; aumentar ou diminuir o número de itens de um conjunto de objetos discretos; ampliar ou reduzir uma figura (LAMON, 2008). Transformação: "uma ação que se deve realizar sobre um número, através do qual se transforma o seu valor (VENTURA, 2013, p. 44).	$\frac{2}{3}$ de 12 bolas. Figura 4 - Exemplo operador.  Fonte: Elaborada pela autora.
Razão • Comparação; • Índice comparativo de magnitudes relativas.	$\frac{p}{q}$ envolve uma comparação entre duas quantidades: p e q. Como tal, é visto como um índice comparativo de magnitudes relativas de 2 números (BEHR et al., 1983). Relação de duas quantidades, sendo necessário o raciocínio multiplicativo (CARPES; BISOGNIN, 2019).	Na sala de João, temos 2 meninas para 3 meninos: $\frac{2}{3}$ Figura 5 - Exemplo razão.  Fonte: Elaborada pela autora.

Fonte: Elaborado pela autora.

Esses subconstructos não são independentes e, explorar como eles se relacionam, além das similaridades e diferenças, pode facilitar generalizações do conceito. Uma compreensão de todos é o fundamento para a construção do conceito de número racional (KIEREN, 1976; LAMON, 2008).

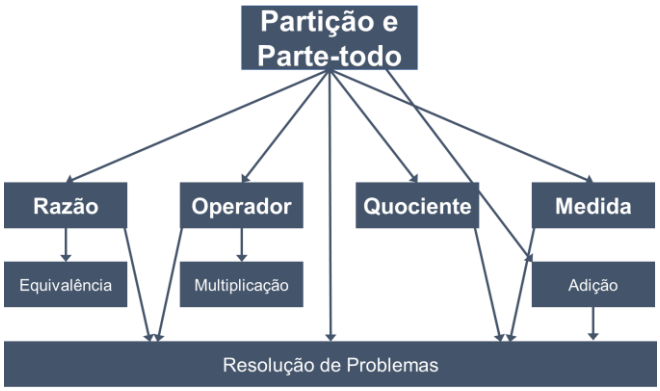
As múltiplas *ideias associadas* a esses subconstructos referem-se a ideias fundamentais, em torno das quais o conceito de número racional é desenvolvido. Elas interligam os subconstructos e são essenciais para uma compreensão significativa do conceito.

Behr et al. (1983) propuseram um modelo teórico[7], no qual os diferentes subconstructos estão interligados pelas ideias fundamentais (noção de partição, operações básicas de frações,

[7] Este modelo forneceu o fundamento teórico para o Rational Number Project (RNP) nos Estados Unidos. O RNP pode ser considerado o estudo mais abrangente sobre ensino-aprendizagem de números racionais: é um projeto de pesquisa e desenvolvimento curricular que envolve vários grupos de professores e alunos de pós-graduação de diferentes universidades interessados no ensino e aprendizagem dos números racionais (The Rational Number Project (archive-it.org).

noção de equivalência e resolução de problemas). Neste modelo, o fundamento é o processo de partição, como na Figura 6.

Figura 6 - Modelo teórico do processo de ensino-aprendizagem dos números racionais.



Fonte: Elaborado pela autora baseado em BEHR et al. (1983).

Posteriormente, alguns autores ampliaram essas ideias fundamentais, considerando outros elementos unificadores essenciais para uma compreensão significativa do conceito de número racional (MARTINIE, 2007; VENTURA, 2013; WHEELDON, 2008): particionamento[8], *unitizing*[9], noção de quantidade[10], noção multiplicativa, equivalência e ordem[11] e estruturas comuns para adicionar ou subtrair[12].

As múltiplas *representações* para uma mesma ideia, dizem respeito a ser possível a adoção de diferentes registros: figural, simbólico e língua natural. No registro figural, temos o contínuo e o discreto como possibilidades a serem estudadas. No registro simbólico, temos o numérico ou algébrico, que incluem as frações, os decimais e a porcentagem (PARAOL; RODRIGUÊS, 2018). E a linguagem natural é polissêmica por natureza. Uma das dificuldades que persiste ao longo de toda a escolarização é a conversão entre representações (DUVAL, 2008, 2012). Por exemplo: alguns alunos não percebem que ½ e 0,5 representam o mesmo número racional.

[8] "é o ato de quebrar ou fraturar um todo – é a ação por meio da qual as frações vêm a existência (...) é o processo de dividir um objeto ou objetos em um número de peças disjuntas e exaustivas." (LAMON, 2008, p. 90, tradução nossa).

[9] Perceber a multiplicidade de reagrupamento de quantidades em grupos de diferentes tamanhos: por exemplo, podemos pensar em 24 latas individuais como 1 caixa com 24 latas, 2 pacotes com 12 latas cada ou 4 pacotes de 6 latas cada (LAMON, 2008).

[10] A compreensão de que os números racionais na sua representação fracionária expressam uma relação entre numerador e denominador e que os procedimentos válidos para o conjunto dos números inteiros podem não ser válidos para os números racionais, são o fundamento de uma compreensão quantitativa de número racional (VENTURA, 2013; WHEELDON, 2008).

[11] A equivalência é um conceito complexo, porque envolve compreender que um mesmo número racional possui inúmeras representações equivalentes: "A equivalência é uma qualidade de equivaler. Ela subjaz o princípio da igualdade, mas não significa igual. É aquilo que apresenta o mesmo valor, respeitando-se a proporcionalidade" (VIZOLLI, 2006, p. 101, grifo do autor).

[12] Adicionar e subtrair frações é uma tarefa relativamente fácil quando há medidas comuns (WHEELDON, 2008).

Dos resultados das pesquisas estudadas e da experiência como professor, acreditamos que o conceito de número racional só pode ser compreendido de forma ampla, na articulação cognitiva das diversas representações, subconstructos e ideias fundamentais. Por este motivo, enfatizamos a importância de cada uma delas no decorrer desta Introdução.

Processos de pensamento dedutivo formal da Matemática

O segundo obstáculo, *os processos de pensamento dedutivo formal da Matemática*, relaciona-se à aplicação das propriedades e procedimentos operatórios dos números naturais para fazer inferências sobre os números racionais, por vezes denominada de viés do número natural[13] (VAN HOOF et al., 2014).

Acreditamos que o domínio do conceito de número racional envolve habilidades mais complexas do que o conhecimento sobre números inteiros (KIEREN, 1980):

> no caso da ampliação dos naturais aos racionais positivos, o professor tem que levar em conta que a criança, até certa altura da sua vida escolar, apenas reconhece como números os inteiros positivos, isto é, 1, 2, 3 etc. Assim, a aquisição da noção abstrata de número racional parece estar associada a um longo processo de construção e re-elaboração, quase que elemento a elemento. (MOREIRA, 2004, p. 96)

Assim, por vezes, buscamos amenizar os problemas e dar sentido à transição, destacando a insuficiência dos números naturais para solucionar determinadas situações-problema, tais como as que envolvem o conceito de medir, evidenciando a necessidade de um novo conjunto numérico, além de dar sentido à própria transição.

Processos de ensino

As dificuldades são relativas ao processo de aprendizagem e ao processo de ensino (NARDONI; CAMARA; POCHULU, 2015) e compreendem o terceiro obstáculo. Este obstáculo é caracterizado pela maneira mecanizada e procedimental como muitas vezes as frações são abordadas nos anos iniciais: ênfase na operacionalidade técnica, estratégias didáticas restritas, ênfase no significado parte-todo em detrimento de outros subconstructos igualmente importantes, além da falta de material e de ambientes adequados nas salas de aula, entre outros (BEHR et al., 1983). Quanto ao ensino, em particular do conceito de número racional, estudos apontam que profissionais priorizam algoritmos, em detrimento dos conceitos e significados, gerando apenas a memorização de regras, fórmulas e definições, acarretando esquecimento e dificuldades em associá-lo a problemas do cotidiano em que são utilizados

[13] Denominado de *number bias* por Van Hoof et al (2014).

(CAMPOS; RODRIGUÊS, 2007). Muitos autores destacam que o ensino de Matemática não tem conseguido que os alunos construam:

> um conceito de número racional que permita sua utilização mais tarde. As operações com racionais são, quando muito, mecanizadas em torno de algumas regrinhas básicas geralmente confundidas umas com as outras. (BROLEZI, 1996, p. 1)

Com isso, os alunos podem desenvolver habilidades em manipular os números racionais, sem ter uma compreensão clara do conceito e suas aplicações:

> Com as frações as aparências enganam. Às vezes as crianças parecem ter uma compreensão completa das frações e, ainda assim, não o têm. Elas usam os termos fracionais certos; elas falam sobre frações coerentemente; elas resolvem alguns problemas fracionais; mas diversos aspectos cruciais das frações ainda lhes escapam. De fato, as aparências podem ser tão enganosas que é possível que alguns alunos passem pela escola sem dominar as dificuldades das frações, e sem que ninguém perceba. (NUNES; BRYANT, 1997, p. 191)

Deste modo, o conhecimento dos professores (a maneira como eles aprenderam) e como ensinam podem levar a uma aprendizagem fragmentada dos conceitos e pautada em aspectos mecânicos, sem sua completa compreensão (JUSTULIN, 2016). Além disso, é um tema que muitos professores têm dificuldades de entender e, por consequência, de ensinar (GARCÍA; CABAÑAS-SÁNCHEZ, 2013).

Desenvolvimento cognitivo e atitude afetiva e emocional dos alunos em relação à Matemática

O quarto obstáculo, *desenvolvimento cognitivo e atitude afetiva e emocional dos alunos em relação à Matemática*, refere-se a um âmbito mais particular dos alunos em contextos institucionais, relacionado a sentimentos de tensão, ansiedade e medo do fracasso, gerando bloqueios de origem afetiva e repercutem no desempenho acadêmico da Matemática (DODERA et al., 2014).

1.2.2 Importância do conceito de número racional

A importância deste conceito também tem sido destacada por meio de diferentes aspectos: matemático, prático, psicológico e educacional[14] (BEHR et al., 1983; DAMICO, 2007).

Quanto ao aspecto *matemático*, sua importância é evidenciada por:

i) Sustentar o desenvolvimento do raciocínio proporcional e, mais tarde, tópicos da Matemática avançada, incluindo Álgebra, Geometria e Probabilidade (BEHR et al., 1983; CLARKE; ROCHE, 2009). Com relação a Álgebra, autores afirmam que o pensamento algébrico não se dissocia de uma compreensão do conceito de

[14] Será detalhado na seção 1.3 por meio das orientações educacionais.

número racional (BROWN; QUINN, 2007; DHLAMINI; KIBIRIGE, 2014; SIEGLER et al., 2012).

ii) Permitir aos alunos uma compreensão mais profunda e madura sobre o conhecimento conceitual do sistema numérico (STELZER et al., 2016) e apoiar a compreensão da extensão dos números racionais aos números reais.

iii) Manter seu caráter essencial na resolução de problemas, ou seja, muitos problemas da Matemática e de outras áreas do conhecimento (como Engenharia, Física, Química e Biologia) estão intrinsecamente relacionados a ideias sobre números racionais, e podem proporcionar um contexto ideal à aquisição de novos conceitos (BEHR et al., 1983; CABELLO; MERCADO, 2015; MULLER et al., 2020).

No aspecto *prático*, a compreensão e a manipulação dos números racionais surgem nas mais variadas situações cotidianas. Eles estão em toda parte: nos rótulos de garrafas, nas latas, nas caixas, nos ingressos, nas receitas, nos mercados, nos anúncios de jornais, nas bombas de gasolina etc. Inúmeros profissionais utilizam este tipo de número em suas atividades, tais como mestres de obras, cozinheiros, enfermeiros, comerciantes etc. Conceitos científicos como velocidade, temperatura, densidade são representados por números racionais.

Por fim, quanto ao aspecto *psicológico*, "os números racionais proporcionam uma rica arena na qual as crianças podem desenvolver e ampliar as estruturas mentais necessárias para o desenvolvimento intelectual continuado" (BEHR et al., 1983).

1.3 AS ORIENTAÇÕES EDUCACIONAIS EM ÂMBITO NACIONAL E A EXPERIÊNCIA EM SALA DE AULA

No aspecto educacional, a importância do conceito de número racional é notória no currículo proposto para a Educação Básica: é um dos tópicos transversais a quase todos os anos da escola básica. Isto fica claro na visão geral das habilidades relacionadas ao conceito de número racional ao longo do ensino fundamental, proposta atual da BNCC (Base Nacional Comum Curricular).

Verificamos que é um conceito presente desde o segundo ano, com as ideias de dobro, metade, triplo, terça parte, quarta parte, quinta parte e décima parte, de maneira intuitiva. A partir do quarto ano, as habilidades relacionadas ao conceito de número racional são mais enfatizadas e se concentram no quinto, sexto e sétimo anos, como no Quadro 2:

Quadro 2 - Visão geral das habilidades relacionadas ao conceito de número racional do ensino fundamental.

2°	**3°**	**4°**	**5°**	**6°**	**7°**	**8°**	**9°**

EF02MA08	EF03MA09	EF04MA09	EF05MA02	EF06MA01	EF07MA02	EF08MA01	EF09MA05
		EF04MA10	EF05MA03	EF06MA02	EF07MA03	EF08MA04	EF09MA07
			EF05MA04	EF06MA07	EF07MA04	EF08MA05	
			EF05MA05	EF06MA08	EF07MA05		
			EF05MA06	EF06MA09	EF07MA06		
			EF05MA07	EF06MA10	EF07MA08		
			EF05MA08	EF06MA11	EF07MA09		
			EF05MA12	EF06MA13	EF07MA10		
			EF05MA13	EF06MA15	EF07MA11		
					EF07MA12		

Fonte: Elaborado pela autora a partir de BRASIL (2017).

A atenção especial dada nas orientações acerca deste conceito evidencia-se desde o início da apresentação do tema:

> (...) a construção do conceito de número racional pressupõe uma organização de ensino que possibilite experiências com diferentes significados e representações, o que demanda razoável espaço de tempo; trata-se de um trabalho que apenas será iniciado no segundo ciclo do ensino fundamental e consolidado nos dois ciclos finais. (BRASIL, 2017, p. 69)

No texto do PCN (Parâmetros Curriculares Nacionais) destaca-se que os números racionais compreendem um novo campo numérico e, por isso, "supõem rupturas com as ideias construídas pelos alunos acerca dos números naturais e, portanto, [seu estudo] demanda tempo e uma abordagem adequada" (BRASIL, 1997, p. 67). Alguns destes obstáculos são (BRASIL, 2017, p. 67):

- **Múltiplas representações equivalentes:** no conjunto dos números naturais temos que cada número tem apenas uma representação. No caso dos números racionais, um número pode ser representado de múltiplas formas. Exemplo: 2, $\frac{4}{2}$, $\frac{8}{4}$, $\frac{10}{5}$ são diferentes representações do mesmo número;
- **Comparação:** no conjunto dos naturais, a comparação de maior e menor é perceptível, também, visualmente. No conjunto dos números racionais esta relação de comparação é mais complexa. Exemplo: $3 > 2$, mas $\frac{1}{3} < \frac{1}{2}$;
- **Tamanho da escrita:** no conjunto dos naturais o "tamanho" da escrita do número pode ser usado para indicar ordem de grandezas. Entretanto, no conjunto dos números racionais não acontece da mesma forma. Exemplo: $100000 > 100$ e $1{,}000001 < 1{,}001$;
- **Operação de multiplicação:** Na operação de multiplicação dos números naturais, espera-se encontrar sempre um número maior que um dos fatores. Já no conjunto dos números racionais, o produto de dois números pode resultar em

um número menor que um dos fatores. Exemplo: $2 * 3 = 6$ e $\frac{1}{2} * 3 = \frac{3}{2}$ é um resultado menor que três;

- **Sucessor e antecessor:** no conjunto dos números naturais podemos falar em sucessor e antecessor, mas isto não faz sentido no conjunto dos números racionais. Perceber que entre dois números racionais sempre é possível encontrar outro racional não é algo trivial.

Além disso, a capacidade de resolver problemas com os números racionais depende do conjunto de ideias fundamentais e suas inter-relações, como destaca a BNCC:

> (...) os diferentes campos que compõem a Matemática reúnem um conjunto de ideias fundamentais que produzem articulações entre eles: equivalência, ordem, proporcionalidade, interdependência, representação, variação e aproximação. Essas ideias fundamentais são importantes para o desenvolvimento do pensamento matemático dos alunos e devem se converter, na escola, em objetos de conhecimento. (BRASIL, 2017, p. 268)

Ventura (2013) relacionou essas ideias fundamentais com os subconstructos em um esquema que consta no Apêndice A.

De nossa experiência em sala de aula, concordamos que embora a importância deste conceito ao longo de toda a escolarização seja destacada, alunos do ensino médio e do ensino superior "apresentam dificuldades no trato com as frações e demonstram não conhecer aspectos relevantes do conceito de número racional, o que acarreta prejuízos à compreensão de novos conceitos matemáticos" (CAMPOS; RODRIGUÊS, 2007, p. 70), como por exemplo o conceito de número irracional.

Tais dificuldades podem ser comprovadas em minha experiência como docente, que traz evidências sobre elas, mesmo que em nível local. É notório em minha prática docente que as dificuldades com este conceito persistem ao longo de toda a escolarização e, inclusive, ao final desta. Como professora de Matemática há mais de dez anos, tenho percebido que os alunos chegam ao ensino médio sem compreender o campo dos números racionais. O que normalmente percebo, é que eles expressam compreensões limitadas e fragmentadas deste conceito, não conseguindo estabelecer relações entre as principais ideias.

Tais dificuldades são perceptíveis ainda no ensino superior. Há inúmeros relatos que me surpreendem, como o de uma aluna de um curso de licenciatura em Química. A estudante ficou surpresa quando descobriu que poderia realizar a operação de $\frac{3}{5} + 1$, substituindo o 1 por $\frac{5}{5}$. Sua reação ao saber foi: "Nossa, por que nunca me falaram isso antes? Assim, é muito mais fácil entender", referindo-se ao algoritmo da adição usando o MMC.

Diversos professores do ensino médio relatam que um dos tópicos que é empecilho para o processo de ensino aprendizagem de novos conteúdos é o conceito de número racional, em especial, na forma fracionária.

Além das situações em sala de aula, estas dificuldades com o conceito são confirmadas ao analisar os dados das avaliações da educação, tais como o Saeb (Sistema de Avaliação da Educação Básica). Por exemplo, no descritor 22 (identificar e localizar números racionais representados na forma decimal na reta numérica), os acertos das questões oscilaram entre 35% e 6%. No descritor 24 (identificar fração como representação que pode estar associada a diferentes significados), houve uma variação de acertos das questões entre 80% e 35% (BRASIL, 2002, p. 26).

Notamos que as dificuldades com o ensino destes números não são exclusivas do Brasil, e são de longa data registradas e estudadas internacionalmente. Os resultados do Naep (National Assessment of Educational Progress)[15] apontam que as crianças apresentam dificuldades significativas para aprender e aplicar os conceitos dos números racionais. Por exemplo:

- Apenas 29% dos estudantes de dezessete anos dos Estados Unidos escolheram 0,029 como equivalente a $\frac{29}{1000}$ (KLOOSTERMAN, 2010)[16].
- 50% dos alunos da oitava série não conseguiram colocar em ordem as frações $\frac{2}{7}, \frac{5}{9}, \frac{1}{12}$, do menor para o maior (TIAN; SIEGLER, 2016).

No contexto argentino, 41,4% dos alunos do sexto ano não conseguem resolver problemas relacionados ao campo multiplicativo com frações simples e apenas 19,7% conseguem identificar diferentes representações de frações e reconhecer a equivalência entre elas (STELZER et al., 2019).

Diante desta problemática referente ao processo de ensino-aprendizagem dos números racionais no ensino fundamental, inúmeras pesquisas têm se preocupado com esta temática, e já existe uma literatura densa envolvendo os alunos do ensino fundamental.

A conclusão de muitos estudos é que uma compreensão conceitual dos números racionais não parece ser compartilhada por grande parte dos alunos dos anos finais do ensino fundamental (MCMULLEN; VAN HOOF, 2020) e os problemas no processo de ensino-

[15] A Naep é a maior avaliação nacional representativa e contínua de alunos de escolas públicas e privadas dos Estados Unidos. Tem a finalidade de averiguar o que os alunos sabem em várias disciplinas em todo o país, estados e em alguns distritos urbanos. A Naep fornece informações importantes sobre o desempenho acadêmico dos alunos desde 1969 e tem sido uma medida do desempenho dos alunos em todo o país em Matemática, leitura, ciência entre outros (Retirado de: The Nation's Report Card | NAEP (ed.gov), acesso em 05/06/2021).

[16] Resultado referente ao ano de 2004. Em 1978 este percentual era de 61,6%.

aprendizagem deste conceito “persistem longamente, não encontrando, por vezes, possibilidades de superação ao longo do ensino básico” (BERTONI, 2009, p. 211).

Há um reconhecimento de que a construção do conceito de número racional exige um longo período de tempo para se desenvolver e sua construção se consolida ao longo de toda a escolarização, e até mesmo após (CAMPOS; RODRIGUÊS, 2007). Além disso, “(...) o trabalho com números racionais, começando com os aspectos experimentais até os formais, não se esgota no ciclo do ensino fundamental, não podendo ser considerado, no ensino médio e superior, como um objetivo já atingido” (NACARATO, 2004, p. 63).

Acrescentamos que,

> os dados da Avaliação Nacional mostraram (Naep, 1983) que, um desempenho razoavelmente qualificado com números, não é amplamente alcançado até o ensino médio. Se a competência requer anos de aprendizado, estudos de alunos mais velhos e avançados também são necessários. (SMITH, 1995, p. 8, tradução nossa)

Logo, há carência de pesquisas que tenham como público-alvo o ensino médio e o ensino superior com o conceito de número racional (MCMULLEN; VAN HOOF, 2020) e parece haver uma expectativa compartilhada entre os educadores e pesquisadores, de que muitos alunos concluem o ensino fundamental sem uma compreensão completa do conceito e sem saber aplicá-los nas mais variadas situações da vida real.

Exatamente esta percepção das dificuldades dos alunos que me motivou a propor esta pesquisa de doutorado, para conhecer a natureza e origem.

Encerramos este capítulo na próxima seção, enunciando a questão de pesquisa e a estrutura da tese.

1.4 QUESTÃO DE PESQUISA, OBJETIVOS E METODOLOGIA

Meu interesse por investigar questões referentes ao ensino e à aprendizagem dos números racionais no ensino médio e no ensino superior, é motivado pelos seguintes aspectos:

i. Número racional é um conceito cognitivamente complicado de ensinar e aprender, tendo em vista sua natureza multifacetada, as diversas ideias associadas e as múltiplas representações.
ii. Alunos brasileiros têm uma longa história de dificuldades de compreensão com este tipo de número em testes padronizados e na sala de aula.
iii. Número racional é um dos conceitos mais importantes a serem estudados, possuindo influências em outros conceitos (raciocínio proporcional), outros tópicos da Matemática (Álgebra) e outras grandes áreas do conhecimento (Física, Química e Biologia).

iv. As dificuldades com este tipo de número se prolongam ao longo de toda a escolarização.

Diante disto, o objetivo central desta pesquisa é realizar um Estado da Arte sobre a produção da pesquisa na América Latina, tendo como tema 'a compreensão conceitual dos números racionais nos ensinos médio e superior', com procedimentos de uma Revisão Sistemática de Literatura como método e delimitando o período de busca de 2011 a 2021.

Duas questões centrais orientaram esta pesquisa e resumimos da seguinte forma:

- Quais temáticas sobre o ensino de números racionais estão presentes nas pesquisas analisadas?[17]
- Quais concepções os alunos do ensino médio e do ensino superior evocam em situações com números racionais, interpretando-os como parte-todo, medida, quociente, operador e razão?[18]

Esta pesquisa caracteriza-se como bibliográfica e descreve os modos que alunos do ensino médio e do ensino superior compreendem o conceito de número racional em suas diversas representações, por meio das concepções apresentadas por eles, discutindo traços de suas origens e da sua natureza.

Este tipo de pesquisa fornece uma visão ampla do que tem sido desenvolvido na área em questão, por meio dos resultados de análise do corpus selecionado, no sentido de trazer uma retrospectiva, além de apontar perspectivas futuras em um sentido prospectivo. Os aspectos teórico-metodológicos estão descritos no capítulo 2.

Nosso objetivo principal está relacionado a identificar as *concepções matemáticas* acerca do conceito de número racional, que nos fornecem ferramentas para entender a compreensão matemática pelos alunos. O desafio colocado por Simon (2017) é especificar uma concepção matemática que dê conta do conjunto de comportamentos observados (p. 131).

É importante destacar que, quando buscamos identificar as concepções matemáticas dos alunos, estamos interpretando a maneira como os autores explicaram as habilidades e limitações observadas dos alunos em termos de suas formas (inferidas) de saber. Isto é, não estamos interpretando diretamente os dados empíricos dos alunos, mas sim o que os autores interpretaram desses dados. Esse é o olhar que adotamos nessa pesquisa, interessados nas concepções dos alunos do ensino médio e do ensino superior sobre o conceito de número racional.

[17] Esta questão será respondida no capítulo 3.
[18] Esta questão será respondida no capítulo 4.

Acreditamos que os *conceitos matemáticos* e as *concepções matemáticas* são elementos-chave para articular os objetivos da aprendizagem, para caracterizar o conhecimento dos alunos acerca do conceito de número racional ao longo da escolarização, organizar e dar sentido aos dados obtidos por meio dos artigos analisados e fornecer componentes essenciais nas trajetórias de aprendizagem: "o poder no uso desses dois constructos deriva de seu potencial para representar um nível de análise mais profundo do que uma descrição ou categorização dos comportamentos dos alunos ou das tarefas que eles podem resolver" (SIMON, 2017, p. 134). Por outro lado, conhecer o *conceito matemático* fornece um objetivo específico para uma intervenção pedagógica (SIMON, 2017, p. 131).

A intenção desta pesquisa de promover um diálogo com aspectos educacionais e a sala de aula atual na escola básica, leva à proposição dos seguintes objetivos específicos:

i. Identificar nas pesquisas analisadas as expectativas da aprendizagem enunciadas nos documentos da BNCC para cada concepção do conceito de número racional elencada.

ii. Destacar o conjunto de intervenções pedagógicas identificadas nas pesquisas, com a finalidade de promover experiências e oportunidades para tratar as inconsistências entre o conceito e as concepções que emergiram.

Em síntese, incluímos:

iii. Descrever as concepções que alunos do ensino médio e ensino superior apresentam ao lidar com os números racionais, discutindo traços de suas origens e sua natureza;

Este último objetivo específico busca respostas para a segunda questão de pesquisa e inclui descrever[19]:

- as concepções associadas aos subconstructos parte-todo, medida, quociente, operador e razão;
- as estratégias dos alunos ao utilizar os subconstructos parte-todo, medida, quociente, operador e razão;
- a frequência e familiaridade com que os alunos utilizam determinado subconstructo;

[19] Utilizamos uma visão dos racionais que se associa a Kieren (1976) e Behr et al. (1983), mas difere de outros autores, como por exemplo, da matemática realista ou *math in context*.

- os modos com que os alunos entendem as múltiplas representações dos números racionais, identificando tipos de registro de representação que os alunos evocam com maior ou menor frequência, caso existam.

Por fim, buscamos reconhecer os pontos de consenso e divergência entre as pesquisas e sugerir o desenvolvimento de pesquisas futuras, por meio das lacunas identificadas.

Acreditamos que uma pesquisa deste tipo constitui-se um campo fértil, permitindo comparar e contrastar diferentes resultados a respeito dos conceitos, produzindo novos resultados (MENDUNI-BORTOLOTI; BARBOSA, 2017). O modelo de sistematização utilizado é relevante pelas implicações potenciais que permite gerar ao longo do próprio processo de ensino-aprendizagem do conceito de número racional nos anos iniciais.

1.5 ESTRUTURA DA TESE

Uma Revisão Sistemática de Literatura rigorosa precisa atender a dois aspectos importantes: i) documentar claramente quais os passos que foram executados; ii) trazer uma contribuição acadêmica (OKOLI, 2019).

Para o primeiro aspecto, o capítulo 2 apresenta nosso entendimento sobre o Estado da Arte com pressupostos de uma Revisão Sistemática de Literatura no campo da Educação Matemática, descrevendo as etapas definidas para sua execução e o protocolo adotado para selecionar os textos que a compõem, bem como os desafios enfrentados, entraves e mudanças necessárias que ocorreram ao longo desta pesquisa.

Com relação ao segundo item, os capítulos 3 e 4 apresentam os principais resultados da análise dos artigos que compõem esta revisão acerca do conceito de número racional. Apesar de ser uma temática amplamente discutida por teóricos da Educação Matemática, o produto das diversas investigações a respeito dos números racionais não tem respondido de maneira significativa a questões colocadas ao longo do processo de ensino-aprendizagem (ver, por exemplo, KONIC, 2019). Konic (2019) aponta para a necessidade de indagar sobre a persistência desta problemática na aprendizagem. Um outro fator, é que grande parte dos resultados dessas pesquisas não chega até os professores das séries iniciais, para que estes conheçam as problemáticas, as concepções dos alunos e como propor trajetórias didáticas bem fundamentadas (KONIC, 2019).

Acrescentamos a esses capítulos as considerações finais no capítulo 5, apontando para reflexões a respeito da temática central desta tese: a compreensão do conceito de número racional.

2 CONFIGURAÇÃO TEÓRICO-METODOLÓGICA DESTA PESQUISA

> A investigação qualitativa emprega diferentes concepções filosóficas; estratégias de investigação; e métodos de coleta, análise e interpretação dos dados. (...) os procedimentos qualitativos baseiam-se em dados de texto e imagem, têm passos singulares na análise dos dados e se valem de diferentes estratégias de investigação. (CRESWELL, 2010, p. 206)

Muitos pesquisadores acreditam ser impossível realizar uma investigação a respeito do ensino e aprendizagem da Matemática sem uma metodologia clara e previamente estabelecida. Acreditamos ser fundamental adotar uma metodologia interrelacionada com um conjunto de princípios teóricos e com as questões de pesquisa (RADFORD, 2015), que segue neste capítulo, assim como o percurso trilhado.

Esta pesquisa caracteriza-se como bibliográfica e visa contribuir de maneira mais ampla, por meio do desenvolvimento de um Estado da Arte com pressupostos de uma Revisão Sistemática de Literatura[20], com uma análise da produção de artigos indexados nas principais bases de dados. Assim, esta pesquisa tem a finalidade de conhecer a produção do conhecimento e mapear, descrever, sistematizar e discutir a produção de pesquisa acadêmica acerca da compreensão conceitual de números racionais após o ensino fundamental.

Consideramos relevante conceituar esta modalidade de pesquisa e apresentar os processos metodológicos adotados, que seguem nas seções 2.1 e 2.2.

Na seção 2.3 é apresentada a natureza e delineamento desta pesquisa, assim como o percurso trilhado, os problemas enfrentados devido à pandemia da Covid-19 e as mudanças necessárias para a realização desta tese. Na seção 2.4 estão descritos os procedimentos adotados para a realização de uma Revisão Sistemática de Literatura.

2.1 ESTADO DA ARTE COM PRESSUPOSTOS DA REVISÃO SISTEMÁTICA DE LITERATURA

Mendes e Pereira (2020) consideram que a diferença entre Estado da Arte e Estado do Conhecimento “se estabelece a partir de um nível de alcance de busca de material (no Estado

[20] A Revisão Sistemática é muito utilizada na área da Saúde e ainda temos poucos estudos que apontem para um modelo a ser seguido para a área de Ensino e Educação Matemática. Além disso, atualmente outras áreas de pesquisa têm se interessado por este tipo de revisão e têm proposto guias, artigos e pesquisas voltadas para essas outras áreas. Esse é o caso de Okoli (2019) para a área de Sistemas de Informação e Mendes e Pereira (2020) para a área de Ensino e Educação Matemática. Por este motivo, utilizamos pesquisas da área da Saúde (CORDEIRO et al., 2007; GALVÃO; SAWADA; TREVIZAN, 2004; PATINO; FERREIRA, 2018; SAMPAIO; MANCINI, 2007; VICTOR, 2008), as orientações em Creswell (2010) e os artigos de Okoli (2019) e Mendes e Pereira (2020) para apresentar um modelo de Revisão Sistemática para a Educação Matemática que foi utilizado nesta pesquisa e é descrito neste capítulo.

da Arte) e a forma de pesquisar (Estado do Conhecimento)" (MENDES; PEREIRA, 2020, p. 202). Além disso, é possível termos um Estado da Arte com pressupostos da Revisão Sistemática de Literatura para a busca dos trabalhos (MENDES; PEREIRA, 2020), que é a abordagem adotada nesta pesquisa, especificada a seguir.

O Estado da Arte e a Revisão Sistemática de Literatura, em muitos momentos se inter-relacionam com objetivos em comum. Por exemplo, ambas têm o objetivo de fazer um levantamento bibliográfico da produção acadêmica sobre determinado tema, por meio de um mapeamento, no sentido de inventariar, sistematizar, compilar, descrever, analisar e avaliar a produção de pesquisas acadêmicas.

Melo (2006) afirma que pesquisas caracterizadas como Estado da Arte:

> buscam compreender o conhecimento acumulado, sobretudo quando se realiza um mapeamento, além de inventariar, sistematizar, compilar, descrever, analisar e avaliar a produção científica numa determinada área de conhecimento, apontando tendências teórico-metodológicas e temáticas mais freqüentes e problemas investigados. (MELO, 2006, p. 62)

Em uma Revisão Sistemática de Literatura, o termo sistemática é usado porque as pesquisas são selecionadas com critérios preestabelecidos. Ou seja, a Revisão Sistemática de Literatura tem como principal finalidade selecionar, sintetizar e articular os principais estudos acerca de determinada temática, com etapas bem definidas (VICTOR, 2008). Cordeiro et al. (2007) definem a Revisão Sistemática como:

> (...) um tipo de investigação científica que tem por objetivo reunir, avaliar criticamente e conduzir uma síntese dos resultados de múltiplos estudos primários. Ela também objetiva responder a uma pergunta claramente formulada, utilizando métodos sistemáticos e explícitos para identificar, selecionar e avaliar as pesquisas relevantes, coletar e analisar dados de estudos incluídos na revisão. (CORDEIRO et al., 2007, p. 429)

Este tipo de revisão "ganha o adjetivo sistemática se for baseada em uma questão claramente formulada, identifica estudos relevantes, avalia sua qualidade e resume as evidências por meio de metodologia explícita" (KHAN et al., 2003, p. 118, tradução nossa). Fink (2014) destaca que tem como características ser (FINK, 2014):

- *sistemática:* aspecto chave que segue uma abordagem metodológica bem definida;
- *explícita:* os procedimentos utilizados devem ser bem claros;
- *abrangente:* deve incluir todo o material relevante já publicado;
- *reprodutível:* outros que desejam seguir esta mesma abordagem devem conseguir reproduzi-la.

Desta maneira, entendemos que a Revisão Sistemática de Literatura cumpre dois papéis principais nesta tese:

- **Retrospectivo:** no sentido de apontar e mapear o que já foi pesquisado acerca de determinado tema;
- **Sistemático:** no sentido de ter passos predefinidos bem estabelecidos.

Por outro lado, entendemos e achamos importante destacar que o Estado da Arte não é apenas uma revisão de estudos anteriores. Haddad (2002), por exemplo, afirma que:

> os estudos do tipo Estado da Arte permitem, num recorte temporal definido, sistematizar um determinado campo de conhecimento, reconhecer os principais resultados da investigação, identificar temáticas e abordagens dominantes e emergentes, bem como lacunas e campos inexplorados abertos a pesquisas futuras. (HADDAD et al., 2000, p. 4)

Mais do que isto, um Estado da Arte busca "identificar as convergências e divergências, as relações e arbitrariedades, as aproximações e contrariedades existentes nas pesquisas e apresentam indícios e compreensões do conhecimento a partir de estudos acadêmicos" (MELO, 2006, pp. 62–63).

Dessa forma, entendemos que o Estado da Arte cumpre dois papéis principais nesta tese:

- **Prospectivo:** no sentido de "olhar para o futuro a partir de traços e antecedentes imediatos do cenário atual da pesquisa" (MELO, 2006, p. 62) e assim, apontar para as lacunas identificadas, as direções de interesse que emergiram e os campos ainda não explorados abertos a pesquisas futuras.
- **Comparativo:** no sentido de identificar convergências e divergências, aproximações e arbitrariedades.

Ao estabelecermos o diálogo entre os autores, é possível obtermos resultados que não poderíamos conseguir sem a integração das pesquisas selecionadas (MENDUNI-BORTOLOTI; BARBOSA, 2017).

Entendemos que, no caso de uma pesquisa caracterizada como Estado da Arte e de propostas de Revisão Sistemática de Literatura, uma complementa a outra. Neste sentido, buscamos entrelaçar os objetivos das duas propostas, com a finalidade de apresentar um mapeamento retrospectivo, de maneira *sistemática* e *comparativa* das pesquisas acerca do tema conceito de número racional ao longo dos últimos dez anos, além de apontar perspectivas futuras às pesquisas sobre o tema.

Em uma pesquisa bibliográfica com esse planejamento, os objetos da investigação são os estudos primários selecionados de maneira sistemática e definidos previamente, compondo um corpus de pesquisa a ser analisado.

Referenciados nos autores desta seção, apresentamos na seção a seguir os procedimentos para a sua realização.

2.2 PROCEDIMENTOS PARA UMA REVISÃO SISTEMÁTICA

Sintetizamos os procedimentos adotados para a busca e organização dos estudos sobre determinado tópico no Quadro 3, a partir da leitura de diversos autores:

Quadro 3 - Procedimentos para uma Revisão Sistemática de Literatura.

Planejamento[21]	Delimitação do tema (2.2.1)	Identificar o tópico, definir a questão de pesquisa e o objetivo.
		Identificar as palavras-chave; escolher os descritores que serão utilizados nas buscas e os bancos de dados que serão utilizados.
Seleção	Coleta dos dados (2.2.2)	Selecionar os bancos de dados computadorizados que serão utilizados nas buscas.
		Estabelecer critérios de inclusão e exclusão, com a finalidade de selecionar apenas os textos adequados ao objetivo.
		Realizar as buscas em bibliotecas e banco de dados computadorizados.
	Seleção dos dados (2.2.2)	Ler os títulos e resumos inicialmente e fazer uma seleção prévia.
		Selecionar os textos mais relevantes para responder à questão de pesquisa, aplicando os critérios de inclusão e exclusão.
Extração	Análise descritiva (2.2.3)	Resumir os textos selecionados.
		Realizar a categorização dos artigos.
		Organizar um mapa da literatura.
Execução	**Apresentação da Revisão Sistemática de Literatura e Análise dos Temas (2.2.3)**	Reunir de forma estruturada e organizada por conceitos mais relevantes ou de maneira temática as ideias presentes nos textos selecionados. Colocar os autores em diálogo.
		Sugerir como o estudo pode constituir uma contribuição ao campo de pesquisa.

Fonte: Elaboração da autora baseada em (CORDEIRO et al., 2007; CRESWELL, 2010; GALVÃO; SAWADA; TREVIZAN, 2004; PATINO; FERREIRA, 2018; SAMPAIO; MANCINI, 2007; VICTOR, 2008).

Pode haver distinções nas etapas acima, mas destacamos a importância de documentar os procedimentos adotados durante o desenvolvimento da pesquisa, sendo este um aspecto extremamente relevante para manter o rigor (OKOLI, 2019).

A seguir, o detalhamento de cada uma das etapas enunciadas no Quadro 3.

2.2.1 Planejamento: delimitação do tema

Definir o tópico, a questão de pesquisa e o objetivo são etapas essenciais para o bom desenvolvimento de qualquer tipo de pesquisa, sendo primordiais tanto para seu desenvolvimento, quanto para chegar ao objetivo principal (OKOLI, 2019).

[21] Os termos planejamento, seleção, extração e execução foram retirados de Okoli (2019).

Quando elaborados logo no início, essas etapas têm grande influência no desenvolvimento da Revisão Sistemática de Literatura que, por sua vez, pode modificar as intenções iniciais do projeto. Por exemplo, poderíamos estar enunciando questões já respondidas, ou propondo um tópico de estudo já muito explorado.

Creswel (2010) explica que o tópico a ser pesquisado "é o tema ou assunto de um estudo proposto. (...) torna-se a ideia central a respeito da qual se vai aprender ou explorar" (CRESWELL, 2010, pp. 48–49) e sugere descrevê-lo com poucas palavras.

Já a questão central da pesquisa deve ser ampla e "pede uma exploração do fenômeno ou do conceito central em um estudo" (CRESWELL, 2010, p. 160). São questões que o pesquisador deve responder para entender ou explicar o problema de pesquisa e "deve resultar em uma declaração de uma ou duas frases que definem o público-alvo da revisão, o propósito e a finalidade" (OKOLI, 2019, p. 14).

É necessário dar a devida atenção a esta etapa, pois norteará toda a busca pelos textos que irão compor o *corpus* e o sucesso das demais etapas.

Por sua vez, o contato com a literatura de pesquisa pode sugerir alternativas ao expor resultados e questões em aberto, e ainda alterar a questão formulada inicialmente, o que aponta para a importância de buscarmos um enunciado claro da questão de pesquisa sem cristalizá-lo e torná-lo impermeável a mudanças.

Já as palavras-chave e os descritores podem emergir da delimitação do tópico ou até mesmo de leituras preliminares, sendo essenciais para a realização das buscas nos bancos de dados.

2.2.2 Seleção: coleta e seleção dos dados

Uma Revisão Sistemática de Literatura requer que tanto a coleta quanto a seleção sejam bem executadas para ser possível identificar e analisar as pesquisas mais relevantes sobre o assunto em questão.

Nesta etapa da coleta de dados é necessário definir como e em quais bases de dados as buscas serão realizadas, além das prioridades que serão estabelecidas.

Para isto, a criação de um protocolo prévio torna-se crucial, garantindo a qualidade (DONATO; DONATO, 2019; OKOLI, 2019). Tal protocolo deve conter os descritores da pesquisa, as bases de dados, os critérios de inclusão e exclusão e as etapas a serem seguidas (DONATO; DONATO, 2019; OKOLI, 2019): "O protocolo é um componente essencial no processo de revisão sistemática e ajuda a garantir a consistência, a transparência e a integridade" (DONATO; DONATO, 2019, p. 228).

As buscas em bancos de dados computadorizados “podem proporcionar um acesso rápido a milhares de revistas, textos de conferências e materiais sobre muitos tópicos diferentes” (CRESWELL, 2010, p. 57).

Além da escolha apropriada da base de dados na qual a temática esteja inserida, uma busca eficaz demanda uma estratégia que utilize termos adequados (SAMPAIO; MANCINI, 2007).

Também é importante estabelecer uma prioridade nas buscas, levando em conta quais os tipos de literatura serão escolhidos (CRESWELL, 2010). Tal prioridade pode estar associada aos critérios de inclusão e exclusão das pesquisas, que devem ser determinados previamente e estar na mesma direção da questão de pesquisa (GALVÃO; SAWADA; TREVIZAN, 2004). Esses critérios são definidos como as características-chave da população-alvo que os investigadores utilizarão para responder à pergunta do estudo e “incluem características demográficas, clínicas e geográficas” (PATINO; FERREIRA, 2018, p. 84). Podem abranger “tempo de busca apropriado, população-alvo, intervenções, mensuração dos desfechos de interesse, critério metodológico, idioma, tipo de estudo, entre outros” (SAMPAIO; MANCINI, 2007, p. 86).

No caso da nossa pesquisa, que está inserida no campo da Educação Matemática, essas características incluem público-alvo, conteúdo matemático, metodologia empregada etc.

Já os critérios de exclusão

> são definidos como aspectos dos potenciais participantes que preenchem os critérios de inclusão, mas apresentam características adicionais, que poderiam interferir no sucesso do estudo ou aumentar o risco de um desfecho desfavorável para esses participantes. (PATINO; FERREIRA, 2018, p. 84)

É preciso ter cautela com os critérios de exclusão, para não inserir itens desnecessários, pois já são excluídos naturalmente pelos critérios de inclusão.

Ressaltamos que os critérios de inclusão e exclusão adotados devem estar claramente justificados, sendo que alguns deles podem ser utilizados nos próprios buscadores, como por exemplo, idioma e tempo de busca.

Os operadores AND, OR ou NOT, podem compor a estratégia de busca, pois “permitem juntar termos para alargar a pesquisa ou excluir termos dos resultados” (DONATO; DONATO, 2019, p. 230). O operador AND é utilizado para localizar estudos sobre dois temas (interseção); o operador OR é utilizado para buscar textos que abordem um tema ou outro (soma); o operador NOT é utilizado para excluir algum assunto da busca (GALVÃO; PEREIRA, 2015).

Depois de concluído o planejamento e a coleta dos dados, o próximo passo é a seleção dos dados: decidir quais estudos devem ser considerados na Revisão Sistemática de Literatura.

A finalidade desta etapa é reduzir a quantidade de estudos a serem analisados para um número tangível de se trabalhar (DONATO; DONATO, 2019; OKOLI, 2019).

Nessa etapa os critérios de inclusão e exclusão são utilizados, a partir dos títulos, resumos e palavras-chave, verificando a aderência aos objetivos da pesquisa (CONFORTO; AMARAL; SILVA, 2011; DONATO; DONATO, 2019). Em seguida, uma leitura mais criteriosa dos textos selecionados torna-se necessária.

Por fim, a seleção "deve ser ampla o bastante para incluir um número suficiente de estudos que possam responder satisfatoriamente à questão de pesquisa" (OKOLI, 2019, p. 19).

2.2.3 Extração e execução: Análise Descritiva e Análise dos Temas

Uma vez que as pesquisas potencialmente elegíveis foram selecionadas, é necessário verificar quais os tipos de dados que serão extraídos de cada uma delas, de tal forma que sejam pertinentes ao objetivo da pesquisa. Esta etapa consiste na leitura completa dos artigos, seguida da organização e análise dos dados selecionados e envolve uma categorização dos textos em categorias preestabelecidas, que denominamos de *análise descritiva*. Alguns autores sugerem a criação de tabelas contendo os dados mais relevantes para a análise, como por exemplo, título, autor, ano de publicação, periódico, desenho metodológico, qualis-Capes (Coordenação de Aperfeiçoamento Pessoal de Nível Superior), palavras-chave, objetivo, participantes do estudo e principais resultados (CONFORTO; AMARAL; SILVA, 2011; DESSBESEL; SILVA; SHIMAZAKI, 2018; DONATO; DONATO, 2019).

É sugerida a elaboração de resumos breves dos artigos selecionados, com os principais elementos para o entendimento dos aspectos fundamentais de cada pesquisa selecionada: o tipo de intervenção, o problema, o objetivo principal, informações sobre amostra, população e resultados fundamentais (CRESWELL, 2010; GALVÃO; PEREIRA, 2015).

Após a análise descritiva, é necessário sintetizar o material produzido para, a partir disto, responder à questão inicial de pesquisa. Em outras palavras, busca-se interpretar o material coletado, para enunciar conclusões válidas e lógicas. Denominamos esta etapa de *análise dos temas*, os quais são definidos a partir de um mapa da literatura.

O mapa da literatura consiste em "um resumo visual da pesquisa que já foi conduzida por outros e é tipicamente representado por uma figura" (CRESWELL, 2010, p. 61). Podemos organizá-lo de diferentes maneiras, como por exemplo, uma estrutura hierárquica, um fluxograma, uma série de círculos etc. Creswell (2010) propõe reunir "a revisão da literatura, estruturando-a tematicamente ou organizando-a por conceitos importantes" (p. 57). Outros

autores, como Galvão, Sawada e Trevizan (2004) apontam que esta etapa pode ser realizada de forma narrativa, sendo este formato, entretanto, uma tarefa difícil.

Na seção a seguir, apresentamos os procedimentos metodológicos que utilizamos nesta pesquisa.

2.3 PERCURSO E DESAFIOS. NATUREZA E DELINEAMENTO DA PESQUISA

Percurso e Desafios

A temática desta pesquisa sempre esteve relacionada ao conceito de número racional. Como professora do ensino médio, sempre notei a grande dificuldade com estes números, ocasionando até dificuldades com os outros conceitos matemáticos. A Introdução desta pesquisa buscou esclarecer esta inquietação.

Por este motivo, o plano inicial era desenvolver uma atividade que seria aplicada em um projeto denominado *Matemática EM Ação*[22] para alunos ingressantes no IFRJ (Instituto Federal do Rio de Janeiro), escola na qual atuo como professora.

Esta proposta de utilizar um projeto que estava em pleno funcionamento no IFRJ precisou ser deixada de lado, devido à pandemia e à suspensão das aulas por tempo indeterminado. Diante deste cenário, e já com uma proposta de intervenção em sala de aula planejada, reestruturei os procedimentos para a coleta de dados. Decidimos ofertar, no início de 2021, um curso de extensão para os alunos do ensino médio do IFRJ e outros alunos que estivessem matriculados em qualquer instituição de ensino médio, cuja temática abordava o conceito de número racional atrelado ao contexto da Covid-19, assunto tão presente à época.

Para o planejamento dessa intervenção, participei de dois cursos de extensão[23] como aluna, para obter conhecimentos a respeito da Covid-19.

---

[22] O projeto *Matemática EM Ação* tem como objetivo auxiliar os alunos com os conceitos essenciais do ensino fundamental para a aquisição de novos conhecimentos no ensino médio, como por exemplo operações fundamentais, frações, etc. O ingresso no curso médio técnico no IFRJ é realizado por meio de prova ou sorteio[22], e por isso os alunos são provenientes de diversas localidades e escolas da região metropolitana do Rio de Janeiro. Os conhecimentos prévios dos alunos ingressantes acerca dos temas essenciais são bem diversificados, sendo que as dificuldades ocorrem até mesmo com as operações básicas. Tais dificuldades são bem acentuadas e por este motivo, muitos acabam desistindo dos cursos, sendo que o índice de evasão nos primeiros períodos é bem alto. Este projeto teve grande relevância no programa de permanência e êxito do IFRJ Nilópolis durante vários anos.

[23] Curso "A Matemática por trás da Covid-19", coordenado por Fábio Silva de Souza e promovido pelo Departamento de Ciências Exatas - Faculdade de Ciências Sociais Aplicadas e Exatas da UFVJM, no período de 01/07/2020 a 25/09/2020, perfazendo uma carga horária total de 60 horas. Disciplina "Ciência, Cultura e Sociedade: Saúde e Ciência em tempos de pandemia, ministrada pelo projeto Saber Comum - Educação a Distância e Divulgação Científica, que oferece disciplinas transversais que colaboram com a construção de um saber comum, em cooperação entre instituições de ensino e pesquisa do Rio de Janeiro: UFRJ, UERJ, UFRRJ, UFF, Unirio e Fiocruz.

O primeiro projeto de pesquisa foi elaborado com a ideia de que um dos pontos-chave para a compreensão dos conceitos matemáticos é a abordagem por meio de situações reais. A ideia central do curso planejado foi trabalhar com os dados reais presentes em sites e planilhas disponíveis na internet a respeito da pandemia de Covid-19 e mostrar a importância do conceito de número racional para o entendimento crítico desta realidade. O projeto foi submetido e aprovado pelo Comitê de Ética do IFRJ. Entretanto, o curso de extensão também não aconteceu como havíamos planejado. Essencial para a minha coleta de dados, o curso aconteceu, mas não fluiu como esperávamos.

A presença no curso de extensão esteve em torno de 5 alunos por aula. Mesmo com esta baixa frequência, finalizamos o curso de extensão com a expectativa de obter resultados. No entanto, a participação dos alunos, em termos de interações entre os alunos e alunos-professor foi praticamente inexistente. Várias alternativas de dinâmica nas aulas foram experimentadas, mas nenhuma surtiu o resultado esperado e ficamos praticamente sem material empírico para analisar. De fato, a participação online tem sido um desafio para os professores. Os alunos que participaram queriam estar ali, queriam fazer o curso de extensão, mas não queriam falar, se expor, serem vistos. Em uma sala de aula presencial esta participação flui com mais naturalidade, mas na plataforma online é muito difícil promover tal participação ativa.

Diante deste cenário, decidimos reestruturar novamente o projeto e os procedimentos para analisar o conhecimento dos números racionais pelos alunos após o ensino fundamental. Decidimos, enfim, realizar uma Revisão Sistemática de Literatura acerca dos números racionais no ensino médio e ensino superior.

Devido a mudanças no percurso desta pesquisa, muito do que já tínhamos escrito, estudado e elaborado não pôde ser aproveitado nesta tese. Futuramente, gostaria de utilizar o material didático que foi produzido, principalmente em relação ao curso de extensão, para trabalhar na formação continuada de professores, por considerarmos relevante que os números racionais sejam percebidos em aspectos da nossa vida cotidiana.

Natureza e Delineamento

Caracterizamos essa pesquisa como um Estado da Arte, atendendo a pressupostos estabelecidos em uma Revisão Sistemática de Literatura. Sugeridos por discussão anterior, entendemos que uma Revisão Sistemática de Literatura se configura como “uma modalidade de pesquisa, que segue protocolos específicos, e que busca entender e dar alguma logicidade a um grande corpus documental” (GALVÃO; RICARTE, 2020, p. 2).

Portanto, a pesquisa, de cunho bibliográfico, é qualitativa, porque “se desenvolve numa situação natural, é rico em dados descritivos, tem um plano aberto e flexível e focaliza a realidade de forma complexa e contextualizada” (LÜDKE; ANDRÉ, 1986, p. 18).

Ainda no que se refere à metodologia, utilizamos “a construção de uma rede de conceitos e argumentos desenvolvidos com rigor e coerência lógica” (FIORENTINI; LORENZATO, 2006). Tal rede está inteiramente apoiada no referencial teórico acerca do conceito de número racional estudado (BEHR et al., 1983, 1992; KIEREN, 1976, 1980; LAMON, 2008).

2.4 PROCEDIMENTOS ADOTADOS NESTA PESQUISA

Como já foi discutido neste texto, os números racionais são objeto de estudo de diversas pesquisas na área de ensino de Matemática, destacando o fato de que as dificuldades com este tipo de número se prolongam ao longo de toda a escolarização.

Grande parte dessas pesquisas tem como foco o ensino fundamental, que é o período no qual os alunos iniciam o estudo dos números racionais. Por outro lado, existe uma carência de pesquisas que tenham como público-alvo alunos dos ensinos médio e superior, considerando que as dificuldades acompanham os alunos ao longo de toda a escolaridade. Seegmiller (2009, p. 6 aponta que pesquisas a respeito dos números racionais, normalmente são realizadas com alunos do ensino fundamental e não com os alunos do ensino médio, pois os conceitos básicos de Matemática não fazem parte do currículo do ensino médio.

As dificuldades persistem até a vida adulta, como citamos na Introdução. Neste sentido, esta pesquisa se justifica por seu objetivo de descrever a variabilidade das concepções de alunos do ensino médio e ensino superior acerca do conceito de número racional, resultantes da produção da América Latina nos últimos dez anos.

A escolha pela América Latina ocorreu, para obter um panorama geral e uma comparação entre os países próximos.

Os protocolos específicos adotados para a coleta e seleção dos textos desta Revisão Sistemática de Literatura estão descritos teoricamente na seção 2.2 e especificados a seguir.

2.4.1 Delimitação do tema

As escolhas de tópico, questão de pesquisa e palavras-chave, foram essenciais para a seleção dos textos que compõem esta Revisão Sistemática de Literatura.

O tópico desta pesquisa se delineia como "*Concepções acerca do conceito de número racional por alunos do ensino médio e ensino superior*". Estamos interessados em capturar a variabilidade de concepções acerca do conceito de número racional.

As palavras-chave identificadas para este estudo são: números racionais; frações; números decimais; ensino médio; ensino superior; aprendizagem; multifacetado e suas respectivas traduções para o espanhol.

Destacamos algumas observações a respeito da escolha das palavras-chave:

- 'ensino médio' e 'ensino superior': o conceito de frações é visto no ensino fundamental e estamos interessados em investigações que tenham como público-alvo alunos dos ensinos médio e superior, por entender que grande parte das dificuldades com este conteúdo persiste ao longo de toda a escolaridade;
- 'aprendizagem': estamos interessados no processo de ensino-aprendizagem e as principais dificuldades que ocorrem nesse processo;
- 'multifacetado': muitos pesquisadores afirmam ser este o principal motivo das dificuldades com números racionais persistirem ao longo de toda a escolarização.

Apesar das expressões aprendizagem e multifacetado serem incluídas, elas não foram consideradas como descritores na busca nas bases de dados. A justificativa é que os termos que se referem à ideia de multifacetado são muito diversificados; como por exemplo, personalidades, interpretações, significados, facetas, subconstructos etc. Já a palavra aprendizagem, foi utilizada como critério de inclusão, ou melhor, os textos que não tinham relação com a aprendizagem do conceito de número racional foram excluídos do corpus.

Os descritores utilizados nas buscas e o volume de resultados obtidos para cada descritor estão elencados no Quadro 4:

Quadro 4 - Descritores utilizados nesta pesquisa.

Idioma	**Descritores relativos ao conteúdo**	**Descritores relativos ao público-alvo[24]**
Espanhol	"numeros racionales" ou Fracciones ou "numeros decimales"	"ensenanza secundaria" (89), bachillerato (221), "escuela secundaria" (72), preparatorias (7), "educación secundaria" (271), "educación media superior" (10), "medio superior" (20), "nível medio" (79) "futuro profesor" (27), "ensino superior" (4), "estudiantes para maestro" (14), "profesores en formación" (32), "maestros en formación" (37), universitarios (117), "formación inicial del profesorado" (9), "formación del profesor"

[24] Os descritores que referem-se ao nível de escolaridade foram bem diversificados na língua espanhola, porque em cada país da América Latina os termos "ensino médio" e "ensino superior" são designados por expressões diferentes.

		(103), Magisterio (127), grado noveno (45), decimo grado (18), grado once (24)
Português	"números racionais" ou frações ou "números decimais"	ensino médio (421), ensino superior (213), licenciandos (53), formação inicial (181), universitários (75)

Fonte: Elaborado pela autora.

A justificativa para inserir os descritores no idioma espanhol ocorreu, porque queremos obter um panorama mais amplo, neste caso a América Latina, a respeito das concepções do conceito de número racional.

2.4.2 Coleta dos dados: protocolo

Com relação à escolha das bases de dados, utilizamos apenas o *Google Scholar*, por considerar que ele é bem amplo e abarca todas as outras bases de dados que poderiam ser consideradas. Nos apoiamos em Silva (2020) que fez uma análise comparativa entre dez bases de dados e o *google scholar* e concluiu que ele "tem uma capacidade de localizar os textos maior do que as dez fontes juntas" (SILVA, 2020, p. 55), além de encontrar textos como anais e atas de eventos, que outras bases de dados não contemplam.

A estratégia de busca na base de dados escolhida incluiu pesquisas que obedeceram aos seguintes critérios de inclusão e exclusão, conforme Quadro 5:

Quadro 5 - Critérios de Inclusão e Exclusão.

Critérios de Inclusão	
Período de Busca	de 2010 a 2021 (julgamos que estes últimos anos agrupam uma amostra substancial para um panorama de pesquisas acerca da temática)
Idiomas	português e espanhol
População Alvo	ensino médio e ensino superior (além das pesquisas com estes níveis de ensino e que incluíam o ensino fundamental)
Tipo de Texto	artigos de periódicos, teses e dissertações
Disponibilidade	textos disponíveis em formato completo em suporte eletrônico e gratuito
Conteúdo Matemático	conceito de número racional ou frações ou números decimais como objetivo principal
Enfoque Metodológico[25]	ensino-aprendizagem
Intervenções	pesquisas que tenham como foco a compreensão dos números racionais ou frações após o ensino fundamental
Tipo de Estudo	qualitativo, quantitativo ou misto

[25] Na seção 3.3 descrevemos com mais detalhes o que entendemos por enfoque metodológico ensino-aprendizagem.

Critérios de Exclusão
artigos duplicados
artigos em espanhol, mas de revistas espanholas
artigos com foco em análise de livro didático e análise de questões do ENEM (Exame Nacional do Ensino Médio)
artigos tendo como público-alvo a educação de jovens e adultos
artigos realizados com professores já formados

Fonte: Elaborado pela autora.

Após as buscas no *Google Scholar*, fizemos combinações de todos os descritores listados no Quadro 4, exportamos os registros para uma planilha do Excel e, utilizando algumas de suas ferramentas, foi possível excluir todos os registros repetidos. Obtivemos um total de 943 registros em português e 1326 registros em espanhol.

Em seguida, passou-se à seleção dos textos que atendiam aos critérios de inclusão e exclusão.

2.4.3 Seleção dos dados

Com um total de 2269 textos, em português e espanhol, as etapas para a seleção do nosso corpus foram:

- Etapa 1: leitura do título e palavras-chave, aplicando os critérios de inclusão e exclusão elencados no Quadro 5, resultando em 283 textos.
- Etapa 2: leitura dos resumos, aplicando os critérios de inclusão e exclusão elencados no Quadro 5, resultando em 187 textos.
- Etapa 3: categorização dos textos em: título, autores, país, revista, qualis, ano, metodologia de pesquisa, nível de ensino e conteúdo específico.
- Etapa 4: exclusão dos textos que não eram de revistas da América Latina, ou seja, excluímos os textos de língua espanhola que eram de revistas da Espanha, resultando 87 textos.
- Etapa 5: exclusão de teses, dissertações e textos de congressos e similares, totalizando 57 textos. Optamos por esta etapa, porque o corpus estava muito grande.
- Etapa 6: realizamos a leitura integral dos textos e fizemos a exclusão de 11 textos porque eram teóricos, chegando a um total de 46 textos.

As etapas realizadas para a seleção do corpus, conforme aplicamos nossos critérios de inclusão e exclusão, estão resumidas na Figura 7:

Figura 7 - Descrição das etapas realizadas para a seleção dos dados.

Etapas	Descrição	Português	Espanhol	Total
1ª etapa	realizar a leitura do título e das palavras-chave, aplicando os critérios de inclusão e exclusão elencados	136	147	283
2ª etapa	realizar a leitura dos resumos, aplicando os critérios de inclusão e exclusão elencados	67	120	187
3ª e 4ª etapas	3ª: categorizar os textos; 4ª: excluir os textos que não eram de revistas da América Latina, ou seja, de revistas da Espanha	67	87	154
5ª etapa	excluir as teses, dissertações e textos de congressos e similares, pois ao final destas etapas ainda tínhamos um total de 154 textos	28	29	57
6ª etapa	realizar a leitura integral dos textos; excluir 11 textos porque eram teóricos	22	23	45

Fonte: Elaborado pela autora.

No Apêndice C, apresentamos uma tabela com todos os textos selecionados e informações como revista, país, conteúdo principal e nível de ensino.

As próximas etapas envolvem as análises, descritiva (capítulo 3) e dos temas (capítulos 4).

3 ANÁLISE DESCRITIVA

Após a etapa de seleção dos textos, passamos à análise descritiva, que consiste em apresentar as principais características dos estudos incluídos nesta Revisão Sistemática de Literatura. O objetivo deste capítulo é responder à primeira questão de pesquisa: “Quais temáticas sobre o conceito de número racional nos ensinos médio e superior estão presentes nas pesquisas?”.

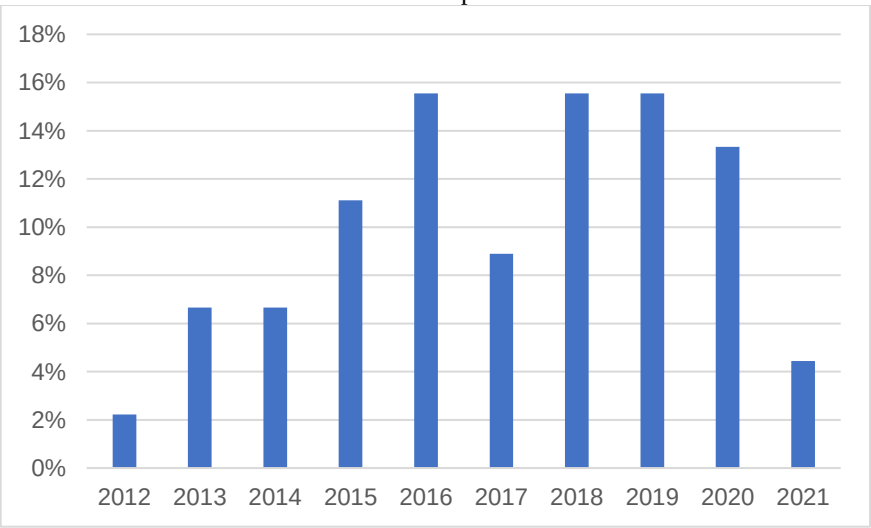
A análise descritiva revela os aspectos gerais da produção analisada, participantes e contexto das pesquisas, e suas características teórico-metodológicas. Sua apresentação está organizada nas seções 3.1, 3.2 e 3.3.

A seção 3.4 organiza a literatura incluída nesta revisão em um mapa da literatura e responde à primeira questão de pesquisa colocada. O mapa apresentado é resultado da análise dos temas do corpus das pesquisas selecionadas e incluídas nesse estudo.

3.1 ASPECTOS GERAIS DA PRODUÇÃO CIENTÍFICA

Da análise dos anos de publicação dos artigos, percebemos um maior volume de publicações entre os anos de 2015 a 2020, conforme Figura 8. Como realizamos as buscas no primeiro semestre de 2021, não podemos considerar que houve decréscimo no número de artigos, porque esta pesquisa não contemplou o ano todo.

Figura 8 - Distribuição de frequência relativa conforme o ano de publicação dos artigos incluídos na Revisão Sistemática de Literatura no período de 2010 a 2021.

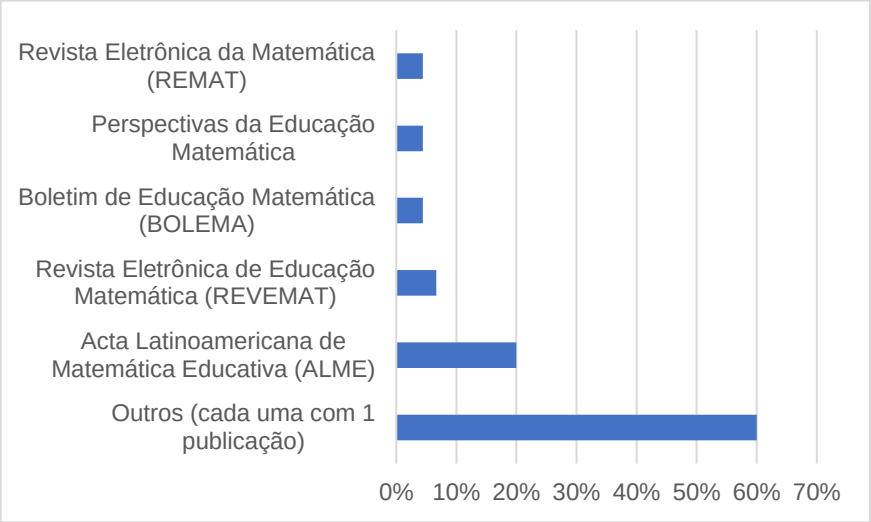


Fonte: Elaborada pela autora.

Com relação às revistas em que os artigos foram publicados, tivemos um total de 32 títulos, o que aponta uma considerável variedade. A revista *Acta Latinoamericana de*

Matemática Educativa[26] *(Alme)* teve um número maior de artigos, com nove publicações (20%), seguida da revista Eletrônica de Educação Matemática com três artigos (7%)[27]. Todas as outras tiveram apenas uma ou duas publicações.

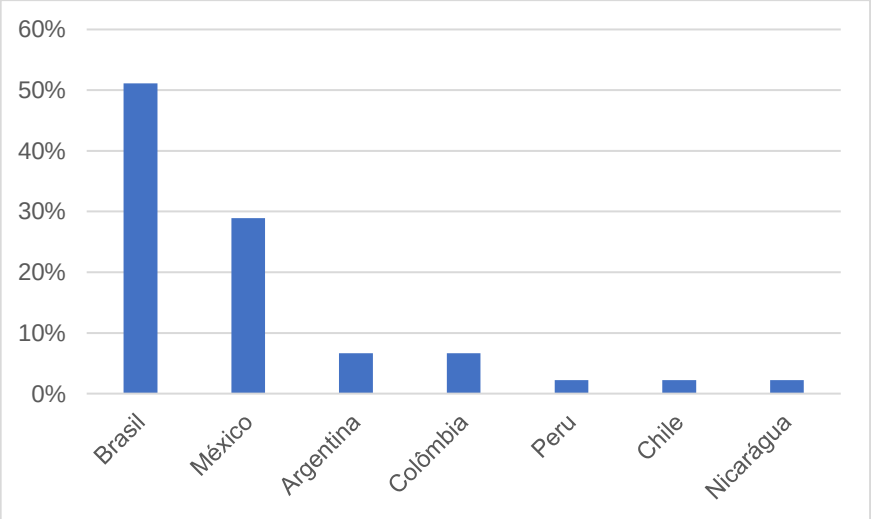
Figura 9 - Distribuição de frequência relativa conforme as revistas de publicação dos artigos incluídos na Revisão Sistemática de Literatura.



Fonte: Elaborada pela autora.

Com relação aos países em que as revistas são editadas, a metade, isto é, 16 revistas são brasileiras, seguidas por cinco mexicanas, três argentinas, três colombianas, uma peruana, uma chilena e uma nicaraguense. A Figura 10 apresenta esta distribuição.

Figura 10 - Distribuição de frequência relativa conforme os países de publicação dos artigos incluídos na Revisão Sistemática de Literatura.

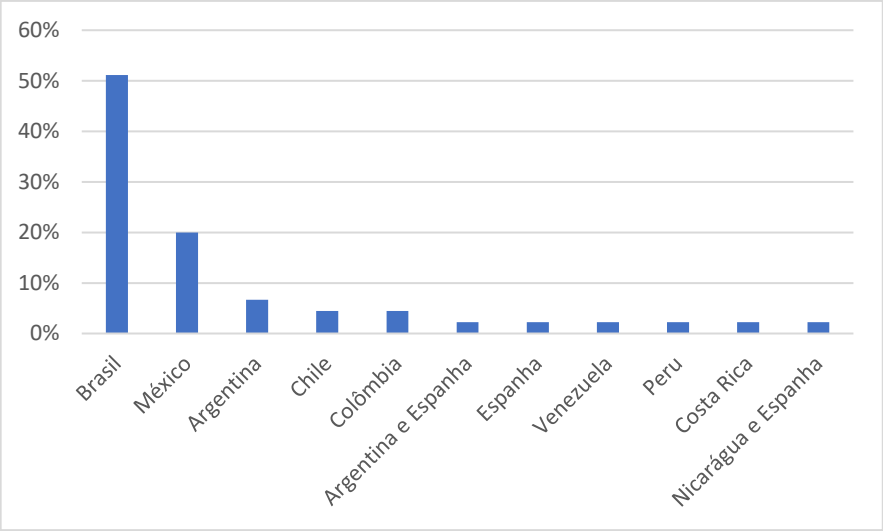


Fonte: Elaborada pela autora.

[26] Esta revista publica semestralmente os artigos provenientes de trabalhos previamente apresentados na Relme (Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa).
[27] A tabela completa com as frequências de acordo com as revistas de publicação dos artigos pode ser consultada no Apêndice D.

Vale mencionar, que nem sempre a pesquisa publicada foi realizada no país da revista. Então, a distribuição entre os países de realização das pesquisas tem alterações, conforme descrito na Figura 11:

Figura 11 - Distribuição de frequência relativa conforme os países em que as pesquisas foram realizadas.



Fonte: elaborada pela autora.

Se analisarmos os gráficos, percebemos que, com relação ao Brasil, houve pouca alteração na frequência relativa das pesquisas ao longo do período investigado. No entanto, houve maior diversificação de países envolvidos nos estudos. Isto aconteceu, porque o México, que era o país com segunda maior frequência em publicações na Figura 10, cede espaço a publicações em diversos países, que parece ser uma proposta da revista Alme. Por exemplo, a pesquisa de Silva e Dias (2015) realizada no Brasil foi publicada na Revista Alme.

Quanto ao critério de qualidade das revistas, todas são indexadas e os artigos publicados são submetidos à avaliação por pareceristas. A Tabela 1 apresenta a distribuição dos artigos de acordo com cada nota qualis das revistas[28]:

Tabela 1 - Distribuição de frequências por qualis.

Qualis	**Artigos (n° absoluto)**	**Artigos (%)**
A1	2	4
A2	5	11
B1	8	18
B2	11	24
B3	2	4

[28] Qualis periódicos é um sistema usado para classificar a produção científica dos programas de pós-graduação no que se refere aos artigos publicados em periódicos científicos. Para esta classificação utilizamos a plataforma Sucupira, do quadriênio 2013-2016, área de avaliação “ensino”, no dia 08/08/2021. Algumas revistas não tinham qualis na área de “ensino”, mas tinham na área de Educação ou interdisciplinar e foram incluídas na tabela também. As revistas da América Latina que não possuíam qualis, foram classificadas com “N”.

B4	1	2
B1 (Educação)	1	2
B4 (Interdisciplinar)	1	2
B5 (Interdisciplinar)	1	2
C (Educação)	1	2
N	12	27
Total	**45**	**100**

Fonte: Elaborada pela autora.

Percebe-se um número considerável de pesquisas (27%) que não possui avaliação aqui no Brasil e, por isso, não estão catalogadas com *qualis*. São revistas editadas e publicadas em outros países da América Latina.

Entendemos que nossa escolha restrita ao *google scholar* como base de dados para a busca dos textos, resultou em uma ampla representação de todos os tipos de *qualis*, com predominância de B1 (8) e B2 (11). O maior número de pesquisas com *qualis* B2 ocorreu devido à Revista Alme ser o periódico com maior número de artigos.

3.2 CARACTERÍSTICAS DO NÍVEL DE ESCOLARIDADE DOS PARTICIPANTES

Com relação ao nível de escolaridade dos participantes das pesquisas analisadas, nossa seleção delimitou que os participantes seriam alunos do ensino médio e do ensino superior, devido aos critérios de inclusão. Algumas das pesquisas que também incluíram o ensino fundamental foram consideradas. A distribuição de frequência por escolaridade dos participantes está registrada na Tabela 2:

Tabela 2 - Distribuição de frequências por escolaridade dos participantes.

Nível de escolaridade	**Artigos (n° absoluto)**	**Artigos (%)**
superior	24	53
médio	9	20
fundamental e médio	3	7
fundamental, médio e superior	3	7
fundamental e superior	2	4,5
médio e superior	2	4,5
curso preparatório	1	2
escola normal[29]	1	2
Total	**45**	**100**

Fonte: Elaborada pela autora.

[29] A pesquisa de Mercado, Cabello e Martínez (2016) tem como público-alvo alunos do 7° semestre de uma Escola Normal.

Verificamos uma maior frequência de pesquisas, tendo como público-alvo o ensino superior se comparadas ao ensino médio.

Quanto ao contexto dessas pesquisas, assim dizendo, os cursos de ensino superior nos quais os participantes eram alunos regulares, temos a seguinte distribuição na Tabela 3:

Tabela 3 - Distribuição de frequências por cursos do ensino superior.

Curso	**Artigos (n° absoluto)**	**Artigos (%)**
Pedagogia	16	52
Licenciatura em Matemática	8	26
Engenharia	2	6
Logística	1	3
Medicina	1	3
Licenciatura em Física	1	3
Contabilidade	1	3
Outros	1	3
Total	**31**	**100**

Fonte: Elaborada pela autora.

Não causa estranheza o fato de um maior número de pesquisas ter como participantes os alunos do Curso de Pedagogia (16), pois estes futuros professores irão introduzir o conceito de número racional no ensino fundamental. Isto justifica o interesse dos educadores matemáticos em investigar questões referentes ao tema números racionais em espaços de formação profissional deste público. Em seguida, e com uma justificativa semelhante à anterior, destaca-se o curso de Licenciatura em Matemática com oito artigos. Entendemos a frequência percebida como evidência do interesse da Educação Matemática em investigar a formação de professores.

Desses resultados, acreditamos ter realizado a Revisão Sistemática de Literatura (ensino médio e ensino superior), produzindo um corpus de pesquisa diversificado em termos de público-alvo e contexto de seu desenvolvimento.

3.3 CARACTERÍSTICAS TEÓRICO-METODOLÓGICAS DA PRODUÇÃO CIENTÍFICA

As características teórico-metodológicas exploradas foram: os tipos de estudos que têm sido produzidos, os enfoques metodológicos, os procedimentos de obtenção dos dados e os referenciais teóricos[30].

[30] Um detalhamento acerca destas características é apresentado nos quadros 6, 7, 8 e 9.

Com relação aos tipos de estudo (qualitativa, quantitativa ou mista), houve predominância de pesquisas qualitativas (40), seguida por cinco pesquisas mistas e nenhuma abordagem puramente quantitativa.

Devido aos critérios de inclusão e exclusão, todas as pesquisas selecionadas e analisadas têm como enfoque metodológico o "ensino-aprendizagem"[31]. Como em Silva, Cazorla e Kataoka (2015), identificamos quatro categorias nas abordagens de pesquisa adotadas pelos pesquisadores para investigar os processos de ensino e aprendizagem dos números racionais: intervenção pedagógica, diagnóstico, proposta e análise de atividades didáticas e processo didático-pedagógico[32]. A Tabela 4 sintetiza a frequência de artigos em cada uma dessas categorias:

Tabela 4 - Distribuição de frequências da produção científica conforme as categorias do enfoque metodológico "Ensino-Aprendizagem".

Categorias do enfoque metodológico ensino-aprendizagem	**Artigos (n° absoluto)**	**Artigos (%)**
Diagnóstico	27	60
Processo Didático Pedagógico	8	18
Intervenção	4	9
Propostas e Análise da Atividade Didática	4	9
Diagnóstico e Proposta e Análise da Atividade Didática	2	4
Total	**45**	**100%**

Fonte: Elaborada pela autora.

Mais da metade das pesquisas têm como finalidade traçar um perfil diagnóstico dos alunos do ensino médio e do ensino superior acerca de alguns tópicos do conceito de número racional.

É interessante observar que, grande parte das pesquisas com futuros professores[33] (24 pesquisas) não tinha como foco o processo de ensino, mas sim as concepções deles a respeito do conceito de número racional. A importância dessas investigações com o foco em concepções se justifica por sua contribuição com resultados sobre conhecimentos que devem ser

[31] As 4 categorias definidas para descrever o enfoque metodológico das pesquisas: análise de instrumento e/ou ferramenta, análise de documentos, histórica ou ensino-aprendizagem. Na categoria de ensino-aprendizagem são incluídas pesquisas que tratam direta ou indiretamente do processo de ensino-aprendizagem (SILVA; CAZORLA; KATAOKA, 2015).

[32] Intervenção Pedagógica: são incluídas pesquisas experimentais, pesquisa-ação, pesquisa participante ou experiências de ensino; Diagnóstico: são incluídas pesquisas que tracem um perfil dos participantes com relação à aprendizagem ou atitudes e aspectos psicológicos; Proposta e análise das atividades didáticas: são incluídas pesquisas que propõem e discutem atividades de ensino, sequências de ensino, sequências didáticas, jogos etc; Processo didático-pedagógico: são incluídas pesquisas que discutem os resultados obtidos sobre a prática docente (em diferentes níveis de ensino). No nosso caso, o foco será no ensino e no futuro professor (SILVA; CAZORLA; KATAOKA, 2015).

[33] Pesquisas que tinham como público-alvo alunos dos cursos de Pedagogia e da Licenciatura em Matemática.

reconstruídos por esses alunos, que futuramente irão ensinar os conceitos. A predominância desse entendimento torna-se evidente ao percebermos que apenas oito pesquisas têm como foco o processo didático-pedagógico, ou melhor, a atuação profissional do futuro professor em primeiro plano.

A Tabela 5 apresenta a distribuição com relação aos procedimentos metodológicos para obtenção de dados (entrevista, estudo de caso, questionário, pesquisa bibliográfica etc.):

Tabela 5 - Distribuição de frequências da produção científica de acordo com procedimentos adotados para obtenção dos dados.

Procedimentos de Obtenção dos Dados	**Artigos (n° absoluto)**	**Artigos (%)**
questionário ou teste diagnóstico ou prova em fases	18	40
sequência de atividades (resolução de problemas, sequência de ensino etc.)	9	20
encontros de formação, discussões guiadas e grupos colaborativos	8	18
uso de recursos (jogo ou tecnologia)	5	11
questionário + entrevista	3	7
entrevista	1	2
entrevista + sequência de atividades	1	2
Total	**45**	**100%**

Fonte: Elaborada pela autora.

Como era de esperar, pelo fato de a maior parte das pesquisas se configurar com enfoque diagnóstico, a forma predominante de obtenção dos dados foi questionários, testes diagnósticos ou prova em fases (40%).

Quanto aos referenciais teóricos utilizados, as perspectivas adotadas nas pesquisas e seus autores são diversos. Dentre os quadros teóricos específicos sobre números racionais o mais citado é o desenvolvido em Kieren (1976) e Behr et al. (1983), conforme Tabela 6.

Tabela 6 - Distribuição de frequências da produção científica conforme a classificação do referencial teórico principal.

Referencial Teórico Principal	**Artigos (n° absoluto)**	**Artigos (%)**
Números Racionais[34] - diversos autores	11	24
Conhecimento Especializado do Professor de Matemática – Shulman, Ball et al.	10	22
Enfoque Ontossemiótico – Godino, Batanero e Font	4	9
Resolução de Problemas – diversos autores	3	9
Tecnologias – diversos autores	3	7

[34] Inserimos aqui as pesquisas que tinham apenas os referenciais teóricos do conceito de número racional. Os demais referenciais teóricos, não foram exclusivos. Ou seja, a grande maioria incluía o referencial teórico a respeito de números racionais, além dos outros (conhecimento do professor, resolução de problemas, etc).

Nenhum	3	7
Teoria dos Registros de Representação Semiótica (TRRS) – Duval	2	4
Uso de Jogos – diversos autores	1	2
Aspectos Intuitivos Algorítmicos – Fischbein	1	2
Teoria Antropológica do Didático (TAD) – Chevalard	1	2
Atividade Matemática – Vigotsky	1	2
Pensamento Matemático Avançado (PMA) – Dreyfus e Tall	1	2
Teoria dos Campos Conceituais (TCC) – Vergnaud	1	2
Comunidades de Prática – Wenger	1	2
Matemática Realista – Puig	1	2
Conhecimento Especializado do Professor de Matemática e Resolução de Problemas[35]	1	2
Total	**45**	**100%**

Fonte: Elaborada pela autora.

Analisando as perspectivas teóricas predominantes, destaca-se o conhecimento especializado do professor, o enfoque ontossemiótico, a resolução de problemas e as tecnologias.

Uma observação é que, seis dentre os dez artigos que trazem o "conhecimento especializado do professor" abordam a temática de razão e pensamento proporcional, o que pode apontar para uma dificuldade de futuros professores no processo de ensino (ou aprendizagem) deste conteúdo. Esta questão será explicitada com mais detalhes na seção 4.1 no tema "Razão e Pensamento Proporcional".

3.4 TENDÊNCIAS TEMÁTICAS: MAPA DA LITERATURA

Para responder à primeira questão de pesquisa, apresentamos a seguir uma categorização dos principais conteúdos investigados e palavras-chave, trazendo em discussão os objetivos das pesquisas selecionadas para compor o corpus para a análise.

3.4.1 Características dos conteúdos principais

Destacamos na Tabela 7 os principais assuntos abordados nas pesquisas selecionadas:

Tabela 7 - Distribuição de frequências conforme conteúdo principal dos artigos.

Conteúdo	Artigos (n° absoluto)	Artigos (%)
Conceito de fração, números racionais, números decimais e porcentagem	17	38

[35] A pesquisa de Proença (2015) utilizou duas referências importantes, por isso incluímos os dois.

Subconstructos do conceito	8	18
Pensamento proporcional	7	16
Representações	6	13
Operações e equivalência	6	13
Densidade e ordem dos números racionais	1	2
Total	**45**	**100**

Fonte: Elaborada pela autora.

Dezessete artigos não deixam claro em seu objetivo quais aspectos do conceito de número racional estão no foco da investigação. Declaram, de modo vago, uma intenção em investigar o "conceito de fração" ou de "números racionais" etc. Interpretamos como possibilidade haver uma expectativa dos autores, ao adotar uma abordagem metodológica naturalística e qualitativa, de que especificidades do conceito devam emergir ao longo da pesquisa. Estas pesquisas foram incluídas na Tabela 7 na categoria denominada "conceito de fração, números racionais e números decimais".

As demais pesquisas declaram, já de início, quais aspectos específicos do conceito de número têm a intenção de investigar. A especificação dos subconstructos desenvolvidos por Kieren (1976) e Behr et al. (1983) orientou um número representativo dessas pesquisas, evidenciando o alcance e importância desses estudos na pesquisa em Educação Matemática. A essas pesquisas seguem os estudos sobre pensamento proporcional.

Com relação às palavras-chave, fizemos a tradução do espanhol para o português, para que fosse possível calcular as respectivas frequências. Obtivemos um total de 166 palavras-chave, que estão descritas no Quadro 30 no Apêndice D. Agrupamos estas palavras-chave na Tabela 8 com termos que consideramos próximos:

Tabela 8 - Palavras-Chave separadas por grupos.

Grupo de Palavras-Chave	**Artigos (n° absoluto)**	**Artigos (%)**
Números racionais, frações e números decimais	36	22
Público-alvo	28	17
Diversos	11	7
Ensino-aprendizagem	10	6
Conhecimento do Professor	9	5
Subconstructos	9	5
Matemática e Educação Matemática	9	5
Desempenho, erros e dificuldades	7	4
Tecnologia	7	4
Recursos	7	4
Resolução de Problemas	6	4

Raciocínio Proporcional	6	4
Semiótica	5	3
Operações	4	2
Atitudes	4	2
Outros tópicos da Matemática	4	2
Metodologia	2	1
Porcentagem	2	1
Total	**166**	**100**

Fonte: Elaborada pela autora.

Analisando as palavras-chave, percebemos que grande parte se relaciona com o contexto escolar dos participantes das pesquisas. Outros tópicos que apareceram com frequência estão relacionados ao objetivo da pesquisa e foco principal (subconstructos, números racionais, raciocínio proporcional, etc.), ao tipo de metodologia adotada (tecnologia, resolução de problemas, etc.), ao referencial teórico (conhecimento do professor, semiótica, etc.), ao tipo de metodologia para realização da pesquisa (enfoque de grupo, provas em fase) e à área da Matemática (Ensino de Matemática ou Educação Matemática ou Matemática).

O papel das palavras-chave em um artigo é a representatividade do conteúdo e, por este motivo, sua escolha deve ser feita de maneira cautelosa. Além disso, destacamos sua importância por ser um termo de busca nas bases de dados, ou seja, quando bem escolhidas facilitam a procura por artigos com temas específicos. Entretanto, o que notamos é que variados artigos trazem palavras-chave muito genéricas e abrangentes. Como por exemplo, diversos artigos inseriram palavras como “Matemática”, “Educação Matemática” e “ensino de Matemática”, que são palavras bem amplas, ou outras palavras que não fornecem uma especificidade tais como “recursos”, “didática”, entre outras.

Pontuamos a importância de palavras-chave representativas para a realização de uma Revisão Sistemática de Literatura, pois, neste caso, podem fornecer temas centrais para compor o mapa da literatura.

3.4.2 Quais temáticas sobre o conceito de número racional no ensino médio e no ensino superior estão presentes nas pesquisas?

Ao contrastar as diferentes pesquisas selecionadas nessa Revisão Sistemática de Literatura, com as características elencadas acima, foi possível agrupar os artigos que possuíam qualidades em comum, levando em consideração as temáticas principais. Assim, respondendo à primeira questão desta pesquisa, temos:

Quais temáticas sobre o conceito de número racional no ensino médio e no ensino superior estão presentes nas pesquisas?"

i) Razão e Pensamento Proporcional

ii) Operações com Números Racionais

iii) Representações dos Números Racionais

iv) O conceito de número racional e suas interpretações

O prosseguimento à análise contrastou as pesquisas incluídas em cada uma das temáticas, colocando em evidência o que era divergente, sendo possível dividir cada uma das temáticas em subtemas.

Para os três primeiros temas, a identificação dos subtemas leva em consideração os referenciais teóricos adotados, as metodologias e as abordagens empregadas. Os quadros a seguir sintetizam a análise.

3.4.3 Tema 1: Razão e Pensamento Proporcional

O tema *Razão e Pensamento Proporcional*[36] está em foco em oito pesquisas do nosso corpus (que corresponde a 18% do total).

Um objetivo comum às seis pesquisas envolvendo futuros pedagogos foi identificar o conhecimento do professor sobre razão e pensamento proporcional. Mesmo com suas particularidades, essas pesquisas caracterizam nosso primeiro subtema: P*ensamento Proporcional e Conhecimento Especializado para o Ensino.* Cinco, dentre os seis artigos, foram escritos em espanhol, envolvem participantes de outros países e são publicados em revistas estrangeiras. Apenas Silva, Cândido e Souza (2018) apresentam pesquisa realizada no Brasil e escrita em português.

Em um total de dez pesquisas do nosso corpus que adota como referencial teórico o "*Conhecimento Especializado do Professor*", seis têm por foco o tema razões e pensamento proporcional (que compreende a 13% do total de pesquisas). Este número parece decorrer das dificuldades de aprendizagem e também de ensino acerca do pensamento proporcional.

Duas pesquisas focam nas estratégias utilizadas pelos alunos ao usar o pensamento proporcional na resolução de tarefas e caracterizam o segundo subtema: E*stratégias para o uso do Pensamento Proporcional*.

Uma única pesquisa envolveu alunos de um curso de Medicina e está incluída no subtema: *O Pensamento Proporcional e seu Uso em Situações da Vida Real*. Pesquisa como

[36] Ou raciocínio proporcional.

esta é interessante, uma vez que o uso do pensamento proporcional em outras áreas do conhecimento, como a Medicina, é de importância fundamental, por exemplo, no controle e dosagem de medicamentos.

O Quadro 6 apresenta a distribuição das pesquisas do tema 1 nos respectivos subtemas:

Quadro 6 - Características teórico-metodológicas do tema 1.

Subtema	Artigo	Referencial teórico	Metodologia e instrumentos metodológicos	Enfoque metodológico
1.1. Pensamento proporcional e conhecimento especializado para o ensino.	Astudillo; Huerta; Leo (2018)	Conhecimento do Professor	Qualitativa Questionário	Diagnóstico
	Buforn; Fernández (2014)	Conhecimento do Professor	Qualitativa Questionário	Diagnóstico
	Camacho; Guerrero (2017)	Conhecimento do Professor	Qualitativa Entrevista	Processo Didático-Pedagógico
	Riquelme; Vergara (2019)	Conhecimento do Professor	Qualitativa. Enfoque de grupo	Processo Didático-Pedagógico
	Silva; Cândido; Souza (2018)	Conhecimento do Professor	Qualitativa Questionário	Diagnóstico
	Soto (2017)	Conhecimento do Professor	Qualitativa Sequência de ensino	Processo Didático Pedagógico
1.2. Estratégias e uso do pensamento proporcional	Silva; Cândido; Souza (2018)	Conhecimento do professor	Qualitativa Questionário	Diagnóstico
	Trevisan; Domingues (2017)	-	Qualitativa Prova em fases	Diagnóstico
1.3. Pensamento proporcional e seu uso em situações da vida real	González et al. (2019)	TCC	Qualitativa Sequência de ensino	Intervenção

Fonte: Elaborada pela autora.

Dentre as oito pesquisas que tinham como conteúdo central o pensamento proporcional, seis foram realizadas com estudantes do curso de Pedagogia, uma com estudantes de Medicina e uma com alunos do ensino médio.

3.4.4 Tema 2: Operações com Números Racionais

O tema *Operações com Números Racionais* foi abordado em 13 publicações do nosso corpus (que corresponde a 29% do total). Em algumas delas, este era um tema dentre outros em foco e, neste caso, também foram incluídos em outros temas. Da análise das pesquisas, elencamos três subtemas.

Três pesquisas com alunos do ensino médio investigaram o uso de jogos ou apoios virtuais para revisar o conteúdo das operações com números racionais e caracterizam o primeiro subtema: *Jogos e Apoios Virtuais como Alternativa para a Revisão das quatro Operações com Números Racionais*. Os participantes são alunos do ensino médio.

Oito pesquisas analisam o desempenho e as principais dificuldades que os alunos apresentam em problemas envolvendo quatro operações com números racionais e caracterizam o segundo subtema: *Desempenho e Dificuldades dos Alunos dos Ensinos Médio e Superior nas quatro Operações com Números Racionais*. Um destaque deste subtema é que todas as pesquisas têm enfoque metodológico diagnóstico. Os participantes são bem variados.

Por fim, o terceiro subtema é caracterizado por três pesquisas que têm como objetivo identificar e analisar o conhecimento especializado de futuros professores com relação às operações com números racionais: *Operações e Conhecimento Especializado para o Ensino*. Os participantes são alunos dos cursos de Pedagogia (2) e Licenciatura em Matemática (1).

O Quadro 7 apresenta a distribuição das pesquisas do tema 2 nos respectivos subtemas:

Quadro 7 - Características teórico-metodológicas do tema 2.

Subtema	Artigo	Referencial Teórico	Metodologia e Instrumentos Metodológicos	Enfoque Metodológico
2.1. Jogos e apoios virtuais como alternativa para a revisão das 4 operações com números racionais	Barbosa et al. (2018)	Uso de jogos	Qualitativa Uso de recursos: jogo	Proposta e análise de atividade didática
	Braga; Lima (2020)	Resolução de Problemas	Qualitativa Uso de recursos: jogo	Intervenção
	Pérez (2012)	Tecnologia	Qualitativa Uso de recursos: tecnologia	Proposta e análise de atividade didática
2.2. Desempenho e Dificuldades dos Alunos dos Ensinos Médio e Superior nas 4 Operações com Números Racionais	Carvalho et al. (2021)	Aspectos intuitivos e algorítmicos	Qualitativa Questionário	Diagnóstico
	Etcheverria et al. (2019)	Números Racionais	Qualitativa Questionário	Diagnóstico
	Justulin (2016)	Resolução de Problemas	Mista Provas	Diagnóstico
	Nardoni; Camara; Pochulu (2015)	Enfoque Ontossemiótico	Qualitativa Questionário + Entrevistas	Diagnóstico
	Oliveira et al. (2020)	-	Qualitativa Questionário	Diagnóstico
	Paraol; Rodriguês (2018)	TRRS	Qualitativa Avaliação diagnóstica	Diagnóstico

	Retana; Muñoz (2018)	Conhecimento do Professor	Mista Avaliação diagnóstica	Diagnóstico
	Sanchez-Luján; Moreno (2018)	Números Racionais	Qualitativa Sequência Didática	Diagnóstico
2.3. Operações com Números Racionais e Conhecimento Especializado para o Ensino	Proença (2015)	Resolução de Problemas	Qualitativa Encontro de Formação	Processo didático-pedagógico
	Retana; Muñoz (2018)	Conhecimento do Professor	Mista Avaliação diagnóstica	Diagnóstico
	Silva; Carvalho; Campos (2018)	Conhecimento do Professor	Qualitativa Encontro de Formação	Processo didático-pedagógico

Fonte: Elaborado pela autora.

Se analisarmos os referenciais teóricos deste tema, é perceptível que há uma variabilidade considerável.

3.4.5 Tema 3: Representações dos Números Racionais

O tema *Representações dos Números Racionais* foi abordado em sete artigos (que corresponde a 15,5% do total) do nosso corpus[37]. Escolhemos não dividir em subtemas, devido ao pequeno número de pesquisas que o compõem.

O Quadro 8 apresenta a distribuição das pesquisas do tema 3 nos respectivos subtemas:

Quadro 8 - Características teórico-metodológicas do tema 3.

Subtema	**Artigo**	**Referencial Teórico**	**Metodologia e Instrumentos Metodológicos**	**Enfoque Metodológico**
3. Representações dos números racionais	Abrahão (2016)	Conhecimento do Professor	Qualitativa Sequência de Atividades	Diagnóstico
	Flôres; Fonseca; Bisognin (2020)	PMA	Qualitativa Sequência de Tarefas	Diagnóstico
	Moura; Mattos (2014)[38]	Números Racionais	Mista Teste Diagnóstico	Diagnóstico
	Paraol; Rodriguês (2018)	TRRS	Qualitativa Avaliação Diagnóstica	Diagnóstico

[37] Em algumas dessas pesquisas, este foi um dos tópicos abordado e por isso, podem estar incluídas em outros temas também.

[38] Apesar de não tratar especificamente das representações, nem utilizar o referencial teórico da TRRS, as questões envolvem as conversões entre os registros.

	Parra-Zapata et al. (2021)	Atividade Matemática	Qualitativa Sequência Didática	Proposta e Análise de Atividade Didática
	Santana; Oliveira; Barreto (2015)	TRRS	Qualitativa Sequência de Atividades	Diagnóstico
	Silva; Dias (2015)	TAD	Qualitativa Teste diagnóstico	Diagnóstico

Fonte: Elaborado pela autora.

Quanto aos referenciais teóricos deste tema, três pesquisas adotaram o ponto de vista da semiótica com base em Duval (ABRAHÃO, 2016; PARAOL; RODRIGUÊS, 2018; SANTANA; OLIVEIRA; BARRETO, 2015). As demais pesquisas referenciaram-se no PMA (FLÔRES; FONSECA; BISOGNIN, 2020), desenvolvido por um grupo de pesquisadores na área de Psicologia da Educação, conhecido por Advanced Mathematical Thinking Group e na TAD (Teoria Antropológica do Didático) (SILVA; DIAS, 2015), do grupo da didática francesa.

3.4.6 Tema 4: O Conceito de número racional e as suas Interpretações

O tema *O Conceito de Número Racional e as suas Interpretações* foi abordado em 22 publicações (que corresponde a 49% do total) do nosso corpus.

A maior parte das pesquisas está incluída neste tema e o foco está nos conhecimentos, na compreensão, nas concepções, no desempenho e nas dificuldades dos alunos do ensino médio e do ensino superior (principalmente futuros professores) acerca do conceito de número racional.

Diversas dessas pesquisas tiveram como referencial teórico e embasamento os subconstructos do conceito de número racional. Por este motivo, escolhemos como subtemas deste capítulo cada um dos subconstructos[39]: parte-todo, medida, quociente e operador[40].

Este capítulo está subdividido nos seguintes subtemas:

- Números racionais como parte-todo
- Números racionais como quociente
- Números racionais como medida
- Números racionais como operador

O Quadro 9 apresenta a distribuição das pesquisas do tema 4 nos respectivos subtemas:

[39] O subconstructo razão já foi abordado no tema 1, relacionado ao pensamento proporcional.

[40] Por escolha, as pesquisas que contemplavam todos os subconstructos foram alocadas em subtemas envolvendo os subconstructos que os resultados eram mais relevantes. Por exemplo, a pesquisa de Garcia (2019) foi inserida no subtema 2, subconstructo quociente, porque os resultados referentes a este subconstructo foram mais relevantes, embora também trate de todos os outros subconstructos.

Quadro 9 - Características teórico-metodológicas do tema 4.

Subtema	Artigo	Referencial Teórico	Metodologia e Instrumentos Metodológicos	Enfoque Metodológico
4.1. Números Racionais como Parte-Todo	Carpes; Carpes (2020)	Resolução de Problemas	Qualitativa Encontros de Formação	Processo Didático Pedagógico
	Etcheverria; Amorim (2020)	Conhecimento do Professor	Qualitativa Questionário	Diagnóstico
	García; Cabañas-Sánchez (2013)	Números Racionais	Qualitativa Sequência de Atividades + Entrevista	Diagnóstico
	Justulin (2016)	Resolução de Problemas	Mista Provas	Diagnóstico
	Menegazzi; Dalcin (2016)	Comunidades de Prática	Qualitativa Grupo Colaborativo	Processo Didático-Pedagógico
	Paraol; Rodriguês (2018)	TRRS	Qualitativa Avaliação Diagnóstica	Diagnóstico
	Salazar et al. (2016)	Tecnologia	Qualitativa Uso de Recurso: Tecnologia	Diagnóstico + Proposta e Análise da Atividade Didática
4.2. Números Racionais como Quociente	Cabello; Mercado (2015)	Números Racionais	Qualitativa Questionário + Entrevista	Diagnóstico
	Carpes; Bisognin (2019)	Enfoque Ontossemiótico	Qualitativa Encontro de Formação	Processo Didático-Pedagógico
	García (2019)	Matemática Realista	Qualitativa Discussões Guiadas	Diagnóstico
	García; Cabañas-Sánchez (2013)	Números Racionais	Qualitativa Entrevista + Sequência Atividades	Diagnóstico
	Konic (2019)	Enfoque Ontossemiótico	Qualitativa Questionário	Diagnóstico
	Menegazzi (2013)	Números Racionais	Qualitativa Avaliação Diagnóstica	Diagnóstico + Proposta e Análise da Atividade Didática
	Mercado; Cabello; Martínez (2016)	Números Racionais	Qualitativa Questionário + Entrevista	Diagnóstico
	Muller et al. (2020)	Números Racionais	Mista Questionário	Diagnóstico
4.3. Números Racionais como Medidas	Abrahão (2016)	Conhecimento do Professor	Qualitativa Sequência de Atividades	Diagnóstico

	Amaya; Bianchi; Montoro (2018)	Números Racionais	Mista Questionário	Diagnóstico
	Medina (2013)	Enfoque Ontossemiótico	Qualitativa Sequência de Atividades	Intervenção
	Menegazzi (2013)	Números Racionais	Qualitativa Avaliação Diagnóstica	Diagnóstico + Proposta e Análise da Atividade Didática
	Oliveira; Araman (2017)	Números Racionais	Qualitativa Sequência de Atividades	Diagnóstico
	Retana; Muñoz (2018)	Conhecimento do Professor	Mista Avaliação Diagnóstica	Diagnóstico
4.4. Números Racionais como Operadores	Carpes; Bisognin (2019)	Enfoque Ontossemiótico	Qualitativa Encontro de Formação	Processo didático-Pedagógico
	Godoy; Barreto (2016)	Números Racionais	Qualitativa Encontro de Discussão	Intervenção
	Reyes; Prieto (2015)	Tecnologia	Qualitativa Uso de Recursos: Tecnologia	Proposta e Análise de Atividade Didática
	Vecino et al. (2015)	-	Qualitativa Prova em fases	Diagnóstico

Fonte: Elaborado pela autora.

O subconstructo operador foi o menos citado nas pesquisas analisadas e, quando ocorreu, as discussões foram superficiais. Uma interpretação é que as dificuldades referentes a este subconstructo não se prolongam ao longo da escolarização, seja porque seu significado é mais fácil de compreender ou porque é mais abordado ao longo da educação básica.

Com relação aos participantes das pesquisas temos:

Quadro 10 - Distribuição de frequências por escolaridade dos participantes do Tema 4.

Público-alvo	**Frequência**
ES (Licenciatura em Matemática (2), Pedagogia (8) e Engenharia (1))	11
Ensino Médio	4
EF e EM	2
EF e ES (Licenciatura em Matemática e Pedagogia)	2
EM e ES (Licenciatura em Matemática)	1
EF, EM e ES	1
Curso preparatório	1
Total	**22**

Fonte: Elaborado pela autora.

3.5 MAPA DA LITERATURA

O Quadro 11 apresenta, de maneira visual, um Mapa da Literatura do corpus e sua organização em temas e subtemas (CRESWELL, 2010):

Quadro 11 - Mapa da Literatura.

FOCO TEMÁTICO	SUBTEMA	PESQUISAS
RAZÃO E PENSAMENTO PROPORCIONAL (18%)	Pensamento proporcional e conhecimento especializado de futuros professores de Matemática	(ASTUDILLO; HUERTA; LEO, 2018; BUFORN; FERNÁNDEZ, 2014; CAMACHO; GUERRERO, 2017; RIQUELME; VERGARA, 2019; SILVA; CÂNDIDO; SOUZA, 2018; SOTO, 2017)
	Estratégia e uso do pensamento proporcional	(SILVA; CÂNDIDO; SOUZA, 2018; TREVISAN; DOMINGUES, 2017)
	Pensamento proporcional e seu uso em situações da vida real	(GONZÁLEZ et al., 2019)
OPERAÇÕES COM NÚMEROS RACIONAIS (29%)	Jogos e apoios virtuais como alternativa para a revisão das 4 operações com números racionais	(BARBOSA et al., 2018; BRAGA; LIMA, 2020; PÉREZ, 2012)
	Desempenho e dificuldades dos alunos dos ensinos médio e superior nas 4 operações com números racionais	(CARVALHO et al., 2021; ETCHEVERRIA et al., 2019; JUSTULIN, 2016; NARDONI; CAMARA; POCHULU, 2015; OLIVEIRA; ARAMAN, 2017; PARAOL; RODRIGUÊS, 2018; RETANA; MUÑOZ, 2018; SANCHEZ-LUJÁN; MORENO, 2018)
	Operações com números racionais e conhecimento especializado para o ensino	(PROENÇA, 2015; RETANA; MUÑOZ, 2018; SILVA; CARVALHO; CAMPOS, 2018)
REPRESENTAÇÕES DOS NÚMEROS RACIONAIS (15,5%)	(ABRAHÃO, 2016; FLÔRES; FONSECA; BISOGNIN, 2020; MOURA; MATTOS, 2014; PARAOL; RODRIGUÊS, 2018; PARRA-ZAPATA et al., 2021; SANTANA; OLIVEIRA; BARRETO, 2015; SILVA; DIAS, 2015)	
O CONCEITO DE NÚMERO RACIONAL E AS SUAS INTERPRETAÇÕES (49%)	Números racionais como parte-todo	(CARPES; CARPES, 2020; ETCHEVERRIA; AMORIM, 2020; GARCÍA; CABAÑAS-SÁNCHEZ, 2013; JUSTULIN, 2016; MENEGAZZI; DALCIN, 2016; PARAOL; RODRIGUÊS, 2018; SALAZAR et al., 2016)
	Números racionais como quociente	(CABELLO; MERCADO, 2015; CARPES; BISOGNIN, 2019; GARCÍA; CABAÑAS-SÁNCHEZ, 2013; GARCÍA, 2019; KONIC, 2019; MENEGAZZI, 2013; MERCADO; CABELLO; MARTÍNEZ, 2016; MULLER et al., 2020)
	Números racionais como medidas	(ABRAHÃO, 2016; AMAYA; BIANCHI; MONTORO, 2018; MEDINA, 2013; MENEGAZZI, 2013; OLIVEIRA; ARAMAN, 2017; RETANA; MUÑOZ, 2018)
	Números racionais como operadores	(CARPES; BISOGNIN, 2019; GODOY; BARRETO, 2016; REYES; PRIETO, 2015; VECINO et al., 2015)

Fonte: Elaborada pela autora.

O Quadro 11 expressa a variabilidade dos temas em foco, metodologias e participantes envolvidos na investigação. Nos capítulos a seguir, apresentamos a análise de cada tema.

4 ANÁLISE DOS TEMAS

Este capítulo explora o mapa da literatura de pesquisa em Educação Matemática sobre números racionais construído no Capítulo 3, buscando identificar as concepções de alunos dos ensinos médio e superior ao lidar com esses números. A segunda[41] questão de pesquisa orienta a discussão do material produzido sobre os temas, compondo quatro seções.

O material produzido sobre cada tema busca atender aos objetivos específicos para desenvolver o Estado da Arte da pesquisa sobre números racionais, enunciados na seção 1.4. Especificamente, buscamos "Descrever as concepções que alunos do ensino médio e ensino superior apresentam ao lidar com os números racionais, discutindo traços de suas origens e sua natureza".

Este objetivo específico inclui descrever:

- as concepções associadas, especificamente, aos subconstructos parte-todo, medida, quociente, operador e razão;
- as estratégias dos alunos ao utilizar os subconstructos parte-todo, medida, quociente, operador e razão;
- a frequência e familiaridade com que os alunos utilizam determinado subconstructo;
- os modos como os alunos entendem as múltiplas representações dos números racionais, identificando tipos de registro de representação, caso existam, que os alunos evocam com maior ou menor frequência.

Para a apresentação de cada uma das pesquisas selecionadas, apresentamos uma síntese por meio de resumos expandidos no Apêndices H.

No que segue, a síntese de cada tema identificado no mapa da literatura.

4.1 TEMA 1: RAZÃO E PENSAMENTO PROPORCIONAL

Pesquisadores referenciados principalmente em Behr et al. (1983) destacam a razão como um subconstructo do conceito de número racional.

No subconstructo **razão**, o símbolo $\frac{p}{q}$ representa a comparação multiplicativa de duas quantidades, p e q e, como tal, é visto como um índice comparativo de magnitudes relativas de dois números (BEHR et al., 1983). Pesquisas ressaltam que o entendimento da representação é

[41] Quais concepções os alunos do ensino médio e do ensino superior evocam em situações com números racionais, interpretando-os como parte-todo, medida, quociente, operador e razão?

mais próximo de um índice comparativo do que um número (BEHR et al., 1983; CHARALAMBOUS; PITTA-PANTAZI, 2007).

Conceitualmente, razão e pensamento proporcional estão intrinsecamente relacionados. Kieren (1976), por exemplo, descreve a noção de proporcionalidade como uma estrutura cognitiva associada ao subconstructo razão. Piaget e Inhelder (1975) conceituam tal estrutura cognitiva constituída por relações de segunda ordem, que são as "relações entre relações" (proporção), a partir de relações de primeira ordem, que seriam as "relações entre dois objetos" (razão) (SILVA; CÂNDIDO; SOUZA, 2018).

Em termos mais específicos, o **pensamento proporcional** é entendido como "uma afirmação que iguala duas razões" (BEHR et al., 1983, tradução nossa). Exige uma "habilidade de estabelecer relações multiplicativas entre duas quantidades e de estender esta relação a outro par de quantidades" (BUFORN; FERNÁNDEZ, 2014, p. 22, tradução nossa); além de "um conhecimento de igualdade de duas razões e uma estratégia compensatória entre seus termos, que não é uma tarefa simples" (RIQUELME; VERGARA, 2019, tradução nossa). São muitas situações da nossa vida regidas por regras proporcionais, o que justifica sua importância na escola básica.

Dois aspectos estão particularmente envolvidos no pensamento proporcional:

> Lógico: a proporção é um esquema que estabelece relações entre relações (uma razão é uma relação entre duas variáveis, e a proporção uma relação de equivalência entre duas razões) e implica o recurso a uma lógica de segunda ordem. (ASTUDILLO; HUERTA; LEO, 2018, p. 118, tradução nossa)
>
> Matemático: as compensações quantitativas assumem a forma de esquemas proposicionais de equivalência (coordenação dos processos de covariância entre variáveis e suas respectivas compensações) que permitem garantir que no processo de variação se conserve invariante um quociente ou um produto. (ASTUDILLO; HUERTA; LEO, 2018, p. 118, tradução nossa)

A covariância entre variáveis citada no excerto acima implica ainda que as duas quantidades na relação de razão devem variar simultaneamente, mantendo constante a relação entre elas (CHARALAMBOUS; PITTA-PANTAZI, 2007, p. 298). Esse entendimento é parte do desenvolvimento da noção de função, de modo geral.

Os três subtemas identificados no tema 1 são apresentados nas seções a seguir.

4.1.1 Subtema 1.1: Pensamento proporcional e conhecimento especializado para o ensino.

O Quadro 12 apresenta um resumo das pesquisas deste subtema destacando os elementos para a análise comparativa entre elas e o Apêndice G traz os respectivos resumos expandidos.

Quadro 12 - Descrição das pesquisas do subtema Pensamento Proporcional e Conhecimento Especializado para o Ensino.

Pesquisa	Objetivo	Foco	Participantes
Astudillo, Huerta e Leo (2018)	reconhecer as concepções de futuros professores acerca do conhecimento dos temas relacionados às variações proporcionais, por meio de um estudo de caso.	Pensamento Proporcional	ES (Pedagogia) Total: 6
Buforn e Fernández (2014)	examinar o conhecimento especializado de matemática no âmbito do raciocínio proporcional de um grupo de estudantes para professores da educação primária.	Raciocínio Proporcional	ES (Pedagogia) Total: 85
Camacho e Guerrero (2014)	identificar o conhecimento didático do professor em formação inicial para ensinar a razão como um significado da fração.	Razão	ES (Pedagogia) Total: -
Riquelme e Vergara (2019)	identificar elementos matemáticos que influenciam a compreensão e aquisição do conceito de razão, para elaborar uma proposta metodológica que permita detectar os erros e acertos dos alunos ao resolver problemas de razão e proporções.	Razão e Raciocínio Proporcional	ES (Pedagogia) Total: 8
Silva, Cândido e Souza (2018) [42]	investigar estratégias utilizadas por alunas de um curso de Pedagogia ao resolverem situações de estruturas multiplicativas, sobretudo situações de valor omisso e comparação.	Raciocínio Proporcional	ES (Pedagogia) Total: 30
Soto (2017)	estudar o processo de elaboração e análise de uma sequência de aula que aborda a revisão e reconstrução de conhecimentos associados à razão e à proporcionalidade.	Proporcionalidade e Razão	ES (Pedagogia) Total: -

Fonte: Elaborado pela autora.

Da comparação desses artigos, observamos que todos têm em comum o foco no conhecimento de conteúdo e no conhecimento pedagógico de conteúdo do futuro professor (pedagogos). Shulman (1986) e Ball et al. (2008) são referências compartilhadas, reconhecendo a importância do conhecimento especializado do professor. Dos resultados, destaca-se a não compreensão do pensamento proporcional.

Um objetivo comum de algumas pesquisas deste subtema foi analisar o conhecimento especializado de conteúdo de Matemática dos futuros professores (ASTUDILLO; HUERTA; LEO, 2018; BUFORN; FERNÁNDEZ, 2014; SILVA; CÂNDIDO; SOUZA, 2018). Outro objetivo comum foi analisar o conhecimento pedagógico de conteúdo de Matemática com relação à razão e ao pensamento proporcional (CAMACHO; GUERRERO, 2017; RIQUELME; VERGARA, 2019; SOTO, 2017). Apresentamos a seguir os principais resultados.

[42] A pesquisa de Silva et al. (2018) esteve presente nos subtemas 1 e 2, pois está relacionada com o conhecimento especializado do futuro professor e com as estratégias que os alunos utilizaram na resolução de problemas envolvendo o pensamento proporcional.

Astudillo, Huerta e Leo (2018) pontuam erros conceituais do que é uma proporção, cometidos por futuros professores e apontam a necessidade de haver uma disciplina nos cursos de Pedagogia voltada para o tema "*Pensamento Proporcional*".

Já Buforn e Fernández (2014) concluem que uma porcentagem alta dos futuros professores está em um nível pré-proporcional, "centrado nas relações qualitativas ou unicamente centrado nos significados dos números racionais ou em regras algorítmicas como a regra de três, sem ter adquirido as formas de raciocinar com estes significados" (BUFORN; FERNÁNDEZ, 2014, p. 39). Os resultados mostram que:

> os licenciandos têm conhecimento especializado limitado sobre o raciocínio proporcional, evidenciado pela dificuldade em identificar situações não proporcionais, proporcionais, em desenvolver algumas maneiras de raciocinar em relação à construção de uma unidade (raciocínio unitizing e up and down) e no manejo do significado multiplicativo da ideia de operador e da ideia de razão. (BUFORN; FERNÁNDEZ, 2014, p. 37, tradução nossa)

Acrescentam que a não compreensão das componentes de pensamento proporcional limita o desenvolvimento da competência docente, no sentido de estar atento à aprendizagem Matemática dos alunos (BUFORN; FERNÁNDEZ, 2014, p. 38).

Silva, Cândido e Souza (2018) concluem que os futuros professores não dominam o "conhecimento comum de conteúdo", que é considerado essencial, e que "provavelmente terão dificuldades em sua atividade profissional ao ensinar sobre esse assunto" (SILVA; CÂNDIDO; SOUZA, 2018, p. 32). Ainda destacam a necessidade de um processo de formação continuada abordando tais conteúdos de maneira a proporcionar um conhecimento comum e especializado do pensamento proporcional.

Com relação ao conhecimento pedagógico, Riquelme e Vergara (2019), afirmam que os futuros professores chegam à metade do curso "fortalecidos em seu conhecimento da matéria, que envolve o sistema de números naturais, inteiros e racionais, mas com deficiências em seu conhecimento pedagógico" (p. 337). Isto é, mesmo quando apresentam a solução para as questões envolvendo o pensamento proporcional, os futuros docentes não foram capazes de justificar os resultados: "não sabem explicar como o fizeram e, como resultado, não sabem ensiná-lo" (p. 337). Assim, uma grande parcela desses professores em formação encontra-se em um nível de pensamento pré-proporcional, que seriam concepções centradas em relações qualitativas[43].

[43] O autor entende relação qualitativas como "unicamente centrado nos significados dos números racionais, ou em regras algorítmicas como a regra de três, sem ter adquirido formas de raciocinar com estes significados e sem compreender a forma na qual o raciocínio proporcional se desenvolve" (RIQUELME; VERGARA, 2019, p. 339, tradução nossa).

Nesse mesmo sentido, Soto (2017) traz resultados de alguns estudos que “mostram que tanto os professores ativos como aqueles em formação lidam com os mesmos conceitos e manifestam as mesmas ideias primitivas e concepções falsas que os estudantes de primária e secundária” (p. 1201).

Portanto, os resultados dessas pesquisas indicam que grande parte dos futuros professores possuem um conhecimento comum de conteúdo a respeito do tema razão e pensamento proporcional, mas não possuem um conhecimento especializado de conteúdo, nem um conhecimento pedagógico de conteúdo (ASTUDILLO; HUERTA; LEO, 2018; BUFORN; FERNÁNDEZ, 2014; RIQUELME; VERGARA, 2019; SILVA; CÂNDIDO; SOUZA, 2018). Ou melhor, os futuros professores conseguem resolver problemas que envolvem razão e pensamento proporcional, no entanto, muitas resoluções são realizadas mecanicamente ou com uso de algoritmos (sem uma compreensão clara das justificativas dos procedimentos utilizados, sem saber diversificar as estratégias de resolução, restrita a um conhecimento puramente procedimental e sem saber explicar os processos envolvidos).

Pontuamos que as pesquisas analisaram de maneira muito superficial os tipos de conhecimento propostos por Shulman e por isso as discussões ficam muito parecidas e sem um aprofundamento teórico.

Concepções

Diante dos resultados das pesquisas analisadas neste subtema, inferimos que os futuros professores apresentam uma ***concepção pré-proporcional***, por incorporar uma noção de entendimento de um conceito restrita a execução de operações.

Tal concepção é centrada nas relações qualitativas ou em regras algorítmicas como a regra de três e não nas maneiras de raciocinar com estes significados (BUFORN; FERNÁNDEZ, 2014). É importante enfatizar que ter um pensamento proporcional significa muito mais do que aplicar a regra de três. O uso das estratégias unitária e regra de três não são uma manifestação do pensamento proporcional (RIQUELME; VERGARA, 2019), o que pode ser evidenciado no uso da regra de três em situações não proporcionais.

Embora o algoritmo da regra de três seja eficiente em problemas proporcionais, ele tem pouco significado para os alunos: “a regra do produto cruzado não tem referência física e, portanto, carece de significado para os alunos” (CRAMER; POST; CURRIER, 1993). Ao longo do tempo, tem-se percebido que estas estratégias são mal compreendidas pelos alunos (POST; BEHR; LESH, 1988), raramente são métodos de solução “gerados naturalmente” e são

frequentemente utilizadas por alunos para evitar o raciocínio proporcional, em vez de facilitá-lo (LESH; POST; BEHR, 1988).

Com relação à natureza e origem, um dos problemas é que tanto os livros didáticos quanto o processo de ensino aprendizagem nas salas de aula das séries iniciais têm enfatizado as habilidades processuais e não os entendimentos conceituais.

Quanto a intervenções para transformar este cenário, as pesquisas apontam a necessidade de envolver os professores em formação inicial em processos de formação continuada com esta temática, seja por meio de cursos de formação ou ainda pela inserção de disciplinas nas grades curriculares dos cursos de Pedagogia, voltados a esta temática. Contudo, isto não garante a resolução dos problemas elencados.

4.1.2 Subtema 1.2: Estratégias e uso do pensamento proporcional

Neste subtema incluímos as pesquisas cujo foco é o conhecimento de conteúdo sobre proporções, cujas características estão apresentadas no Quadro 13. O Apêndice G traz o resumo expandido das pesquisas incluídas neste subtema.

Quadro 13 - Descrição das pesquisas do subtema estratégias e uso do pensamento proporcional

Pesquisa	Objetivo	Foco	Participantes
Silva, Cândido e Souza (2018)	investigar estratégias utilizadas pelos participantes ao resolverem situações de estruturas multiplicativas, sobretudo situações de valor omisso e comparação.	raciocínio proporcional	ES (Pedagogia) Total: 30
Trevisan e Domingues (2017)	explorar as distintas ideias e contextos nos quais o raciocínio proporcional se aplica e se consolida, por meio de uma prova em fases proposta aos participantes, ressignificando-o e buscando minimizar aversão a ele.	raciocínio proporcional	EM (3° ano) Total: 32

Fonte: Elaborado pela autora.

Ambas são do tipo diagnóstico e os tipos de problemas proporcionais[44] investigados são:

- Problemas de valor omisso: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, são dados três valores e o quarto é solicitado (SILVA; CÂNDIDO; SOUZA, 2018).
- Problemas de comparação: $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$, os quatro valores são dados e solicita-se a comparação e indicação de qual é maior, menor ou se são iguais (SILVA; CÂNDIDO; SOUZA, 2018);

[44] Lesh et al (1988) apresenta 7 tipos de problemas envolvendo o pensamento proporcional: valor omisso, comparações, transformação, valor médio, proporções envolvendo conversões de razões, para taxas, para frações, proporções envolvendo etiquetas unitárias. Para mais detalhes desses tipos de problemas, verificar Proportional Reasoning (archive-it.org).

Pesquisadores renomados na área do pensamento proporcional sugerem que diferentes estratégias de resolução desses problemas sejam exploradas ao longo do processo de ensino-aprendizagem, como por exemplo, a taxa unitária, o fator de mudança, as frações equivalentes e a regra de três (CRAMER; POST, 1993).

As pesquisas abordam o assunto a partir dos seguintes problemas:

Quadro 14 - Tipos de Problemas nas pesquisas de Trevisan e Domingues (2017) e Silva, Cândido e Souza (2018).

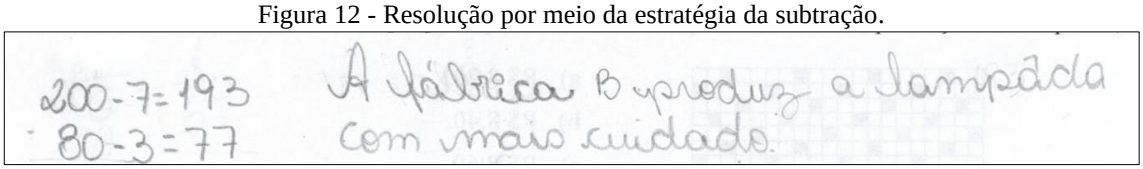
Pesquisa	**Tipo de Problema e Estratégia de Resolução**	**Problema**
Trevisan e Domingues (2017)	Problema de Comparação Estratégia de resolução: Subtração (9) Taxa unitária (6) Regra de três simples (1),	Na fábrica A, de cada 200 lâmpadas produzidas 7 saem com defeito, enquanto na fábrica B, de cada 80 produzidas, 3 são defeituosas. Compare as razões entre lâmpadas defeituosas e a produção de cada fábrica, e diga qual das fábricas tem mais cuidado com a produção de lâmpadas, A ou B. (TREVISAN; DOMINGUES, 2017, p. 4)
Silva, Cândido e Souza (2018)	Problema de Comparação Estratégia de Resolução: Predominância do cálculo da taxa unitária (86,67%)	No último sábado à tarde, a família Smith foi para o Teatro Star e todos os 6 integrantes entraram por $10. A família West foi ver um filme no Odyssey e todos os 4 entraram por $7. Que teatro tem melhores preços na matinê de sábado? (SILVA; CÂNDIDO; SOUZA, 2018, p. 25)
Silva, Cândido e Souza (2018)	Problema de Valor Omisso Estratégia de Resolução: Taxa unitária (46,67%) Regra de três (23,33%) Estratégia aditiva (30%)	Ao lado, podemos observar o senhor baixo cuja altura mede seis clipes; se fôssemos medi-lo com fósforos, seriam necessários quatro palitos. Ele tem um amigo, um senhor alto, que mede seis fósforos. Quantos clipes utilizaríamos para medir o senhor alto? (SILVA; CÂNDIDO; SOUZA, 2018, p. 26)

Fonte: Elaborado pela autora.

Trevisan e Domingues (2017) consideram que os problemas de comparação são menos comuns nas salas de aula. As estratégias utilizadas pelos alunos na resolução deste problema, que exigia apenas comparações, foram: subtração, cálculo da taxa unitária e regra de três simples, sendo este último, o único grupo que resolveu de maneira correta e evidenciou uma compreensão da situação. Inferimos que os alunos não reconheceram a ideia de razão por meio da comparação de razões, ou seja, do conceito de proporção.

A utilização da operação de subtração ao propor soluções para este tipo de problema indica predominância de um pensamento aditivo até esta etapa escolar, como exemplificado na Figura 12:

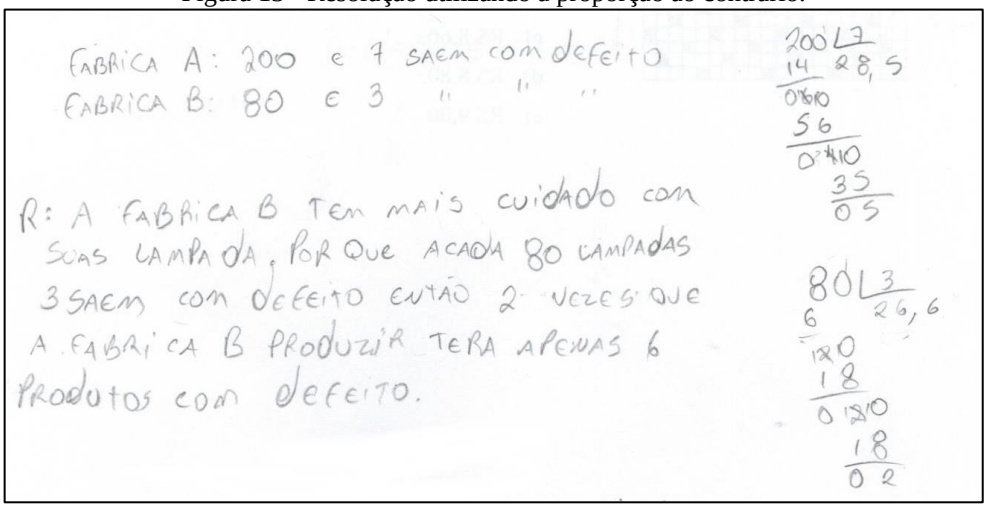
Figura 12 - Resolução por meio da estratégia da subtração.



Fonte: Trevisan e Domingues (2017, p. 5).

Apesar disso, indícios de pensamento multiplicativo não são suficientes para impedir que alguns participantes utilizassem a proporção de modo inverso (200 para 7 ao invés de 7 para 200), como na resolução da Figura 13:

Figura 13 - Resolução utilizando a proporção ao contrário.



Fonte: Trevisan e Domingues (2017, p. 6).

Já Silva, Cândido e Souza (2018), destacam que a estratégia mais utilizada no problema de comparação foi o cálculo da taxa unitária[45] (86,67%). Entretanto, algumas dificuldades surgiram: erros ao fazer a operação de divisão; comparação entre números decimais (qual valor é maior 1,66 ou 1,75?).

No problema de valor omisso a estratégia mais utilizada na pesquisa de Silva, Cândido e Souza (2018) também foi a taxa unitária (46,67%), confirmando resultados em outras pesquisas. Em seguida, apareceram a regra de três (23,33%) e a estratégia aditiva (30%), ao relatarem que o senhor alto possuía dois clipes a mais que o senhor baixo e então mediria 8 clipes.

Da análise das respostas, Trevisan e Domingues (2017) concluem que os problemas de comparação se mostram mais difíceis de resolver do que os de valor omisso, pois, em geral, são menos enfatizados no processo de ensino aprendizagem. Já na pesquisa de Silva, Cândido e Souza (2018), o desempenho foi menor no problema de valor omisso.

Em síntese, os principais erros e dificuldades dos futuros professores e dos alunos do ensino médio identificados foram:

[45] Tal estratégia consiste em atribuir os valores pagos nas entradas pelo número de integrantes das respectivas famílias, em que, primeiro dividiram $10 por 6, encontrando $1,66 e em seguida, dividiram $7 por 2, encontrando $1,75.

- erros ao fazer a operação de divisão e decidir qual valor é maior, 1,66 ou 1,75 (SILVA; CÂNDIDO; SOUZA, 2018);
- reconhecer a natureza proporcional da situação, apontando para indícios de um pensamento aditivo (A tem mais peças defeituosas) e não proporcional (TREVISAN; DOMINGUES, 2017);
- não associar a razão como forma de representação para o pensamento proporcional (TREVISAN; DOMINGUES, 2017).

Concepções

Diante desses resultados, duas concepções podem ser inferidas: novamente uma *concepção pré-proporcional* e uma *concepção aditiva*.

A *concepção pré-proporcional* é caracterizada pela argumentação dos participantes restrita aos procedimentos de cálculo e à estratégia para encontrar a taxa unitária utilizada pela maioria dos futuros professores nos dois tipos de problema.

Vale observar que, em ambas as pesquisas, a estratégia com maior ocorrência não foi a regra de três, mas sim a da taxa unitária, que se apresenta então como a concepção predominante na atividade realizada. A justificativa das futuras professoras para a utilização desta estratégia, é que já estariam acostumadas a resolver desta maneira em situações do dia a dia. Assim, a origem para a utilização desta estratégia é a utilização no dia a dia.

Já a *concepção aditiva*, ainda presente em situações proporcionais, mesmo ao final da escolarização, é caracterizada por quantidades absolutas que são independentes e não se relacionam umas com outras, que é o tipo de pensamento que as crianças estão familiarizadas antes da introdução dos números racionais. Em contrapartida, o pensamento multiplicativo é elaborado a partir de quantidades relativas, ou seja, a partir da relação entre quantidades e envolve comparar duas quantidades distintas e não uma contagem[46].

O pensamento proporcional envolve a compreensão das relações matemáticas exibidas nas situações proporcionais, relações essas que são de natureza multiplicativa entre as quantidades. Além disso, o pensamento proporcional envolve a capacidade de solucionar uma gama de problemas, como valor omisso, comparação, valor médio etc. Mas também envolve a capacidade de diferenciar situações proporcionais de situações não proporcionais (BUFORN;

[46] Um exemplo apresentado em Lamon (2008) fica bem nítida esta distinção: suponha que temos uma caixa com 4 doces e outra com 10 doces. O pensamento aditivo estaria relacionado a perguntas como: “Quantos doces há na primeira caixa?” ou “Quantos doces a segunda caixa tem a mais que a primeira?”. Já no pensamento multiplicativo, as perguntas seriam: “Que parte de uma dúzia os doces de cada caixa representam?” ou “Quantas vezes maior é o número de doces da segunda caixa em relação à primeira?”.

FERNÁNDEZ, 2014). Alunos que apresentam esta concepção aditiva, geralmente não conseguem fazer esta distinção.

Entendemos que a transição para o pensamento multiplicativo não é uma tarefa simples, mas é extremamente necessária para a compreensão do conceito de número racional (BEHR; POST, 1992; LAMON, 2008).

Como desdobramento para o ensino, os pesquisadores sugerem explorar tipos de problemas proporcionais diversificados e incentivar diferentes estratégias na resolução desses problemas. Assim, explorar um único tipo de problema (comumente os problemas de valor omisso) envolvendo o raciocínio proporcional parece muito restritivo do ponto de vista cognitivo, geralmente levando a soluções puramente algorítmicas, principalmente a regra de três.

4.1.3 Subtema 1.3: Pensamento proporcional e seu uso em situações da vida real

O seguinte artigo apresenta especificidades quanto ao contexto e participantes que levam a considerá-lo como identificando um subtema:

Quadro 15 - Descrição das pesquisas do subtema pensamento proporcional e seu uso em situações da vida real.

Pesquisa	Objetivo	Foco	Participantes
González et al. (2019)	identificar e desenvolver o conhecimento e habilidade matemáticas associadas com a proporcionalidade e conceitos como número racional, proporção e função linear, que exibem estudantes universitários ao resolver problemas relacionados com situações da vida real	Proporcionalidade	ES (Medicina) Total: 21

Fonte: Elaborado pela autora.

No Apêndice G trazemos o resumo expandido desta pesquisa.

Dado o objetivo de González et al. (2019), a justificativa está centrada no fato de que muitos alunos possuem dificuldades na compreensão do que é uma razão e de como usar a proporcionalidade em situações do cotidiano. Tais dificuldades acompanham universitários do curso de Medicina, público-alvo da pesquisa. De fato, pesquisas anteriores identificaram problemas na administração de medicações por profissionais da saúde, devido a erros no cálculo de doses em decorrência de dificuldades com o pensamento proporcional.

A análise dos dados retoma os *ciclos de entendimento* inferidos por alunos universitários, assim como as representações Matemáticas (tabelas, gráficos e equações) e os procedimentos utilizados, descritos em detalhes no resumo expandido. Embora identifiquem padrões, os participantes permanecem em um ciclo de entendimento quantitativo, pois

apresentam dificuldades na utilização da linguagem algébrica e, consequentemente, não generalizam as relações.

Podemos concluir que esses alunos também apresentam uma *concepção pré-proporcional*.

O tema abre possibilidades para pesquisas em outras áreas do conhecimento, além da Medicina, e investigações sobre o pensamento proporcional em situações reais da vida cotidiana, inclusive de alunos do ensino básico.

4.2 TEMA 2: OPERAÇÕES COM NÚMEROS RACIONAIS

Os três subtemas identificados no tema 2 são apresentados nas seções a seguir.

4.2.1 Subtema 2.1: Jogos e apoios virtuais como alternativa para a revisão das quatro operações com números racionais.

O Quadro 16 apresenta um resumo das pesquisas deste subtema, destacando os elementos para a análise comparativa entre elas e o Apêndice G traz os respectivos resumos expandidos.

Quadro 16 - Descrição das pesquisas do subtema jogos e apoios virtuais como alternativa para a revisão das 4 operações com números racionais.

Pesquisa	Objetivo	Foco	Participantes
Barbosa et al. (2018)	revisar de forma lúdica as 4 operações básicas com números decimais, as quais os estudantes apresentavam dificuldades.	operações básicas com decimais	EM (3° ano) Total: 13
Braga e Lima (2020)	apresentar um relato de experiência sobre frações à luz da resolução de problemas.	frações (representações e operações)	EM (2° ano) Total: 36
Pérez (2012)	buscar a possível relação existente entre a aplicação de apoios virtuais em um processo de nivelação sobre operações com frações e o uso na resolução de problemas de contexto.	operações com frações	EM (3° ano) Total: 40

Fonte: Elaborado pela autora.

Características comuns às três pesquisas são os participantes matriculados no ensino médio e o enfoque metodológico ‘proposta e análise de atividade didática’ ou ‘intervenção’, caracterizado pela proposição de materiais alternativos como jogos ou apoios virtuais para revisão de conteúdos no ensino médio.

Destacamos que dificuldades em tópicos do ensino fundamental são comuns no ensino médio e assim, é necessário que os professores reservem um tempo para a revisão.

Os jogos podem ser ferramentas alternativas para a revisão de conteúdos no ensino médio, pois

> propiciam o desenvolvimento de habilidades, bem como auxiliam no processo de aprendizagem de conceitos matemáticos, já que os déficits que os estudantes trazem de conteúdos de anos anteriores acabam muitas vezes atrapalhando o entendimento e a execução de novas aprendizagens e, por isso, torna-se importante a retomada de certos conceitos. (BARBOSA et al., 2018, p. 10)

Outro destaque é o caráter colaborativo, investigativo e argumentativo oportunizado, além de um "ambiente mais agradável para o aluno e professor, aproximando-os" (BRAGA; LIMA, 2020, p. 252).

As três pesquisas concluem que o uso de jogos ou de apoios virtuais são alternativas potenciais para revisitar conhecimentos básicos de números racionais, essenciais para a aquisição de novos conceitos.

Todavia, os resultados foram bem gerais. Por exemplo, há afirmações que o jogo "proporcionou interesse e motivação" ou "o objetivo foi alcançado" ou "houve um aumento no uso das frações" etc. No entanto, não foram apresentados resultados específicos com relação às mudanças ocorridas quanto ao uso das operações com números racionais, à exceção de Barbosa et al. (2018), que analisou algumas operações, mesmo que de maneira superficial. Pérez (2012), por exemplo, com o objetivo de descrever mudanças que ocorreram após a aplicação de um *Web Quest*, apresentou resultados quantitativos com percentuais (com evidências restritas ao aumento de 22,5% na média das notas dos participantes) como foco e não na descrição das mudanças.

Por este motivo, não foi possível identificar as concepções matemáticas dos alunos nas pesquisas deste subtema.

4.2.2 Subtema 2.2: Desempenho e dificuldades dos alunos dos ensinos médio e superior nas quatro operações com números racionais.

O Quadro 17 apresenta um resumo das pesquisas deste subtema destacando os elementos para a análise comparativa entre elas e o Apêndice G, traz os respectivos resumos expandidos.

Quadro 17 - Descrição das pesquisas do subtema Desempenho e Dificuldades dos Alunos dos Ensinos Médio e Superior nas quatro Operações com Números Racionais.

Pesquisa	Objetivo	Foco	Participantes
Carvalho et al. (2021)	identificar as principais dificuldades e erros apresentados pelos participantes sobre o conceito e operações de números racionais.	números racionais e operações	EM (ingressantes do técnico) Total: 70
Etcheverria et al. (2019)	discutir o desempenho e as dificuldades apresentadas por estudantes da educação básica e graduandos do curso de Licenciatura em Matemática na resolução das 4 operações fundamentais com frações.	operações com frações	EF (7° e 9° anos) EM (1° e 3° anos) ES (Licenciatura em Matemática)

			Total: 358 alunos
Justulin (2016)	investigar relações entre o desempenho na solução de problemas e exercícios sobre frações e variáveis como atitudes em relação à Matemática, atitudes em relação às frações, o gênero e a série.	escala de atitudes, problemas x exercícios, ensino de frações	EM Total: 95
Nardoni, Camara e Pochulu (2015)	avaliar a compreensão que alcançam os alunos sobre os números racionais, como objeto matemático, ao finalizar a escola secundária e prévio ao iniciar estudos universitários ou de nível superior	números racionais	ES
Oliveira et al. (2020)	analisar o modo como uma turma de Engenharia responde a problemas elementares da matemática envolvendo conteúdo de frações e trigonometria.	frações (parte-todo e operações)	ES (Engenharia) Total: 38
Paraol e Rodriguês (2018)	verificar a aprendizagem da resolução de questões envolvendo frações e verificar os métodos de resolução e a capacidade de mudar o registro de representação do mesmo objeto.	registros de representação semiótica de frações	EF (7°, 8° e 9° anos) EM (1° ao 3° anos) ES (Licenciatura em Física) Total: 23
Retana e Muñoz (2018)	analisar o conhecimento comum de conteúdo sobre frações e decimais de estudantes que aspiram a ser professores.	conhecimento comum de conteúdo sobre frações e decimais	ES (Pedagogia) Total: 275
Sanchez-Luján e Moreno (2018)	identificar o nível de competência matemática e os erros mais comuns com frações de um grupo de alunos do novo ingresso a Licenciatura de Contabilidade, de acordo com os níveis de competência matemática estabelecidos pela OCDE.	operações com frações	ES (Licenciatura em Contabilidade) Total: 42

Fonte: Elaborado pela autora.

Todas as pesquisas analisam o desempenho e as principais dificuldades dos alunos com relação às quatro operações com números racionais, nas formas fracionária e decimal.

Orientados pelo mapa da literatura, a discussão a seguir foi organizada em dois eixos: desempenho e erros; casos exemplares: a natureza dos conceitos e a origem dos erros.

Desempenho e Erros

A Tabela 9 apresenta uma síntese dos resultados das pesquisas referente ao desempenho e erros ao operar com frações:

Tabela 9 - Índice de acertos nas atividades de operações com frações.

	Sanchéz-Luján e Moreno (2018)	**Etcheverria et al. (2019)**	**Retana e Muñoz (2018)**	**Paraol e Rodriguês (2018)**
Adição com mesmo denominador	66,6%	68%	-	-

Adição com denominadores diferentes	45,23%	38,33%	55,8%	56,83%
Subtração com mesmo denominador	-	63%	-	-
Subtração com denominadores diferentes	42,85%	31%	55,8%	48,6%
Multiplicação	30,95%	44%[47] 48%[48]	44,6%	75,9%
Divisão	78,57%	47,3%[49] 33%[50]	44,6%	37,93%

Fonte: Elaborada pela autora.

Pela considerável variação de índices, não é possível identificar qual das operações com frações os alunos apresentam maior dificuldade. Apenas é perceptível uma dificuldade com a soma e subtração de frações com denominadores diferentes se comparado com a operação com mesmo denominador, apesar de tal comparação ter sido investigada em apenas duas pesquisas.

Com relação às operações com decimais, uma síntese dos resultados das pesquisas referentes ao desempenho dos alunos é apresentada na Tabela 10:

Tabela 10 - Índices de acertos nas atividades de operações com decimais.

	Paraol e Rodriguês (2018)[51]	**Barbosa et al. (2018)[52]**	**Retana e Muñoz (2018)**
Adição	61%	77%	89,2%
Subtração	87%	85%	84%
Multiplicação	39,2%	69%	92,6%
Divisão	43,5%	46%	87,7%

Fonte: Elaborado pela autora.

Neste caso, podemos afirmar que a maior incidência de acertos ocorreu nos itens de adição e subtração de números decimais.

Em geral, o desempenho foi melhor nas operações com decimais se comparado às operações com frações. Por exemplo, a pesquisa de Retana e Muñoz (2018), concluiu que o desempenho foi melhor nos tópicos envolvendo os números decimais e, quando os alunos se deparam com operações com frações, optam por transformá-las em números decimais, "de tal maneira que lhes resulte mais fácil o tratamento" (p. 135). Um dos motivos é que as operações

[47] Item a.
[48] Item b.
[49] Item a.
[50] Item b.
[51] Os cálculos de porcentagem apresentados na tabela foram encontrados utilizando a quantidade de erros obtidas em cada uma das questões e o número total de alunos (23).
[52] No artigo não ficou claro qual exercício corresponde a qual operação. Estimamos que a ordem das operações seja relativa a estas porcentagens que inserimos na tabela.

com decimais têm a vantagem sobre as frações de ter os algoritmos parecidos com os empregados com os números naturais.

Quanto à representação de números racionais, uma parcela maior de pesquisas abordou as operações na forma de frações (CARVALHO et al., 2021; ETCHEVERRIA et al., 2019; OLIVEIRA et al., 2020; PARAOL; RODRIGUÊS, 2018; RETANA; MUÑOZ, 2018; SANCHEZ-LUJÁN; MORENO, 2018) se comparado às operações com números decimais (BARBOSA et al., 2018; PARAOL; RODRIGUÊS, 2018; RETANA; MUÑOZ, 2018). Um número menor de pesquisas envolvendo as operações com números decimais não significa que as dificuldades inexistem, mas sim que os índices de acertos sinalizam um melhor desempenho com decimais.

Casos exemplares: a natureza dos conceitos e a origem dos erros

Da análise comparativa entre as pesquisas incluídas neste subtema, as principais dificuldades e erros cometidos pelos alunos em cada uma das operações identificam três tipos de concepções[53]:

i. Concepção procedimental das operações: concepção restrita a fórmulas e algoritmos das operações e fundamentada nos erros baseados nos algoritmos.
ii. Concepção intuitiva das operações: relacionada aos erros provenientes da extensão das propriedades das operações com números naturais ou com decimais para as frações. Também inclui os erros provenientes das dificuldades de interpretação da situação proposta.
iii. Concepção não relacional das operações: relacionada aos erros provenientes de concepções restritas ou fragmentadas do conceito de número racional e ao conhecimento inadequado das propriedades das operações.

Mesmo que tais tipos de concepções se assemelhem e pareçam análogas, a natureza de cada uma delas e origem dos erros correspondentes diferem. No que segue, apresentamos exemplos de cada concepção que emergiu da comparação.

Concepção procedimental das operações

A *concepção procedimental* caracteriza-se pelo uso de algoritmos sem significado, sendo, por vezes, facilmente distorcidos. Normalmente ocorre em decorrência da memorização mecânica de procedimentos: “quando um algoritmo é visto como uma série de passos sem

[53] Os nomes dados a essas concepções foram inspirados nas ideias de Tirosh (2000) e Fishbein (1994).

sentido, os alunos podem esquecer alguns desses passos ou alterá-los de forma que levem a erros" (TIROSH, 2000, p. 7, tradução nossa).

Tal concepção independe do tipo de operação, como pode ser verificado nos exemplos do Apêndice E.

Na operação de soma, as dificuldades parecem maiores quando os denominadores são diferentes (ETCHEVERRIA et al., 2019; SANCHEZ-LUJÁN; MORENO, 2018). Em particular, em Etcheverria et al. (2019) o maior índice de erros ocorreu na operação de subtração, em todos os níveis de ensino.

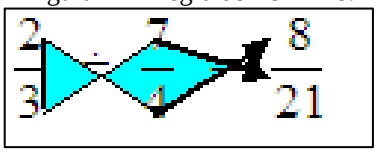
Uma justificativa para grande parte dos erros é a concepção dos alunos que há diferenças entre operar com frações com mesmo denominador e frações com denominadores diferentes. Os procedimentos (os algoritmos) são diferentes e, conceitualmente, é perceptível que os alunos ainda não compreendem o significado das frações equivalentes. Além disso, a ênfase nos algoritmos limita esta compreensão, pois os alunos simplesmente aplicam um algoritmo, sem refletir sobre sua validade ou não naquele contexto (ETCHEVERRIA et al., 2019).

Para a multiplicação, a variação na aplicação dos algoritmos foi bem menor. Porém, na pesquisa de Etcheverria et al. (2019), diferentemente do que aconteceu na adição e subtração de frações, um maior número de estudantes errou a multiplicação de frações com denominadores iguais e acertou a multiplicação de frações com denominadores diferentes, porque eles desconsideraram que não há diferença na regra operatória de multiplicação se os denominadores forem iguais ou não. É provável que os alunos fizeram analogias à operação de adição. Novamente, a operação foi, por vezes, reproduzida como uma sucessão de passos.

Com relação à operação de divisão, há equívocos nos procedimentos com denominadores diferentes e iguais, sendo que o índice de quem acertou a divisão de frações com denominadores iguais e errou a divisão com denominadores diferentes foi de 15% em Etcheverria et al. (2019), apesar de a regra operatória ser a mesma. A interpretação é a de que vários erros decorrem da aplicação de um algoritmo qualquer relacionado às frações, sem refletir sobre sua validade no contexto.

A pesquisa de Justulin (2017) traz um exemplo que mostra claramente que, muitas vezes, as operações são apresentadas aos alunos como regras arbitrárias, sem que tenham sentido na aplicação. Este é o caso da *Regra do Peixinho* que, de acordo com os alunos, é denominada assim porque a representação da regra tem o formato de um peixe.

Figura 14 - Regra do Peixinho.



Fonte: Justulin (2016, p. 355).

Se, em algum momento, os alunos esquecerem como é a lógica da aplicação da regra, não saberão resolver a divisão de frações, porque a operação foi introduzida com uma regra arbitrária.

Além disso, respostas que parecem sem sentido são, em geral, aplicações de algum algoritmo que não tem validade para aquela operação ou distorção nos passos do algoritmo.

Portanto, concordamos com Fishbein (1994) que "o raciocínio matemático não pode ser reduzido a um sistema de procedimentos de resolução" (FISCHBEIN, 1994, p. 232). Caso contrário, os procedimentos serão esquecidos mais cedo ou mais tarde. Por isto, não basta saber os algoritmos como uma sequência de passos, mas sim porque e como funcionam.

Concepção intuitiva das operações

A *concepção intuitiva das operações* é caracterizada pelo uso de algoritmos generalizados a partir de casos especiais, ou inferidos a partir de procedimentos válidos em outros contextos. Ou seja, erros decorrentes da intuição, que é um componente importante no raciocínio matemático. Para Fischbein (1994), a cognição intuitiva "é um tipo de cognição que é aceita diretamente sem a sensação de que qualquer tipo de justificação seja necessário" (p. 232). Assim, segundo om autor, ela é caracterizada pela autoevidência e, por este motivo, "tem um impacto coercitivo em nossas interpretações e estratégias de raciocínio" e "podem, às vezes, estar de acordo com verdades logicamente justificáveis ou contradizê-las" (FISCHBEIN, 1994, p. 233, tradução nossa).

No processo de ensino-aprendizagem, as intuições podem se configurar como obstáculos. Os exemplos a seguir discutem como uma generalização das propriedades dos números naturais das operações com os números decimais podem influenciar nas operações com frações.

No início do ensino fundamental é natural dificuldades em operar com este novo tipo de número, pois, até então, os alunos só conheciam os números naturais.

Em particular, no caso da adição e subtração de frações, o erro mais comum presenta nas pesquisas foi somar numerador com numerador e denominador com denominador e subtrair numerador com numerador e denominador com denominador. Interpretamos que o procedimento das operações com números naturais é transferido para o contexto das frações.

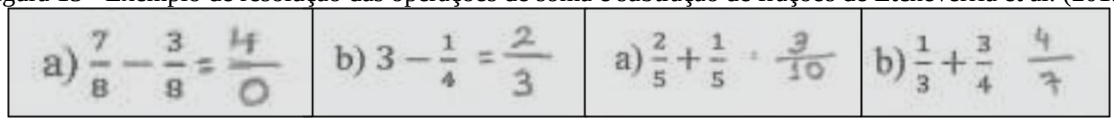
Quadro 18 - Exemplo de concepção intuitiva na adição de frações.

Exemplo	Descrição	Discussão
$\frac{2}{3}+\frac{5}{8}=\frac{7}{11}$ (OLIVEIRA et al., 2020)	$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a+c}{b+d}$ $\frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{a-c}{b-d}$	O procedimento foi somar os numeradores e somar os denominadores diretamente. (ETCHEVERRIA et al., 2019; JUSTULIN, 2016; OLIVEIRA et al., 2020; PARAOL; RODRIGUÊS, 2018; SANCHEZ-LUJÁN; MORENO, 2018).

Fonte: Elaborado pela autora.

Em Etcheverria et al. (2019) 55% dos alunos cometeram este erro. A Figura 15 apresenta alguns exemplos desses erros:

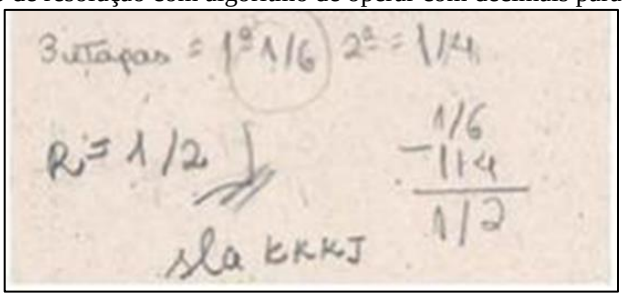
Figura 15 - Exemplo de resolução das operações de soma e subtração de frações de Etcheverria et al. (2019).



Fonte: Etcheverria et al. (2019, p. 79,81).

Neste mesmo sentido, alguns alunos utilizam o algoritmo dos números decimais para operar com frações, como verificamos no exemplo de Carvalho et al. (2021) na Figura 16, em que o aluno posicionou as frações da mesma maneira que opera com os decimais:

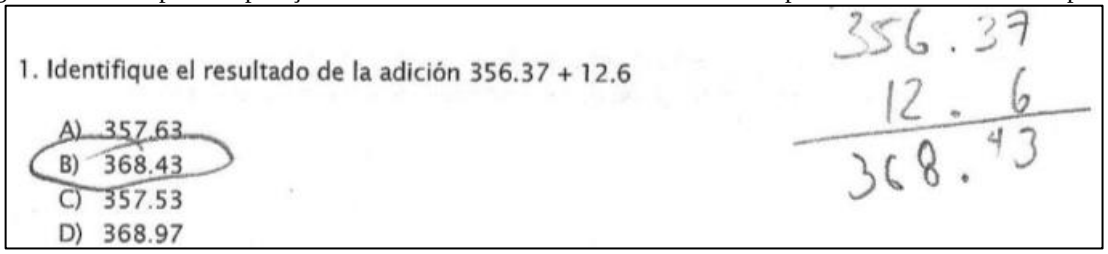
Figura 16 - Exemplo de resolução com algoritmo de operar com decimais para operar com frações.



Fonte: Carvalho et al. (2021, p. 7).

Outro exemplo ocorreu na adição com números decimais, com o posicionamento incorreto dos números para efetuar os cálculos (RETANA; MUÑOZ, 2018), confundindo décimos e centésimos, como verificamos na Figura 17:

Figura 17 - Exemplo da operação de soma com números decimais realizada por um aluno do ensino superior.



Fonte: Retana e Muñoz (2018, p. 126).

Já na multiplicação de frações, um procedimento muito comum foi a multiplicação cruzada (ETCHEVERRIA et al., 2019; PARAOL; RODRIGUÊS, 2018). Os autores apontam que alguns alunos percebem a multiplicação de frações como uma igualdade de razões e, assim,

aplicam a propriedade da proporção, sendo este erro cometido por 35% dos alunos em Etcheverria et al. (2019).

Na concepção intuitiva também estão incluídas as dificuldades provenientes da interpretação dos problemas propostos, sendo que a principal é escolher qual operação deve ser empregada em cada situação (RETANA; MUÑOZ, 2018). Por exemplo, em Carvalho et al. (2021)[54], a resolução mais comum foi a subtração entre $\frac{1}{6}$ e $\frac{1}{4}$, obtendo $\frac{1}{2}$ (12,3% dos alunos cometeram este erro). O motivo para este erro é que os alunos relacionaram a terceira etapa com a parte que faltava e, assim, concluíram que a operação a ser realizada seria a subtração.

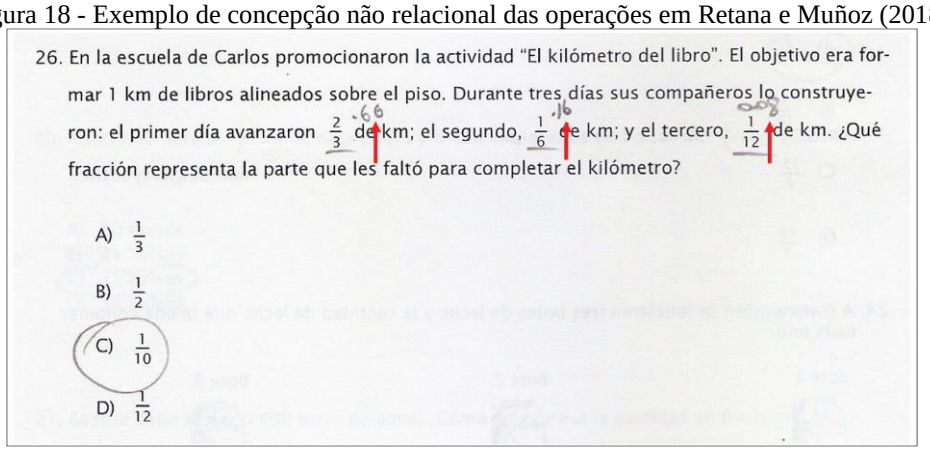
Os exemplos acima demonstram que a extensão de aspectos algorítmico-intuitivos não é consistente no contexto em que está sendo utilizado. Desta maneira, "o algoritmo se torna algo estéril e estabelece aspectos intuitivos equivocados, que impingem aos estudantes ideias confusas sobre conceitos e o uso de operações" (CARVALHO et al., 2021, p. 8).

Concepção não relacional das operações

A *concepção não relacional das operações* é caracterizada pelo uso não relacional do conceito de número racional e das operações, o que transparece no uso de suas propriedades. Este tipo de concepção apareceu em menor número nas pesquisas. Embora muitas vezes enunciadas corretamente, a fragmentação do conteúdo fica evidente quando relações estabelecidas não são coerentes, ou relações pertinentes não são estabelecidas.

Um exemplo é a relação entre decimais e frações, que ainda não está bem estabelecida pelos alunos. Nas pesquisas analisadas, há evidências de que alunos têm por hábito realizar a conversão de frações para decimais para realizar as operações (RETANA; MUÑOZ, 2018):

Figura 18 - Exemplo de concepção não relacional das operações em Retana e Muñoz (2018).



Fonte: Retana e Muñoz (2018, p. 128).

[54] A estrada que liga Recife a Caruaru será recuperada em três etapas. Na primeira etapa, será recuperado $\frac{1}{6}$ da estrada e na segunda etapa $\frac{1}{4}$ da estrada. Pergunta-se: que fração corresponde à terceira etapa?

Cerca de $\frac{1}{3}$ dos alunos (futuros professores) não conseguiu responder à questão proposta, sendo que grande parte encontrou os respectivos números decimais para realizar as operações, obtendo $0{,}90$ $(0{,}66 + 0{,}16 + 0{,}08)$. Baseado neste número, uma interpretação é que eles intuíram que para alcançar um inteiro faltaria $0{,}1$, que corresponde a $\frac{1}{10}$, selecionando a opção errada.

Este é um excelente exemplo para mostrar as vantagens de operar com frações equivalentes e não com decimais em determinadas situações. Os autores mencionam, baseados em Gairín (2004), que a relação entre frações e decimais se estabelece mediante processos algorítmicos, mais do que processos conceituais (RETANA; MUÑOZ, 2018, p. 134).

4.2.3 Subtema 2.3: Operações com números racionais e conhecimento especializado para o ensino

O Quadro 19 apresenta um resumo das pesquisas deste subtema destacando os elementos para a análise comparativa entre elas e o Apêndice G, traz os respectivos resumos expandidos.

Quadro 19 - Descrição das pesquisas do subtema operações com números racionais e conhecimento especializado para o ensino.

Pesquisa	Objetivo	Foco	Participantes
Proença (2015)	favorecer a compreensão do ensino de frações via resolução de problemas a futuras professoras	frações e seu ensino	ES (Pedagogia) Total: 25
Retana e Muñoz (2018)	analisar o conhecimento comum de conteúdo sobre frações e decimais de estudantes que aspiram a ser professores	conhecimento comum de conteúdo sobre frações e decimais	ES (Licenciatura de Educação primária) Total: 275
Silva, Carvalho e Campos (2018)	apresentar as análises de uma atividade proposta, realizada durante uma pesquisa com estudantes da Licenciatura em Matemática, para identificar conhecimentos profissionais dos futuros professores sobre os significados da divisão entre frações	divisão de frações	ES (Licenciatura em Matemática) Total: 11

Fonte: Elaborado pela autora.

Essas três últimas pesquisas analisam o conhecimento especializado dos futuros professores. Participantes são alunos dos cursos de Licenciatura em Matemática e de Pedagogia (RETANA; MUÑOZ, 2018; SILVA; CARVALHO; CAMPOS, 2018) e alunos do curso de Pedagogia (PROENÇA, 2015).

As três pesquisas têm objetivos relacionados com o conhecimento de conteúdo do professor. Das peculiaridades de cada uma delas, o foco em Proença (2015) é propor diferentes

estratégias da resolução das operações com frações sem o uso direto de algoritmos, enquanto Retana e Muñoz (2018) analisam o desempenho dos professores com o conhecimento de conteúdo sobre as operações.

Retana e Muñoz (2018) concluem que:

> os futuros professores que participaram do nosso estudo conseguem resolver problemas com frações e decimais projetados para estudantes do ensino fundamental, ou seja, eles sabem operar com esse conjunto de números, por exemplo, resolver problemas envolvendo algumas das operações básicas. Embora, como observado na análise das informações, existam alguns alunos que não o fazem, bem como certos conteúdos que, apesar de serem muito elementares, não foram resolvidos corretamente por uma porcentagem considerável de participantes. (RETANA; MUÑOZ, 2018, p. 134, tradução nossa)

No entanto, os autores compreendem que isto não é suficiente para o ensino de Matemática, pois são necessários outros tipos de conhecimento. Dentre outros resultados, os autores concluem que os futuros professores resolvem melhor os tópicos que envolvem números decimais do que os que envolvem as frações.

Proença (2015) mostra sua preocupação com o tema afirmando que, "além das lacunas no conhecimento de frações e da falta de conhecimento do trabalho baseado na resolução de problemas de professores dos anos iniciais, percebe-se que isso já vem ocorrendo na formação inicial" (PROENÇA, 2015, p. 731).

Já Silva, Carvalho e Campos (2018) identificaram e descreveram o conhecimento comum e especializado de conteúdo dos futuros professores acerca dos significados da divisão entre frações. Os autores concluem que os futuros professores estavam dotados de conhecimento acerca dos cálculos necessários para realizar a operação de divisão entre frações e enfatizam ser possível, por meio das atividades e discussões, ampliar o conhecimento especializado de conteúdo e conhecimento pedagógico de conteúdo.

Embora tendo objetivos e focos distintos, as três pesquisas compartilham o entendimento de que o conhecimento comum de conteúdo é familiar à grande maioria dos futuros professores, embora o conhecimento especializado de conteúdo e o conhecimento pedagógico de conteúdo estejam em desenvolvimento. Essa conclusão leva em conta que os futuros professores tiveram dificuldades ao justificar os cálculos realizados e ao propor diferentes estratégias de resolução para determinados problemas. A conclusão é que o conhecimento matemático de grande parte dos futuros professores acerca do conceito de número racional ainda é fragmentado, o que pode resultar no não estabelecimento de relações conceituais importantes durante o processo de ensino-aprendizagem.

As pesquisas compartilham a conclusão da necessidade de fortalecer o conhecimento especializado de conteúdo e o conhecimento pedagógico de conteúdo nos cursos de formação

inicial de professores, com a finalidade de proporcionar a compreensão relacional dos conceitos no processo de ensino-aprendizagem e, não apenas, a transmissão instrumental de conteúdos, como a memorização de algoritmos.

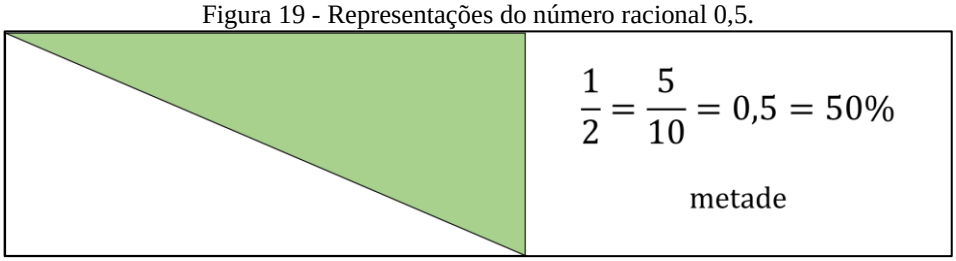
Um ponto comum às três pesquisas foi a exploração de diferentes estratégias de resolução dos problemas envolvendo as operações, sendo uma excelente opção para substituir o processo de ensino aprendizagem com foco na memorização e aplicação de algoritmos.

4.3 TEMA 3: REPRESENTAÇÕES DOS NÚMEROS RACIONAIS

Como já mencionado, a complexidade dos números racionais também é atribuída às múltiplas representações.

Os números racionais, em suas diversas representações, podem parecer distintos, mas ser equivalentes e representar o mesmo número. Na Figura 19, verificamos seis maneiras de representar o mesmo número racional:

Figura 19 - Representações do número racional 0,5.



Fonte: Elaborada pela autora.

As representações semióticas, usadas para identificar os objetos matemáticos, "são produções constituídas pelo emprego de signos pertencentes a um sistema de representações que tem inconvenientes próprios de significação e de funcionamento" (DUVAL, 2012, p. 269). Assim, tais representações são consideradas como maneiras de expressar o pensamento matemático, pois os objetos matemáticos não são diretamente acessíveis sem a utilização de um registro: "De fato, os objetos matemáticos não estão diretamente acessíveis à percepção ou à experiência intuitiva imediata, como são os objetos comumente ditos "reais" ou "físicos". É preciso, portanto, dar representantes" (DUVAL, 2012, p. 268).

O Quadro 20 é um resumo das sete pesquisas[55] deste tema, destacando os elementos para a análise comparativa e o Apêndice G traz os respectivos resumos expandidos.

[55] Em algumas dessas pesquisas, este foi um dos tópicos abordados e, por isso, podem estar incluídas em outros temas também.

Quadro 20 - Descrição das pesquisas do tema representações dos números racionais.

Pesquisa	Objetivo	Foco	Participantes
Abrahão (2016)	propor atividades que ajudem a evitar que o professor e o aluno confundam o objeto matemático e sua representação.	representações e operações com números decimais	ES (Pedagogia) Total: 180
Flôres, Fonseca e Bisognin (2020)	analisar quais processos do PMA são mobilizados por alunos de um curso de formação inicial de professores de matemática, ao realizarem tarefas exploratórias envolvendo alguns aspectos da representação de números racionais.	representação decimal finita de números racionais	ES (Licenciatura em Matemática) Total: 3
Moura e Mattos (2014)	verificar o conhecimento dos alunos acerca dos números racionais: frações, decimais e porcentagem.	frações, decimais e porcentagem	EF (8° e 9° anos) EM (1° ao 3° anos) Total: 358
Paraol e Rodriguês (2018)	verificar a aprendizagem da resolução de questões envolvendo frações e verificar os métodos de resolução e capacidade de mudar o registro de representação do mesmo objeto.	registros de representação semiótica de frações	EF (7°, 8° e 9° anos) EM (1° ao 3° anos) ES (Licenciatura em Física) Total: 23
Parra-Zapata et al. (2021) [56]	analisar as ações que mobilizam as práticas matemáticas, emergentes da atividade matemática dos alunos, a partir da interação e o uso de instrumentos e procedimentos matemáticos.	números racionais	EM ES (Licenciatura em Matemática e Física) Total: -
Santana, Oliveira e Barreto (015)	refletir sobre a formação e prática docente para o uso de representações no ensino de frações, com relação à diversificação de registros.	representação semiótica de frações	ES (Pedagogia) Total: 10
Silva e Dias (2015)	identificar e analisar as relações institucionais existentes para compreender quais as marcas dessas relações sobre as relações pessoais dos estudantes da educação básica e ensino superior.	representação dos números racionais	EF EM ES (Curso de Logística) Total: 131 alunos

Fonte: Elaborado pela autora.

As pesquisas em Silva e Dias (2015) e Paraol e Rodriguês (2018) analisaram os três níveis de ensino.

Resultados em Silva e Dias (2015), a respeito do conceito de fração e suas múltiplas representações, destacam que é uma noção que os alunos apresentam grandes dificuldades em todos os níveis. Além disso, as dificuldades com o objeto ostensivo ‘representação decimal’ são bem perceptíveis e, apesar de a representação decimal ser utilizada socialmente, a utilização em

[56] Apesar desta pesquisa ter como foco o conceito de número racional em geral, inserimos no tema representações, pela potencialidade da atividade para abordar as diferentes representações de um número racional.

situações escolares não é eficiente, apontando para a necessidade de um trabalho específico em relação às diferentes representações e aos processos de conversões.

Paraol e Rodriguês (2018) destacam como resultados as inúmeras dificuldades dos alunos do ensino fundamental e do ensino médio (menos expressiva) com conversões para o registro decimal, em situações em que o registro inicial era o figural ou fracionário. A Figura 20 refere-se a este tipo de dificuldade.

Figura 20 - Exemplo de representação errônea no registro decimal de um aluno do ensino fundamental.

Fonte: Paraol e Rodriguês (2018, p. 30).

Já a conversão do registro figural para o registro fracionário não parece ser um obstáculo. Inferimos que tal resultado decorre da ênfase no subconstructo parte-todo ao longo da escolarização.

Quanto a noção de frações impróprias, vale destacar a dificuldade dos participantes com a conversão do registro decimal ou fracionário para o registro figural, o que pode ser explicado pela não percepção de que a parte inteira deve ser representada por uma figura completa.

Os autores argumentam em favor da importância da TRRS elaborada por Duval ao longo do processo de ensino aprendizagem dos números racionais, uma vez que são exploradas superficialmente no ensino fundamental e médio. Uma explicação dos autores é que estas dificuldades "na compreensão (e na coordenação) entre os registros pode estar atrelada à confusão que o estudante faz entre o objeto representado e a sua representação" (PARAOL; RODRIGUÊS, 2018, p. 32).

Santana, Oliveira e Barreto (2015) e Abrahão (2016) têm como contexto a formação inicial de professores.

Respostas de futuros professores à situação problematizadora "*Represente o número racional dois terços de quatro maneiras diferentes*" foram analisadas em Santana, Oliveira e Barreto (2015), levando em conta a diversificação de registros. Os resultados apontam que os participantes utilizaram: o registro numérico fracionário (9); o registro figural contínuo (9); o registro numérico decimal (5); o registro numérico da divisão (3); o registro figural discreto (1); o registro em língua natural (1); o registro numérico percentual (1). Alguns alunos não apresentaram 4 tipos de representações, sugerindo "uma dificuldade de perceber a fração em registros diversificados" e "limitação quanto à percepção dos participantes em relação aos diferentes registros de representação semiótica de fração" (SANTANA; OLIVEIRA;

BARRETO, 2015, p. 13). Apesar da diversidade de representações, há uma predominância dos registros numérico, em especial a fracionária e a decimal, e o figural contínuo.

Dificuldades nas conversões do registro decimal para o fracionário foram evidenciadas e os autores destacam o papel potencial das conversões para mobilizar o conceito por meio das suas diversas representações, pois o "monorregistro não favorece a compreensão integrativa de fração" (SANTANA; OLIVEIRA; BARRETO, 2015, p. 19).

Abrahão (2016) também analisou equívocos recorrentes cometidos por alunos de um curso de Pedagogia em atividades relacionadas às representações, como por exemplo de frações impróprias, pois, em geral, os alunos concebem uma fração como sempre menor que um inteiro.

A autora argumenta que, reflexões acerca das representações inadequadas podem resultar de um trabalho comparativo entre elas, tanto envolvendo a formação de futuros professores, quanto promovendo experiências com os alunos do ensino básico.

Moura e Mattos (2014), apesar de terem um objetivo que não é exclusivamente sobre representações, buscam verificar o conhecimento dos alunos acerca dos números racionais: frações, decimais e porcentagem e consequentemente das relações entre eles. Os resultados apontam dificuldades dos alunos dos ensinos fundamental e médio na representação de frações equivalentes e na conversão das representações. Por exemplo, na questão que solicitava a representação decimal de ½, o índice de erros foi de 54,85% dos alunos do ensino fundamental e 48,88% dos alunos do ensino médio. Já o índice de erros na questão que solicitava a representação figural de 20% (no papel quadriculado), foi o mais baixo.

Em contraste com as demais pesquisas analisadas até aqui, no que se refere a contexto e perspectiva teórica adotada, a pesquisa de Flôres, Fonseca e Bisognin (2020) tem o objetivo de analisar quais processos do PMA são mobilizados por alunos de um curso de formação inicial de professores de Matemática.

Com relação aos processos do PMA, os autores concluem que:

i) representação: "todos os alunos evidenciaram, com clareza, os processos de representação, mudança de representação e tradução entre elas" (FLÔRES; FONSECA; BISOGNIN, 2020, p. 232);

ii) processos de generalização e síntese: os resultados dos alunos foram distintos, sendo que os alunos A e B

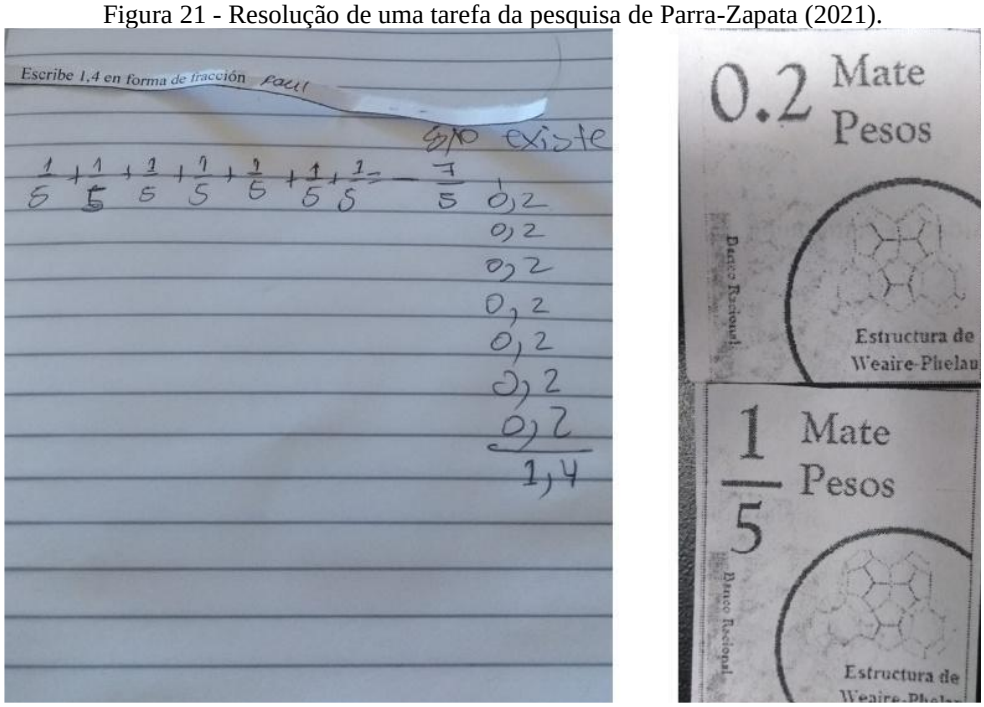
> apresentaram aspectos insuficientes relacionados ao processo; e apenas o aluno C demonstrou bom entendimento em relação ao reconhecimento de padrões, visando inferir resultados partindo de casos particulares para o geral. Todavia, ele apresentou dificuldades quanto à formalização, não alcançando o processo de abstração. (FLÔRES; FONSECA; BISOGNIN, 2020, p. 233)

iii) dificuldades relacionadas à identificação de padrões impossibilitam os processos de generalização e sintetização e, consequentemente, o de abstração.

Mais uma pesquisa que se diferencia das demais é a de Parra-Zapata et al. (2021)[57], que desenvolveu um ambiente de aprendizagem com maneiras culturalmente codificadas de pensar matematicamente acerca dos números racionais. A experiência prática consistiu na criação de uma microssociedade que promoveu a mobilização de práticas matemáticas por meio da construção de um papel moeda pelos investigadores estabelecidas a partir das representações dos números racionais. Pontuamos que a tarefa das notas racionais foi significativa, "pois os elementos se converteram em instrumentos mediadores que permitiram a compreensão e a apropriação de saberes culturais institucionais acerca dos números racionais através da mobilização de suas práticas matemáticas" (p. 222).

Um exemplo que mostra a potencialidade da atividade para o entendimento das diferentes representações de um número racional é detalhado a seguir: "*Escreva 1,4 em forma de fração*". O procedimento de uma aluna está descrito na Figura 21:

Figura 21 - Resolução de uma tarefa da pesquisa de Parra-Zapata (2021).



Fonte: Parra-Zapata et al. (2021, p. 219).

A seguinte relação foi estabelecida: como nas 'notas racionais', 0,2 *MatePesos* equivale a $\frac{1}{5}$ *MatePesos*, a aluna procedeu somando 0,2 quantas vezes necessário até chegar a 1,4. Assim, a solução reduziu-se a somar $\frac{1}{5}$ exatamente o número de vezes que somou 0,2, obtendo $\frac{7}{5}$. Assim,

[57] O objetivo não está diretamente relacionado com o tema representações, mas os resultados foram positivos neste sentido e, por isto, foi incluída neste subtema.

as notas racionais foram ‘instrumentos mediadores’ das representações dos números racionais. Tais instrumentos fortaleceram e modificaram outros aspectos da prática matemática dos alunos, como os conceitos e, principalmente, as representações dos números racionais.

Concepções

Os resultados das pesquisas evidenciam que as dificuldades de alunos dos ensinos médio e superior em perceber um mesmo número racional nos seus diferentes registros são persistentes.

Da análise do corpus de pesquisas selecionadas para compor o Estado da Arte sobre o tema *Representações do Número Racional* concluímos que:

- as *concepções dos alunos acerca das representações de um número racional estão restritas a um mono registro*. Melhor dizendo, permanecem, até mesmo durante o ensino médio e a universidade dificuldades em inter-relacionar as representações, sendo evidente uma predominância do registro numérico (fracionário e decimal) (ABRAHÃO, 2016; SANTANA; OLIVEIRA; BARRETO, 2015). Neste caso, salientamos o papel das conversões entre os registros de representação dos números racionais;
- foram evidenciadas dificuldades nas conversões de praticamente todos os registros, mas particularmente do registro figural ou fracionário para o registro decimal[58] (PARAOL; RODRIGUÊS, 2018; SANTANA; OLIVEIRA; BARRETO, 2015);
- foram evidenciadas dificuldades nas representações de frações impróprias, em especial do registro decimal ou fracionário para o registro figural, pois os alunos, em geral, *concebem frações como sempre menores que um inteiro* (ABRAHÃO, 2016; PARAOL; RODRIGUÊS, 2018).
- duas pesquisas enfatizaram a importância da representação decimal (FLÔRES; FONSECA; BISOGNIN, 2020; SILVA; DIAS, 2015), de modos distintos, mas complementares. Silva e Dias (2015) concluem que a representação decimal não foi apropriada por alunos nos três níveis de ensino investigados. Essa conclusão decorre do fato de que este tipo de representação não foi utilizado pelos alunos

[58] Como exemplos temos a conversão de ⅔ para o registro decimal como sendo 2,3 na pesquisa de Santana, Oliveira e Barreto (2015) ou de ¼ sendo convertido em 1,4 na pesquisa de Paraol e Rodriguês (2018). É interessante observar que a conversão inversa foi realizada com mais tranquilidade pelo aluno da pesquisa de Santana, Oliveira e Barreto (2015), na conversão de 2,3 para o registro fracionário.

como respostas para os problemas. Já a pesquisa de Flôres, Fonseca e Bisognin (2020) exploraram a ideia de representação decimal finita ou não, apontando as dificuldades dos alunos do ensino superior no sentido de identificação de padrões e os processos de síntese, generalização e abstração.

4.4 TEMA 4: O CONCEITO DE NÚMERO RACIONAL E AS SUAS INTERPRETAÇÕES

A maior parte das pesquisas está incluída neste tema e o interesse está centrado nos conhecimentos, concepções e dificuldades que alunos do ensino médio e do ensino superior (principalmente futuros professores) possuem acerca do conceito de número racional.

4.4.1 Subtema 4.1: Números racionais como parte-todo

A ideia principal que envolve o subconstructo parte-todo é a comparação entre o número de partes tomadas da unidade particionada e o número total de peças nas quais a unidade foi particionada (CHARALAMBOUS, 2007). Desta maneira, $\frac{a}{b}$ representa a relação entre b, o número de partes iguais em que o todo foi dividido (denominador) e a, o número das partes tomadas (numerador) (MAMEDE, 2015).

O subconstructo parte-todo normalmente é utilizado como base para o desenvolvimento do sentido de número racional na maior parte dos currículos e gera grande parte da linguagem usada para descrever frações (BEHR et al., 1983). Ademais, ele serve de base para o desenvolvimento dos outros subconstructos e pesquisas destacam que uma compreensão deficiente deste poderia afetar o entendimento de todos os outros (AMUAH; DAVIS; FLETCHER, 2017; CHARALAMBOUS; PITTA-PANTAZI, 2007).

As pesquisas

O Quadro 21 apresenta um resumo das pesquisas deste subtema destacando os elementos para a análise comparativa entre elas e o Apêndice G traz os respectivos resumos expandidos.

Quadro 21 - Características das pesquisas números racionais como parte-todo.

Pesquisa	Objetivo	Foco	Participantes
Carpes e Carpes (2020)	apresentar e discutir uma proposta de ensino que mobilize as habilidades de criação e resolução de problemas com licenciandos em Matemática, com o conceito de número racional	Números Racionais	ES (Licenciatura em Matemática) Total: 20

Etcheverria e Amorim (2020)	oportunizar uma discussão sobre conhecimentos relacionados ao conteúdo de frações e seu ensino. Averiguar as compreensões sobre o ensino de frações de estagiários do curso de Licenciatura em Matemática	Subconstructo Quociente e Medida	EF (5° ao 9° ano) ES (Licenciatura em Matemática) Total: 598
García e Cabañas-Sánchez (2013)	analisar o conhecimento que alunos do ensino médio têm construído em torno do conceito de fração, assim como das relações que estabelecem entre sua compreensão conceitual e os procedimentos desenvolvidos neste processo, frente a situações de medida, quociente e parte-todo	Subconstructos Medida, Quociente e Parte-Todo	EM Total: 30
Justulin (2016)	investigar relações entre o desempenho na solução de problemas e exercícios sobre frações e variáveis como atitudes em relação à Matemática e às frações	Problemas X Exercícios, Ensino de Frações	EM Total: 95
Menegazi e Dalcin (2016)	identificar as concepções de frações de um grupo colaborativo e analisar de que modo a participação nas atividades do grupo contribuiu para o processo de ressignificação de tais concepções	Frações (Subconstructos)	ES (Pedagogia) Total: 8
Paraol e Rodriguês (2018)	verificar a aprendizagem da resolução de questões envolvendo frações. Verificar os métodos de resolução e capacidade de mudar o registro de representação do mesmo objeto	Registros de Representação Semiótica de Frações	EF (7°, 8° e 9° anos) EM (1° ao 3° anos) ES (Licenciatura em Física) Total: 23
Salazar et al. (2016)	desenvolver uma sequência de ensino com o uso da tecnologia para estudantes de nível universitário, para a compreensão da simplificação de frações	Simplificação de Frações	ES (Engenharia) Total: 14

Fonte: Elaborado pela autora.

Concepções

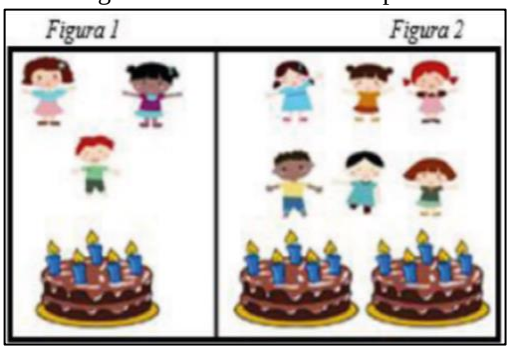
Da análise e resultados dessas pesquisas, destacamos que participantes concebem os *números racionais como sinônimo de parte-todo*. Um dos motivos identificados para tal situação é que, normalmente, parte-todo é a única interpretação que eles têm acesso durante toda a escolarização, o que pode causar limitações na aprendizagem com a restrição no uso e no entendimento do conceito.

Um exemplo em que isso fica bem claro, está presente na pesquisa de Etcheverria e Amorim (2020). Uma das atividades[59] com a noção de partilha, a unidade a ser considerada

[59] "Cada quadro indica a quantidade de crianças e a quantidade de bolos a serem divididos entre elas. a) as 9 crianças comerão a mesma quantidade de bolo? b) que fração representa a divisão do bolo na figura 1? c) que fração representa a divisão do bolo na figura 2?" (ETCHEVERRIA; AMORIM, 2020, p. 49).

seria um bolo compartilhado com 3 crianças. Os autores pretendiam abordar o subconstructo quociente por meio do problema, mas os licenciandos utilizaram o subconstructo parte-todo na explicação da situação, como verificamos na Figura 22:

Figura 22 - Atividade 1 e resposta do licenciando na pesquisa de Etcheverria e Amorim (2020).



Problema 4:
Imagine que o bolo é retangular. Daí desenhava a siuação do primeiro quadro.

Divide o bolo de acordo com a quantidade de crianças, então como cada um comerá uma das partes, ou seja, 1/3. De forma similar desenhava dois bolos do mesmo tamanho. Dividiria cada um em 6 partes e de cada um tomava 1 parte, ou seja,

1/6 de um e 1/6 do outro, ou então 2/6 de um. (Transcrição)

Fonte: Adaptado de Etcheverria e Amorim (2020, p. 49).

Mesmo tendo uma ilustração do problema, os participantes recorreram ao procedimento tradicional do ensino de frações, que é a representação por meio de retângulos, utilizada na relação parte-todo.

> as estratégias de ensino propostas por eles, deixam claro que no momento de pensar em uma forma de explicar esse conteúdo costumam recorrer ao significado de fração como parte-todo, e indicam somente o uso de recursos materiais auxiliares como estratégia de ensino para o aprendizado desse conhecimento, evidenciando limitações relacionadas ao conhecimento pedagógico do conteúdo de frações. (ETCHEVERRIA; AMORIM, 2020, p. 52)

Destacamos que existe uma dificuldade dos alunos em diferenciar as situações parte-todo e razão, devido à falta de uma padronização no uso dos termos: razão, fração, número racional, etc. Muitas vezes o termo razão é utilizado como sinônimo de fração, como no caso do enunciado da questão do ENEM na nota de rodapé [60]. Outro dificultador é a interpretação do texto e do contexto, com grande relevância para a resolução de situações envolvendo as frações.

Uma segunda concepção identificada nesta etapa escolar é que em situações parte-todo os *números racionais são sempre menores que um inteiro*[61]. Conjecturamos que a origem desta concepção é que situações com frações impróprias raramente são abordadas com o subconstructo parte-todo.

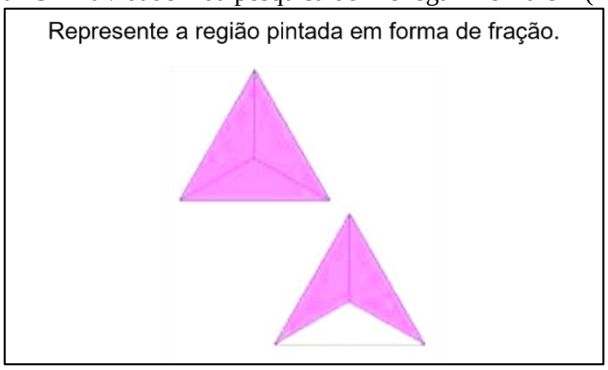
---

[60] Em uma questão do ENEM apresentada na pesquisa de Godoy e Barreto (2016) o que eles chamam de "razão", na verdade é uma comparação parte-todo com um conjunto discreto de objetos: "Em um certo teatro, as poltronas são divididas em setores. A figura apresenta a vista do setor 3 desse teatro, no qual as cadeiras escuras estão reservadas e as claras não foram vendidas. A razão que representa a quantidade de cadeiras reservadas do setor 3 em relação ao total de cadeiras desse mesmo setor é"
Fonte: (GODOY; BARRETO, 2016, p. 112). Os autores pontuam que a questão exigia que o candidato "soubesse que o número fracionário poderia ser usado para estabelecer este tipo de comparação" (p. 112), que envolve o subconstructo parte-todo.

[61] Ou o numerador precisa ser sempre menor ou igual ao denominador.

Por exemplo, na pesquisa de Menegazzi e Dalcin (2016), a representação de uma fração imprópria era solicitada, conforme a Figura 23.

Figura 23 - Atividade 1 da pesquisa de Menegazzi e Dalcin (2016).



Fonte: Adaptado de Menegazzi e Dalcin (2016, p. 498).

Cabe mencionar que o problema deveria ter esclarecido sobre qual fração está se referindo, pois fração é sempre relativo a algo.

Nenhum futuro professor identificou a figura por meio da representação de uma fração imprópria e apenas 3 licenciandos fizeram o registro por meio de um número misto: "a ideia da contagem das partes de um todo é mais evidente que a contagem das partes de dois todos, ou seja, 1 inteiro e $\frac{2}{3}$ se sobrepõem à ideia de $\frac{5}{3}$" (MENEGAZZI; DALCIN, 2016, p. 499).

As demais pesquisas incluídas neste tema foram realizadas com alunos do ensino médio: Justulin (2016), Paraol e Rodriguês (2018) e García e Cabañas-Sanchéz (2013).

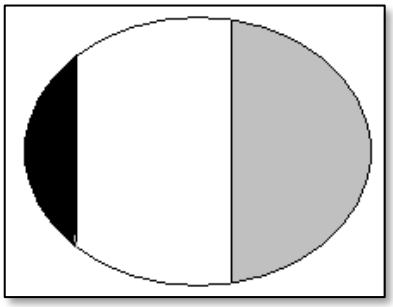
Além dos aspectos já discutidos nas três pesquisas anteriores, uma terceira concepção emergiu, embora ainda relacionada com o subconstructo central na análise anterior, que é o parte-todo: os alunos parecem conceber *particionamentos desiguais* na representação figural das frações. As ideias que permeiam o subconstructo parte-todo resultam diretamente do particionamento, garantindo a divisão do todo em partes de *tamanhos iguais* (BEHR et al., 1983; CHARALAMBOUS, 2007), tanto com quantidades contínuas como com quantidades discretas. Pothier e Sawada (1983 apud Martinie, 2007) distinguem 5 níveis de particionamento: A) partilha; B) metade algorítmica; C) uniformidade; D) imparidade; E) composição[62]. Pelos resultados das pesquisas analisadas, acreditamos que grande parte dos

[62] No 1° nível, os alunos podem dividir regiões na metade ou em quartos, mas podem cometer erros deixando as peças desiguais, ou na quantidade de divisões ou não usando a região toda. No 2° nível, as crianças conseguem particionar regiões em um número que seja potência de 2, que pode ser realizada por meio de partições sucessivas. No 3° nível, as crianças conseguem particionar regiões em números pares que não são potência de 2. No 4° nível, as crianças reconhecem que o processo anterior não é eficiente para frações com denominadores ímpares, e começam a produzir as partições uma a uma, precisando fazer ajustes nas linhas ao final. O 5° nível é caracterizado por um algoritmo multiplicativo, que só seria utilizado por crianças mais velhas (POTHIER e SAWADA, 1983 apud MARTINIE, 2007).

alunos dos ensinos médio e superior ainda encontram-se no primeiro nível de particionamento, que seria a partilha (POTHIER e SAWADA, 1983 apud MARTINIE, 2007).

Por exemplo, na atividade de Justulin (2016), em que os participantes deveriam indicar a fração hachurada na Figura 24, apenas UM aluno do ensino médio apontou que não seria possível indicar tal fração, pelo fato de as partes não serem iguais. Todos os outros 94 participantes responderam de maneira equivocada.

Figura 24 - Atividade 3 da pesquisa de Justulin (2017).



Fonte: Justulin (2016, p. 357).

Outro exemplo de Paraol e Rodriguês (2018), em que era solicitado a representação figural de $\frac{5}{7}$, um aluno representou como na Figura 25:

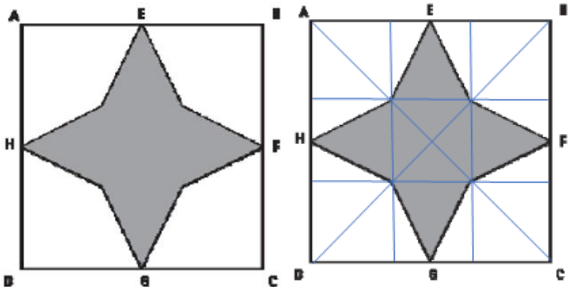
Figura 25 - Resposta de um aluno do ensino médio da pesquisa de Paraol e Rodriguês (2018).

Fonte: Paraol, e Rodriguês (2018, p. 31).

É perceptível que os alunos sabem que a figura deve ser repartida em 7 partes, mas a concepção de que as partes devem ser do mesmo tamanho, ainda não está bem estabelecida.

O exemplo de García e Cabañas-Sánchez (2013) consiste na determinação[63] da área da Figura 26 apenas por meio de formas geométricas:

Figura 26 - Atividade 3 da pesquisa de García e Cabañas -Sánchez (2013).



Fonte: Adaptado de García e Cabañas-Sánchez (2013, p. 216).

[63] "Determine a área da região sombreada que está inscrita no quadrado ABCD de área unitária. Os pontos E, F, G e H são pontos médios. Justifique a resposta".

As soluções apresentadas pelos alunos envolveram: utilizar fórmulas da área das figuras que formam o octógono; ou atribuir medidas arbitrárias ao quadrado com a finalidade de determinar as áreas das figuras geométricas. Ambas as estratégias foram ineficazes, por erros nos cálculos e nas fórmulas. A percepção visual de escolher formas geométricas convenientes para dividir o todo em partes iguais era essencial, mas não foi levada em consideração. Apenas um aluno obteve êxito, como na resolução da Figura 26 à direita.

Destacamos que a natureza e origem desta concepção pode ser devido a dificuldades com a percepção visual. Entretanto, a maneira procedimental com que os conceitos são apresentados aos alunos têm os impedido de utilizá-la.

4.4.2 Subtema 4.2: Números racionais como quociente

O subconstructo quociente pode ser interpretado como o resultado de uma divisão entre dois números inteiros, partilha, divisão indicada e contextos de compartilhamento justo (BEHR et al., 1983).

Quando duas quantidades p e q são divididas, o resultado é um quociente (BEHR et al., 1992), em que $\frac{p}{q}$ representa a relação entre um número p de itens compartilhados igualmente entre um número q de destinatários ou $\frac{p}{q}$ representa a quantidade recebida por cada destinatário (MAMEDE, 2015).

Neste caso, os números racionais podem ser considerados como **divisão ou quociente indicado**, ou seja, $\frac{p}{q}$ é uma maneira de escrever $p \div q$ e é o número decimal que resulta desta divisão (BEHR et al., 1983; KIEREN, 1976). De maneira específica, a compreensão da função do dividendo e do divisor na operação é fundamental. Por exemplo, se três pizzas iguais são distribuídas igualmente para quatro pessoas, é necessário identificar que as pizzas são divididas em quartos e que cada pessoa irá receber três dessas porções (CHARALAMBOUS; PITTA-PANTAZI, 2007). Uma diferença entre os subconstructo parte-todo e quociente é que o primeiro refere-se a uma parte fracionária de uma única quantidade. Enquanto o segundo refere-se à operação de divisão (BEHR et al., 1983).

As pesquisas

O Quadro 22 apresenta um resumo das pesquisas deste subtema, destacando os elementos para a análise comparativa entre elas e o Apêndice G traz os respectivos resumos expandidos.

Quadro 22 - Características das pesquisas do subtema números racionais como quociente.

Pesquisa	Objetivo	Foco	Participantes
Cabello e Mercado (2015)	analisar quais significados de frações e decimais os participantes possuem; analisar como os conceitos de frações e decimais negativos influenciam o trabalho escolar de outras disciplinas	Significados de Frações e Decimais	EF ES (Pedagogia) Total: 43
Carpes e Bisognin (2019)	identificar e discutir os conhecimentos didático-matemáticos sobre números racionais mobilizados por alunos em formação inicial	Conceito de Número Racional	ES (Licenciatura em Matemática) Total: 26
García (2019)	identificar contextos propícios para a interpretação das frações em suas diferentes formas e estabelecer diferenças e relações entre as diversas representações	Subconstructos de Número Racional	ES (professores em formação) Total: -
García e Cabañas-Sánchez (2013)	analisar o conhecimento que os alunos têm construído em torno do conceito de fração, assim como as relações que estabelecem entre a compreensão conceitual e os procedimentos desenvolvidos neste processo	Subconstructos Medida, Quociente e Parte-Todo	EM Total: 30
Konic (2019)	colocar em discussão duas concepções de número decimal, geralmente imperantes no âmbito escolar; avaliar os conhecimentos didático-matemáticos de futuros professores sobre os números decimais	Concepções do Número Decimal	ES (Pedagogia) Total: 118
Menegazzi (2013)	verificar as concepções relativas aos números fracionários que os alunos do curso de Pedagogia trazem consigo	Concepções dos Números Fracionários	ES (Pedagogia) Total: 7
Mercado, Cabello e Martínez (2016)	conhecer os significados que os docentes em formação possuem para cada um dos conceitos: frações, decimais e sua conjugação com a negatividade	Significados de Frações e Decimais	ES (Pedagogia) Total: 8
Muller et al. (2020)	analisar o domínio do conceito de fração que apresentam os futuros professores da Espanha e da Nicarágua	Subconstructos de Número Racional	ES (Pedagogia) Total: 56

Fonte: Elaborado pela autora.

Konic (2019) avaliou o conhecimento didático-matemático de número decimal dos participantes e debateu os problemas que dele emergem[64]. Dentre os conflitos elencados pelo autor, destacam-se concepções como:

- a expressão decimal de um número é um número decimal;
- um número decimal é parte da unidade (0,...);
- um número decimal é um número formado por dois inteiros separados por uma vírgula;
- um número decimal é um número que não é inteiro.

[64] O autor identificou 6 tipos de concepções: fracionária; expressão decimal finita; fracionária e expressão decimal finita; partes da unidade; prática (baseada em elementos da vida cotidiana); sistêmica (com base em um sistema de numeração base 10).

Vale observar que a representação decimal é confundida com o próprio número (DUVAL, 2008). Assim, o sentido atribuído ao número decimal por esses futuros professores não contempla um significado mais abrangente, permanecendo restrito ao obtido nos anos iniciais.

Concordamos que, para explorar esta riqueza conceitual envolvendo o número racional, é importante explorar os significados parciais dos racionais (subconstructos), assim como as aproximações progressivas entre eles ao longo de toda a escolarização.

Mercado, Cabello e Martínez (2016) concluem que o significado mais frequente de número racional foi a divisão, principalmente na realização das conversões da forma fracionária para decimal; os decimais são utilizados como "uma escrita complementar aos naturais, "agregando-lhes um ponto e a parte decimal" (MERCADO; CABELLO; MARTÍNEZ, 2016, p. 1044).

Em Cabello e Mercado (2015), o significado que apareceu com maior frequência foi o de quociente, sobretudo na conversão de frações para decimais "para validar a quantidade numérica e atribuir algum sentido" (MERCADO; CABELLO; MARTÍNEZ, 2016, p. 1043).

Os subconstructos medida, quociente e parte-todo foram foco em García e Cabañas-Sánchez (2013). Os autores concluem que os alunos transformam frações em expressão decimal, contribuindo para "o seu sucesso na resolução das situações relativas a este tipo de casos" (p. 228). Ademais, essas transformações apontam que os alunos associam a fração à uma divisão (GARCÍA; CABAÑAS-SÁNCHEZ, 2013, p. 220).

Resultados dessas quatro pesquisas evidenciam uma *concepção pró-decimal*, nas situações em que os alunos realizam a operação de divisão da fração para operar com números decimais, pois se sentem mais seguros e os consideram mais fáceis de manipular. Sem negar a importância dos alunos perceberem os números racionais como divisão, é necessário que eles identifiquem criticamente as situações em que esta transformação é adequada, ou não.

As quatro pesquisas, com objetivos e grupos de participantes distintos, concluíram que os alunos concebem a forma fracionária para representar os números racionais como um comando para uma divisão.

Retana e Muñoz (2018) propõem um problema sobre a realização dessa conversão para decimais, que já citamos na seção 4.2.3. Esses autores referenciam-se em Gairín (2004) e concluem que a relação entre frações e decimais se estabelece com maior frequência por meio de processos algorítmicos, do que de processos conceituais. Destacamos a importância de explorar o subconstructo quociente como divisão indicada, tendo cautela para não gerar uma concepção pró-decimal, acrítica.

Podemos inferir que a *origem* desta concepção pode estar fundamentada na confusão entre a representação decimal e o próprio número. Acreditamos que um trabalho com as diferentes representações pode amenizar este tipo de conflito (DUVAL, 2008).

Nas pesquisas a seguir evidencia-se uma ***concepção de partilha impossível*** em problemas envolvendo o subconstructo quociente. Todas elas tinham como objetivo analisar o conhecimento e as concepções de futuros professores acerca do conceito de número racional, por meio de problemas envolvendo cada um dos subconstructos: Muller et al. (2020), Menegazzi (2013) e García (2019). Estão inseridas neste subtema, pela relevância dos resultados referentes ao subconstructo quociente.

Os problemas envolviam: dividir três barras de chocolate entre quatro crianças[65] (MENEGAZZI, 2013); confeccionar cinco shorts com quatro metros de tecido[66] (GARCÍA, 2019, tradução nossa); distribuir quatro pizzas entre cinco pessoas[67] (GARCÍA, 2019, tradução nossa); dividir três pastéis igualmente entre cinco pessoas[68] (MULLER et al., 2020). Em geral, o índice de erros foi elevado nesses problemas.

Uma crítica a esses problemas, é que eles não deixam claro se: Os shorts têm que ser iguais ou não? Todas as pessoas irão comer a mesma quantidade de pizza? As barras de chocolate serão divididas igualmente entre as crianças?

A *origem* desses erros está sustentada no fato de a maior parte das situações haver mais pessoas do que objetos ou alimentos para compartilhar, por isso denominamos por *partilha impossível*. As dificuldades residem nas situações em que o numerador é menor do que o denominador, diferentemente dos subconstructos parte-todo e medida, nos quais uma das dificuldades reside no fato de o numerador ser maior que o denominador.

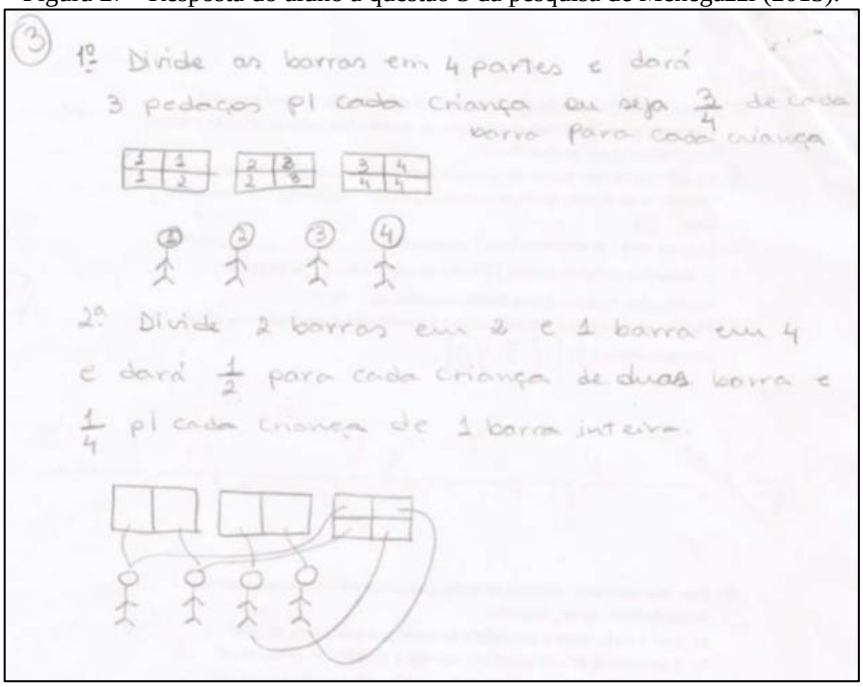
Aqui as expressões ‘igualmente’, ‘idênticas’ e ‘mesma quantidade’ transmitem a ideia de partilha equitativa, relacionada à noção de particionamento, que é a principal estrutura cognitiva subjacente aos subconstructos (KIEREN, 1976; LAMON, 2008). Assim, o particionamento em situações de partilha pressupõe a ideia de dividir algo igualmente entre cada pessoa. Por exemplo, o que significa parcelas iguais para cada criança ao dividir três pastéis entre cinco crianças? Outra noção importante relacionada à partição, é perceber que, ao

[65] “Quero dividir 3 barras de chocolate entre 4 crianças. De quantas maneiras diferentes posso fazer essa distribuição de maneira que todas as crianças ganhem quantidades iguais de chocolate?” (MENEGAZZI, 2013).
[66] “Você tem quatro metros de tecido e com eles pode fazer 5 shorts. Quantos metros de tecido são usados para cada short? Represente a situação graficamente e numericamente” (GARCÍA, 2019).
[67] “Você tem quatro pizzas e deseja distribuí-las entre cinco pessoas. Represente graficamente e numericamente o processo de distribuição e o que cada um comeu” (GARCÍA, 2019).
[68] “Dividir 3 pasteis igualmente entre 5 pessoas” (MULLER et al., 2020, p. 38,). Concepção regular ou nenhuma: 57,9% espanhóis e 77,8% nicaraguenses.

dividirmos um bolo, quanto maior o número de crianças para compartilharmos, menor será o pedaço recebido por cada uma delas. Esta noção também é importante na apropriação da ideia de ordenação de frações.

Em Menegazzi (2013), fica clara a importância do particionamento para o entendimento do contexto do problema proposto, sendo que apenas um aluno respondeu corretamente, como na Figura 27:

Figura 27 - Resposta do aluno à questão 3 da pesquisa de Menegazzi (2013).

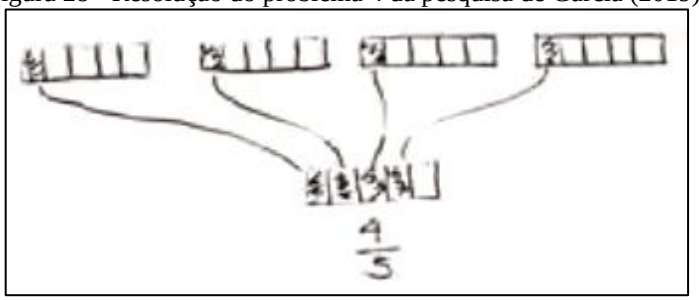


Fonte: Menegazzi (2013, p. 257).

É perceptível o quanto a ideia de particionamento trouxe clareza para o futuro professor ao elaborar a partilha de duas maneiras diferentes[69].

Em Garcia (2019), um participante representou a seguinte solução para o problema:

Figura 28 - Resolução do problema 4 da pesquisa de García (2019).

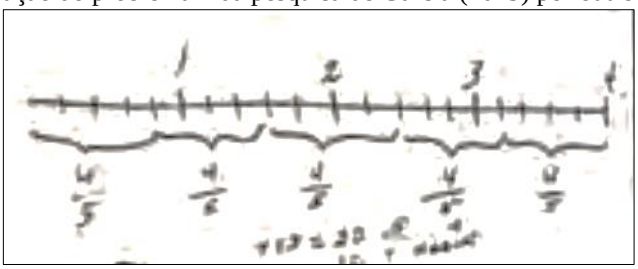


Fonte: García (2019, p. 147).

[69] Primeiro, ele dividiu cada uma das 3 barras em 4 partes iguais e atribuiu $\frac{3}{4}$ para cada criança; segundo, ele dividiu 2 barras em 2 partes iguais e 1 barra em 4 partes iguais, concluindo que cada criança receberia $\frac{1}{2} + \frac{1}{4}$ de barra

Outro participante argumentou que esta maneira de resolver a situação é inadequada, pois ‘como uma costureira iria fazer os shorts com retalhos de tecido?’ e afirmou que ficaria ‘muito feio’, pois os retalhos teriam que ser costurados. Apresentou uma outra representação da situação com o uso da reta numérica, explicando que cada metro de tecido se divide em cinco partes, porque temos 20 partes no total, e faz-se a divisão entre os cinco shorts, correspondendo a $\frac{4}{5}$ metros de tecido.

Figura 29 - Resolução do problema 4 da pesquisa de García (2019) por outro futuro professor.



Fonte: García (2019, p. 147).

Neste caso, as experiências prévias pessoais contribuíram para encontrar uma solução com sentido no contexto em que o problema estava inserido.

Em Muller et al. (2020), a maior dificuldade foi dividir três pastéis igualmente para cinco pessoas, pois “havia muita gente e pouco pastel” para compartilhar. A estratégia foi dividir cada pastel pela quantidade de pessoas (repartir os pastéis em cinco partes iguais) e assim cada pessoa tomaria uma porção de $\frac{1}{5}$ de cada pastel. Mas faria sentido dar $\frac{1}{5}$ de cada pastel para cada pessoa?

Desses resultados percebemos a relação entre particionamento e o subconstructo quociente, cuja dificuldade e habilidades foram evidenciadas nos exemplos acima. Daí a importância de introduzir números racionais com atividades simples, que incluam a noção geral de particionamento (MENEGAZZI, 2013).

4.4.3 Subtema 4.3: Números racionais como medidas

Um número racional é concebido para responder o problema de medir com questões que não se esgotam no campo numérico dos inteiros.

Mas o que é medir? Caraça (1951), descreve que medir “consiste em comparar duas grandezas da mesma espécie” (p. 29). Nesse processo é estabelecido um termo de comparação único para todas as grandezas de mesma espécie, que se chama unidade de medida da grandeza escolhida, como por exemplo o metro (CARAÇA, 1951). Ao tomarmos um segmento como unidade, verificamos quantas vezes este segmento cabe em outro, reduzindo o problema de medir ao problema de contar. Mas nem sempre uma grandeza “cabe” um número inteiro de

vezes dentro da outra. E, neste caso, o "todo" deve ser dividido em partes e uma fração expressa o quanto de uma existe na outra, quando possível (CARAÇA, 1951). É assim que o subconstructo medida relaciona-se à comparação entre duas grandezas (DAMICO, 2007).

Uma unidade de medida sempre pode ser dividida em subunidades menores, mais refinadas, para que seja possível ter uma precisão cada vez maior (LAMON, 2008). Por exemplo, se o metro não servir, por não caber dentro do objeto a ser comparado, podemos particioná-lo em decímetros, ou centímetros ou milímetros e assim por diante. Por isso, o foco está no particionamento sucessivo da unidade e os números racionais nos fornecem um meio de medir quantidades (LAMON, 2008, p. 170).

As estruturas Matemáticas associadas a este subconstructo são: números racionais como pontos da linha numérica (KIEREN, 1976), que são vistos como medidas de distância de uma posição à origem (BEHR et al., 1983; CHARALAMBOUS; PITTA-PANTAZI, 2007; LAMON, 2008).

Lamon (2008) sugere que "é improvável que qualquer outra interpretação do número racional possa chegar perto do poder da reta numérica para construir sentido numérico"[70] (LAMON, 2008, p. 173, tradução nossa).

As pesquisas

Na revisão feita, um número maior de pesquisas teve por foco o subconstructo medida e as respectivas dificuldades.

O Quadro 23 apresenta um resumo das pesquisas deste subtema destacando os elementos para a análise comparativa entre elas e o Apêndice G traz os respectivos resumos expandidos.

Quadro 23 - Características das pesquisas do subtema números racionais como medidas.

Pesquisa	Objetivo	Foco	Participantes
Abrahão (2016)	propor atividades que ajudem a evitar que o professor e a criança confundam o objeto matemático e sua representação	Representações e Operações com Números Decimais	ES (Pedagogia) Total: 180
Amaya, Bianchi e Montoro (2018)	estudar a compreensão de estudantes da escola básica sobre o número racional, em particular, a compreensão sobre a densidade e ordem dos números racionais e sua relação com distintas representações	Densidade e Ordem dos Números Racionais	EF EM Total: 132

[70] Este sentido de número racional é caracterizado pela "fluidez, flexibilidade e conforto em navegar entre os números racionais" (LAMON, 2008, p. 173, tradução nossa).

Medina (2013)	apresentar um relato de experiência por meio de atividades que usam o conceito de fração, razão e número racional, assim como os processos de classificação e ordenação dos números racionais em contextos de aproximação	Ordenação dos Números Racionais	EM (11° grau) Total: -
Menegazzi (2013)	conhecer as concepções relativas aos números fracionários evocadas pelos alunos de um curso de Pedagogia	Frações	ES (Pedagogia) Total: 7
Oliveira e Araman (2017)	refletir sobre dificuldades apresentadas pelos alunos relacionadas ao conjunto dos números racionais	Números Racionais	EF (9° ano) EM (3° ano) Total: 134
Retana e Muñoz (2018)	analisar o conhecimento de conteúdo sobre frações e decimais de futuros professores	Conhecimento de Conteúdo sobre Frações e Decimais	ES (Licenciatura de Educação) Total: 275

Fonte: Elaborado pela autora.

O subconstructo medida relaciona-se com as noções de densidade[71] e ordenação que foram abordadas pelas pesquisas de Amaya et al. (2018), Oliveira e Araman (2017), Medina (2013) e Retana e Muñoz (2018).

As concepções que emergiram relacionadas à noção de ordenação foram: ***concepção de mantissa***[72], caracterizada ao admitir que quanto maior o número de casas decimais, maior é o número; ***concepção de arredondamento,*** caracterizada pela ordenação considerando apenas a primeira casa decimal. Por exemplo, Medina (2013) conclui que os alunos não se sentiam seguros na ordenação das frações e só conseguiram realizar a comparação de que grandeza é maior, $\frac{3}{4}$ ou $\frac{4}{5}$, sobrepondo tiras de papel.

Relacionada à noção da densidade[73], emergem: ***concepção discretista***, apoiada na ideia de que há poucos ou nenhum número entre os números propostos. Como em outras situações, os alunos transferem o modelo discreto do conjunto dos números naturais para o contexto dos números racionais; ***concepção finitista,*** apoiada na ideia de que existe pelo menos um número entre outros dois números racionais. No entanto, ainda é uma noção finita, no sentido de que há uma quantidade finita de números entre eles.

[71] A noção de densidade exige uma compreensão robusta do subconstructo medida, que, no ensino básico, implica que entre quaisquer dois números racionais, é sempre possível encontrar outro (CHARALAMBOUS, 2007; LAMON, 2008). O particionamento sucessivo auxilia a nomear outras frações entre duas frações fornecidas e os alunos entendem o subconstructo medida de número racional quando são capazes de encontrar qualquer número de frações entre duas frações fornecidas (LAMON, 2008).

[72] Os termos mantissa, arredondamento, discretista e finitista foram utilizados baseados na pesquisa de Amaya et al (2018).

[73] Alguns pesquisadores consideram que o termo densidade não é adequado para expressar essa ideia, porque é um termo já consolidado na Matemática Superior. Entretanto, utilizamos este termo porque as pesquisas analisadas o utilizam.

A *origem* das quatro concepções acima relaciona-se ao conhecimento prévio dos números naturais já consolidado. Amaya et al. (2018) concluem que:

> Entre as dificuldades mais evidentes, pode-se observar com frequência que transferem as propriedades dos inteiros em termos de ordem (...). Por outro lado, os alunos jovens apresentam uma visão finitista, mediando em sua concepção dos números (...) E nos alunos de maior idade e escolaridade estão presentes uma visão infinitista em relação a essas questões. (AMAYA; BIANCHI; MONTORO, 2018, p. 23)

No Quadro 24, apresentamos alguns tópicos envolvendo a densidade e ordem e as respectivas porcentagens de acertos da pesquisa de Retana e Muñoz (2018):

Quadro 24 - Porcentagem de acertos em alguns tópicos da pesquisa de Retana e Muñoz (2018).

Tópicos	**% de resposta correta**
Propriedade da densidade dos números fracionários	68,8
Propriedade da densidade dos números decimais	90,0
Propriedade de ordenar os números fracionários	85,5
Posicionar números fracionários na reta numérica	72,9
Posicionar números decimais na reta numérica	92,2

Fonte: Elaborado pela autora.

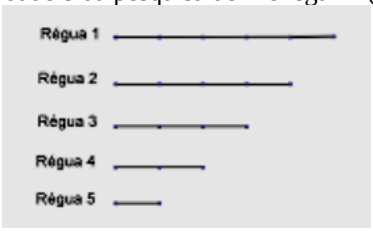
Inferimos pelos índices de acertos que os participantes têm mais familiaridade com as noções densidade e ordem dos números decimais do que das frações.

A seguir, apresentamos algumas concepções que emergiram a partir da análise das pesquisas que inseriram em seus resultados investigações a respeito dos números racionais como pontos na reta numérica (ABRAHÃO, 2016; MENEGAZZI, 2013; OLIVEIRA; ARAMAN, 2017):

Uma fração é sempre um número menor que um[74]: pensar em frações impróprias, em que o resultado é um número maior que um, com o numerador maior que o denominador, representa dificuldade. Nesses casos, participantes duvidam da resposta, considerando errado uma fração representar um número maior que 1, como na atividade de Menegazzi (2013) na Figura 30: “Observe as réguas abaixo e responda: A) Quanto mede a régua 1 tomando-se a régua 5 como unidade? B) Quanto mede a régua 4 tomando-se a régua 2 como unidade? C) Quanto mede a régua 5 tomando-se a régua 3 como unidade? D) Quanto mede a régua 1 tomando-se a régua 4 como unidade?”

[74] Ou o numerador sempre precisa ser menor que o denominador.

Figura 30 - Atividade 8 da pesquisa de Menegazzi (2013).



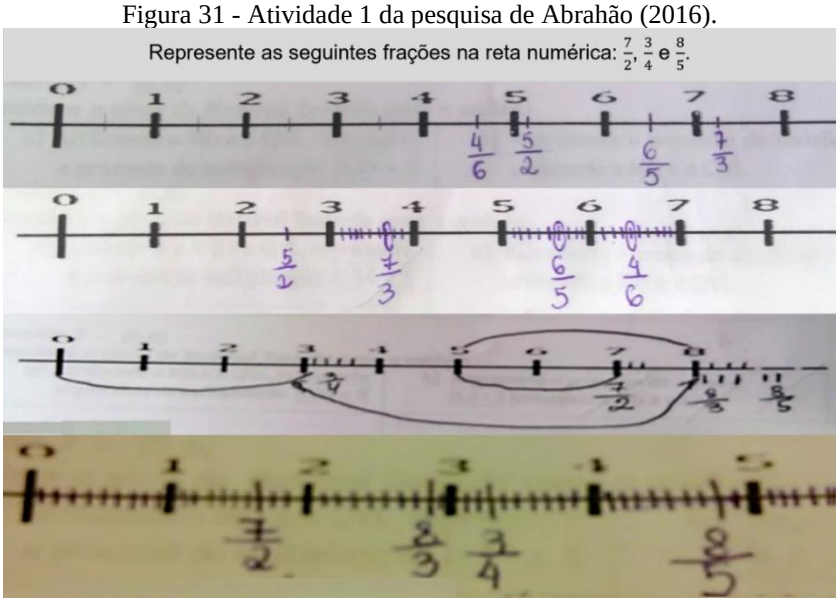
Fonte: Menegazzi (2013, p. 258).

No item *a*, uma resposta comum foi $\frac{1}{5}$ em vez de cinco; no item d, uma resposta comum foi $\frac{2}{5}$ em vez de $\frac{5}{2}$. A autora percebeu "certa resistência na identificação do inteiro e da fração imprópria e/ou o número misto correspondente" (p. 258). Fica claro que os participantes concebem sistematicamente a comparação sendo feita, tomando o menor número como unidade de medida.

A *origem* de tal concepção pode estar relacionada à escassez de exemplos envolvendo frações impróprias e de variações nas unidades de medida ao longo da escola básica.

Frações como dois números independentes: ocasionando a localização dos números racionais na reta numérica de maneira equivocada (ABRAHÃO, 2016; MENEGAZZI, 2013; OLIVEIRA; ARAMAN, 2017). Participantes das pesquisas analisadas, inclusive futuros professores, não identificam a fração com *um único número* na reta numérica, como observamos na Figura 31:

Figura 31 - Atividade 1 da pesquisa de Abrahão (2016).



Fonte: Abrahão (2016, pp. 687, 688).

Por exemplo, alguns alunos marcaram: o valor do denominador, mais x tracinhos referentes ao numerador ($\frac{5}{2}$ foi marcado com cinco tracinhos após o número dois); o ponto na reta numérica correspondente ao valor do numerador ($\frac{7}{2}$ foi marcado sobre a posição

correspondente ao número sete); o valor do numerador mais x tracinhos referentes ao denominador correspondente (no caso de $\frac{3}{4}$, quatro tracinhos após o número três). Em grande parte dos casos, a localização correta foi resultado da divisão do numerador pelo denominador, obtendo um número decimal. Nossa hipótese, é a de que a origem desta concepção está relacionada à escassez de atividades envolvendo particionamentos ao longo da escola básica, impedindo a familiarização com a noção de ordem das frações na reta numérica.

O traço da fração equivale à vírgula do número decimal. Esta concepção decorre da anterior e sugere uma incompreensão da notação Matemática (*origem*). Por exemplo, marcar o número 8,5 para representar a fração $\frac{8}{5}$ (ABRAHÃO, 2016). Os participantes identificam a fração como dois números separados e não como uma relação entre eles. Um outro exemplo, refere-se à atividade "a professora Clotilde pediu que seus alunos escrevessem um número que representasse meio ou metade. Quantos alunos acertaram o exercício?", representada na Figura 32:

Figura 32 - Atividade 7 da pesquisa de Oliveira e Araman (2017).

Geraldo $\frac{1}{2}$	Cássio 0,5	Carla 1,2	Fernando 0,005

Fonte: Adaptado de Oliveira e Araman (2017, p. 194).

Surpreende nesta atividade que 26% dos alunos do ensino fundamental e 6,5% dos alunos do ensino médio responderam Geraldo e Carla, isto é, que $\frac{1}{2} = 1{,}2$.

4.4.4 Subtema 4.4: Números racionais como operadores

O subconstructo operador está associado à ideia de transformação, pois representa uma ação sobre um número, transformando seu valor ao longo desse processo. A noção básica envolvida é que o número natural do numerador causa uma extensão da quantidade, enquanto o denominador causa uma contração (BEHR et al., 1992).

Desta maneira, a quantidade sobre a qual o operador[75] atua é trocada por uma quantidade conceitualmente nova, de tal forma que a relação entre a grandeza na entrada e a da saída seja

[75] Inicialmente, Behr et al. (1983) distinguiu e nomeou 2 tipos de operador: no caso de objetos contínuos, temos o tipo *dilatador-redutor* em que "qualquer segmento de linha de comprimento L operado por $\frac{p}{q}$ é esticado para p vezes o seu comprimento e, em seguida, encolhido por um fator de q" (BEHR et al., 1983); no caso de objetos discretos, temos o tipo *multiplicador-divisor* em que "o número racional $\frac{p}{q}$ transforma um conjunto com n elementos em um conjunto com elementos np e, em seguida, esse número é reduzido para $\frac{np}{q}$" (BEHR et al., 1983).

igual à relação numerador para denominador do operador (CHARALAMBOUS; PITTA-PANTAZI, 2007).

A contribuição deste subconstructo para a aprendizagem escolar inclui a estrutura multiplicativa dos números racionais (BEHR et al., 1983; KIEREN, 1976). Compreender os números racionais como operadores requer um raciocínio multiplicativo: "tomar a parte da parte de um todo", especialmente em casos como encontrar $\frac{3}{4}$ de $\frac{1}{2}$ (BEHR et al., 1983). Assim, o número racional é concebido como uma sucessão de multiplicações e divisões. Embora seja possível inverter a ordem das operações, está implícito que "primeiro atua a divisão e depois a multiplicação" (LLINARES; SANCHEZ, 1998, p. 73).

Entretanto, Moreira e Ferreira (2008) apontam para "uma possível artificialidade da interpretação do racional como operador" (p. 125), no sentido dos números racionais como funções no processo de compará-los, somá-los etc. A sugestão dos autores é utilizar uma abordagem fenomenológica, que

> não se trata de ver o número racional como operador para ilustrar as propriedades algébricas de Q, mas, antes, trata-se de identificar operações que tenham sentido no mundo empírico e associá-las significativamente à noção de fração e, eventualmente, chegar aos significados do produto de números racionais. (MOREIRA; FERREIRA, 2008, p. 124)

As pesquisas

O Quadro 25 apresenta um resumo das pesquisas deste subtema destacando os elementos para a análise comparativa entre elas e o Apêndice G traz os respectivos resumos expandidos.

Quadro 25 - Características das pesquisas do subtema números racionais como operadores.

Pesquisa	Objetivo	Foco	Participantes
Carpes e Bisognin (2019)	identificar e discutir os conhecimentos didático-matemáticos sobre números racionais mobilizados por alunos em formação inicial	Conceito de Número Racional	ES (Licenciatura em Matemática) Total: 26
Godoy e Barreto (2016)	identificar momentos em que a discussão dos subconstructos emerge. Investigar os vários subconstructos de número racional presentes em questões do ENEM, identificando quais objetos do conhecimento estão presentes em cada uma das questões	Subconstructos	curso preparatório para o ENEM Total: -
Reyes e Prieto (2015)	descrever a maneira em que os estudantes resolvem a tarefa de representar um fenômeno em um software	Parte-todo, Operador e Quociente	EM Total: 2

Vecino et al. (2015)	explorar de que maneira os alunos resolvem um problema cuja solução envolve o conceito de porcentagem	Porcentagem	EM ES (aspirantes a Faculdade de Ciências Exatas) ES (Licenciatura em Matemática) Total: 273

Fonte: Elaborado pela autora.

O subconstructo porcentagem pode estar implícito no subconstructo operador, pois só faz sentido dizer $x\%$ referindo-se a uma quantidade específica. Parker e Leinhardt (1995), citado por Martinie (2007), consideram a porcentagem como um operador funcional e relatam que os alunos apresentaram dificuldades com porcentagens maiores que cem, devido à instrução inicial centrada na noção de porcentagem como parte-todo (PARKER; LEINHARDT, 2007 apud MARTINIE, 2007). Duas pesquisas consideraram a porcentagem como um operador: Godoy e Barreto (2016) e Vecino et al. (2015).

Godoy e Barreto (2016) buscaram identificar os subconstructos nas questões do ENEM do ano de 2013, descritos no Quadro 26, com a distribuição dos objetos de conhecimento:

Quadro 26 - Frequência de cada subconstructo nas questões do ENEM e os respectivos objetos do conhecimento.

Subconstructo[76]	**Frequência**	**Objetos do conhecimento**
Operador	9	Porcentagem (7), Equações (1), Razões e Proporções (1)
Coordenada Linear	8	Equações (4), Operações em Conjuntos Numéricos (4)
Razão	5	Razões e Proporções (3), Escalas (2)
Medida	4	Proporções (3), Equações (1)
Quociente	4	Equações (3), Razões (1)
Probabilidade	3	Noções de Probabilidade (3)
Parte/todo	2	Razões (1), Relação de dependência entre grandezas (1)

Fonte: (GODOY; BARRETO, 2016, p. 108).

Verifica-se uma "preponderância do subconstructo operador na prova, em razão das diversas questões envolvendo o conteúdo porcentagem, em que ele especialmente emergia" (p. 108).

As duas pesquisas destacam uma *concepção de porcentagem como quantidade e não como operador*, em grande parte das situações. Inferimos que a *origem* desta concepção decorre do hábito dos alunos efetuarem o cálculo de porcentagem de maneira automática, sem compreender o que estão realizando, seja por meio da regra de três ou com a ideia de operador.

[76] Os autores consideraram os subconstructos coordenada linear e probabilidade, não considerados em nossa pesquisa.

Por exemplo, na pesquisa de Vecino (2015) classificou as soluções[77] em três grupos: os que não registaram a solução, os que não veem a % como operador (21 casos) e os que traduziram incorretamente a situação.

Outro exemplo é a resolução da questão 146[78] do ENEM da pesquisa de Godoy e Barreto (2016). Um aluno ponderou que: "para calcular porcentagem, é preciso fazer assim, colocar zero vírgula o valor da porcentagem e depois multiplicar pelo preço, pois assim havia aprendido no trabalho" (GODOY; BARRETO, 2016, p. 114). O professor pesquisador aproveitou para discutir algumas maneiras de calcular a porcentagem por meio da noção de operador, proporcionando entendimento do que significa 15%, transformado em 0,15; e por meio da regra de três, apontando que neste algoritmo, as operações realizadas são as mesmas da estratégia anterior, apenas a ordem é alterada.

A noção multiplicativa ficou perceptível na estratégia mais utilizada em situações envolvendo o subconstructo operador: *a concepção de dividir primeiro e depois multiplicar*. Embora o subconstructo operador tenha sido criado artificialmente, é possível inverter a ordem das operações, mas está implícito realizar a divisão primeiro, dada a identificação com o subconstructo parte-todo (MOREIRA; FERREIRA, 2008). Assim, parece intuitivo realizar primeiro a divisão, como verificamos no exemplo a seguir.

No problema[79] em Godoy e Barreto (2016), os autores analisam um excerto da fala de um aluno: "se ali é 5, então preciso dividir o total de cadeiras, que é 70, por 5, o que dá 14. São 5 grupos de 14 cadeiras. Mas ele quer só 2 grupos, então, $2x14 = 28$" (GODOY; BARRETO, 2016, p. 113). Realizar primeiro a divisão e depois a multiplicação parece ser mais natural, encontrando uma unidade abstrata de $\frac{1}{5}$ para em seguida tomar duas dessas unidades.

Moreira e Ferreira (2008) colocam a questão:

> isto de fato pode ser desmembrado em várias etapas, uma vez que a própria aplicação de um único operador $\frac{p}{q}$ já envolve duas operações (divisão por q e multiplicação por p) que precisam ser vistas como uma única para que se possa conceber como objeto. (MOREIRA; FERREIRA, 2008, pp. 113–114)

Entretanto, não fica claro se os alunos compreendem o aspecto operador dos números racionais como um objeto ou restrito a um processo de dividir e multiplicar (MOREIRA; FERREIRA, 2008). Assim, apesar do subconstructo operador projetar a expectativa de que a

[77] Índices de erros: aspirantes ao ingresso (79%); estudantes secundários (34%); docentes em formação (50%).
[78] O contribuinte que vende mais de R$20 mil de ações em Bolsa de Valores em um mês deverá pagar Imposto de Renda. O pagamento para a Receita Federal consistirá em 15% do lucro obtido com a venda de ações. Um contribuinte que vende por R$34 mil um lote de ações que custou R$26 mil terá de pagar de Imposto de Renda à Receita Federal o valor de" (GODOY; BARRETO, 2016, p. 114).
[79] Calcule $\frac{2}{5}$ de 70 cadeiras.

divisão de $\frac{p}{q}$ conduza à noção de $\frac{p}{q}$ como número, pelos exemplos das pesquisas consideramos que isto não é garantido.

A *composição de funções* (estrutura cognitiva para a noção de operador conforme Kieren (1997)) esteve presente nas pesquisas analisadas. Reyes e Prieto (2015) apresentam uma experiência de um fenômeno de simulação por meio do funcionamento de um guindaste mecânico do tipo torre.

Esta atividade de simulação no geogebra envolveu os subconstructos de número racional, além de conhecimentos de geometria plana, sendo necessário resolver uma série de tarefas de construção que ocorreram de forma progressiva. Em uma das etapas, na estimativa para o valor do raio:

> As meninas focaram sua atenção na área onde o vértice superior esquerdo estaria localizado na imagem, concluindo que este ponto se localizava, mais ou menos, no meio da lateral de uma unidade da grade no segmento a, especificamente no mais próximo ao vértice. Neste momento a fração $\frac{1}{2}$ poderia ser interpretada como parte-todo ou operador, de acordo com a totalidade considerada. De modo que se o todo é um lado de uma unidade de grade, então $\frac{1}{2}$ significa uma das duas metades do todo mais próximas de a, ou seja, aquela que cobria a borda esquerda do corredor rodoviário na imagem – interpretação parte-todo. Por outro lado, se o todo for o segmento a, a fração $\frac{1}{2}$ representa um fator de mudança que transforma uma porção de a, que por sua vez é $\frac{1}{9}$ desse segmento. (REYES; PRIETO, 2015, pp. 49–50)

Tais reflexões emergem quando os alunos estabelecem a seguinte expressão algébrica como conclusão das discussões: $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{9}\right)a = \left(\frac{1}{2}.\frac{1}{9}\right)a = \frac{1}{18}a$. A expressão revela a utilização da noção de números racionais como operador em uma perspectiva funcional, isto é, o número racional como operador proporcionou sentido para expressar uma composição de funções lineares, como uma simples transformação do segmento *a*, por uma fração $\frac{a}{b}$. Pela composição de funções lineares foi possível determinar o raio da circunferência (raio $\frac{1}{18}a$).

A conclusão dos autores é que a familiaridade com o número racional foi determinante ao longo da experiência de simulação, sendo o conceito mais evocado. Em particular, uma perspectiva funcional da interpretação de número racional como operador é observada dando sentido à composição de funções lineares como uma simples transformação de um segmento.

Nesta experiência, ficou perceptível a conexão entre as distintas interpretações de um número racional e outras noções matemáticas. Além disto, ocorreu de uma forma dinâmica e contextualizada e não mecânica.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Uma Revisão Sistemática de Literatura permite conhecer o que tem sido desenvolvido na área e as principais temáticas abordadas. Assim, para responder nossa primeira questão de pesquisa '*Quais temáticas sobre o ensino de números racionais estão presentes nas pesquisas analisadas?*', resumimos no Quadro 27, os principais focos temáticos com alunos dos ensinos médio e superior:

Quadro 27 - Temas e Subtemas.

Foco temático[80]	Subtema
Razão e Pensamento Proporcional (18%)	Pensamento proporcional e conhecimento especializado de futuros professores de Matemática
	Estratégia e uso do pensamento proporcional
	Pensamento proporcional e seu uso em situações da vida real
Operações com Números Racionais (26,5%)	Jogos e apoios virtuais como alternativa para a revisão das 4 operações com números racionais
	Desempenho e dificuldades dos alunos do ensino médio e ensino superior nas 4 operações com números racionais
	Operações com números racionais e conhecimento especializado de futuros professores de Matemática
Representações dos Números Racionais (13%)	Não tivemos subtemas
O Conceito de número racional e as suas Interpretações (46,5%)	Números racionais como parte-todo
	Números racionais como quociente
	Números racionais como medidas
	Números racionais como operadores

Fonte: Elaborado pela autora.

De maneira geral, pontuamos duas tendências predominantes nas linhas de investigação: i) as centradas em estudar as dificuldades e as ideias dos alunos do ensino médio e do ensino superior referentes a tópicos do conhecimento do conceito de número racional; ii) as centradas no desenvolvimento de metodologias de ensino e revisão para o conceito de número racional. Consideramos que os dois tipos de tendência são importantes e pesquisas do primeiro tipo são significativas para o desenvolvimento de pesquisas do segundo tipo.

Todavia, a maioria das pesquisas analisadas (38) concentra-se na primeira tendência, isto é, pesquisas que analisam o desempenho, as dificuldades, as concepções e as estratégias de

[80] Como já pontuado no decorrer do texto, algumas pesquisas foram alocadas em mais de um subtema, por isso a soma das porcentagens obtidas fornece um número maior que 100% porque algumas pesquisas estão alocadas em mais de um tema/subtema

alunos do ensino médio e ensino superior (na maior parte professores em formação) acerca do conceito de número racional. Desse total de 38 pesquisas: i) 17 tiveram como público-alvo alunos do ensino médio e do ensino superior (cursos de Engenharia, Física, Contabilidade e Logística); ii) 21 pesquisas tiveram como público-alvo os futuros professores (cursos superiores de Pedagogia e Licenciatura em Matemática).

A seguir, apresentamos as considerações finais de cada um dos temas, bem como as lacunas identificadas.

5.1 CONSIDERAÇÕES FINAIS TEMA 1: RAZÃO E PENSAMENTO PROPORCIONAL

Os resultados das pesquisas no primeiro subtema (*Pensamento Proporcional e Conhecimento Especializado para o Ensino*) indicam que, grande parte dos futuros professores, possuem um conhecimento comum de conteúdo a respeito do tema razão e pensamento proporcional, mas não possuem um conhecimento especializado de conteúdo, nem um conhecimento pedagógico de conteúdo (ASTUDILLO; HUERTA; LEO, 2018; BUFORN; FERNÁNDEZ, 2014; RIQUELME; VERGARA, 2019; SILVA; CÂNDIDO; SOUZA, 2018). Deste modo, os futuros professores conseguem resolver problemas que envolvem razão e pensamento proporcional, no entanto, as resoluções são realizadas mecanicamente ou com uso de algoritmos, restrita a um conhecimento puramente procedimental, sem saber justificar os processos envolvidos, caracterizando uma *concepção pré-proporcional*. Por este motivo, verifica-se a existência de problemas tanto no processo de ensino quanto no processo de aprendizagem, pois só se estabelece um processo de ensino, se houve a aprendizagem anteriormente.

Os resultados das pesquisas no segundo subtema (*Estratégias e Uso do Pensamento Proporcional*) apontam que as estratégias utilizadas pelos participantes incluem o uso de: regra de três, cálculo do valor unitário e pensamento aditivo. Destacamos a presença de duas concepções relacionadas a razões e proporções: uma *concepção aditiva*, ainda presente em situações proporcionais mesmo ao final da escolarização, e uma *concepção pré-proporcional*.

A *concepção aditiva*, baseada em quantidades absolutas que são independentes e não se relacionam umas com outras, ainda se faz presente no raciocínio de grande parte dos alunos pesquisados. Contudo, o pensamento proporcional envolve a compreensão das relações matemáticas exibidas nas situações proporcionais, que são de natureza multiplicativa entre as quantidades. Entendemos que a transição para o pensamento multiplicativo não é simples, mas

extremamente necessária para a compreensão do conceito de número racional (BEHR; POST, 1992; LAMON, 2008).

Com relação à *concepção pré-proporcional*, enfatizamos que um pensamento proporcional significa muito mais do que saber aplicar a regra de três. Resultados das pesquisas destacam que estas estratégias são mal compreendidas pelos alunos, (POST; BEHR; LESH, 1988) e acreditamos que o uso de tais procedimentos mecanizados podem, em alguns casos, até mesmo impedir o uso do pensamento proporcional. Um dos problemas é que tanto os livros didáticos, quanto o processo de ensino aprendizagem nas salas de aula das séries iniciais, têm enfatizado as habilidades processuais e não os entendimentos conceituais.

Já o terceiro subtema (*Pensamento Proporcional e seu Uso em Situações da Vida Real*), inclui apenas uma pesquisa (GONZÁLEZ et al., 2019). O tema abre possibilidades para pesquisas em outras áreas do conhecimento, além da Medicina, e investigações sobre o pensamento proporcional em situações reais da nossa vida cotidiana, inclusive dos alunos do ensino fundamental e do ensino médio.

Portanto, concluímos neste tema, que a natureza do conhecimento de grande parte dos futuros professores e dos alunos do ensino médio está restrita a um pensamento pré-proporcional (BUFORN; FERNÁNDEZ, 2014; RIQUELME; VERGARA, 2019); está baseada em estratégias e procedimentos limitados (SILVA; CÂNDIDO; SOUZA, 2018); está centrada em processos de cálculo, regras e algoritmos, o que fica evidente nas resoluções com uso de algoritmos, sem a devida justificativa e sem haver necessariamente um pensamento proporcional (ASTUDILLO; HUERTA; LEO, 2018; RIQUELME; VERGARA, 2019); tem limitações conceituais básicas, como a compreensão do que é uma razão e do que é uma proporção (ASTUDILLO; HUERTA; LEO, 2018; RIQUELME; VERGARA, 2019).

Conjecturamos que a *origem* para a concepção aditiva seja uma fixação no raciocínio aditivo. Por outro lado, a maneira procedimental que o processo de ensino aprendizagem tem sido conduzido ao longo da escola básica, pode ser uma justificativa para a concepção pré-proporcional. Por isto, reforçamos a necessidade de um processo de formação continuada abordando tais conteúdos (SILVA; CÂNDIDO; SOUZA, 2018), além da inserção de disciplinas nos cursos de Pedagogia voltadas para o tema "pensamento proporcional" (ASTUDILLO; HUERTA; LEO, 2018).

Uma questão levantada aqui foi: "*Porque um número tão grande de pesquisas com a temática de pensamento proporcional?*". Julgamos que a importância de razão e proporção como conceitos necessários para lidar com problemas multiplicativos pode ser uma resposta. Também são considerados como "pedra angular da Álgebra e outras áreas de nível superior da

Matemática" e "pedra angular dos conceitos de aritmética elementar, número e medição" (LESH; POST; BEHR, 1988)[81]. Além disso, "a obtenção do raciocínio proporcional é considerada um marco no desenvolvimento cognitivo dos alunos" (CRAMER; POST, 1993) e situações que utilizam o pensamento proporcional podem se mostrar como "(...) um dos melhores indicadores de que um estudante chegou à compreensão dos números racionais e dos conceitos multiplicativos relacionados" (LAMON, 2008, p. 3). Entretanto, a compreensão da proporcionalidade pelos alunos se desenvolve lentamente ao longo de vários anos (CRAMER; POST, 1993) e, por este motivo, um número considerável de pesquisas com esta temática com alunos do ensino superior.

Expectativas da aprendizagem e intervenções pedagógicas propostas

Não é esperado que as *concepções aditiva* e *pré-proporcional* perpetuem até o ensino superior. Assim, apergunta que colocamos é: *Como alinhar essas concepções (aditiva e pré-proporcional) acerca do tema razão e pensamento proporcional às expectativas da aprendizagem?*[82] Levando em consideração que a expectativa da aprendizagem do tema razão e proporção, com base na BNCC, envolve as seguintes habilidades: EF05MA12[83], EF05MA13[84], EF06MA13[85], EF06MA15[86], EF07MA05[87], EF07MA06[88], EF07MA07[89],

[81] Apenas para exemplificar, Lesh et al (1988) afirma que na psicologia da aprendizagem humana, "o raciocínio proporcional é amplamente reconhecido como uma capacidade que inaugura uma mudança conceitual significativa dos níveis operacional concreto de pensamento para níveis operacional formal de pensamento" (Piaget e Beth, 1966 apud LESH; POST; BEHR, 1988).
[82] Referência ao objetivo específico i.
[83] Resolver problemas que envolvam variação de proporcionalidade direta entre duas grandezas, para associar a quantidade de um produto ao valor a pagar, alterar as quantidades de ingredientes de receitas, ampliar ou reduzir escala em mapas, entre outros (BRASIL, 2017).
[84] Resolver problemas envolvendo a partilha de uma quantidade em duas partes desiguais, tais como dividir uma quantidade em duas partes, de modo que uma seja o dobro da outra, com compreensão da ideia de razão entre as partes e delas com o todo (BRASIL, 2017).
[85] Resolver e elaborar problemas que envolvam porcentagens, com base na ideia de proporcionalidade, sem fazer uso da "regra de três", utilizando estratégias pessoais, cálculo mental e calculadora, em contextos de educação financeira, entre outros (BRASIL, 2017).
[86] Resolver e elaborar problemas que envolvam a partilha de uma quantidade em duas partes desiguais, envolvendo relações aditivas e multiplicativas, bem como a razão entre as partes e entre uma das partes e o todo (BRASIL, 2017).
[87] Resolver um mesmo problema utilizando diferentes algoritmos (BRASIL, 2017).
[88] Reconhecer que as resoluções de um grupo de problemas que têm a mesma estrutura, podem ser obtidas utilizando os mesmos procedimentos (BRASIL, 2017).
[89] Representar por meio de um fluxograma os passos utilizados para resolver um grupo de problemas.

EF07MA08[90], EF07MA09[91] e EF09MA07[92] (BRASIL, 2017), as propostas dos pesquisadores de possibilidades potenciais de intervenções pedagógicas a serem desenvolvidas são:

i. Explorar as características matemáticas das situações proporcionais, como por exemplo, a igualdade entre duas razões e a estratégia compensatória entre seus termos como esquema de raciocínio proporcional (RIQUELME; VERGARA, 2019).

ii. Explorar tipos de problemas proporcionais desde os anos iniciais, antes das representações simbólicas e propriedades formais, favorecendo maior compreensão do conceito e evitando a mecanização pelo uso de algoritmos. Por exemplo, explorar situações de comparação de razões (SILVA; CÂNDIDO; SOUZA, 2018; TREVISAN; DOMINGUES, 2017).

iii. Explorar exemplos de situações proporcionais e não proporcionais para que os alunos consigam diferenciá-las e avaliem quais situações são apropriadas para utilizar estratégias multiplicativas. Os problemas não proporcionais são relevantes para a compreensão do raciocínio proporcional (BUFORN; FERNÁNDEZ, 2014). A habilidade EF06MA15 da BNCC aponta para o trabalho de relações aditivas e multiplicativas concomitantemente.

iv. Explorar níveis[93] de dificuldades nos problemas envolvendo razão (RIQUELME; VERGARA, 2019).

v. Propor atividades que tenham como foco o desenvolvimento do significado de proporção, adiando os procedimentos algorítmicos até que tais entendimentos sejam internalizados pelos alunos, como recomenda a habilidade EF06MA13 da BNCC, principalmente com experiências práticas com razão e situações proporcionais.

vi. Explorar múltiplas estratégias de resolução dos problemas proporcionais e apontar as relações entre elas podem fornecer aos alunos um leque maior de possibilidades frente a cada problema (RIQUELME; VERGARA, 2019; SILVA; CÂNDIDO;

[90] Comparar e ordenar frações associadas às ideias de partes de inteiros, resultado da divisão, razão e operador (BRASIL, 2017).

[91] Utilizar, na resolução de problemas, a associação entre razão e fração, como a fração $\frac{2}{3}$ para expressar a razão de duas partes de uma grandeza para três partes da mesma ou três partes de outra grandeza (BRASIL, 2017).

[92] Resolver problemas que envolvam a razão entre duas grandezas de espécies diferentes, como velocidade e densidade demográfica (BRASIL, 2017).

[93] Ler e escrever uma razão; Simplificar; Identificar os elementos da razão e operar com eles; Calcular a constante k; Multiplicar os elementos da razão por seu valor unitário. (RIQUELME; VERGARA, 2019).

SOUZA, 2018; SOTO, 2017). Alguns exemplos de estratégias são fator de mudança, taxa unitária e frações equivalentes.

vii. Expressar as razões mediante distintas representações (SOTO, 2017).

Perspectivas Futuras

Diante das concepções que os alunos adquirem ao longo da escolarização a respeito do pensamento proporcional e a falta de compreensão de como este se desenvolve (BUFORN; FERNÁNDEZ, 2014), pontuamos ser necessário o desenvolvimento de novas pesquisas com a finalidade de compreender a origem dessas concepções, além de abordar outras questões que não foram encontradas nesta Revisão Sistemática de Literatura. Estas possibilidades estão descritas a seguir, em forma de questões[94]:

i. Qual a origem das concepções aditiva e pré-proporcional?
ii. Existem relações cognitivas entre as estruturas aditivas e as estruturas multiplicativas? Quais são essas relações? Os alunos são capazes de fazer essas relações? Como podemos auxiliar os alunos a obter essas relações?
iii. Pensando no currículo, qual é o melhor momento para que a relação entre as estruturas aditivas e multiplicativas sejam estabelecidas? Devem ser concomitantes como prevê a BNCC no sexto ano?
iv. A aquisição dessas relações favorece a transição para o campo das estruturas multiplicativas, facilitando a aprendizagem de conceitos, operações e relacionamentos neste campo tão complexo?
v. O contexto dos problemas ou a natureza das relações numéricas influenciam a dificuldade e/ou desempenho?
vi. O tipo de problema envolvendo pensamento proporcional, com relação ao contexto, pode influenciar na dificuldade e/ou desempenho dos alunos?
vii. Até que ponto as habilidades com números racionais influenciam ou relacionam-se com o desempenho dos alunos com problemas de pensamento proporcional?
viii. Quais fatores influenciam no sucesso ou não na resolução de problemas proporcionais?
ix. Quais as principais estratégias que os alunos utilizam ao lidar com situações que demandam o pensamento proporcional?

[94] Algumas dessas questões foram inspiradas em Behr et al. (1992).

x. Como ocorre a integração dos subconstructos de número racionais e as maneiras de raciocinar em situações proporcionais (pensamento relacional, covariância, raciocínio *up and down* e *unitizing*)? (BUFORN; FERNÁNDEZ, 2014)

xi. Como a exploração de diferentes tipos de problemas proporcionais (como proposto por Lesh, Post e Behr, 1988) poderia influenciar no desenvolvimento do pensamento proporcional?

Por fim, levantamos a seguinte questão: "O que os cursos de Licenciatura e Pedagogia têm feito, em termos de formação dos seus professores, com relação ao tema pensamento proporcional?

5.2 CONSIDERAÇÕES FINAIS TEMA 2: OPERAÇÕES COM NÚMEROS RACIONAIS

De maneira geral, as pesquisas incluídas nesse subtema concluem que os índices de acertos em questões envolvendo as operações com números racionais em todos os níveis de ensino foram insatisfatórios (ETCHEVERRIA; AMORIM, 2020; PARAOL; RODRIGUÊS, 2018; RETANA; MUÑOZ, 2018; SANCHEZ-LUJÁN; MORENO, 2018). Dentre as pesquisas analisadas, quatro tinham como público-alvo o ensino superior, apontando que muitas dificuldades com as operações ainda persistem até esta etapa de ensino. Como exemplo podemos citar que o desempenho com adição de frações com denominadores diferentes não chegou a 30% no ensino superior (ETCHEVERRIA et al., 2019). Todavia, nas pesquisas que compararam os níveis de ensino, o desempenho foi crescente conforme o avançar da escolaridade (ETCHEVERRIA et al., 2019; PARAOL; RODRIGUÊS, 2018).

Apesar de a abordagem metodológica das pesquisas não ser quantitativa, os resultados referem-se a percentuais de erros e acertos, com pouca discussão, explicações e justificativas a respeito dos tipos de erros dos alunos. Apenas a pesquisa de Sanchez-Luján e Moreno (2018) e de Etcheverria et al. (2019), discutiram qualitativamente os tipos de erros identificados. Consideramos ser relevante refletir sobre esses tipos de erros e dificuldades para pensar possíveis metodologias de ensino.

Constatamos que os alunos do ensino médio e do ensino superior apresentaram "dificuldades na compreensão da rede de conceitos que abrange o estudo dos números racionais" e na "utilização de algoritmos das operações fundamentais com frações" (CARVALHO et al., 2021, p. 10), evidenciando uma fragmentação do conhecimento sobre o tema.

No subtema 1, composto por três pesquisas, conclui-se que o uso do jogo ou de apoios virtuais é uma alternativa potencial para revisitar alguns conhecimentos básicos de números racionais, essenciais para a aquisição de novos conceitos. Porém, os resultados dessas pesquisas foram bem gerais e não foram apresentados resultados específicos com relação às mudanças ocorridas quanto ao uso das operações com números racionais, à exceção de Barbosa et al. (2018), que analisou algumas operações, mesmo que de maneira superficial.

No subtema 3, as pesquisas compartilham um entendimento de que o conhecimento comum de conteúdo é familiar à grande maioria dos futuros professores, embora o conhecimento especializado de conteúdo e o conhecimento pedagógico de conteúdo estejam em desenvolvimento, considerando que os futuros professores tiveram dificuldades em justificar os cálculos realizados e propor estratégias diferentes de resolução para determinados problemas. Ademais, as pesquisas partilham a necessidade de fortalecer o conhecimento especializado de conteúdo e o conhecimento pedagógico de conteúdo nos cursos de formação inicial de professores, com a finalidade de proporcionar a compreensão relacional dos conceitos no processo de ensino aprendizagem e não apenas a transmissão instrumental de conteúdos, como a memorização de algoritmos.

Do subtema 2, as principais dificuldades e os principais erros cometidos pelos alunos em cada uma das operações identificam três tipos de concepções: concepção procedimental das operações; concepção intuitiva das operações; concepção não relacional das operações.

A *concepção procedimental* caracteriza-se pelo uso de algoritmos sem significado, sendo por vezes facilmente distorcidos. Normalmente ocorre em decorrência da memorização mecânica de procedimentos: “quando um algoritmo é visto como uma série de passos sem sentido, os alunos podem esquecer alguns desses passos ou alterá-los de forma que levem a erros” (TIROSH, 2000, p. 7, tradução nossa).

A *concepção intuitiva das operações* caracteriza-se pelo uso de algoritmos generalizados a partir de casos especiais ou inferidos por procedimentos válidos em outros contextos. São erros decorrentes da intuição, que é um componente importante no raciocínio matemático, mas podem se configurar como obstáculos.

A *concepção não relacional das operações* é caracterizada pelo uso não relacional do conceito de número racional e das operações, o que transparece no uso de suas propriedades. Embora, muitas vezes enunciadas corretamente, a fragmentação do conteúdo fica evidente quando relações estabelecidas não são coerentes ou relações pertinentes não são estabelecidas.

Deste modo, consideramos que conhecer as concepções dos alunos acerca das operações com frações e com decimais é uma ação importante para o professor de Matemática, porque se

torna possível pensar em atividades adequadas para auxiliar no redirecionamento dessas concepções.

Expectativas da aprendizagem e intervenções pedagógicas propostas

Na BNCC, com relação às operações com números racionais, é esperado que os alunos resolvam problemas "envolvendo operações fundamentais, com seus diferentes significados, e utilizando estratégias diversas, com compreensão dos processos neles envolvidos" (BNCC, 2017, p. 225). Nesse sentido, as pesquisas analisadas trazem propostas para que concepções das operações baseadas em aspectos algorítmicos, intuitivos e não-relacionais possam ser redirecionados:

i. Explorar diferentes estratégias de resolução dos problemas envolvendo as operações. Por exemplo, algumas possibilidades de estratégias apresentadas na soma de frações foram: encontrar o mínimo múltiplo comum, simplificação de frações, encontrar frações equivalentes, uso de apoios virtuais, uso de jogos, multiplicação cruzada, regra do peixinho.
ii. Explorar as operações com frações sem o uso direto de algoritmos ou simbologia específica (PROENÇA, 2015), como por exemplo figuras (MENEGAZZI, 2013).
iii. Discutir os procedimentos de resolução dos problemas dos alunos, tanto os corretos quantos os incorretos (JUSTULIN, 2016).
iv. Proporcionar capacitação pedagógica para os professores envolvendo a temática, com a finalidade de fortalecer o conhecimento especializado de conteúdo e o conhecimento pedagógico de conteúdo de tal modo a proporcionar uma compreensão do conceito de número racional (ETCHEVERRIA et al., 2019; OLIVEIRA et al., 2020). Retana e Muñoz (2018) reforçam que alguns erros prevalecem e não são superados em níveis anteriores. Deste modo, os cursos superiores "devem assumir o desafio de reforçar ou mesmo completar a formação Matemática dos futuros professores" (RETANA; MUÑOZ, 2018, p. 135). Uma alternativa interessante trazida na pesquisa de Silva, Carvalho e Campos (2018) foi a discussão de algoritmos com futuros professores por meio de exemplos com geometria. Tais exemplos são relevantes como conhecimento especializado de conteúdo, pois potencialmente promovem significado às operações e estabelecem relações entre aritmética, a álgebra e a geometria.

v. Utilizar materiais didáticos como o cuisinare ou material dourado para realizar as operações com números racionais (ABRAHÃO, 2016), além de jogos ou ambientes virtuais (BARBOSA et al., 2018; BRAGA; LIMA, 2020; OLIVEIRA et al., 2020; PÉREZ, 2012)..

5.3 CONSIDERAÇÕES FINAIS TEMA 3: REPRESENTAÇÕES DOS NÚMEROS RACIONAIS

A partir da análise dos artigos do tema 3 (*Representações dos Números Racionais*), desenvolvemos um dos objetivos específicos desta pesquisa: "descrever os modos com que os alunos entendem as múltiplas representações dos números racionais, identificando tipos de registro de representação, caso existam, que os alunos evocam com maior ou menor frequência".

Os resultados evidenciam uma *concepção dos alunos acerca das representações de um número racional restritas a um monorregistro*. Em particular, há uma predominância do registro numérico (fracionário ou decimal), em detrimento dos outros registros.

As dificuldades nas conversões ficaram muito evidentes em todas as pesquisas, e se mostraram mais desafiadoras nos casos do registro figural ou fracionário para o registro decimal ou no caso das frações impróprias.

Uma percepção a respeito deste tema é que, ao iniciar minha pesquisa acerca dos números racionais, discussões especialmente na disciplina de metodologia sugeriram a impossibilidade de discutir o conceito de número racional sem mencionar suas diversas representações. De fato, o argumento de que conhecemos um conceito matemático por meio dos objetos que o compõem ou representam, e tais objetos matemáticos por meios de suas múltiplas representações, é familiar em nosso campo de pesquisa sendo muito explorado, por exemplo, em Duval (2008). No decorrer desta pesquisa sempre tive em mente que esse seria um dos tópicos importantes e que merecia atenção especial. Contudo, para minha surpresa, foi pequeno o número de pesquisas que restringiu seu foco à temática das múltiplas representações dos números racionais. Em números, temos que do total de pesquisas analisadas (45 pesquisas), apenas sete abordaram a temática de representações do número racional, que corresponde a 15,5%.

Expectativas da aprendizagem e intervenções pedagógicas propostas

Se analisarmos a BNCC, a partir do quarto ano, a representação numérica fracionária é sugerida com a habilidade EF04MA09[95] e a representação numérica decimal, com a habilidade EF04MA10[96]. A partir deste ano, a sugestão é que a representação decimal seja associada às frações cujos denominadores são potências de dez e a partir do quinto ano, é indicado que os dois tipos de representação numérica (decimal e fracionária) sejam explorados conjuntamente, iniciando pela associação à reta numérica (EF05MA02 e EF05MA03)[97].

Algumas propostas foram mencionadas nas pesquisas analisadas, com a finalidade específica de minimizar os problemas com as representações:

i. Diversificar os registros de representação, assim como os procedimentos de conversão e tratamento (ABRAHÃO, 2016; SANTANA; OLIVEIRA; BARRETO, 2015).
ii. Utilizar diferentes materiais, como por exemplo o cuisinaire e o material dourado, com a finalidade de explorar os diferentes registros de representação dos números racionais (ABRAHÃO, 2016).
iii. Explorar diferentes unidades racionais e suas respectivas representações (ABRAHÃO, 2016).
iv. Explorar os diversos registros de representação dos números racionais com os subconstructos[98] (SANTANA; OLIVEIRA; BARRETO, 2015). Nas diversas representações utilizadas pelos futuros professores, quase todos os subconstructos foram enunciados: representação na reta numérica (medida), representação figural (parte-todo), representação com mudanças da unidade racional (operador), representação decimal (quociente). Acreditamos que explorar as diferentes formas de representação também auxilie na exploração e integração dos subconstructos.
v. Explorar os diferentes registros de representação em atividades práticas, como por exemplo no caso da pesquisa de Parra-Zapata et al. (2021) com as notas racionais.

---

[95] Reconhecer as frações unitárias mais usuais $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{10}$ e $\frac{1}{100}$, como unidades de medida menores do que uma unidade, utilizando a reta numérica como recurso.

[96] Reconhecer que as regras do sistema de numeração decimal podem ser estendidas para a representação decimal de um número racional e relacionar décimos e centésimos com a representação do sistema monetário brasileiro.

[97] EF05MA02: Ler, escrever e ordenar números racionais na forma decimal com compreensão das principais características do sistema de numeração decimal, utilizando, como recursos, a composição e decomposição e a reta numérica. EF05MA03: Identificar e representar frações (menores e maiores que a unidade), associando-as ao resultado de uma divisão ou à ideia de parte de um todo, utilizando a reta numérica como recurso.

[98] Por exemplo, a associação de $\frac{2}{3}$ a 2,3 pode indicar uma dificuldade originada na conceituação das frações como quociente (SANTANA; OLIVEIRA; BARRETO, 2015). Daí a importância em relacionar e refletir sobre as representações de números racionais com os subconstructos.

Com relação às dificuldades com as frações impróprias, concepções evocadas pelos alunos ao final da escolarização, em parte devido à ênfase no subconstructo parte-todo, remetem a números racionais como números sempre menores que um. Ou seja, em sua forma fracionária, o numerador na representação precisa ser sempre menor ou igual ao denominador. Acreditamos na importância de explorar as potencialidades do subconstructo parte-todo com as frações impróprias desde o início da escolarização, buscando evitar a conceituação de que uma fração sempre é uma parte menor que um, como a BNCC sugere na habilidade EF05MA03.

Tanto o subconstructo parte-todo quanto o subconstructo quociente são citados como possibilidades para trabalhar frações menores e maiores que uma unidade. Assim, acreditamos ser possível evitar a concepção limitada de que o numerador precisa ser menor ou igual ao denominador[99]. Neste sentido, algumas sugestões apontadas pelas pesquisas foram:

i. Explorar a potencialidade do subconstructo parte-todo com frações impróprias.
ii. Explorar diferentes tipos de materiais para representar a mesma fração imprópria (ABRAHÃO, 2016).
iii. Explorar conversões da representação simbólica numérica para a representação pictórica de frações impróprias (PARAOL; RODRIGUÊS, 2018).
iv. Explorar as noções de particionamento e unidade racional para o estabelecimento de uma fração imprópria.

Reforçamos a importância de uma linguagem precisa com relação a qual ‘todo’ o problema está se referindo.

Perspectivas Futuras

As lacunas evidenciadas neste tema relacionam-se aos processos de tradução (termo da TRRS), principalmente com relação às frações equivalentes, aspecto não explorado pelas pesquisas.

Além disso, alternativas de metodologias de ensino que oportunizem aos alunos o contato com uma ampla variedade de tipos de representação, com a finalidade de que as concepções não fiquem restritas a um mono registro, além de relacioná-las com os subconstructos, parecem ser muito oportunas.

[99] A BNCC afirma que não é necessário atribuir nomes às frações (própria, imprópria ou aparente), mas o que importa são as ideias de divisão e parte-todo de um número racional.

5.4 CONSIDERAÇÕES FINAIS TEMA 4: O CONCEITO DE NÚMERO RACIONAL

As considerações a respeito do tema 4 estão subdivididas em quatro seções, de acordo com os subtemas.

5.4.1 Parte-todo

Grande parte das pesquisas envolvendo situações parte-todo destaca que os alunos não apresentam dificuldades. Isto decorre do fato que este subconstructo é o mais enfatizado em toda a escolarização e "o mais simples e usual de todos" (GARCÍA, 2019, p. 146).

As concepções relativas ao subconstructo parte-todo que emergiram foram: a identificação de números racionais como sinônimo de parte-todo; números racionais são sempre menores que um; parte-todo envolvendo particionamentos desiguais.

Tais concepções têm sua *origem* em um processo de ensino aprendizagem do conceito restrito ao subconstructo parte-todo. O cerne da questão não é a introdução por meio deste subconstructo, mas sim a ênfase a ela atribuída, em detrimento da experiência com aspectos dos outros subconstructos igualmente importantes na construção do conceito de número racional. Um ensino restrito a qualquer um dos subconstructos pode resultar em uma noção pouco abrangente do conceito geral de números racionais, conduzindo a uma série de limitações (KERSLAKE, 1986; VENTURA, 2013).

Podemos nos perguntar como o subconstructo parte-todo surge como objeto de ensino, dado que a gênese histórica do número racional relaciona-se ao subconstructo medida (VIZCARRA; SALLÁN, 2005).

> Pensamos que a origem do sentido parte-todo deve estar localizada na prática educativa, deve estar localizada entre os recursos didáticos criados pelas necessidades do processo de ensino e aprendizagem de Matemática. Com efeito, um trabalho recente (Escolano, 2004) mostra como nos textos escolares espanhóis a presença do sentido parte-todo pode ser detectada desde o primeiro terço do século XX. Da mesma forma, indica dois motivos que justificariam a introdução e consolidação deste recurso didático: • Evitar o processo de medição com objetos tangíveis (dificuldade do próprio processo de medição, gestão da sala de aula devido ao uso de materiais, controle da diversidade de resultados obtidos, prioridade de ensino do Sistema Decimal Métrico, etc.); • Reduzir os períodos de instrução: o significado parte-todo permite uma introdução rápida da representação simbólica da fração e, adicionalmente, com altos níveis de sucesso no curto prazo. (VIZCARRA; SALLÁN, 2005, p. 23, tradução nossa)

De modo sucinto, os autores argumentam que iniciar pelo subconstructo parte-todo pode abreviar o processo de ensino aprendizagem, que seria eficaz a curto prazo e, portanto, é uma opção didática.

No entanto, um processo de ensino aprendizagem que reduza seu foco a apenas este subconstructo pode resultar em concepções não consistentes de número racional, como as destacadas ao longo deste texto.

Expectativas da aprendizagem e intervenções pedagógicas propostas

A forma básica de introdução do conceito de fração, na maioria dos currículos ao redor do mundo, é feita por meio do subconstructo parte-todo (AMUAH; DAVIS; FLETCHER, 2017).

No caso do Brasil, a BNCC propõe trabalhar a ideia parte-todo a partir do segundo ano do ensino fundamental: EF02MA08[100]. Nesta habilidade, as primeiras noções de fração como partes de um todo estão implícitas, com a elaboração de formas pessoais (desenhos, escrita com palavras, esquemas) de resolução e não de procedimentos convencionais.

As pesquisas analisadas e a BNCC apontam algumas possibilidades para que tais concepções não consistentes sejam redirecionadas.

No caso da concepção de números racionais como sinônimo de parte-todo, a proposição de experiências matemáticas que demandem o entendimento e uso de outros subconstructos, buscando comparações, pode ampliar a compreensão limitada do conceito. Por exemplo, o subconstructo quociente é proposto a partir do terceiro ano, simultaneamente ao parte-todo (EF03MA09[101]); a habilidade EF05MA03[102] refere-se à identificação e representação de frações associadas às interpretações divisão e parte-todo, simultaneamente; no sexto ano são previstas situações que envolvam os subconstructos razão e parte-todo (EF06MA15[103]).

De modo semelhante, para a concepção de que um número racional é sempre menor que um, as pesquisas sugerem: explorar a potencialidade do subconstructo parte-todo para trabalhar frações impróprias; explorar as conversões da representação simbólica numérica para a representação pictórica de frações impróprias (PARAOL; RODRIGUÊS, 2018); explorar as noções de particionamento e unidade racional para o estabelecimento de frações impróprias.

---

[100] Resolver e elaborar problemas envolvendo dobro, metade, triplo e terça parte, com o suporte de imagens ou material manipulável, utilizando estratégias pessoais.

[101] Associar o quociente de uma divisão com resto zero de um número natural por 2, 3, 4, 5 e 10 às ideias de metade, terça, quarta, quinta e décima partes.

[102] Identificar e representar frações (menores e maiores que a unidade), associando-as ao resultado de uma divisão ou à ideia de parte de um todo, utilizando a reta numérica como recurso. (Isto implica em compreender, por exemplo, que $\frac{3}{5}$ pode significar $3:5$ ou um inteiro dividido em 5 partes, das quais tomou-se 3).

[103] Resolver e elaborar problemas que envolvam a partilha de uma quantidade em duas partes desiguais, envolvendo relações aditivas e multiplicativas, bem como a razão entre as partes e entre uma das partes e o todo.

No caso da concepção de particionamentos desiguais, as pesquisas propõem explorar atividades: envolvendo apenas a percepção visual de particionamento de figuras geométricas, sem o uso de fórmulas (GARCÍA; CABAÑAS-SÁNCHEZ, 2013); envolvendo a conversão dos registros de representação (PARAOL; RODRIGUÊS, 2018); envolvendo divisão do todo em partes iguais, com quantidades contínuas e discretas, em que os próprios alunos tenham que realizar o particionamento (ABRAHÃO, 2016); utilizando a tecnologia com applets para trabalhar a divisão do todo (SALAZAR et al., 2016); envolvendo a relação compensatória, ou seja, quanto maior o número de divisões do todo, menor será a quantidade de peças do todo (SALAZAR et al., 2016).

Perspectivas Futuras

Dentre as possibilidades de pesquisas futuras nessa temática, levando em consideração as lacunas, destacamos:

1) Muitos dos equívocos e dificuldades dos alunos são originados devido a ênfase no subconstructo parte-todo, assim: i) ‘Os livros didáticos utilizados no ensino fundamental tem priorizado o modelo parte-todo?’; ii) ‘Como os outros subconstructos têm sido abordados nos livros didáticos e no processo de ensino aprendizagem nas salas de aula?’.

2) A predominância, perceptível, de questões referentes a conjuntos contínuos em detrimento dos conjuntos discretos. É recorrente trabalhar com os mesmos exemplos, de partilha equitativa de pizza, barras de chocolate etc., podendo resultar em limitações e dificuldades com outros contextos. Acreditamos que a predominância de casos contínuos também pode estar ocorrendo no processo de ensino-aprendizagem na sala de aula e pontuamos a importância de haver uma variação nos tipos de conjuntos e exemplos. Por isto, a importância de desenvolver pesquisas com este enfoque: i) ‘Os livros didáticos priorizam problemas com conjuntos contínuos em detrimento de conjuntos discretos?’; ii) ‘Os problemas com conjuntos contínuos são priorizados ao longo do processo de ensino aprendizagem dos números racionais? Que dificuldades com os outros subconstructos relacionam-se a dificuldades com problemas com conjuntos discretos?’; iii) ‘Quais as potencialidades em explorar contextos com conjuntos discretos?’.

3) De uma maneira geral, a interpretação parte-todo esteve relacionada com as noções de particionamento, unidade e equivalência. Todavia, estas pesquisas não analisaram objetivamente essas relações: i) ‘Quais as relações entre o subconstructo parte-todo e as ideias fundamentais de particionamento, unidade e equivalência?’. ii) ‘Como a visualização

geométrica da noção de particionamento pode auxiliar na compreensão do subconstructo parte-todo?'.

5.4.2 Quociente

Dos resultados das pesquisas referentes ao subconstructo quociente verificamos que os alunos evocam duas concepções principais: *pró-decimal* e de *partilha impossível*. Contudo, os processos envolvidos nas resoluções dos problemas são, em geral, algorítmicos e não conceituais.

Destacamos que a *origem* para estas concepções pode estar centrada na confusão entre a representação decimal e o próprio número e porque a maior parte das situações há mais pessoas do que objetos ou alimentos para compartilhar.

Acreditamos ser necessário um redirecionamento de tais concepções, de modo a entender os números racionais como divisão indicada e a partilha justa como quociente (mesmo em casos em que temos um número menor de objetos para compartilhar). Neste sentido, algumas habilidades da BNCC são relevantes.

Uma outra origem para estas dificuldades, é que os problemas apresentados nas pesquisas não são completos e utilizam objetos complexos para efetuar a divisão, podendo causar equívocos para os alunos. Por exemplo, a escolha da divisão de pastéis em partes iguais, poderia ser substituída por pizzas ou outro alimento que facilitaria a divisão em partes iguais. Outro ponto, é que os problemas não deixam claro que a pizza (ou outro alimento-objeto) deverá ser dividida em partes iguais pelas crianças.

Expectativas da Aprendizagem e Intervenções Pedagógicas Propostas

A partir do terceiro ano a BNCC propõe uma abordagem simultânea dos dois subconstructos, parte-todo e quociente. O quociente de uma divisão indicada com resto zero é relacionado às frações indicadas, propondo a exploração desse subconstructo por meio de problemas de partilha (EF03MA09[104]), em contextos com grandezas contínuas e discretas. As pesquisas sugerem a utilização de situações reais e significativas para os alunos ou que eles já tenham conhecimentos prévios para minimizar as dificuldades em situações de partilha equitativa (GARCÍA, 2019).

[104] Associar o quociente de uma divisão com resto zero de um número natural por 2, 3, 4, 5 e 10 às ideias de metade, terça, quarta, quinta e décima partes.

No quinto ano a habilidade EF05MA03[105] envolve a identificação e representação de frações associadas às duas interpretações simultaneamente (quociente e parte-todo), além de explorar essas noções com as frações impróprias. Isto implica compreender, por exemplo, que $\frac{3}{5}$ pode significar $3:5$ ou um todo dividido em cinco partes, das quais tomou-se três.

No sexto ano a habilidade relacionada ao quociente é a EF06MA08[106], que implica a associação de uma fração à sua representação decimal. Pontuamos que as pesquisas revelam uma concepção pró-decimal dos alunos, que preferem operar com os números decimais. Contudo, é necessário que o aluno saiba identificar em quais contextos é mais conveniente utilizar a representação fracionária ou a representação decimal.

Perspectivas Futuras

Sobre as lacunas evidenciadas, há uma carência de pesquisas que tenham como foco o subconstructo quociente, especialmente: 1) abordando as relações entre o subconstructo quociente e a noção de equivalência por meio de situações reais; 2) abordando os dois tipos de divisão quotitiva e partitiva[107] e as respectivas diferenças; 3) explorando as representações gráficas de particionamento das situações de quociente; 4) explorando comparações de situações com os subconstructos parte-todo e quociente.

Assim, algumas potencialidades com o foco no subconstructo quociente como divisão indicada são:

i. apontar aspectos conceituais da relação entre decimais e frações;
ii. relacionar as diferentes representações de um número racional;
iii. identificar contextos convenientes ao uso de uma ou outra representação.

[105] Identificar e representar frações (menores e maiores que a unidade), associando-as ao resultado de uma divisão ou à ideia de parte de um todo, utilizando a reta numérica.

[106] Reconhecer que os números racionais positivos podem ser expressos nas formas fracionária e decimal, estabelecer relações entre essas representações, passando de uma representação para outra, e relacioná-los a pontos na reta numérica.

[107] Neste subconstructo os alunos precisam ter uma compreensão sólida dos tipos principais de divisão: partitiva e quotitiva (CHARALAMBOUS; PITTA-PANTAZI, 2007), denominados por divisão e extração por Ohlsson (1988). A partitiva, implica em equiparticionar uma quantidade e separá-la em partes de tamanhos iguais (DAMICO, 2007). O que está em destaque é a quantidade que cada um irá receber, ou seja, 8 doces compartilhados para 4 pessoas, significa que cada pessoa recebeu 2 doces: $8 \div 4 \rightarrow 2 + 2 + 2 + 2$. Aqui o numerador indica o valor distribuído, enquanto o denominador indica em quantos grupos a divisão ocorreu e o quociente é o resultado desta distribuição (GODOY; BARRETO, 2016); Na quotitiva, a ideia é extrair repetidamente uma quantidade de outra. Neste caso, o que está em ênfase é o número de partes iguais que podem ser produzidas no particionamento de uma quantidade em partes iguais. Pode ser considerada uma subtração repetida. Assim, 8 doces divididos em grupos de 4 doces, teremos 2 pessoas recebendo (CHARALAMBOUS; PITTA-PANTAZI, 2007). Aqui o numerador e denominador indicam as quantidades de dois conjuntos da mesma natureza, apontando para quantas vezes um conjunto cabe em outro e o quociente será o resultado (GODOY; BARRETO, 2016).

5.4.3 Medida

O maior número de concepções acerca do conceito de número racional emergiu do subconstructo medida. São elas:

i. *concepção de mantissa:* relacionada à noção de ordenação ao admitir que quanto maior o número de casas decimais, maior o número;
ii. *concepção de arredondamento:* relacionada à noção de ordenação considerando apenas a primeira casa decimal;
iii. *concepção discretista:* relacionada à noção de densidade e à ideia de que há poucos ou nenhum número entre os números propostos;
iv. *concepção finitista:* relacionada à noção de densidade e pela ideia de que existe pelo menos um número entre outros dois números racionais, mas ainda é uma noção finita, no sentido de que há uma quantidade finita de números entre eles;
v. *concepção de que uma fração é sempre um número menor que um:* os alunos apresentam dificuldades em pensar em frações impróprias, com o resultado sendo um número maior que um, isto é, com o numerador maior que o denominador;
vi. *concepção de frações como dois números independentes:* participantes das pesquisas analisadas, até mesmo os futuros professores, não identificam a fração com um único número na reta numérica;
vii. *concepção de que o traço da fração equivale a vírgula do número decimal:* esta concepção sugere a incompreensão da notação matemática e da identificação da fração como dois números separados e não como uma relação entre dois números.

De maneira geral, as origens destas concepções são relativas: ao conhecimento prévio dos números naturais (viés de número natural), à escassez de exemplos com frações impróprias e variações da unidade, e à escassez de atividades envolvendo o particionamento.

Expectativas da Aprendizagem e Intervenções Pedagógicas Propostas

A reta numérica com o subconstructo medida é um recurso valioso, pois auxilia a visualização da ordenação dos números racionais. A BNCC reconhece a importância da reta

numérica e incentiva sua exploração em diversas habilidades: EF04MA09[108]; EF05MA02[109], EF05MA03[110], EF05MA05[111] e EF06MA01[112]. Além do mais, é um contexto ideal para trabalhar as noções de ordem, equivalência, densidade, soma de frações e a introdução de números decimais (KIEREN, 1980)..

Potencialidades referentes a este subconstructo, para redirecionar tais concepções são: uso de recursos didáticos para comparar frações por superposição (MEDINA, 2013); uso de objeto de aprendizagem com comparação de retângulos, sem o uso de algoritmos (MENEGAZZI, 2013); atividades com a reta numérica como recurso para a interpretação geométrica dos números racionais e a sua ordenação; situações de comparação de grandezas que resultam em fração imprópria, utilizando o maior número como unidade de medida (MENEGAZZI, 2013).

Perspectivas Futuras

Algumas possibilidades de pesquisa com foco neste subconstructo são:

i. A densidade dos números racionais é compreendida no ensino médio? Amaya e Montoro (2018) buscaram esta resposta, e uma pesquisa no Brasil com esse foco seria de grande relevância;
ii. Como introduzir as notações do número racional? Como relacionar as diferentes representações do número racional?
iii. Os resultados apontam uma maior segurança dos participantes em compreender as propriedades de densidade e ordem dos números decimais do que das frações. No entanto, nenhuma pesquisa teve esta questão como foco de investigação. Há diferenças na compreensão da densidade dos números representados na forma decimal ou na forma fracionária?
iv. O uso coordenado das relações de ordem e de equivalência possibilita êxito na comparação de frações com mesmo numerador, com o mesmo denominador,

[108] Reconhecer as frações unitárias mais usuais $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{10}, \frac{1}{100}\right)$ como unidades de medida menores do que uma unidade, utilizando a reta numérica como recurso. Esta habilidade prevê que as frações unitárias sejam identificadas como partes de um todo e verificadas quantas vezes cabe em um inteiro, associando à reta numérica.
[109] Ler, escrever e ordenar números racionais na forma decimal com compreensão das principais características do sistema de numeração decimal, utilizando, como recursos, a composição e decomposição e a reta numérica.
[110] Identificar e representar frações (menores e maiores que a unidade), associando-as ao resultado de uma divisão ou à ideia de parte de um todo, utilizando a reta numérica como recurso.
[111] Comparar e ordenar números racionais positivos (representações fracionária e decimal), relacionando-os a pontos na reta numérica. Cálculo de porcentagens e representação fracionária.
[112] Comparar, ordenar, ler e escrever números naturais e números racionais cuja representação decimal é finita, fazendo uso da reta numérica.

assim como aquelas de diferente numerador e denominador (POST et al., 1986 apud GARCÍA; CABAÑAS-SÁNCHEZ, 2013, p. 213). Como desenvolver o uso coordenado das noções de equivalência e ordem?

v. Pesquisadores apontam a potencialidade da reta numérica para trabalhar a noção de equivalência[113], porém nenhuma pesquisa abordou esta temática.

vi. Pelos resultados das pesquisas, este é o subconstructo menos familiar aos alunos. Por que? Será que é o subconstructo menos enfatizado nos livros didáticos e no processo de ensino aprendizagem nas salas de aula?

5.4.4 Operador

Nas pesquisas analisadas, o subconstructo operador foi o menos investigado.

Duas pesquisas destacaram uma *concepção de porcentagem como quantidade e não como operador*, que pode ocorrer porque os alunos realizam o cálculo de porcentagem de maneira automática, sem compreender o que estão fazendo, seja por meio da regra de três ou usando a noção de operador. Uma outra pesquisa destacou a concepção de dividir primeiro e depois multiplicar, como estratégia nas situações com operador.

As dificuldades com os problemas que envolviam o subconstructo operador foram praticamente inexistentes. Nas pesquisas com todos os subconstructos, isto ficou bem claro no alto índice de acertos com o subconstructo operador.

Expectativas da aprendizagem e Intervenções Pedagógicas Propostas

Nos documentos oficiais, o subconstructo operador como transformação é abordado apenas no sexto ano: EF06MA09[114]. Entretanto, a BNCC enfatiza apenas a fração de uma quantidade (conjunto discreto), sem relacionar a noção com conjuntos contínuos (segmento de reta e figuras geométricas).

[113] Duas subunidades usadas para medir uma mesma distância resultam em nomes diferentes para a mesma fração. Assim, existe apenas um número racional associado a uma distância específica do zero, e as duas frações são nomes equivalentes para esta distância (LAMON, 2008). A linha numérica fornece possibilidade de reconhecer contextos equivalentes que procedem de novas divisões da unidade (VENTURA, 2013, p. 46).

[114] Resolver e elaborar problemas que envolvam o cálculo da fração de uma quantidade e cujo resultado seja um número natural, com e sem uso de calculadora.

A porcentagem como um operador é proposta nas orientações da BNCC nos quinta e sexto anos como meio para desenvolvimento das habilidades EF05MA06[115] e EF06MA13[116], sendo possível relacionar a ideia de porcentagem à noção de operador[117].

As pesquisas analisadas nesta tese evidenciam dificuldades dos alunos do ensino médio e do ensino superior com a estrutura multiplicativa dos números racionais.

Já a concepção *de dividir primeiro e depois multiplicar*, uma possibilidade para a compreensão de $\frac{p}{q}$ como um número pode ser por meio da noção geral de reversibilidade, como no problema proposto por Carpes e Bisognin (2019).

Outra potencialidade a ser destacada é a composição de funções proporcionando sentido para o número racional como operador (REYES; PRIETO, 2015).

Perspectivas Futuras

Como sugestão de pesquisas futuras, pontuamos possibilidades que tenham como foco as estruturas cognitivas de composição de funções, reversibilidade e proporcionalidade atreladas ao subconstructo operador.

Além disso, pesquisas futuras podem promover os múltiplos significados de porcentagem, como quantidades e também como operador, buscando modos de relacionar essas noções.

Nas pesquisas analisadas, predominam os problemas envolvendo conjuntos discretos, aumentando ou diminuindo o número de itens em um conjunto de objetos discretos, em detrimento de questões envolvendo conjuntos contínuos. A perspectiva geométrica, com segmentos de reta, figuras geométricas e desenhos, são pouco explorados. Reconhecendo essas lacunas, questionamos: em situações que demandam o entendimento de números racionais como operador, há distinções no desempenho dos alunos ao trabalhar com conjuntos discretos ou contínuos? As experiências envolvendo conjuntos discretos e números racionais, entendidos como operador, contribuem para uma aprendizagem mais significativa? Em consequência, é possível que a predominância de experiências e situações discretas se reflita no processo de ensino-aprendizagem da sala de aula?

---

[115] Cálculo de porcentagens e representação fracionária.

[116] Resolver e elaborar problemas que envolvam porcentagens, com base na ideia de proporcionalidade, sem fazer uso da "regra de três", utilizando estratégias pessoais, cálculo mental e calculadora, em contextos de educação financeira, entre outros.

[117] Por exemplo, associar que 10% é o mesmo que $\frac{10}{100}$; levar os alunos a compreender, por exemplo, o que significa $\frac{1}{10}$ de uma quantidade; reconhecer que a porcentagem é uma representação fracionária com denominador 100; associar a representação de uma porcentagem com mais duas representações diferentes: decimal e fracionária.

5.4.5 Considerações sobre o tema 4

Com relação a conclusões mais gerais a respeito dos subconstructos dos números racionais, temos que:

i. Tanto quantidades contínuas como discretas são relevantes no processo de ensino aprendizagem do conceito de número racional, pois ambas permitem descobrir propriedades diferentes do conceito (GARCÍA, 2019). Assim, consideramos importante que todos os subconstructos sejam abordados com ambos os tipos de quantidades, para que não sejam estabelecidas noções equivocadas ao longo da escolarização.

ii. Os diferentes níveis de aprendizagem do conceito de número racional são devido às diferentes interpretações que os alunos têm sobre cada uma delas (MULLER et al., 2020). Em particular, os alunos apresentam um maior domínio sobre os subconstructos parte-todo e operador, e limitações com os subconstructos medida e quociente (MENEGAZZI; DALCIN, 2016; MULLER et al., 2020)[118].

iii. Os futuros professores aprenderam o conceito de número racional tendo como foco o subconstructo parte-todo ao longo da escolarização, levando-os a manter o mesmo foco no desenvolvimento do conceito com seus alunos. Os novos licenciandos também estão aprendendo assim e, consequentemente, irão ensinar assim, "evidenciando limitações relacionadas ao conhecimento pedagógico de conteúdo" (ETCHEVERRIA; AMORIM, 2020, p. 52). De maneira geral, os alunos e professores pensam em frações como parte-todo, sendo um dos motivos das dificuldades com os outros subconstructos.

iv. As concepções a respeito do conceito de número racional são, muitas vezes, parciais e limitadas, não sendo redirecionadas ao longo da escolarização.

5.5 FINALIZANDO

Para finalizar e responder nossa questão de pesquisa central *Quais concepções os alunos do ensino médio e ensino superior evocam em situações com números racionais (interpretadas como parte-todo, medida, quociente, operador e razão)?*, acreditamos que os *conceitos matemáticos* e as *concepções matemáticas* são elementos-chave para articular os objetivos da aprendizagem, de tal forma a caracterizar o conhecimento dos alunos acerca do conceito de

[118] Este item responde nosso objetivo específico: Quais subconstructos os alunos tem mais facilidade-dificuldade?

número racional ao longo da escola básica, organizar e dar sentido aos dados obtidos dos artigos analisados e fornecer componentes essenciais nas trajetórias de aprendizagem.

Assim, as concepções capturadas nos artigos que compõem esta Revisão Sistemática de Literatura promovem um panorama da estrutura cognitiva dos alunos do ensino médio e ensino superior, apontando para uma diversidade de ideias naturalizadas por eles, muitas vezes limitadas, de um conceito que é abordado durante toda a escolaridade: **número racional**.

Concordamos que este é um conceito complexo, tanto cognitivamente quanto epistemologicamente (AMAYA; BIANCHI; MONTORO, 2018). Entretanto, conhecer as concepções dos alunos acerca do conceito de número racional, com coerência ou não, é uma ação importante para o professor de Matemática, porque torna-se possível pensar em propostas e estratégias de ensino aprendizagem com a finalidade de redirecionar tais concepções.

No Quadro 28 apresentamos todas as concepções capturadas por meio desta Revisão Sistemática de Literatura:

Quadro 28 - Concepções dos alunos do ensino médio e ensino superior acerca do conceito de número racional.

Tema 1: Razão e Pensamento Proporcional	▪ Concepção aditiva; ▪ Concepção pré-proporcional;
Tema 2: Operações com números racionais	▪ Concepção procedimental; ▪ Concepção intuitiva das operações; ▪ Concepção não relacional das operações;
Tema 3: Representações dos Números Racionais	▪ Concepções restritas a um monoregistro; ▪ Concepção de que uma fração é sempre um número menor que um inteiro;
Tema 4: O conceito de número racional	Subtema 1: Números racionais como parte-todo ▪ Concepção de números racionais como sinônimo de parte-todo; ▪ Concepção de que os números racionais são sempre menores que um inteiro; ▪ Concepção de particionamentos desiguais; Subtema 2: Números racionais como quociente ▪ Concepção pró-decimal; ▪ Concepção de partilha impossível; Subtema 3: Números racionais como medidas ▪ Concepção de que uma fração é sempre um número menor que um inteiro; ▪ Concepção de que frações são dois números independentes; ▪ Concepção baseada no entendimento do símbolo: que o traço da fração equivale a vírgula do decimal; ▪ Concepção discretista; ▪ Concepção finitista; ▪ Concepção de mantissa; ▪ Concepção de arredondamento; Subtema 4: Números racionais como operadores ▪ Concepção de porcentagem como quantidade e não como operador; ▪ Concepção de dividir primeiro e depois multiplicar.

Fonte: Elaborado pela autora.

De maneira geral, as concepções têm *origem* no viés de número natural. De certa forma, isto é esperado, pois os alunos iniciam o estudo dos números pelos naturais e certas concepções não consistentes no início do estudo dos números racionais, parece ser algo natural. No entanto, compreendemos que essas concepções persistirem até a vida adulta não é algo esperado. Conjecturamos que o processo de ensino aprendizagem como está sendo desenvolvido não tem permitido a transição do conjunto dos números naturais para o conjunto dos números racionais.

Outra observação é o volume de concepções não consistentes, concentradas no subtema do subconstructo medida. Este também foi apontado pelas pesquisas como sendo o que os alunos possuem mais dificuldades.

Quanto às *origens* das concepções identificadas, temos que:

- O foco no subconstructo parte-todo pode produzir algumas concepções não consistentes elencadas no decorrer desta tese: números racionais como sinônimo de parte-todo; números racionais são sempre menores que um (parte-todo e medida).
- O viés de número natural pode originar algumas concepções não consistentes elencadas ao longo desta tese: aditiva (pensamento proporcional), frações como dois números independentes (medida); discretista (medida); finitista (medida); mantissa (medida).
- O foco nos procedimentos, algoritmos e regras, pode levar a concepções como a procedimental (pensamento proporcional e operações), intuitiva (operações) e não relacional (operações).
- A dificuldade com atividades de particionamento pode proporcionar duas concepções não consistentes: particionamentos desiguais (parte-todo) e partilha impossível (quociente).

Entendemos que a relação parte-todo está na origem do conceito de número racional e é uma precursora para todos os outros subconstructos. Todavia, acreditamos na importância de intervenções para que essas concepções sejam redirecionadas ao longo da escolarização. A principal sugestão abordada pelas pesquisas e pela BNCC é a exploração de TODOS os subconstructos ao longo da escolarização e a interrelação entre eles: “a criança deve ser exposta a uma diversidade de interpretações do que seja uma razão de inteiros” (MOREIRA; FERREIRA, 2008, p. 105). Concordamos com Santana, Oliveira e Barreto (2015) que, à medida que o indivíduo faz uma gradual diferenciação e progressiva integração dos subconstructos, ele avança na compreensão do número racional. Para que haja esta compreensão ampla e integrativa é necessário que o indivíduo tenha acesso às diversas representações e situações de números racionais (BEHR et al., 1983):

> o professor da escola básica tem que trabalhar com os significados concretos das frações e outros subconstructos para que o aluno alcance, eventualmente, a idéia abstrata de número racional, mas esse processo de construção da abstração não tem como resultado apenas a demonstração da possibilidade de se exibir formalmente um conjunto com as características *essenciais* (e já concebidas) dos racionais. Ao contrário, este conjunto numérico ampliado, visto em sua totalidade, como um objeto, assim como as relações entre seus elementos (os *novos* números), as *novas* formas de representação, a *nova* ordem, as *novas* operações e suas *novas* propriedades, tudo isso é conhecimento *novo* a ser processado e, eventualmente, assimilado. (MOREIRA, 2004, p. 96)

Portanto, é necessário entender que a compreensão do conceito de número racional e todas as relações presentes entres suas principais ideias compreende um longo processo de ensino aprendizagem. Isto porque os diferentes subconstructos, essenciais ao núcleo conceitual dos números racionais, requerem estruturas cognitivas específicas. Além disso, nem todos os subconstructos associados aos números racionais representam as mesmas dificuldades de compreensão pelos alunos.

Um dos resultados desta pesquisa é que um problema das dificuldades dos alunos na compreensão do conceito de número racional é que os futuros professores (e talvez pudéssemos concluir que muitos professores) ainda não tem uma compreensão completa do conceito.

Acreditamos que tal compreensão[119] inclui experiências com noções envolvidas em rede, ou seja, envolve uma compreensão: das múltiplas interpretações (subconstructos), das múltiplas ideias associadas (Apêndice A), das múltiplas representações, dos símbolos e da linguagem formal dos números racionais, das propriedades envolvidas e das operações utilizando diferentes modelos de representação.

Desdobramentos da Pesquisa

Com relação às lacunas identificadas neste estudo, descrevemos ao longo de cada um dos capítulos tópicos para cada tema. Nesta conclusão enfatizamos algumas lacunas que englobam o conceito de número racional como um todo:

i. Como o conceito de número racional se desenvolve com o avançar da escolarização? Pesquisas deste tipo - longitudinais - têm sido realizadas nos Estados Unidos, mas não encontramos aqui no Brasil.
ii. Como os subconstructos se relacionam ao longo da escolarização? Existe uma correlação entre os subconstructos? Por qual deles deve-se iniciar o processo de ensino aprendizagem e por quê?
iii. O que a noção de fração, de fato, facilita no trabalho com decimais?

[119] Por este motivo utilizamos o termo compreensão conceitual em nosso título.

iv. Que diferenças existem em iniciar o ensino de números racionais na forma decimal ou na forma fracionária?

Por fim, no Instituto em que eu trabalho, iremos dar início a um curso de especialização em ensino de Matemática para professores da região da Baixada Fluminense. Assim, uma aplicabilidade desta tese poderá ser a utilização das lacunas identificadas neste Estado da Arte como possibilidades de novas pesquisas para os pós-graduandos. Além disso, pretendemos utilizar as concepções levantadas aqui, que persistem com os alunos do ensino médio e superior, e propor cursos de formação continuada com esses tópicos.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ABRAHÃO, A. M. C. Frações e Decimais: compreender para ensinar números racionais. **Perspectivas da Educação Matemática**, v. 9, n. 21, p. 680–701, 2016.

AMAYA, M. P.; BIANCHI, V.; MONTORO, V. Estudiantes de escuela secundaria pensando los números racionales. **Revista de Educación Matemática**, v. 33, n. 3, p. 5–26, 2018.

AMUAH, E.; DAVIS, E. K.; FLETCHER, J. An Investigation of Junior High School students' ideology of fraction in the Cape Coast Metropolis of Ghana. **Journal of Science and Mathematics Education**, v. 6, n. 2, p. 1–19, 2017.

ASTUDILLO, J. T.; HUERTA, P. S.; LEO, M. DEL V. Caracterización del conocimiento especializado del profesor de matemática en el desarrollo del pensamiento proporcional: un estudio de casos de la subdimensión conocimiento de los temas. **Revista Chilena de Educación Matemática**, v. 11, n. 1, p. 116–119, 2018.

BARBOSA, C. B. et al. Jogo bombardeio Matemático: revisando operações básicas com números decimais. **Revista Educacional Interdisciplinar**, v. 7, n. 1, p. 1–12, 2018.

BEHR, M. et al. Rational number concepts. In: **Acquisition of Mathematics Concepts and Processes**. New York: Academic Press, 1983.

BEHR, M. J. et al. Rational number, ratio and proportion. In: GROUWS, D. A. (Ed.). **Handbook of research on mathematics teaching and learning: A project of the National Council of Teachers of Mathematics**. Macmillan Publishing Co, 1992.

BEHR, M. J.; POST, T. R. Teaching rational number and decimal concepts. In: POST, T. R. (Ed.). **Teaching mathematics in grades K-8: research-based methods**. 2. ed. Boston: Allyn and Bacon, 1992. p. 201–248.

BERTONI, N. E. **Pedagogia: Educação e Linguagem Matemática IV - Frações e Números Fracionários**. Brasília: Universidade de Brasília, 2009.

BRAGA, E. DOS S. DE O.; LIMA, V. DA S. O bingo das frações sob a ótica da resolução de problemas. **Revista Eletrônica Científica Ensino Interdisciplinar**, v. 6, n. 16, p. 244–256, 2020.

BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais** - Matemática. Brasília: MEC/SEF, 1997.

BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais: terceiro e quarto ciclos do ensino fundamental** - Matemática. Brasília: MEC/SEF, 1998.

BRASIL. **Relatório Matemática Saeb 2001**. Brasília, 2002.

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília: MEC/CONSED/UNDIME, 2017.

BROLEZI, A. C. **Frações e Decimais: História e significado**. CAEM/USP, 1996.

BROWN, G.; QUINN, R. J. Investigating the relationship between fraction proficiency and succes in algebra. **The Australian Mathematics Teacher**, v. 63, n. 4, p. 8–15, 2007.

BUFORN, Á.; FERNÁNDEZ, C. Conocimiento de Matemáticas especializado de los estudiantes para maestro de primaria en relación al razonamiento proporcional. **Bolema**, v. 28, n. 48, p. 21–41, abr. 2014.

CABELLO, A. G.; MERCADO, G. A. S. Acercamiento a la negatividad en números racionales por estudiantes de secundaria y profesores en formación. **Acta Latinoamericana de Matemática Educativa**, p. 261–267, 2015.

CAMACHO, A. M. R.; GUERRERO, L. S. Caracterización del conocimiento didáctico de la razón como un significado de la fracción. El caso de un profesor en formación inicial de primaria. **Acta Latinoamericana de Matemática Educativa**, p. 1218–1226, 2017.

CAMPOS, T. M. M.; RODRIGUÊS, W. R. A ideia de unidade na construção do conceito do número racional. **Revista Eletrônica de Educação Matemática**, v. 2, n. 4, p. 68–93, 2007.

CARAÇA, B. DE J. **Conceitos fundamentais da Matemática**. Lisboa: Tipografia Matemática, 1951.

CARPES, P. P. G.; BISOGNIN, E. Conhecimentos didático-Matemáticos para o ensino dos números racionais. **Educação Matemática sem fronteiras**, v. 1, n. 1, p. 23–39, 2019.

CARPES, P. P. G.; CARPES, C. Q. Criar e resolver problemas: habilidades para serem mobilizadas com licenciandos em Matemática. **Revista Eletrônica da Matemática**, v. 6, n. 2, p. 1–16, 2020.

CARVALHO, A. B. DE et al. Sobre dificuldades de ingressantes no ensino médio na compreensão de números racionais. **ForScience**, v. 9, n. 1, p. 1–12, 2021.

CHARALAMBOUS, C. Y. **Developing and testing a scale for measuring students' understanding of fractions**. (J. H. Woo et al., Eds.) Proceedings of the 31st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. **Anais**...Seoul: PME, 2007.

CHARALAMBOUS, C. Y.; PITTA-PANTAZI, D. **Revisiting a theoretical model on fractions: implications for teaching and research**. (H. L. Chick, J. L. Vincent, Eds.) Proceedings of the 29th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. **Anais**...Melbourne: PME, 2005.

CHARALAMBOUS, C. Y.; PITTA-PANTAZI, D. Drawing on a theoretical model to study students' understandings of fractions. **Educational Studies in Mathematics**, v. 64, n. 3, p. 293–316, 2007.

CLARKE, D. M.; ROCHE, A. Students' fraction comparison strategies as a window into robust unsderstanding and possible pointers for instruction. **Educational Studies in Mathematics**, v. 72, n. 1, p. 127–138, 2009.

CONFORTO, E. C.; AMARAL, D. C.; SILVA, S. L. DA. **Roteiro para revisão bibliográfica sistemática: aplicação no desenvolvimento de produtos e gerenciamento de projetos**. 8° Congresso Brasileiro de Gestão de Desenvolvimento de Produto. Anais...Porto Alegre: 2011.

CORDEIRO, A. M. et al. Revisão sistemática: uma revisão narrativa. **Revista do Colégio Brasileiro de Cirurgiões**, v. 34, n. 6, p. 428–431, 2007.

CRAMER, K.; POST, T. Connecting Research To Teaching Proportional Reasoning. **Mathematics Teacher**, v. 86, n. 5, p. 404–407, 1993.

CRAMER, K.; POST, T.; CURRIER, S. Learning and Teaching Ratio and Proportion: Research Implications. In: OWENS, D. (Ed.). **Research Ideas For the Classroom**. Nova York: Macmillan Publishing Company, 1993. p. 159–178.

CRESWELL, J. W. **Projeto de Pesquisa: Métodos Qualitativo, Quantitativo e Misto**. Porto Alegre: Artmed, 2010.

DAMICO, A. **Uma investigação sobre a formação inicial de professores de Matemática para o ensino de números racionais no ensino fundamental**. Tese (Doutorado em Educação Matemática). São Paulo: PUC, 2007.

DESSBESEL, R. DA S.; SILVA, S. DE C. R. DA; SHIMAZAKI, E. M. O processo de ensino e aprendizagem de Matemática para alunos surdos: uma revisão sistemática. **Ciência & Educação**, v. 24, n. 2, p. 481–500, 2018.

DHLAMINI, Z. B.; KIBIRIGE, I. Grade 9 learners' errors and misconceptions in addition of fractions. **Mediterranean Journal of Social Sciences**, v. 5, n. 8, p. 236–244, 2014.

DODERA, G. M. et al. Errores, actitud y desempeño matemático del ingresante universitario. **Revista Iberoamericana de Educación Matemática**, n. 38, p. 69–84, 2014.

DONATO, H.; DONATO, M. Etapas na condução de uma revisão sistemática. **Revista Científica da Ordem dos Médicos**, v. 32, n. 3, p. 227–235, 2019.

DUVAL, R. Registros de representações semióticas e funcionamento cognitivo da compreensão em Matemática. In: MACHADO, S. D. A. (Ed.). **Aprendizagem em Matemática: Registros de representação semiótica**. 8. ed. Campinas: Papirus, 2008. p. 11–33.

DUVAL, R. Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento. **Revista eletrônica de Educação Matemática**, v. 7, n. 2, p. 266–297, 2012.

ETCHEVERRIA, T. C. et al. Reflexões acerca do desempenho e das dificuldades de estudantes da educação básica e superior nas operações com frações. **Revista sergipana de Matemática e Educação Matemática**, v. 4, n. 2, p. 71–88, 2019.

ETCHEVERRIA, T. C.; AMORIM, M. É. Conhecimentos de licenciandos em Matemática para o ensino de frações. **Jornal Internacional de Estudos em Educação Matemática**, v. 13, n. 1, p. 46–52, 22 jun. 2020.

FINK, A. **Conducting Research Literature Reviews**. 4. ed. Los Angeles: Sage, 2014.

FIORENTINI, D.; LORENZATO, S. **Investigação em educação matemática: percursos teóricos e metodológicos**. Campinas: Autores Associados, 2006.

FISCHBEIN, E. The interaction between the formal, the algorithmic, and the intuitive components in a mathematical activity. In: BIEHLER, R. et al. (Eds.). **Didactics of Mathematics as a Scientific Discipline**. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1994. p. 231–245.

FLÔRES, M. V.; FONSECA, J. A. DA; BISOGNIN, E. Processos do pensamento matemático avançado revelados nas resoluções de tarefas envolvendo números racionais. **Ensino da Matemática em Debate**, v. 7, n. 1, p. 217–238, 2020.

GALVÃO, C. M.; SAWADA, N. O.; TREVIZAN, M. A. Revisão Sistemática: recurso que proporciona a incorporação das evidências na prática da enfermagem. **Revista Latino-americana de enfermagem**, v. 12, n. 3, p. 549–556, 2004.

GALVÃO, M. C. B.; RICARTE, I. L. M. Revisão sistemática da literatura: conceituação, produção e publicação. **Logeion: Filosofia da Informação**, v. 6, n. 1, p. 57–73, 2020.

GALVÃO, T. F.; PEREIRA, M. G. Avaliação da qualidade da evidência de revisões sistemáticas. **Epidemiologia e Serviços de Saúde**, v. 24, n. 1, p. 173–175, 2015.

GARCÍA, I.; CABAÑAS-SÁNCHEZ, G. El concepto de fracción en situaciones de medición, división y la relación parte-todo con estudiantes de nivel medio superior. **Acta Latinoamericano de Matemática Educativa**, v. 26, p. 213–221, 2013.

GARCÍA, Y. J. R. Diversas interpretaciones de las fracciones. **Acta Latinoamericana de Matemática Educativa**, v. 32, n. 1, p. 141–150, 2019.

GODOY, J. P.; BARRETO, M. DE F. T. O Número Racional nas Questões do Exame Nacional do Ensino Médio: um convite à exploração dos subconstrutos na escola. **Revista do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da Universidade Federal do Mato Grosso do Sul**, v. 9, n. 19, p. 98–123, 2016.

GONZÁLEZ, M. J. A. et al. Ciclos de entendimiento de estudiantes universitarios al resolver una actividad de proporcionalidad. **CPU-e, Revista de Investigación Educativa**, n. 29, p. 58–86, 2019.

HADDAD, S. et al. **O Estado da Arte das pesquisas em Educação de Jovens e Adultos no Brasil**. São Paulo: Ação Educativa, 2000.

JUSTULIN, A. M. Um estudo sobre as relações entre atitudes, gênero, série e desempenho em exercícios e problemas envolvendo frações. **Revista Eletrônica de Educação Matemática**, v. 11, n. 2, p. 343–362, 2016.

KERSLAKE, D. **Fractions: children's strategies and errors. A report of the strategies and errors in secondary mathematics project**. Darville House, 2 Oxford Road East, Windsor, Berkshire, England: Nfer-Nelson Publishing Company, 1986.

KHAN, K. S. et al. Five steps to conducting a systematic review. **Journal of the royal society of medicine**, v. 96, p. 118–121, 2003.

KIEREN, T. E. On the Mathematical, cognitive and instructional foundations. In: LESH, R. A.; BRADBARD, D. A. (Eds.). **Number and Measurement**. Columbus: ERIC/SMEAC, 1976.

KIEREN, T. E. The rational number construct - its elements and mechanisms. In: **Recent Research on Number Learning**. Columbus, Ohio: National Institute of Education, 1980. p. 125–150.

KLOOSTERMAN, P. Mathematics skills of 17-year-olds in the United States: 1978 to 2004. **Journal for Research in Mathematics Education**, v. 41, n. 1, p. 20–51, 2010.

KONIC, P. El conflicto semiotico como recurso para la formación del profesor. **Contextos de Educación**, n. 26, p. 83–96, 2019.

LAMON, S. J. **Teaching fractions and ratios for understanding: essential content knowledge and instructional strategies for teachers**. New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates, 2008.

LESH, R.; POST, T.; BEHR, M. Proportional Reasoning. In: HIEBERT, J.; BEHR, M. (Eds.). **Number Concepts and Operations in the Middle Grades**. Reston: Lawrence Erlbaum & National Council of Teachers of Mathematics, 1988. p. 93–118.

LLINARES, S.; SANCHEZ, V. **Fracciones**. Lawrence Erlbaum, 1998.

LÜDKE, M.; ANDRÉ, M. E. D. A. **Pesquisa em Educação: abordagens qualitativas**. São Paulo: EPU, 1986.

MAMEDE, E. **Exploring young children's reasoning and naming of fractions**. (G. Adams, Ed.) Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics. **Anais**...2015.

MARTINIE, S. L. **Middle school rational number knowledge**. Tese (Doutorado em Filosofia). Manhattan: Kansas State University, 2007.

MCMULLEN, J.; VAN HOOF, J. The role of rational number density knowledge in mathematical development. **Learning and Instruction**, v. 65, p. 1–9, 2020.

MEDINA, J. A. T. Fracción, razón y número racional en procesos de aproximación para la introducción del cálculo con estudiantes de grado once. **Revista Científica**, v. Edição especial, p. 586–5, 2013.

MELO, M. V. **Três décadas de pesquisa em Educação Matemática na Unicamp: um estudo histórico a partir de teses e dissertações**. Dissertação (Mestrado em Educação). Campinas: Unicamp, 2006.

MENDES, L. O. R.; PEREIRA, A. L. Revisão sistemática na área de ensino e educação Matemática: análise do processo e proposição de etapas. **Educação Matemática Pesquisa**, v. 22, n. 3, p. 196–228, 2020.

MENDUNI-BORTOLOTI, R. D.; BARBOSA, J. C. A construção de uma Matemática para o ensino do conceito de proporcionalidade direta a partir de uma revisão sistemática de literatura. **Bolema**, v. 31, n. 59, p. 947–967, 2017.

MENEGAZZI, M. O estudo de frações: uma experiência no curso de pedagogia. **Revista Eletrônica de Educação Matemática**, v. 8, n. 1, p. 248–265, 2013.

MENEGAZZI, M.; DALCIN, A. Potencialidades e limitações de um trabalho colaborativo sobre frações com estudantes de Pedagogia. **Perspectiva**, v. 34, n. 2, p. 486–509, 2016.

MERCADO, G. A. S.; CABELLO, A. G.; MARTÍNEZ, E. I. E. Números racionales negativos. Interpretaciones formuladas por docentes en formación. **Acta Latinoamericana de Matemática Educativa**, p. 1039–1045, 2016.

MOREIRA, P. C.; FERREIRA, M. C. C. A Teoria dos Subconstrutos e o Número Racional como Operador: das estruturas algébricas às cognitivas. **Bolema**, v. 21, p. 103–127, 2008.

MOURA, G. R. S.; MATTOS, A. C. DE. Conhecimento Matemático dos estudantes dos ensinos fundamental e médio: análise do contexto de ensino e aprendizagem em frações, decimais e porcentagem. **Educere - Revista da Educação**, v. 14, n. 2, p. 167–200, 2014.

MULLER, E. W. et al. Dominio y concepciones sobre las fracciones de estudiantes para maestro de Educación Primaria: Un estudio comparativo entre España y Nicaragua. **Revista Electrónica de Conocimientos, Saberes y Prácticas**, v. 3, n. 1, p. 28–48, 30 jun. 2020.

NACARATO, A. M. Números racionais: aspectos conceituais, o papel da linguagem e dos materiais manipulativos. **Horizontes**, n. 1, p. 53–64, 2004.

NARDONI, M.; CAMARA, V.; POCHULU, M. Evaluando la comprensión de los números racionales en estudiantes que culminan la escuela secundaria. **Yupana**, v. 14, n. 8, p. 67–81, 2015.

NUNES, T.; BRYANT, P. **Crianças fazendo Matemática**. Porto Alegre: Artes Médicas, 1997.

OKOLI, C. Guia Para Realizar uma Revisão Sistemática de Literatura. **EaD em Foco**, v. 9, n. 1, p. 1–40, 3 abr. 2019.

OLIVEIRA, J. N. DE; ARAMAN, E. M. DE O. Dificuldades na aprendizagem dos números racionais manifestadas por estudantes em dois níveis de escolaridade. **Revista Paranaense de Educação Matemática**, v. 6, n. 10, p. 175–203, 2017.

OLIVEIRA, L. D. et al. Conhecimentos de Matemática básica de graduandos nos anos iniciais de Engenharia: desafios, fragilidades e enfrentamentos possíveis. **Boletim online de Educação Matemática**, v. 8, n. 16, p. 134–152, 17 dez. 2020.

PARAOL, C. M.; RODRIGUÊS, J. S. Os registros de representação semiótica de frações em atividades envolvendo tratamento e conversão. **Remat**, v. 4, n. 2, p. 21–37, 2018.

PARRA-ZAPATA, M. M. et al. Movilización de Prácticas Matemáticas de estudiantes de educación media, a partir de un ambiente de aprendizajecon números racionales. **Revista Ciencias y Humanidades**, v. 12, n. 12, p. 202–225, 2021.

PATINO, C. M.; FERREIRA, J. C. Critérios de inclusão e exclusão em estudos de pesquisa: definições e porque eles importam. **Jornal Brasileiro de Pneumologia**, v. 44, n. 2, p. 84–84, 1 mar. 2018.

PÉREZ, M. E. N. Uso de un Web Quest en la nivelación de conocimientos sobre conocimientos matemáticos básicos de fracciones en prepara-toria. **Revista Digital Sociedad de la Información**, v. 33, p. 1–12, 2012.

POST, T.; BEHR, M.; LESH, R. **Proportionality and the development of pre-algebra understandings**. (A. Coxford, A. Shulte, Eds.) The Idea of Algebra K-12: Yearbook National Council of Teachers of Mathematics. Anais...Reston: NCTM, 1988.

PROENÇA, M. C. DE. O ensino de frações via resolução de problemas na formação de futuras professoras de pedagogia. **Bolema**, v. 29, n. 52, p. 729–755, 1 ago. 2015.

RADFORD, L. Methodological Aspects of the Theory of Objectification. **Revista do Programa de Pós-Graduação em Educação matemática da Universidade Federal de mato Grosso do Sul**, v. 8, n. Temático, 2015.

RETANA, J. F. G.; MUÑOZ, D. E. Conocimiento común del contenido del estudiante para profesor sobre fracciones y decimales. **Educacion Matematica**, v. 30, n. 2, p. 106–139, 1 ago. 2018.

REYES, J. J.; PRIETO, J. L. Interpretaciones de la fracción en una experiencia de simulación con Geogebra. **Educación y Humanismo**, v. 18, n. 30, p. 42–56, 2015.

RIQUELME, P. D.; VERGARA, N. R. Proupesta metodológica para enseñar el concepto de razón de manera gradual. **Acta Latinoamericana de Matemática Educativa**, v. 32, n. 1, p. 336–343, 2019.

ROMANATTO, M. C. **Número Racional: Relações necessárias à sua compreensão**. Tese. Campinas: Unicamp, 1997.

SALAZAR, O. C. et al. Secuencia didáctica para el autoaprendizaje de la simplificación de fracciones con uso de tecnología en estudiantes universitarios. **Revista Iberoamericana de Educación Matemática**, n. 45, p. 162–183, 2016.

SAMPAIO, R. F.; MANCINI, M. C. Estudos de revisão sistemática: um guia para síntese criteriosa da evidência científica. **Revista brasileira de fisioterapia**, v. 11, n. 1, p. 83–89, 2007.

SANCHEZ-LUJÁN, B.; MORENO, R. A. Competencias Matemáticas en fracciones en alumnos de nuevo ingreso a nivel universitario. **In Crescendo**, v. 9, n. 3, 2018.

SANTANA, L. E. DE L.; OLIVEIRA, B. P. DE; BARRETO, M. C. Reflexões sobre o uso de registros de representação semiótica no ensino de frações. **Revista Eletrônica Formação**, v. 4, n. 5, p. 1–22, 2015.

SEEGMILLER, R. W. **Rational Number Fluency: A Prerequisite for Success in High Rational Number Fluency**. Tese. Missoula: Universidade de Montana, 2009.

SIEGLER, R. S. et al. Early Predictors of High School Mathematics Achievement. **Psychological Science**, v. 23, n. 7, p. 691–697, 2012.

SILVA, A. DA F. G.; CÂNDIDO, A. S.; SOUZA, V. H. G. Raciocínio proporcional: um estudo sobre as estratégias de estudantes de Pedagogia ao resolverem diferentes situações. **Acta Scientiae**, v. 20, n. 1, p. 20–35, 2018.

SILVA, A. F. G.; CARVALHO, V. C. DE; CAMPOS, T. M. M. Divisão entre frações: resolução e discussão de tarefas e de caso de ensino em um curso de licenciatura em Matemática. **Revemat**, v. 13, n. 1, p. 202–218, 2018.

SILVA, C. B. DA; CAZORLA, I. M.; KATAOKA, V. Y. Trajetória e perspectivas da Educação Estatística no Brasil, 2010-2014: um olhar a partir do GT-12. **Educação Matemática Pesquisa**, v. 17, n. 3, p. 578–596, 2015.

SILVA, F. G. S. DA. **Ensino de Estatística na Educação Básica em países da América Latina: uma revisão sistemática**. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática). Rio de Janeiro: UFRJ, 2020.

SILVA, J. V. G. DA; DIAS, M. A. Relações pessoais de estudantes de São Paulo dos ensinos fundamental, médio e superior sobre as representações dos números racionais. **Acta Latinoamericana de Matemática Educativa**, p. 119–127, 2015.

SIMON, M. A. Explicating mathematical concept and mathematicalconception as theoretical constructs for mathematics education research. **Educational Studies in Mathematics**, v. 94, n. 2, p. 117–137, 1 fev. 2017.

SMITH, J. P. Competent Reasoning With Rational Numbers. **Cognition and Instruction**, v. 13, n. 1, p. 3–50, 1 mar. 1995.

SOTO, G. V. Desarrolo de la competencia Matemática de futuros docentes de educacion primaria. **Acta Latinoamericana de Matemática Educativa**, 2017.

STELZER, F. et al. Relaciones entre el conocimiento conceptual y el procedimental en el aprendizaje de las fracciones. **Cuadernos de Investigación Educativa**, v. 7, n. 1, p. 13–27, 5 jul. 2016.

STELZER, F. et al. El conocimiento de las fracciones. Una revisión de su relación con factores cognitivos. **Interdisciplinaria**, v. 36, n. 2, p. 185–201, 2019.

TIAN, J.; SIEGLER, R. S. Fractions Learning in Children With Mathematics Difficulties. **Journal of Learning Disabilities**, v. 50, n. 6, p. 614–620, 1 nov. 2016.

TIROSH, D. Enhancing Prospective Teachers' Knowledge of Children's Conceptions: The Case of Division of FractionsJournal for Research in Mathematics Education. **Journal for research in Mathemarics Education**, v. 31, n. 1, p. 5-25, 2000.

TREVISAN, A. L.; DOMINGUES, N. D. Dificuldades no raciocínio proporcional evidenciadas por meio de uma prova em fases. **Revista Primus Vitam**, n. 9, p. 1–9, 2017.

VAN HOOF, J. et al. In search for the natural number bias in secondary school students' interpretation of the effect of arithmetical operations. **Learning and Instruction**, v. 37, p. 30–38, 1 jun. 2014.

VECINO, S. et al. Problemas con porcentajes... ? O porcentajes con problemas? **Acta Latinoamericana de Matemática Educativa**, p. 377–385, 2015.

VENTURA, H. M. G. L. **A aprendizagem dos números racionais através das conexões entre as suas representações: uma experiência de ensino no 2° ciclo do ensino básico**. Tese. Lisboa: Universidade de Lisboa, 2013.

VICTOR, L. Systematic reviewing. **Social Research Update**, v. 54, n. 1, 2008.

VIZCARRA, R. E.; SALLÁN, J. M. G. Modelos de medida para la enseñanza del número racional en Educación Primaria. **Unión Revista Iberoamericana de Educación Matemática**, v. 1, p. 17–35, 2005.

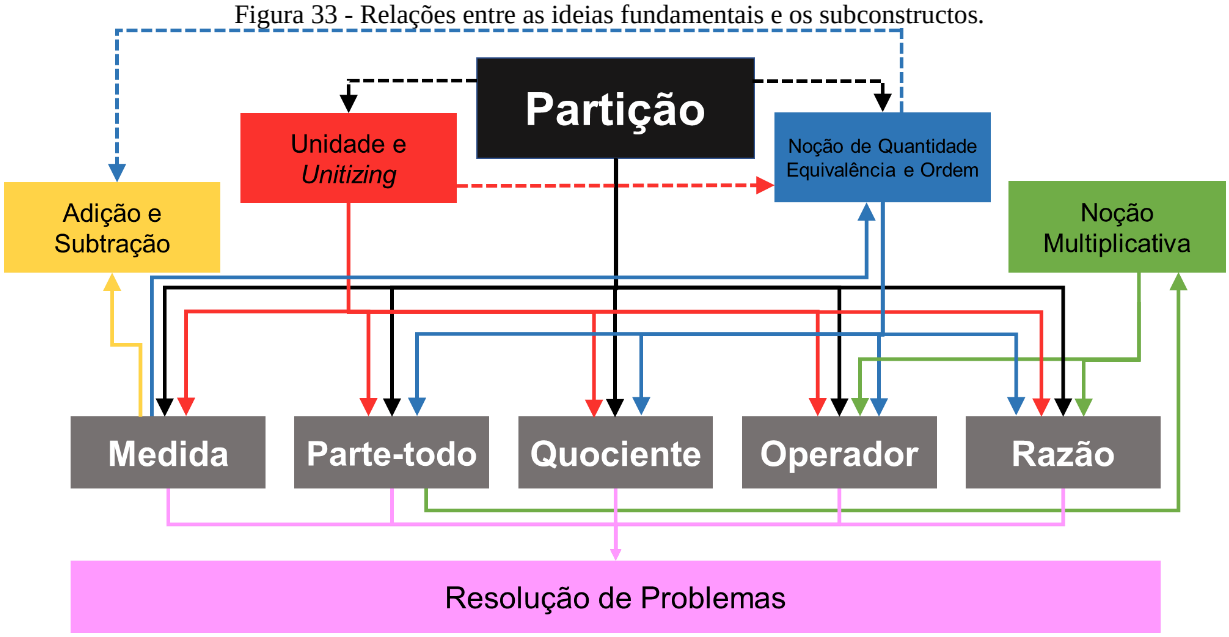
VIZOLLI, I. **Registros de alunos e professores de Educação de jovens e adultos na solução de problemas de proporção e porcentagem**. Tese—Curitiba: Universidade Federal do Paraná, 2006.

WHEELDON, D. **Developing Mathematical Practices In A Social Context: an instructional sequence to support prospective elementary teachers'**. Orlando: University of Central Florida, 2008.

APÊNDICES

APÊNDICE A - ESQUEMA COM OS SUBCONSTRUCTOS E AS IDEIAS FUNDAMENTAIS

Figura 33 - Relações entre as ideias fundamentais e os subconstructos.



Fonte: Elaborada pela autora adaptado de Ventura (2013, p. 41).

A partição é a base para todos os subconstructos (BEHR et al., 1983) - **(linhas pretas)** e fundamental para que as ideias de unitizing e equivalência/ordem sejam desenvolvidas **(linhas pretas tracejadas)**. A noção de *unitizing* é primordial para a compreensão de todos os subconstructos **(linhas vermelhas)** e para a ideia de equivalência **(linhas vermelhas tracejadas)**. A noção de quantidade e equivalência e ordem são fundamentais para a compreensão de quatro subconstructos (parte-todo, quociente, operador e razão) – **(linhas azuis)**, além de ser fundamental para adicionar e subtrair frações **(linha azul tracejada)**. Por outro lado, o subconstructo medida tem sua importância para as noções de quantidade e equivalência e ordem **(linha azul)** e tem potencialidades para a adição e subtração de frações **(linha laranja)**. Já a noção multiplicativa tem grande influência para os subconstructos de operador e razão **(linhas verdes)**.

Finalmente, o modelo apresentado na Figura 33, revela que a compreensão de todos os subconstructos é a base para que o aluno consiga resolver problemas que envolvam números racionais **(setas cor de rosa)** – (BEHR et al., 1983).

APÊNDICE B - CARACTERÍSTICAS DOS ARTIGOS SELECIONADOS

Quadro 29 - Características dos artigos selecionados.

Título, Autor e Ano	Revista	Conteúdo	Nível de ensino
Frações e Decimais: compreender para ensinar números racionais (ABRAHÃO, 2016)	Perspectivas da Educação Matemática	representações e operações com números decimais e frações	ES (Pedagogia)
Estudiantes de escuela secundaria pensando los números racionales (AMAYA; BIANCHI; MONTORO, 2018)	Revista de Educación Matemática	densidade e ordem dos números racionais	EF EM
Caracterización del conocimiento especializado del profesor de Matemática em el desarrollo del pensamiento proporcional: um estudio de casos de la subdimensión conocimiento de los temas (ASTUDILLO; HUERTA; LEO, 2018)	Revista Chilena de Educación Matemática	pensamento proporcional	ES (Pedagogia)
Jogo bombardeio matemático: revisando operações básicas com números decimais (BARBOSA et al., 2018)	Redin (Revista Educacional Interdisciplinar)	operações básicas com decimais	EM
O bingo das frações sob a ótica da resolução de problemas (BRAGA; LIMA, 2020)	Revista Eletrônica Científica Ensino Interdisciplinar	frações (representações e operações)	EM
Conocimiento de Matemáticas especializado de los estudiantes para maestro de primaria en relación al razonamiento proporcional (BUFORN; FERNÁNDEZ, 2014)	Bolema (Boletim de Educação Matemática)	raciocínio proporcional	ES (Pedagogia)
Acercamiento a la negatividad en números racionales por estudiantes de secundaria y profesores en formación (CABELLO; MERCADO, 2015)	Acta Latinoamericana de Matemática Educativa	frações, decimais e negativos	EF ES (Pedagogia)
Caracterización del conocimiento didáctico de la razón como un significado de la fracción. El caso de un profesor en formación inicial de primaria (CAMACHO; GUERRERO, 2017)	Acta Latinoamericana de Matemática Educativa	razão	ES (Pedagogia)
Conhecimentos didático-matemáticos para o ensino dos números racionais (CARPES; BISOGNIN, 2019)	Educação Matemática Sem Fronteiras	conceito de número racional	ES (Lic. em Matemática)
Criar e resolver problemas: habilidades para serem mobilizadas com licenciandos em Matemática (CARPES; CARPES, 2020)	Remat (Revista Eletrônica da Matemática)	números racionais	ES (Lic. em Matemática)
Sobre dificuldades de ingressantes no ensino médio na compreensão de números racionais (CARVALHO et al., 2021)	ForScience	números racionais	EM
Conhecimentos de Licenciandos em Matemática para o Ensino de Frações (ETCHEVERRIA; AMORIM, 2020)	Jornal Internacional de Estudos em Educação Matemática	subconstructo quociente e medida	EF ES (Lic. em Matemática)
Reflexões acerca do desempenho e das dificuldades de estudantes da educação	Revista Sergipana de Matemática e	operações com frações	EF

básica e superior nas operações com frações (ETCHEVERRIA et al., 2019)	Educação Matemática		EM ES (Lic. em Matemática)
Processos do pensamento matemático avançado revelados nas resoluções de tarefas envolvendo números racionais (FLÔRES; FONSECA; BISOGNIN, 2020)	Ensino da Matemática em Debate	representação decimal finita de números racionais	ES (Lic. em Matemática)
Diversas interpretaciones de las fracciones (GARCÍA, 2019)	Acta Latinoamericana de Matemática Educativa	interpretação de frações	ES (professores em formação)
El concepto de fracción en situaciones de medición, división y la relación parte-todo con estudiantes de nivel medio superior (GARCÍA; CABAÑAS-SÁNCHEZ, 2013)	Acta Latinoamericana de Matemática Educativa	conceito de fração (medida, divisão e parte-todo)	EM
O Número Racional nas Questões do Exame Nacional do Ensino Médio: um convite à exploração dos subconstructos na escola (GODOY; BARRETO, 2016)	Perspectivas da Educação Matemática	subconstructos	Curso preparatório para o ENEM
Ciclos de entendimiento de estudiantes universitarios al resolver una actividad de proporcionalidad (GONZÁLEZ et al., 2019)	CPU-e. Revista de Investigación Educativa	proporcionalidade	ES (Medicina)
Um estudo sobre as relações entre atitudes, gênero, série e desempenho em exercícios e problemas envolvendo frações (JUSTULIN, 2016)	Revista Eletrônica de Educação Matemática	frações	EM
El conflicto semiotico como recurso para la formación del professor (KONIC, 2019)	Contextos de Educación	números decimais	ES (Pedagogia)
Fracción, razón y número racional en procesos de aproximación para la introducción del cálculo con estudiantes de grado once (MEDINA, 2013)	Revista Científica	fração, razão e número racional	EM
O estudo de frações: uma experiência no curso de pedagogia (MENEGAZZI, 2013)	Revista Eletrônica de Educação Matemática	frações	ES (Pedagogia)
Potencialidades e limitações de um trabalho colaborativo sobre frações com estudantes de Pedagogia (MENEGAZZI; DALCIN, 2016)	Perspectiva	frações (subconstructos)	ES (Pedagogia)
Números racionales negativos. Interpretaciones formuladas por docentes en formación (MERCADO; CABELLO; MARTÍNEZ, 2016)	Acta Latinoamericana de Matemática Educativa	números racionais negativos	Escola normal (7° semestre)
Conhecimento matemático dos estudantes dos ensinos fundamental e médio: análise do contexto de ensino e aprendizagem em frações, decimais e porcentagem (MOURA; MATTOS, 2014)	Educere	frações, decimais e porcentagem	EF EM
Dominio y concepciones sobre las fracciones de estudiantes para maestro de Educación Primaria: Un estudio comparativo entre España y Nicaragua (MULLER et al., 2020)	Revista Electrónica de Conocimientos, Saberes y Prácticas	fração	ES (Pedagogia)

Evaluando la comprensión de los números racionales en estudiantes que culminan la escuela secundaria (NARDONI; CAMARA; POCHULU, 2015)	Yupana. Revista de Educación Matemática de la UNL	números racionais	ES
Dificuldades na aprendizagem dos números racionais manifestadas por estudantes em dois níveis de escolaridade (OLIVEIRA; ARAMAN, 2017)	Revista Paranaense de Educação Matemática	números racionais	EF EM
Conhecimentos de Matemática básica de graduandos nos anos iniciais de Engenharia: desafios, fragilidades e enfrentamentos possíveis (OLIVEIRA et al., 2020)	Boletim online de Educação Matemática	frações (parte-todo e operações)	ES (Engenharia)
Os registros de representação semiótica de frações em atividades envolvendo tratamento e conversão (PARAOL; RODRIGUÊS, 2018)	Remat: Revista Eletrônica da Matemática	registros de representação semiótica de frações	EF EM ES (Lic. em Física)
Movilización de Prácticas Matemáticas de estudiantes de educación media, a partir de un ambiente de aprendizaje con números racionales (PARRA-ZAPATA et al., 2021)	Revista Ciencias y Humanidades	números racionais	EM ES (Lic. em Matemática Física)
Uso de un Web Quest en la nivelación de conocimientos sobre conocimientos matemáticos básicos de fracciones en prepara-toria (PÉREZ, 2012)	Revista Digital Sociedad de la Información	operações com frações	EM
O ensino de frações via resolução de problemas na formação de futuras professoras de pedagogia (PROENÇA, 2015)	Bolema: Boletim de Educação Matemática	frações e seu ensino	ES (Pedagogia)
Conocimiento común del contenido del estudiante para profesor sobre fracciones y decimales (RETANA; MUÑOZ, 2018)	Educación Matemática	conhecimento comum de conteúdo sobre frações e decimais	ES (Pedagogia)
Interpretaciones de la fracción en una experiencia de simulación con GeoGebra (REYES; PRIETO, 2015)	Revista Educación y Humanismo	parte-todo, operador e quociente	EM
Propuesta metodológica para enseñar el concepto de razón de manera gradual (RIQUELME; VERGARA, 2019)	Acta Latinoamericana de Matemática Educativa	razão e raciocínio proporcional	ES (Pedagogia)
Secuencia didáctica para el autoaprendizaje de la simplificación de fracciones con uso de tecnología en estudiantes universitários (SALAZAR et al., 2016)	UNIÓN. Revista Iberoamericana de Educación Matemática	simplificação de frações, equivalência	ES (Engenharia)
Competencias Matemáticas en fracciones en alumnos de nuevo ingreso a nivel universitário (SANCHEZ-LUJÁN; MORENO, 2018)	In Crescendo	operações com frações	ES (Contabilidade)
Reflexões sobre o uso de registros de representação semiótica no ensino de frações (SANTANA; OLIVEIRA; BARRETO, 2015)	Revista Eletrônica Formação	representação semiótica de frações	ES (Pedagogia)
Raciocínio Proporcional: um estudo sobre as estratégias de estudantes de pedagogia ao	Acta Scientiae	raciocínio proporcional	ES (Pedagogia)

resolverem diferentes situações (SILVA; CÂNDIDO; SOUZA, 2018)			
Divisão entre frações: resolução e discussão de tarefas e de caso de ensino em um curso de Licenciatura em Matemática (SILVA; CARVALHO; CAMPOS, 2018)	Revista Eletrônica de Educação Matemática	divisão de frações	ES (Lic. em Matemática)
Relações pessoais de estudantes de São Paulo dos ensinos fundamental, médio e superior sobre as representações dos números racionais (SILVA; DIAS, 2015)	Acta Latinoamericana de Matemática Educativa	representação dos números racionais	EF EM ES (Logística)
Desarrollo de la competencia Matemática de futuros docentes de educación primaria (SOTO, 2017)	Acta Latinoamericana de Matemática Educativa	proporcionalidade e razão	ES (Pedagogia)
Dificuldades no raciocínio proporcional evidenciadas por meio de uma prova em fases (TREVISAN; DOMINGUES, 2017)	Revista Primus Vitam	raciocínio proporcional	EM
Problemas con porcentajes...¿ o porcentajes con problemas? (VECINO et al., 2015)	Acta Latinoamericana de Matemática Educativa	porcentagem	EM ES (Lic. em Matemática)

Fonte: Elaborado pela autora.

APÊNDICE C - CARACTERÍSTICAS DAS REVISTAS DE PUBLICAÇÃO DOS ARTIGOS

Tabela 11 - Distribuição de frequências conforme revistas de publicação dos artigos.

Revista	País da revista	Qualis	Frequência absoluta	Frequência relativa (%)
Acta Latinoamericana de Matemática Educativa	México	B2	9	20
Revista Eletrônica de Educação Matemática	Brasil/SC	A2	3	7
Bolema: Boletim de Educação Matemática	Brasil / SP	A1	2	4
Perspectivas da Educação Matemática	Brasil/MS	B1	2	4
Remat: Revista Eletrônica da Matemática	Brasil/RS	B3	2	4
Acta Scientiae	Brasil / RS	A2	1	2
Boletim online de Educação Matemática	Brasil / SC	B1	1	2
Contextos de Educación	Argentina	N	1	2
CPU-e. Revista de Investigación Educativa	México	N	1	2
Educação Matemática Sem Fronteiras	Brasil/SC	N	1	2
Educación Matemática	México	N	1	2
Educere	Brasil/PR	B1	1	2
Ensino da Matemática em Debate	Brasil/SP	B4	1	2
ForScience, v. 9, n. 1	Brasil/MG	B4 (Interdisci-plinar)	1	2
In Crescendo	Peru	N	1	2
Jornal Internacional de Estudos em Educação Matemática	Brasil	A2	1	2
Perspectiva	Brasil/SC	B1	1	2
Redin-Revista Educacional Interdisciplinar	Brasil/RS	B2	1	2
Revista Chilena de Educación Matemática	Chile	N	1	2
Revista Ciencias y Humanidades	Colômbia	N	1	2
Revista Científica	Colômbia	N	1	2
Revista de Educación Matemática	México	B1 (Educação)	1	2
Revista Digital Sociedad de la Información	México	N	1	2
Revista Educación y Humanismo	Colômbia	C (Educação)	1	2
Revista Electrónica de Conocimientos, Saberes y Prácticas	Nicarágua	N	1	2

Revista Eletrônica Científica Ensino Interdisciplinar	Brasil / RN	B1	1	2
Revista eletrônica formação	Brasil / PE	N	1	2
Revista Paranaense de Educação Matemática	Brasil / PR	B1	1	2
Revista Primus Vitam	Brasil	B5 (Interdisci-plinar)	1	2
Revista Sergipana de Matemática e Educação Matemática	Brasil / SE	B2	1	2
UNIÓN. Revista Iberoamericana de Educación Matemática	Argentina	B1	1	2
Yupana. Revista de Educación Matemática de la UNL	Argentina	N	1	2

Fonte: Elaborada pela autora.

APÊNDICE D - PALAVRAS-CHAVE

Quadro 30 - Frequência das palavras-chave.

Palavra	Freq.
fração	21
números racionais	8
educação Matemática	7
número racional	5
formação de professores	5
resolução de problemas	3
raciocínio proporcional	3
proporcionalidade	3
Matemática	3
ensino de Matemática	3
decimal	3
representação semiótica	2
razão	2
porcentagem	2
nível universitário	2
negativo	2
jogo	2
interpretação	2
formação docente	2
formação de docentes	2
estratégia	2
ensino médio	2
conhecimento profissional docente	2
conhecimento especializado do professor de Matemática	2
concepção	2
campos conceituais multiplicativos	2
análise de erros	2
atividade provocadora de modelos	2
webquest	1
trigonometria	1
transposição didática	1
teorema em ação	1
tecnologias digitais	1
tecnologia	1
subconstrutos do número racional	1
solução de problemas	1
situações didáticas	1
simulador	1
simplificação	1
simbólico fracionário	1
significado	1
sequências didáticas	1
sentido estrutural	1
semiótica	1
representação decimal	1
relações pessoais	1
relação parte	1
recurso	1
práticas profissionais	1
práticas Matemáticas	1
provas em fases	1
professores dos anos iniciais	1
professor	1
processos de aproximação	1
primário	1
preparatória aberta	1
pensamento proporcional	1
pensamento matemático avançado	1
pedagogia	1
oportunidades formativas	1
operações com números decimais	1
operações com frações	1
operacionalidade	1
números racionais na representação fracionária	1
números decimais	1
número	1
nível superior	1
notação	1
métodos de aprendizagem	1
medição	1
Matemáticas escolares	1
interpretações da fração	1
interação	1
instrumentos e procedimentos	1
igualdades notáveis	1
habilidades do professor	1
habilidade	1
geogebra	1
formação Matemática do professor	1
formação inicial do professor	1
formação inicial de professores	1
formação inicial	1

formação dos profissionais da educação	1
formação de professores dos anos iniciais	1
geométrico bidimensional	1
expressões decimais de um número	1
expressões algébricas	1
experimentos de desenho	1
exame nacional do ensino médio	1
estudantes para professor de primária	1
estudantes de pedagogia	1
estudante de secundaria	1
estudante	1
estruturas numéricas	1
estruturas multiplicativas	1
estrutura multiplicativa	1
estrutura algébrica corpo	1
estratégias de resolução	1
estratégias de ensino	1
escolas primárias e secundárias	1
erros matemáticos	1
erro	1
ensino e aprendizagem	1
engenharia	1
enfoque ontosemiótico	1
enfoque de grupo	1
educação superior	1
educação primária	1
educação básica e superior	1
divisão entre frações	1
divisão	1
dimensão epistêmica	1
dificuldades de aprendizagem	1

dificuldade	1
didático	1
desempenho e dificuldades	1
desempenho acadêmico	1
desempenho	1
criação e resolução de problemas	1
criação de problemas por variação e por elaboração	1
conversão	1
conhecimento matemático para o ensino	1
conhecimento dos temas	1
conhecimento do professor	1
conhecimento de Matemáticas para o ensino	1
conhecimento de Matemáticas especializado	1
conflitos semióticos	1
compreensão em Matemática	1
competências Matemáticas	1
competência Matemática	1
Chile	1
autoaprendizagem	1
atividade Matemática	1
atividade de ensino	1
atitude afetiva	1
atitude	1
aprendizagem virtual	1
aprendizagem online	1
aprendizagem de Matemática	1
aprendizagem	1
análise multivariada	1
análise didática	1

Fonte: Elaborado pela autora.

Tabela 12 - Palavras-chave separadas por grupos.

Grupo	**Palavras-chave**	**Palavras-chave (n° absoluto)**	**Palavras-chave (%)**
Números racionais, frações e números decimais	número racional(4), números(1), números racionais(4), números racionales(3), números decimales(1), fração(3), fracción(5), fracciones(4), frações(6), decimais(3), expresiones decimales de um número(1), representação decimal(1)	36	22
Público-alvo	estudiantes(1), ensino médio(2), estudiante de secundaria(1), educação básica e superior(1), ensino superior(1), educación primaria(2), primaria(1), educación superior(1), estudantes	28	17

	de pedagogia(1), pedagogia(1), nível superior(1), nível universitário(2), engenharia(1), estudiantes para maestro de primaria(1), formação de profesores(3), formação de profesores dos anos iniciais(1), formação dos profissionais da educação(1), formação inicial(1), formação inicial do professor(1), formación de docentes(2), professores dos anos iniciais(1), maestros(1)		
Diversos	análisis multivariado(1), actividad provocadora de modelos(2), campos conceptuales multiplicativos(2), kot(1), didáctica(1), dimensão epistêmica(1), estructuras numéricas(1), estruturas multiplicativas(1), enem(1)	11	7
Ensino-aprendizagem	aprendizagem(1), aprendizagem de Matemática(1), ensino e aprendizagem(1), autoaprendizaje(1), comprensión em Matemática(1), concepciones(2), competencia matemática(2), métodos de aprendizagem(1)	10	6
Conhecimento do professor	conhecimento matemático para o ensino(1), conhecimento profissional docente(2), conocimiento de Matemáticas especializado(1), conocimiento de Matemáticas para la enseñanza(1), conocimientos del profesor(1), mtsk(1), habilidades do professor(1), estratégias de ensino(1)	9	5
Subconstructos	relación parte-todo(1), razón(2), medición(1), significado(1), subconstruto do número racional(1), interpretação(1), interpretaciones(1), interpretaciones de la fracción(1)	9	5
Matemática e Educação Matemática	educação Matemática(5), ensino de Matemática(3), Matemáticas escolares(1)	9	5
Resolução de problemas	criação de problemas por variação e por elaboração(1), criação e resolução de problemas(1), resolução de problemas(2), solução de problemas(1), estratégias de resolução(1)	6	4
Raciocínio proporcional	pensamiento proporcional(1), proporcionalidad(3), raciocinio proporcional(1), razonamiento, proporcional(1)	6	4
Desempenho, erros e dificuldades	desempenho(1), desempenho e dificuldades(1), dificuldades(1), dificuldades de aprendizagem(1), errores(1), análise de erros(2)	7	4
Tecnologia	geogebra(1), tecnología(1), tecnologías digitais(1), web quest(1), aprendizaje en línea(1), aprendizaje virtual(1), simuladores(1)	7	4
Recursos	jogo(2), recursos(1), secuencias didácticas(1), situaciones didácticas(1), aactividad Matemática(1), instrumentos y procedimentos(1)	7	4
Semiótica	conflictos semióticos(1), enfoque ontosemiótico(1), representação semiótica(2), notación(1)	5	3
Operações	divisão entre frações(1), división(1), operações com frações(1), operações com números decimais(1)	4	2
Outros tópicos	trigonometría(1), negativo(2), igualdades notables(1)	4	2
Atitudes	actitud afectivo(1), atitudes(1), interación(1), relações pessoais(1)	4	2
Porcentagem	porcentagem(1), porcentaje(1)	2	1
Metodologia	enfoque de grupo(1), provas em fases(1)	2	1

Fonte: Elaborada pela autora.

APÊNDICE E – EXEMPLOS DE CONCEPÇÕES PROCEDIMENTAIS REFERENTES AO SUBTEMA OPERAÇÕES COM NÚMEROS RACIONAIS

Uma análise com operações de adição e subtração de frações é apresentada no Quadro 31 e traz alguns exemplos de concepções procedimentais evocadas pelos alunos nas pesquisas:

Quadro 31 - Exemplos de concepções procedimentais na soma e subtração de frações.

Exemplo	Descrição	Discussão
Os autores não colocaram exemplos[120]	$\frac{a}{b}+\frac{c}{b}=\frac{ab+cb}{b}$	Na soma de frações com denominadores iguais, o procedimento utilizado foi multiplicar os numeradores por b e em seguida somá-los, em vez de somar os numeradores diretamente (SANCHEZ-LUJÁN; MORENO, 2018).
$\frac{3}{10}+\frac{1}{4}=\frac{4}{40}$ (JUSTULIN, 2016)	$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ac}{b+d}$ $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a+c}{bd}$	O procedimento foi multiplicar os numeradores e somar os denominadores (SANCHEZ-LUJÁN; MORENO, 2018). Ou o inverso (JUSTULIN, 2016).
Os autores não colocaram exemplos	$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{b+d}$ $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad-bc}{b+d}$	O procedimento foi multiplicar cruzado para obter os numeradores, mas realizaram a soma dos denominadores em vez de multiplicá-los. No segundo caso, o procedimento modificou apenas na subtração dos numeradores (SANCHEZ-LUJÁN; MORENO, 2018). Parece que o aluno queria utilizar o procedimento de multiplicação cruzada, mas se equivocou na operação a ser realizada no denominador.
$3-\frac{1}{4}=\frac{2}{4}$ (ETCHEVERRIA et al., 2019)	$a-\frac{b}{c}=\frac{a-b}{c}$	O procedimento foi conservar o denominador da segunda fração e subtrair os numeradores (ETCHEVERRIA et al., 2019). O aluno utilizou o mesmo procedimento da subtração de frações com mesmo denominador.
$\frac{3}{10}+\frac{1}{4}=\frac{4}{6}$ (JUSTULIN, 2016)	$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a+c}{b-d}$	O procedimento foi somar os numeradores e subtrair os denominadores (JUSTULIN, 2016).
$\frac{3}{10}+\frac{1}{4}=\frac{4}{10}$ (JUSTULIN, 2016)	$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a+c}{b}$	O procedimento foi somar os numeradores e conservar o maior denominador (JUSTULIN, 2016).

Fonte: Elaborado pela autora.

No caso da multiplicação de frações, algumas estratégias distorcidas estão descritas no Quadro 32, mas ocorreram em menor número:

Quadro 32 - Exemplos de concepções procedimentais na multiplicação de frações.

Exemplo	Descrição	Discussão
$\frac{4}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{8}{3}$ (ETCHEVERRIA et al., 2019)	$\frac{a}{b}\times\frac{c}{b}=\frac{a\times c}{b}$	O procedimento foi multiplicar os numeradores e manter o denominador, fazendo analogia ao processo aditivo de

[120] Nesta pesquisa, os autores apenas apresentaram vários procedimentos errôneos da aplicação do algoritmo, mas não apresentaram exemplos.

		frações com mesmo denominador (ETCHEVERRIA et al., 2019).
$\frac{3}{5}\times\frac{5}{2}=\frac{3\times5\times5\times2}{5\times2}=\frac{150}{10}$ (PARAOL; RODRIGUÊS, 2018)	$\frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}}\times\frac{\boldsymbol{c}}{\boldsymbol{d}}=\frac{\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d}}{\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{d}}$	O procedimento foi multiplicar todos os números e colocar no numerador e em seguida multiplicar os denominadores (PARAOL; RODRIGUÊS, 2018).

Fonte: Elaborado pela autora.

As principais estratégias equivocadas estão organizadas no Quadro 33:

Quadro 33 - Exemplos de concepções procedimentais na divisão de frações.

Exemplo	**Descrição**	**Discussão**
$\frac{3}{4}\div\frac{1}{4}=\frac{3}{1}$ (ETCHEVERRIA et al., 2019)	$\frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}}\div\frac{\boldsymbol{c}}{\boldsymbol{d}}=\frac{\boldsymbol{a}\div\boldsymbol{c}}{\boldsymbol{b}\div\boldsymbol{d}}$	Procedimento de dividir numerador por numerador e denominador por denominador (ETCHEVERRIA et al., 2019). Podemos supor que o aluno fez analogia à operação de multiplicação de frações.
$\frac{2}{3}\div\frac{1}{5}=\frac{2}{15}$ (ETCHEVERRIA et al., 2019)	$\frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}}\div\frac{\boldsymbol{c}}{\boldsymbol{d}}=\frac{\boldsymbol{a}\div\boldsymbol{c}}{\boldsymbol{bd}}$	Procedimento de dividir os numeradores e multiplicar os denominadores (ETCHEVERRIA et al., 2019). Nesse caso, como não era possível fazer igual ao item anterior, o aluno dividiu os numeradores e multiplicou os denominadores. Outro procedimento análogo a este, foi encontrar o MMC dos denominadores (ETCHEVERRIA et al., 2019), provavelmente fazendo analogia à operação de adição de frações.
$\frac{3}{4}\div\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$ (ETCHEVERRIA et al., 2019)	$\frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}}\div\frac{\boldsymbol{c}}{\boldsymbol{b}}=\frac{\boldsymbol{a}\div\boldsymbol{c}}{\boldsymbol{b}}$	Procedimento de dividir numerador por numerador e copiar o denominador (ETCHEVERRIA et al., 2019). Acredita-se que o aluno fez analogia à regra de adição de frações com mesmo denominador.
$\frac{2}{3}\div\frac{1}{5}=\frac{2}{3}$ (ETCHEVERRIA et al., 2019)	$\frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}}\div\frac{\boldsymbol{c}}{\boldsymbol{d}}=\frac{\boldsymbol{a}\div\boldsymbol{c}}{\boldsymbol{b}}$	Dividir numerador por numerador e copiar um dos denominadores. Cerca de 21% dos alunos cometeram este erro na pesquisa de (ETCHEVERRIA et al., 2019).
$\frac{2}{3}\div\frac{1}{5}=\frac{3\times1}{2\times5}$ (ETCHEVERRIA et al., 2019)	$\frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}}\div\frac{\boldsymbol{c}}{\boldsymbol{d}}=\frac{\boldsymbol{b}*\boldsymbol{c}}{\boldsymbol{a}*\boldsymbol{d}}$	Procedimento de posicionar errado o resultado da multiplicação cruzada (ETCHEVERRIA et al., 2019).
$\frac{2}{3}\div\frac{1}{5}=\frac{2}{15}$ (ETCHEVERRIA et al., 2019)	$\frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}}\div\frac{\boldsymbol{c}}{\boldsymbol{d}}=\frac{\boldsymbol{a}*\boldsymbol{c}}{\boldsymbol{b}*\boldsymbol{d}}$	Procedimento de multiplicar numerador com numerador e denominador com denominador (ETCHEVERRIA et al., 2019).
$\frac{2}{5}\div\frac{1}{10}=\frac{2}{5}\div\frac{10}{1}=\frac{5}{5}$ (PARAOL; RODRIGUÊS, 2018)	$\frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}}\div\frac{\boldsymbol{c}}{\boldsymbol{d}}=\frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}}\div\frac{\boldsymbol{d}}{\boldsymbol{c}}=\frac{\boldsymbol{a}\div\boldsymbol{d}}{\boldsymbol{b}\div\boldsymbol{c}}$	Procedimento de fazer a inversão da segunda fração, mas não mudar a operação (PARAOL; RODRIGUÊS, 2018).

Fonte: Elaborado pela autora.

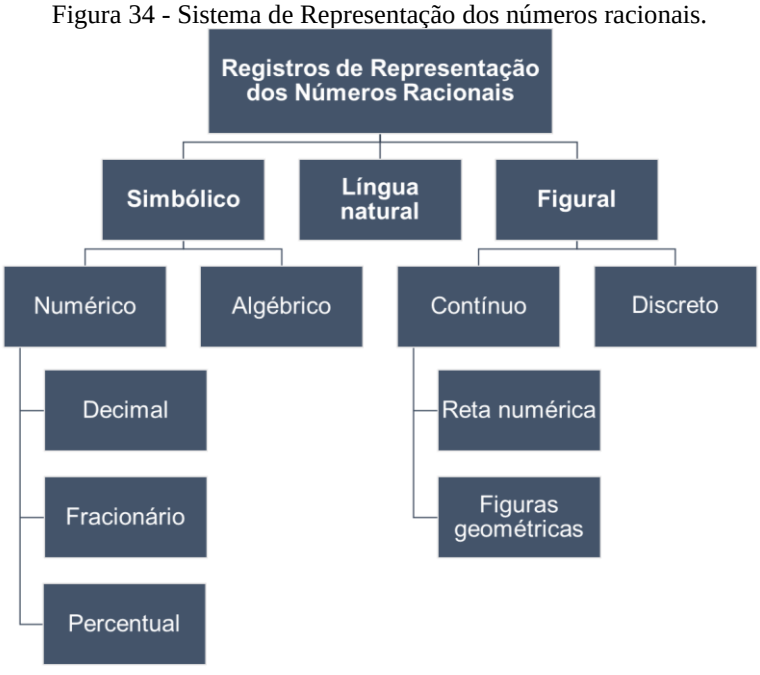
APÊNDICE F – BREVE RESUMO SOBRE O REFERENCIAL TEÓRICO DO TEMA REPRESENTAÇÕES

As representações semióticas, usadas para identificar os objetos matemáticos, "são produções constituídas pelo emprego de signos pertencentes a um sistema de representações que tem inconvenientes próprios de significação e de funcionamento" (DUVAL, 2012, p. 269). Assim, tais representações são consideradas como maneiras de expressar o pensamento matemático, pois os objetos matemáticos não são diretamente acessíveis sem a utilização de um registro: "De fato, os objetos matemáticos não estão diretamente acessíveis à percepção ou à experiência intuitiva imediata, como são os objetos comumente ditos "reais" ou "físicos". É preciso, portanto, dar representantes." (DUVAL, 2012, p. 268). Desta maneira, o acesso aos objetos matemáticos passa necessariamente por uma representação, sendo que "os objetos matemáticos não devem ser jamais confundidos com a representação que dele se faz" (DUVAL, 2012, p. 268).

Esta distinção entre objeto matemático e sua representação (símbolo, código, gráfico, figura, algoritmo etc.) permite a comunicação entre o sujeito e a atividade cognitiva do pensamento (DUVAL, 2008, 2012). Por este motivo, as representações têm um papel fundamental no processo de ensino aprendizagem da Matemática e, mais especificamente, do conceito de número racional.

Dentre os tipos de representação dos números racionais, podemos citar o registro figural, o registro simbólico e o registro na língua natural (MARANHÃO; IGLIORI, 2008, p. 59), como descrito na Figura 34:

Figura 34 - Sistema de Representação dos números racionais.



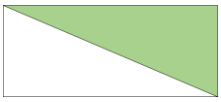
Fonte: Elaborada pela autora.

No registro simbólico numérico temos o decimal, o fracionário e o percentual (BRASIL, 1998). Ainda que representem o mesmo número, o que normalmente acontece, as frações e os números decimais ocupam grande parte do currículo de Matemática, mas essas representações simbólicas são tratadas como tópicos separados e pouco tempo é dedicado a explorar suas relações, por isso as dificuldades ao estabelecer conexões entre elas (VENTURA, 2013, p. 61).

Com relação ao registro figural, três modelos têm sido adotados: o modelo discreto, as figuras geométricas e a representação na reta numérica (Bertoni, 2004).

Esta multiplicidade dos registros de representação de um número racional, pode implicar um obstáculo na aprendizagem do conceito. É fato que os alunos têm dificuldades na identificação de um mesmo objeto em suas diferentes representações (SANTANA; OLIVEIRA; BARRETO, 2015). Na Figura 19, por exemplo, temos os seguintes tipos de representação para o mesmo número racional:

Quadro 34 - Exemplos de registros de representação do mesmo número racional.

Nome	**Fracionária**	**Decimal**	**Língua natural**	**Pictórica**
Representação	$\frac{1}{2}$ e $\frac{5}{10}$	0,5	Metade	

Fonte: Elaborado pela autora.

Além da variedade, na representação fracionária ainda temos um dificultador, que é a noção de frações equivalentes: de acordo com o conceito, infinitas frações representam o mesmo número racional, como $\frac{1}{2}$ e $\frac{5}{10}$.

Portanto, o domínio sobre a diversidade de representações torna-se essencial para a compreensão do conceito de número racional. Mais do que isso, relações entre as diferentes representações tais como o tratamento e a conversão entre elas (DUVAL, 2008), têm papéis fundamentais:

> O tratamento de uma representação é a transformação desta representação no mesmo registro onde ela foi formada. O tratamento é uma transformação interna a um registro. (...) A conversão de uma representação é a transformação desta função em uma interpretação em outro registro, conservando a totalidade ou uma parte somente do conteúdo da representação inicial. (DUVAL, 2012, p. 272)

Em síntese, na perspectiva de Duval, a capacidade de compreender um conceito matemático está diretamente relacionada ao desenvolvimento do tratamento e das conversões entre os registros de representação, o que possibilita a construção do conhecimento matemático (DUVAL, 2008).

Por fim, o PCN destaca que “a familiaridade do aluno com as diferentes representações dos números racionais (representação fracionária, decimal, percentual) pode levá-lo a perceber qual delas é mais utilizada ou adequada para expressar um resultado” (BRASIL, 1998, p. 103).

O documento aponta que no dia a dia, os números racionais aparecem muito mais em sua forma decimal, do que na fracionária. Apesar disto, as orientações dos PCN destacam como relevante a forma fracionária, por ser fundamental para outros conteúdos matemáticos, como por exemplo: proporções, equações e cálculo algébrico:

> Neste ciclo, os alunos têm boas condições para perceber que os números têm múltiplas representações e compreender melhor as relações entre representações fracionárias e decimais, frações equivalentes, escritas percentuais e até a notação científica. (BRASIL, 1997, p. 66–67)

APÊNDICE G - RESUMO EXPANDIDO DAS PESQUISAS DO CORPUS SELECIONADO

Nesta seção apresentamos um resumo expandido de todas as pesquisas incluídas no corpus selecionado para esta Revisão Sistemática de Literatura.

Abrahão (2016) analisou equívocos recorrentes cometidos por alunos de um curso de Pedagogia. Procedimentos metodológicos incluem uma sequência de sete atividades[121] relacionadas às representações do número racional e planejam discussão posterior nas aulas do curso.

Um destaque desta pesquisa foi a utilização de materiais para trabalhar as representações. Por exemplo: o material dourado na representação de 34 unidades e de 3,4 unidades, sendo possível discutir a respeito da unidade racional; o material cuisenaire foi utilizado para representar $\frac{2}{3}$, $\frac{5}{3}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{8}{5}$ com variações do inteiro a ser considerado. Os autores concluem que "o fato de alguns estudantes demorarem para enxergar qualquer régua como um inteiro indica a dificuldade enraizada na concepção do número racional" (p. 693).

O autor conclui que foi possível ampliar o escopo de representações dos números racionais dos alunos do curso de Pedagogia mencionado e argumenta que reflexões e revisão de representações inadequadas podem resultar de um trabalho comparativo entre elas, tanto envolvendo a formação de futuros professores, quanto promovendo experiências com os alunos do ensino básico.

Amaya, Bianchi e Montoro (2018) analisaram as concepções de alunos dos ensinos fundamental e médio acerca do conceito de número racional. Os autores aplicaram quatro atividades (a primeira relacionada à ideia do que é um número racional e as demais abordando os conceitos de densidade e ordem). As respostas a todas as tarefas foram categorizadas usando análise fatorial de correspondências múltiplas e seis categorias de concepções foram identificadas:

i. Me sinto inseguro, não sei, nem ideia (17%);
ii. A densidade é difícil (10%);
iii. Uso das propriedades que já conheço dos números inteiros – discretista (25%)[122];

[121] A sequência de atividades não está apresentada explicitamente no artigo em análise. O autor restringe-se a algumas discussões iniciais e no desenvolvimento do artigo apresenta alguns tópicos sobre elas. Por este motivo, trazemos apenas alguns exemplos das discussões apresentadas.

[122] Os alunos desta classe geralmente respondem discretamente, transferindo propriedades dos inteiros para os números racionais. Costumam responder que o número maior é aquele que tem maior comprimento de mantissa.

iv. Identifico os racionais com os decimais - finitista (15%)[123];

v. Aproximo-me da compreensão de densidade e da ordem, penso potencialmente em infinitos decimais (23%);

vi. Entendo densidade e ordem, mas os racionais só são relevantes até os décimos (pensando em magnitudes) (10%);

Os autores concluem que existe "um gradiente de profundidade nas concepções dos alunos a respeito dos números racionais, mostrando a diversidade de ideias que pode operar em um grupo de alunos" (p.22) e

> entre as dificuldades mais evidentes, pode-se observar com frequência que transferem as propriedades dos inteiros em termos de ordem (...). Por outro lado, os alunos jovens apresentam uma visão finitista, mediando em sua concepção dos números (...) E nos alunos de maior idade e escolaridade estão presentes uma visão infinitista em relação a essas questões. (AMAYA; BIANCHI; MONTORO, 2018, p. 23)

Com relação às propriedades de densidade e ordem dos números racionais, Amaya et al. (2018) concluem que tais conceitos

> são complexos, cognitiva e epistemologicamente. Consideramos que esses aspectos deveriam ser considerados pelo ensino, de tal forma que preveja entre seus objetivos que nos últimos anos do ensino médio, seja realizado um trabalho específico sobre essas complexas noções, e assim facilite a passagem da matemática escolar para uma matemática mais avançada. (AMAYA; BIANCHI; MONTORO, 2018, p. 24, tradução nossa)

Astudilo, Huerta e Leo (2018) têm como objetivo reconhecer as concepções de 6 futuros professores acerca dos *conhecimentos dos temas* (Kot), relacionado às variações proporcionais. Para os autores, o conhecimento envolvido no desenvolvimento do pensamento proporcional se estrutura em dois domínios: i) conhecimento do conteúdo matemático; ii) conhecimento pedagógico de conteúdo. A pesquisa envolveu futuros professores, divididos em dois grupos: que cursavam uma disciplina sobre variações proporcionais; outro cuja formação não incluía a referida disciplina. Um questionário com duas etapas sobre o conhecimento matemático foi utilizado na pesquisa, com perguntas abertas e resolução de problemas, respectivamente.

Embora as questões colocadas tenham sido originais e de interesse, os resultados apresentados foram superficiais e concentraram-se, em especial, na pergunta aberta: "*Como você definiria uma proporção?*". As respostas revelaram erros conceituais, embora os autores não tenham discutido satisfatoriamente as respostas dos participantes.

Os autores sugerem a inserção de uma disciplina nos cursos de Pedagogia, dedicada ao tema "*Pensamento Proporcional*", pois o grupo que estava cursando tal disciplina demonstrou

[123] Caracterizados por levar em conta apenas a primeira casa decimal dos números para compará-los e usam métodos de truncamento e arredondamento para comparar os números.

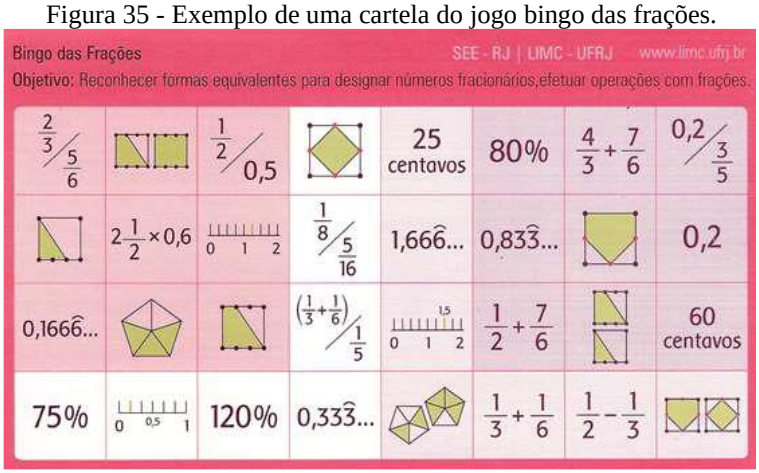
maior domínio conceitual acerca da temática, em oposição ao outro grupo que se observou procedimentos predominantemente algorítmicos sem necessariamente expressar um pensamento proporcional.

A pesquisa de **Barbosa et al. (2018)** teve como objetivo revisar de forma lúdica as quatro operações básicas com números decimais em uma turma do terceiro ano do ensino médio, por meio de um jogo denominado "Bombardeio Matemático"[124]. Os participantes (13) resolveram uma atividade diagnóstica com sentenças Matemáticas com as quatro operações com números decimais e, em seguida, foram divididos em grupos para o início do jogo.

A utilização do jogo como revisão das quatro operações com número decimais foi considerada positiva, resultando em um desenvolvimento significativo, além de um maior interesse e motivação por parte dos alunos, proporcionado pela ludicidade e trabalho em grupo.

Braga e Lima (2020)[125] investigaram o uso do jogo "bingo das frações" para rever as operações com frações e as diversas representações dos números racionais, com alunos do segundo ano do ensino médio. Ao abordar a progressão geométrica e a soma de finitos e/ou infinitos termos de sequências, o professor verificou dificuldades com o tópico de frações, propondo o jogo como revisão do conteúdo, com base nas fases da resolução de problemas propostas por Polya (1995).

Figura 35 - Exemplo de uma cartela do jogo bingo das frações.



Fonte: Braga e Lima (2020, p. 251).

Após a aplicação do jogo, os pesquisadores constataram que as dificuldades se concentraram nas representações em forma de dízimas e figuras. Já as representações decimais

[124] Este jogo foi elaborado com base na "Batalha Naval", e é constituído por colunas representadas por letras e fileiras representadas por números, em que cada "casa" corresponde a uma sentença Matemática com as 4 operações básicas com decimais.

[125] A metodologia utilizada foi a pesquisa-ação, na qual é imprescindível a mediação docente e a participação discente. O professor iniciou com uma revisão do que é uma fração e concluíram após as discussões, que uma fração é a divisão de dois números inteiros. Em seguida, o professor deu início à atividade do bingo das frações com a divisão da turma em grupos de 3 alunos.

(dinheiro), reta numérica e porcentagem foram consideradas bem compreendidas pelos alunos. Os autores concluem que o objetivo proposto de sanar as dificuldades foi alcançado com o uso do jogo.

A pesquisa de **Buforn e Fernández (2014)** analisa o conhecimento especializado de conteúdo de um grupo de futuros professores acerca do pensamento proporcional. Para os autores a integração dos subconstructos de número racional e as maneiras de raciocinar em situações proporcionais, envolvem diversos componentes: pensamento relacional[126], covariância[127], raciocínio up and down[128] e unitizing[129]. Os futuros professores responderam um questionário com 13 tarefas, com situações envolvendo o uso desses componentes do pensamento proporcional. A hipótese dos pesquisadores é que as formas de raciocinar com as múltiplas interpretações de número racional geram diferentes níveis de desenvolvimento do pensamento proporcional.

Os autores concluem que uma porcentagem alta dos futuros professores está em um nível pré-proporcional, "centrado nas relações qualitativas ou unicamente centrado nos significados dos números racionais ou em regras algorítmicas como a regra de três, sem ter adquiridos as formas de raciocinar com estes significados" (BUFORN; FERNÁNDEZ, 2014, p. 39).

Na análise estatística, os autores identificaram cinco grupos[130] de professores em formação e, em seguida, classificaram quatro perfis dos futuros professores. Os grupos 4 e 5 são os únicos que demonstram um indício do desenvolvimento do pensamento proporcional, que envolve a integração gradual das componentes que o constituem (razão, medida-densidade, raciocínio *up and down*, *unitizing* e covariância). Assim, os resultados mostram que

> os licenciandos têm conhecimento especializado limitado sobre o raciocínio proporcional, evidenciado pela dificuldade em identificar situações não proporcionais, proporcionais, em desenvolver algumas maneiras de raciocinar em relação à construção de uma unidade (raciocínio unitizing e up and down) e no manejo

[126] Relacionar o número de partes em que o todo foi dividido e o tamanho de cada parte com relação ao total (CHARALAMBOUS; PITTA-PANTAZI, 2007, p. 296);
[127] Implica entender que numerador e denominador da fração mudam juntos e da mesma forma (covariância) e que a relação entre elas permanece invariável (invariância) (CHARALAMBOUS; PITTA-PANTAZI, 2007).
[128] Maneira de raciocinar para resolver problemas quando a unidade está implícita (BUFORN; FERNÁNDEZ, 2014).
[129] Implica em construir uma unidade de referência a partir de uma relação multiplicativa entre as quantidades e usar esta nova unidade para contar (LAMON, 2008).
[130] Grupo 1: caracterizado pelas componentes de pensamento relacional e covariância, cujas tarefas requerem um raciocínio qualitativo e não requerem a realização de nenhum tipo de operações ou identificação de relações numéricas. Grupo 2: caracterizado pelas componentes medida-reta numérica e a resolução do problema de valor omisso proporcional. Grupo 3: caracterizado pela ideia de razão, quociente e pensamento relacional. Grupo 4: caracterizado pelos futuros professores que resolveram corretamente as tarefas de quociente, medida-densidade, covariância e problema de valor omisso proporcional. Grupo 5: caracterizado pelos futuros professores que resolveram corretamente 12 das treze tarefas propostas, exceto aquelas que não discriminam (operador, raciocínio *up and down* e o problema de valor omisso não proporcional).

> do significado multiplicativo da ideia de operador e da ideia de razão. (BUFORN; FERNÁNDEZ, 2014, p. 37, tradução nossa)

Os autores declaram que a não compreensão das componentes de pensamento proporcional limita o desenvolvimento da competência docente, no sentido de estar atento à aprendizagem Matemática dos alunos (BUFORN; FERNÁNDEZ, 2014, p. 38).

Cabello e Mercado (2015) utilizaram um questionário exploratório (contendo 15 itens a respeito dos números decimais e frações), respondido por oito licenciandos e entrevista individual com dois deles. Os autores buscam conhecer como estes conceitos influenciam o trabalho escolar de outras disciplinas.

Como em Mercado, Cabello e Martínez (2016), o significado que apareceu com maior frequência foi o de quociente, principalmente na conversão de frações para decimais "para validar a quantidade numérica e atribuir algum sentido" (MERCADO; CABELLO; MARTÍNEZ, 2016, p. 1043). Por exemplo, quando um número fracionário é solução de uma equação do segundo grau, os participantes tendem a transformar sua expressão para a representação decimal. Outro exemplo, é que na resolução do quadrado mágico[131], os participantes só foram capazes de ordenar os números depois que realizaram a conversão para decimal. Os participantes utilizaram os números decimais como uma escrita complementar aos naturais.

Camacho e Guerrero (2017) têm como objetivo identificar o conhecimento pedagógico do professor em formação inicial, referente ao ensino de razão como um significado de números racionais. Os dados foram produzidos por meio de entrevistas semiestruturadas, com base em um planejamento realizado para abordar o significado de razão em uma sala de aula do quinto ano, com temas e perguntas em função dos domínios e subdomínios do MTSK.

Como resultado da análise do material produzido, os autores elaboraram uma tabela com cinco *indicadores de conhecimento* do domínio do conhecimento pedagógico do conteúdo que são: i) conhecimento sobre a função do meio: caracterizado pelo uso de materiais, textos, etc relacionados ao uso do significado da razão, que Brousseau (2007) destaca que são utilizados para ensinar um determinado conhecimento, considerando a teoria das situações didáticas; ii) conhecimento da situação de ação: caracterizado pelas ações e decisões dos alunos na resolução de um problema, sem a intervenção de um professor; iii) conhecimento da situação de formulação: correspondeu "a uma capacidade do sujeito de retomá-lo (reconhecê-lo, identificá-los, decompô-lo e reconstruí-lo em um sistema linguístico)" (BROUSSEAU, 2007, p. 25 apud

[131] Consiste na resolução de um quadrado mágico com os seguintes números: $-1{,}6$; -1; $\frac{1}{5}$; $0{,}8$; $-\frac{2}{5}$; $3{,}2$; 2; $1{,}4$ e $2\frac{3}{5}$, cuja soma é $2{,}4$.

CAMACHO; GUERRERO, 2017); iv) conhecimento da situação de validação: caracterizado pela comparação dos resultados e procedimentos utilizados pelos alunos para resolver uma tarefa; v) conhecimento da função da institucionalização de uma situação didática[132]: caracterizado pela descrição do que ocorreu e o que estava vinculado ao conhecimento em questão.

Os autores apontam que os *indicadores de conhecimento* "da função do meio" (na seleção de materiais) e "da função de institucionalização" (na representação de razão (1: 4) e fração parte -todo $\left(\frac{1}{4}\right)$) foram estabelecidos na relação explícita de razão como um significado de número racional. Já os demais *indicadores de conhecimento* foram manifestos por meio de conhecimentos associados ao significado razão.

Carpes e Carpes (2020) tiveram como objetivo apresentar e discutir uma proposta de ensino que mobilize habilidades de criação e resolução de problemas de licenciandos em Matemática. O instrumento metodológico consistiu na proposta de um problema de partilha[133] para os participantes e, em seguida, solicitaram a criação e resolução de novos problemas em um encontro de formação.

Uma observação é que em situações de partilha (subconstructo quociente) os alunos têm a tendência de interpretar e resolver por meio do subconstructo parte-todo. É interessante observar que no item a, houve predominância de procedimentos de resolução por meio da representação pictórica da barra de chocolate, indicando as partes que cada um receberia por meio do subconstructo parte-todo.

Os resultados apontam que os participantes criaram problemas por variação com modificações superficiais dos enunciados dos problemas iniciais. Além disso, o fator clareza esteve presente, considerando que os problemas estavam bem construídos e com perguntas objetivas; o fator flexibilidade mostra que não foram feitas modificações amplas do problema inicial; o fator originalidade ficou prejudicado, no sentido de que as modificações ao problema inicial ficaram centradas em considerar o total de pessoas e dividir igualmente algo.

Ressalta-se que as dificuldades foram originadas pela "falta de conhecimento e/ou não interpretação correta da situação" (p. 14). Os autores apontam para a potencialidade da criação

[132] Esses conhecimentos foram classificados segundo a TSD de Brousseau.

[133] Problema inicial: "Para o lanche da escola, Luana, Débora e Lucas levaram uma barra de chocolate da mesma marca e tamanho. Durante o recreio Luana dividiu igualmente sua barra com uma amiga. Débora compartilhou igualmente entre ela e suas três amigas. Lucas percebeu que havia 7 colegas sem chocolate, dividiu igualmente entre eles. Sabendo disso responda: a) Com quem você preferiria dividir a barra de chocolate? Por quê? b) Se juntássemos as barras da Luana e Débora para dividir igualmente entre elas e suas amigas, seria possível que cada uma comesse 30% da barra?" (CARPES; CARPES, 2020, p. 6)

de problemas como estratégia para estimular a criatividade, de tal forma a fortalecer o domínio de conceitos matemáticos e didáticos.

Carvalho et al. (2021) têm o objetivo de investigar se os alunos inter-relacionam aspectos algorítmico-intuitivos relacionados às operações com frações com aspectos formais referentes à identificação do todo como uma unidade que, por sua vez, pode ser expressa na forma de fração. Como fundamentação teórica, os autores referem-se a aspectos intuitivos, algorítmicos e formais[134], propostos por Fischbein (1994), cuja interação entre eles é fundamental para a realização de qualquer tarefa Matemática.

A análise apresentada no artigo refere-se à questão, retirada da Prova Brasil 2011, avaliada com alto índice de dificuldade[135].

Os autores concluem que o desempenho dos alunos está abaixo do esperado para ingressantes do ensino médio. As respostas revelaram dificuldades com aspectos formais (relacionadas ao conceito de fração) e com aspectos algorítmico-intuitivos (relacionadas ao uso de algoritmos de subtração de frações e à interpretação das informações do problema). Portanto, evidenciam-se "dificuldades na compreensão da rede de conceitos que abrange o estudo dos números racionais" e na "utilização de algoritmos das operações fundamentais com frações" (CARVALHO et al., 2021, p. 10).

Etcheverria e Amorim (2020) utilizaram um questionário com cinco questões para identificar dificuldades dos alunos do ensino fundamental e investigar as estratégias que licenciandos em Matemática utilizariam em sua futura prática docente a partir das respostas dos alunos do ensino fundamental.

Os licenciandos apresentaram dificuldades ao explicitar suas estratégias, "evidenciando limitações relacionadas ao conhecimento pedagógico do conteúdo frações" (ETCHEVERRIA; AMORIM, 2020, p. 52). Os resultados apontam a importância de promover discussões acerca das dificuldades vivenciadas por alunos da educação básica sobre os racionais, nos cursos de formação de professores.

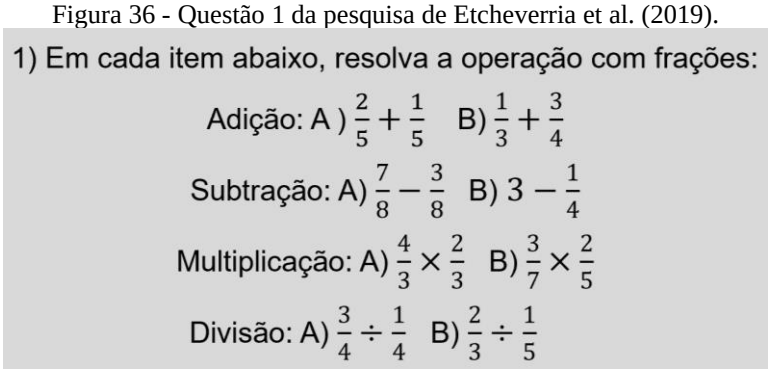
---

[134] Aspectos intuitivos: "Estão associados à uma compreensão na qual o indivíduo considera um conhecimento como auto evidente, ou seja, que ele é capaz de compreender sem questionar a necessidade de argumentos convincentes para justificar sua validade". Aspectos algorítmicos: "concernem às habilidades relacionadas às técnicas e procedimentos padronizados de resolução...constituem parte essencial do entendimento e da criação da Matemática". Aspectos formais: "dizem respeito aos conhecimentos sobre as definições, axiomas, teoremas e provas que devem ser aprendidos, organizados e aplicados pelos estudantes. São eles que compõem o núcleo da Matemática como uma ciência formal" (CARVALHO et al., 2021, p. 4).

[135] "A estrada que liga Recife a Caruaru será recuperada em três etapas. Na primeira etapa, será recuperado $\frac{1}{6}$ da estrada e na segunda etapa $\frac{1}{4}$ da estrada. Pergunta-se: que fração corresponde à terceira etapa?" (CARVALHO et al., 2021, p. 5,6)

Etcheverria et al. (2019) investigaram o desempenho e as dificuldades dos alunos dos ensinos fundamental, médio e superior na resolução de problemas com as operações com frações. Para isto, os autores elaboraram um questionário com cinco atividades envolvendo tais operações. A análise e a discussão apresentada no artigo refere-se à primeira questão, apresentada na Figura 36.

Figura 36 - Questão 1 da pesquisa de Etcheverria et al. (2019).



Fonte: Etcheverria et al. (2019, p. 77).

As autoras concluem que o índice de desempenho dos alunos em cada uma das operações foi insatisfatório, mas crescente com o nível de escolaridade. Em geral, os erros cometidos são originados pela não compreensão dos processos operatórios, ou seja, os alunos "aplicam regras memorizadas em qualquer contexto, sem refletirem sobre a validade ou não daquele conhecimento para a operação que irá realizar, o que sinaliza uma deficiência nos processos de ensino e de aprendizagem desse conteúdo" (ETCHEVERRIA et al., 2019, p. 87).

Como em pesquisas anteriores, os autores propõem uma formação continuada para os professores do ensino fundamental, de tal forma a oportunizar a construção de conhecimentos bem fundamentados sobre números racionais e suas operações.

A pesquisa de **Florês, Fonseca e Bisognin (2020)** tem o objetivo de analisar que processos do PMA são mobilizados por três alunos[136] de um curso de formação inicial de professores de Matemática, na disciplina de Análise Matemática de um Instituto Federal. Como abordagem metodológica da pesquisa, tarefas exploratórias envolvendo aspectos da representação de números racionais foram propostas com a expectativa de que os participantes mobilizassem processos do PMA descritos como *mudança de representação, tradução entre representações, generalização, sintetização e abstração*.

Com relação aos processos do PMA, os autores concluem que:

[136] Denominados pelos autores de A, B e C.

i) representação: “todos os alunos evidenciaram, com clareza, os processos de representação, mudança de representação e tradução entre elas” (FLÔRES; FONSECA; BISOGNIN, 2020, p. 232);

ii) processos de generalização e síntese: os resultados dos alunos foram distintos, sendo que os alunos A e B

> apresentaram aspectos insuficientes relacionados ao processo; e apenas o aluno C demonstrou bom entendimento em relação ao reconhecimento de padrões, visando inferir resultados partindo de casos particulares para o geral. Todavia, ele apresentou dificuldades quanto à formalização, não alcançando o processo de abstração. (FLÔRES; FONSECA; BISOGNIN, 2020, p. 233)

iii) dificuldades relacionadas à identificação de padrões, dificultaram o processo de generalização e sintetização e, consequentemente, limitou o processo de abstração.

O objetivo em **Garcia (2019)** é identificar contextos propícios para interpretar os números racionais e buscar as diferenças e as relações entre os subconstructos. A metodologia proposta foi refletir acerca das soluções de sete problemas envolvendo os subconstructos. Os autores enfatizam a importância em diversificar problemas com quantidades contínuas e discretas, pois cada uma revela propriedades diferentes da noção de número racional; destacam que a quantidade contínua permite trabalhar melhor as noções de parte-todo, quociente e medida, enquanto que a quantidade discreta, as noções de razão e operador.

Os subconstructos medida, quociente e parte-todo foram foco em **García e Cabañas-Sánchez (2013)**. Cinco problemas envolvendo o conceito, com quantidades contínuas e discretas, foram elaborados e propostos para alunos do ensino médio e, em uma entrevista aberta, os participantes explicaram suas resoluções.

Os autores concluem que os alunos transformam frações em expressão decimal, contribuindo para “o seu sucesso na resolução das situações relativas a este tipo de casos” (p. 228). Além disso, essas transformações apontam que os alunos associam a fração à uma divisão (GARCÍA; CABAÑAS-SÁNCHEZ, 2013, p. 220).

Godoy e Barreto (2016) buscaram identificar os subconstructos nas questões do ENEM do ano de 2013. Em seguida discutiram algumas dessas questões em um cursinho preparatório para o ENEM com estudantes de escola pública[137], com a finalidade de identificar momentos

[137] A vivência analisada ocorreu nem uma instituição educacional filantrópica: “O bairro é composto por população de baixa renda e possui diversos problemas de infraestrutura e também problemas sociais. Na instituição mencionada, foram realizadas, entre agosto e novembro de 2014, aulas gratuitas preparatórias para o ENEM, destinadas a estudantes interessados em participar do ENEM-2014. O grupo foi constituído, predominantemente, por estudantes do Colégio Estadual Madre Germana II, colégio que atende a região, com IDEB 1,4, para o 9º ano em 2011.” (p. 109).

em que os subconstructos emergem. Na primeira fase da pesquisa, os autores identificaram os objetos do conhecimento presentes nas etapas de resolução das questões do ENEM e sinalizaram que subconstructos do número racional estavam presentes.

Verifica-se uma "preponderância do subconstructo operador na prova, em razão das diversas questões envolvendo o conteúdo porcentagem, em que ele especialmente emergia" (p. 108). Além disso, conclui-se que "é alta e diversificada a exigência da compreensão dos conceitos do número racional na prova do ENEM (ao longo das 45 questões, subconstructos variados emergiram por 35 vezes)" (p. 108).

Em seguida, os autores realizaram discussões em sala de aula, acerca da emergência dos subconstructos e concluem que o domínio dos subconstructos de número racional é relevante para a resolução da prova do ENEM, considerando que mais da metade das questões aborda algum subconstructo. Daí a importância de explorar ao máximo os subconstructos, permitindo que o aluno esteja diante de diversas situações que os envolva. Já as dificuldades estiveram relacionadas à interpretação dos problemas que exigiam determinados subconstructos.

González et al. (2019) têm como objetivo identificar e desenvolver o conhecimento e habilidades Matemáticas associadas com a proporcionalidade e conceitos como número racional, proporção e função linear, ao resolver problemas relacionados com situações da vida real.

A pesquisa está referenciada na perspectiva da TCC[138], de Gerard Vergnaud: "o campo conceitual de estruturas multiplicativas é, de uma vez só, o conjunto das situações cujo tratamento implica uma ou várias multiplicações ou divisões, e o conjunto de conceitos e teoremas que permitem analisar estas situações" (GONZÁLEZ et al., 2019, p. 62, tradução nossa).

A pergunta central da pesquisa é: "*Que conhecimento e habilidades Matemáticas, relacionadas com a proporcionalidade, exibem os estudantes universitários dos primeiros semestres de Medicina, ao resolver situações da vida real?*". A implementação das atividades envolveu uma situação de dieta branda de um hospital e foi realizada em quatro fases: 1) atividade de aquecimento[139]; 2) situação problemática realizada em grupo[140]; 3) discussão em grupo; 4) trabalho individual.

---

[138] Envolve "os processos de conceituação progressiva de estruturas aditivas, multiplicativas, relações número-espaço e da álgebra" (VERGNAUD, 1990 apud GONZÁLEZ et al., 2019).

[139] Tinha o objetivo de apresentar um informativo contendo dados de dietas hospitalares, para introduzir o contexto no qual se desenvolve a situação problemática, além de discutir os termos utilizados como custo, logística, dieta, entre outros.

[140] Denominada de "Dieta branda do hospital" com uma possível prescrição médica de uma dieta branda, incluindo dados relevantes para a resolução do problema.

Na segunda fase, uma Atividade Provocadora de Modelos (APM) foi proposta com a finalidade de identificar *ciclos de entendimento*, que compreendem os tipos de representações e conceitos utilizados, assim como os procedimentos em que a Análise Vertical (AV) e a Análise Horizontal (AH)[141] foram fundamentais, por sua relação com o uso de razões e relações funcionais. Seria necessário fazer estimativas de pacientes no hospital, solicitando aos participantes que, a partir de uma solução particular, eles construíssem uma solução geral. Assim, transitariam do ciclo de entendimento quantitativo ao algébrico.

A análise dos dados retoma os *ciclos de entendimento* inferidos para os alunos universitários, assim como as representações Matemáticas (tabelas, gráficos e equações) e os procedimentos utilizados.

Foram considerados dois fatores de complexidade cognitiva no ciclo quantitativo: a) conceitos matemáticos associados ao conceito de proporcionalidade (valores numéricos, razão, taxa, número inteiro, decimal, fração, porcentagem, variação, proporção, função linear e constante de proporcionalidade); b) domínio dos alunos para resolver problemas: estratégias, algoritmos e procedimentos utilizados (multiplicação, divisão, regra de três, análise de unidade dimensional, busca do valor unitário, razões, operadores).

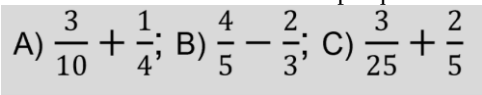
Os resultados apontam que: i) na atividade de aquecimento, foi perceptível um ciclo de entendimento qualitativo, caracterizado pelas expressões verbais enunciadas; ii) na segunda fase os alunos passaram de um ciclo de entendimento qualitativo para um ciclo de entendimento quantitativo e os procedimentos utilizados foram representação aritmética sem organização tabular; representação tabular; e representação algébrica; 43% dos alunos mostraram em seu procedimento uma transição para a representação algébrica (ciclo de entendimento algébrico); iii) na terceira fase os alunos ainda se encontram em um ciclo de entendimento quantitativo. Nesta etapa surgiram dúvidas com relação às formas de representação de um número racional ($\frac{4}{5}$, 0,8 e 80% representam a mesma quantidade?), assim como dificuldades sobre em representar a forma algébrica da função linear e a estratégia do valor unitário para encontrar a constante de proporcionalidade; iv) na quarta fase, apesar de identificar padrões que permitiu-lhes generalizar, os participantes continuaram em um ciclo de entendimento quantitativo e não usaram a linguagem algébrica adequadamente.

[141] Vergnaud (1995) destaca dois procedimentos de resolução, que ele denomina de Análise Vertical, que se estabelece em uma relação entre magnitudes da mesma unidade dimensional, no qual o aluno usa pelo menos um operador razão; e Análise Horizontal, que se apresenta em uma relação entre magnitudes de diferentes unidades dimensionais e assim, o aluno deve fazer análise da unidade dimensional ou uma regra de três. Para exemplificar, o autor utiliza como exemplo o problema do Chef verificar (GONZÁLEZ et al., 2019, p. 62).

As representações utilizadas na discussão foram verbais, aritméticas sem organização tabular e com organização tabular e os conceitos como fração, razão, proporção e regra de três estiveram presentes na resolução dos problemas.

Justulin (2016) contou com a participação de alunos do ensino médio e seu objetivo foi investigar relações entre o desempenho na resolução de problemas com frações e exercícios com frações, envolvendo três tipos de provas: algoritmo, conceitual e problemas. Um dos exercícios da "prova conceitual" solicitava que os alunos resolvessem as operações, mas sem o uso do MMC:

Figura 37 - Exercício da Prova Conceitual da pesquisa de Justulin (2017).



Fonte: Justulin (2016, p. 355–356).

As estratégias utilizadas pelos alunos foram: regra do peixinho, frações equivalentes, uso da representação gráfica e transformação para decimais. Já os erros foram variados. Apenas 12,63% acertaram os itens *a* e *b* e 9,5% acertaram o item *c*.

O pesquisador enfatiza a importância de incluir discussões sobre os procedimentos empregados, possibilitando o "pensar sobre o pensado" e o desenvolvimento de uma reflexão produtiva.

Konic (2019) avaliou, a partir de um teste diagnóstico[142], o conhecimento didático-matemático de número decimal dos participantes e debateu os problemas que dele emergem. A análise, segundo o enfoque ontossemiótico (EOS) do conhecimento e do ensino de Matemática, centrou na complexidade dos objetos e significados dos problemas envolvendo os decimais e suas múltiplas representações, tais como a distinção entre a representação decimal em números decimais finitos e números decimais infinitos (periódicos e não periódicos). Para o autor, "essas primeiras questões dão indícios da complexidade existente no estudo dos números e a necessidade de tomar precauções no ensino para não gerar problemas conceituais derivados da distinção entre representação e número" (p. 88).

Em uma questão sobre o que os participantes entendem por um número decimal, o autor identificou seis tipos de concepções: fracionária; expressão decimal finita; fracionária e expressão decimal finita; partes da unidade; prática (baseada em elementos da vida cotidiana); sistêmica (com base em um sistema de numeração base 10). A concepção mais comum evocada

[142] A pesquisa foi realizada por meio de duas situações problema: "i) Explique com suas próprias palavras o que entende por um número decimal; ii) a) A expressão 1,3456789 representa um número decimal? Justifique sua resposta; b) A expressão 0,454545... (45 repetido indefinidamente) representa um número decimal? Justifique sua resposta; c) O número cuja expressão é 4,10999... (9 repetido indefinidamente) é um número decimal? Justifique sua resposta; d) O número 3 é um decimal? Justifique sua resposta." (KONIC, 2019, p. 88,91).

pelos futuros professores foi do tipo "polinómica" (expressão decimal finita), interpretada como uma concepção restrita de que os números decimais são "números com vírgula". Outras concepções traduzem uma diversidade de significados, também parciais, associados à noção.

Dentre os conflitos elencados pelo autor destacam-se concepções como:

- a expressão decimal de um número é um número decimal;
- um número decimal é parte da unidade (0,...);
- um número decimal é um número que está formado por dois inteiros separados por uma vírgula;
- um número decimal é um número que não é inteiro.

Vale observar que a representação decimal é confundida com o próprio número (DUVAL, 2008). Assim, o sentido atribuído ao número decimal por esses futuros professores não contempla um significado mais abrangente, permanecendo restrito ao obtido nos anos iniciais. Konic (2019) conclui que:

> O fato de aparecer uma diversidade de concepções de número decimal, pode nos fazer pensar na riqueza conceitual que isso implica, ou seja, na diversidade de significados parciais associados a noção de número decimal. Com o qual, se forem estabelecidas as necessárias relações entre os referidos significados, aproximações progressivas ao significado global da noção seriam alcançadas. (KONIC, 2019, p. 89)

Assim, para explorar esta riqueza conceitual envolvendo o número racional, é importante integrar os significados parciais dos racionais (subconstructos) ao longo de toda a escolarização.

Medina (2013) relata uma experiência com alunos do ensino médio com atividades relacionadas ao conceito de ordenação dos números racionais. As dificuldades evidenciadas com os racionais são persistentes ao longo da vida escolar e alternativas para o ensino deste conceito são necessárias. O artigo traz poucas informações a respeito da metodologia adotada e conclusões. A atividade envolveu a comparação de frações usando tiras de papel como recurso didático. O aluno constrói seu próprio kit de tiras, com diferentes cores e os resultados são socializados ao final da atividade. O autor conclui que os alunos não se sentiam seguros na ordenação das frações e só conseguiram realizar a comparação de que grandeza é maior, $\frac{3}{4}$ ou $\frac{4}{5}$, sobrepondo as tiras de papel.

Menegazzi (2013) relata uma experiência envolvendo alunos de um curso de Pedagogia, na disciplina *"Fundamentos Teóricos e Metodológicos da Matemática*", realizada em duas etapas: uma avaliação diagnóstica e uma sequência de atividades com objetos digitais de aprendizagem em um laboratório, abordando os subconstructos.

A autora conclui que os participantes têm "grande familiaridade com a concepção parte-todo, com um apelo visual significativo" (p. 264). Em destaque, "as dificuldades na representação das operações de adição e subtração com frações foram evidenciadas" (p. 264), além da dificuldade na localização das frações na reta numérica demonstrando "que o significado de número fracionário não está devidamente desenvolvido" (p. 264). Quanto à utilização de objetos digitais, destaque para "o desconhecimento dos mesmos como recurso didático nos anos iniciais" e para a utilização apenas dos "materiais concretos tradicionalmente perpetuados ao longo do tempo" (p. 264).

O objetivo de **Menegazzi e Dalcin (2016)** foi identificar as concepções de números racionais de um grupo colaborativo de alunos de um curso de Pedagogia. A coleta dos dados foi realizada por meio de um curso de extensão, denominado "*Conversas sobre Frações em um Grupo Colaborativo*", com a finalidade de viabilizar um exercício reflexivo e um processo de ressignificação do conceito de número racional, estimulando a produção de estratégias e recursos para o seu ensino. Foram utilizados diversos recursos como vídeos, artigos, capítulos de livros, livros didáticos e paradidáticos e o Frac-soma 235.

Os resultados apontam que a maior facilidade esteve centrada no subconstructo parte-todo, quociente e operador, que corroboram com outras pesquisas. Um resultado interessante é que, por meio do grupo colaborativo, ficou perceptível a existência de alguns discursos "prontos", como: "a criança precisa do material concreto para aprender"; "aquilo deve ter significado para a criança"; "muitos professores ainda são muito tradicionais"; "precisamos inserir as frações no contexto de vida da criança" (MENEGAZZI; DALCIN, 2016, p. 503), mas vazios de significado.

Mercado, Cabello e Martínez (2016) utilizaram um questionário exploratório (contendo 15 itens a respeito dos números decimais e frações), respondido por oito licenciandos e entrevista individual com dois deles. A pouca informação no artigo sobre as questões do questionário e das entrevistas leva à apresentação superficial dos resultados, afirmando que os futuros professores lançam mão da conversão para comparar quantidades, sugerindo uma associação entre a fração e decimal ao mesmo número racional, vinculando um número à sua representação fracionária ou decimal. O significado mais frequente de número racional foi a divisão, principalmente na realização dessas conversões da forma fracionária para decimal; já os decimais, são utilizados como "uma escrita complementar aos naturais "agregando-lhes um ponto e a parte decimal" (MERCADO; CABELLO; MARTÍNEZ, 2016, p. 1044).

Moura e Mattos (2014) buscaram verificar o conhecimento dos alunos do ensino fundamental (oitavo e nono anos) e médio (primeiro ao terceiro ano) a respeito dos números

racionais, com um total de 358 alunos. A escolha desta faixa etária ocorreu “para que fosse possível visualizar melhor a situação atual relacionada aos conhecimentos dos estudantes, pois nesta fase escolar o domínio destes conteúdos já deve estar consolidado na estrutura cognitiva dos alunos” (p. 176). A coleta de dados ocorreu por meio de um questionário-teste com dez questões envolvendo frações, decimais e porcentagem. Os resultados são apresentados no artigo de maneira bem sucinta, com um quadro contendo as porcentagens de acertos separados por níveis de ensino e, em seguida, um parágrafo superficial de discussão.

Os resultados gerais apontam que no EF apenas 2,11% dos alunos responderam todas as questões corretamente e no EM, 2,5% dos alunos erraram todas as questões e 4,13% acertaram todas as questões. Esses resultados revelam “uma grande defasagem de conhecimento de pessoas que estão finalizando a terceira etapa da educação básica e necessitam desses conteúdos para a continuidade dos estudos e para a manutenção de sua vida social” (P. 195). Eles também aferem que este baixo desempenho “pode estar relacionado primeiramente a um ensino com pouco sentido e sem correspondência com a vida real destes alunos” (p. 198).

Muller et al. (2020) utilizaram um questionário com seis tarefas (parte-todo, quociente, operador, medida, decimal e razão), seguidas de três questões abertas, buscando informações a respeito das dificuldades encontradas e das explicações que participantes dariam a futuros alunos sobre cada tarefa. Os resultados decorrem de análises quantitativa e qualitativa. Um aspecto negativo é que as tarefas, não incluídas no artigo, dificultam a discussão e a inserção dos resultados em nossa pesquisa.

Um resultado particular é que os futuros professores espanhóis apresentaram melhor domínio do conteúdo do que os nicaraguenses. Em geral, os espanhóis apresentaram melhor domínio em parte-todo, operador e decimal, e limitações nos conceitos de medida e quociente. Já os futuros professores nicaraguenses têm mais dificuldades, à exceção do subconstructo parte-todo. Os autores entendem que o domínio do subconstructo parte-todo e as limitações com os outros subconstructos apontam para a ênfase que eles podem reproduzir quando se tornarem professores.

Nardoni et al. (2015) tiveram como objetivo avaliar a compreensão que os alunos alcançam a respeito dos números racionais, ao finalizar o ensino médio. O referencial teórico utilizado foi o enfoque ontossemiótico do conhecimento e ensino de Matemática. Para isto, os autores planejaram um instrumento contendo uma série de atividades que os alunos ingressantes do curso de Ciências Econômicas deveriam apresentar por escrito e, em seguida, foi realizada uma entrevista clínica semiestruturada. Os autores analisaram o sistema de práticas matemáticas realizadas pelos alunos frente às situações-problemas, com a finalidade de

estabelecer a relação entre as práticas que são capazes de realizar com este conceito e o significado que construíram do mesmo. Eles buscaram os argumentos que os alunos colocassem em voga, a linguagem matemática, conceitos, propriedades e procedimentos que desencadearam da situação-problema.

Os resultados apontam que: os conceitos mais utilizados envolvem frações, operações com frações, expressões decimais e operações, o que evidencia uma aprendizagem centrada em rotinas e algoritmos próprios deste conjunto numérico; os procedimentos mais utilizados envolvem representar graficamente as frações em quantidades contínuas e algoritmos básicos das operações com racionais; apresentam dificuldades para interpretar problemas verbais, tradução da linguagem simbólica para natural ou vice-versa e aplicação de procedimentos adequados para encontrar a solução; utilizam processos de argumentação mediante práticas discursivas apenas quando se sentem pressionados a fazer e normalmente não argumentam de maneira escrita.

Oliveira e Araman (2017) tiveram como foco identificar dificuldades de alunos dos ensinos fundamental e médio com o conceito de número racional, por meio da aplicação de uma sequência de 11 atividades, das quais cinco foram discutidas no artigo. A conclusão é que, que apesar do índice de respostas corretas ser maior no ensino médio, as dificuldades ainda são as mesmas e persistem ao longo dos anos.

Oliveira et al. (2020) analisaram o modo como 38 alunos de um curso de Engenharia respondem a problemas envolvendo números racionais. Os participantes estavam cursando uma disciplina obrigatória de Física do segundo período do curso, na qual foi aplicado um questionário com quatro questões abertas.

As análises das respostas das questões 1 e 3 indicam que, embora o cálculo da questão 1 seja relativamente simples, $[640 + 1350]x3$, apenas 29% dos alunos realizaram corretamente. O erro mais comum foi utilizar a operação de divisão no lugar da multiplicação, o que aponta para uma dificuldade de interpretação da questão, pois não faz sentido a potência instalada de todo o estado ser menor que a potência instalada em Angra 2. O desempenho na questão 3 foi melhor do que nas outras, entretanto, "é preocupante o fato" de que ainda temos 13% de alunos que não conseguiram resolver uma soma de frações (item *a*). No item *c* o índice de erros aumentou para 32%, o que evidencia uma dificuldade com Álgebra básica.

Levando em consideração que são alunos de um curso de Engenharia e, cerca de 95% tinham sido aprovados na disciplina de Cálculo I e 76% na disciplina de Cálculo II, é interessante observar que o desempenho dos alunos aponta para uma dissonância. Assim, "estes erros mostram a falta de compreensão nos processos operatórios, de maneira que os estudantes

aplicam regras memorizadas sem refletirem sobre sua validade" (OLIVEIRA et al., 2020, p. 144).

Os autores recomendam superar os desafios com conceitos básicos utilizando ambientes virtuais, capacitação pedagógica para os professores e redução do número de vagas nos cursos de Engenharia.

Os três níveis de ensino são contexto da pesquisa de **Paraol e Rodriguês (2018)**, com o objetivo de averiguar dificuldades dos alunos com relação ao tema frações, por meio da elaboração e aplicação de uma avaliação diagnóstica. Distingue-se das demais ao adotar como referencial teórico a TRSS.

Os resultados destacam inúmeras dificuldades dos alunos do ensino fundamental e do ensino médio (menos expressiva) com conversões para o registro decimal, em situações em que o registro inicial era o figural ou fracionário. Já a conversão do registro figural para o fracionário não parece ser um obstáculo. Inferimos que tal resultado decorre da ênfase no subconstructo parte-todo ao longo da escolarização.

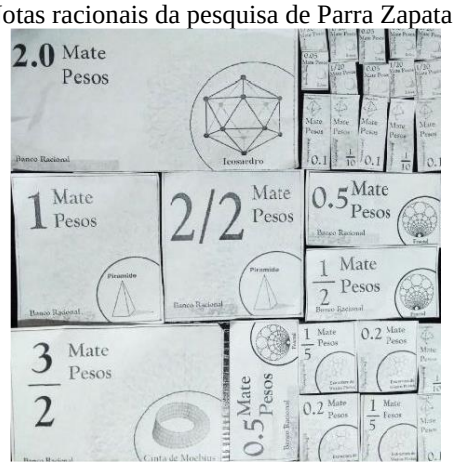
Os autores argumentam em favor da importância da TRRS no processo de ensino aprendizagem dos números racionais, uma vez que são exploradas superficialmente nos ensinos fundamental e médio. Uma das conclusões dos autores é que estas dificuldades "na compreensão (e na coordenação) entre os registros pode estar atrelada à confusão que o estudante faz entre o objeto representado e a sua representação" (PARAOL; RODRIGUÊS, 2018, p. 32).

Parra-Zapata et al. (2021) têm como objetivo planejar e desenvolver um ambiente de aprendizagem[143] com maneiras culturalmente codificadas de pensar matematicamente acerca dos números racionais. A experiência foi realizada com alunos do ensino médio e consistiu na criação de uma microssociedade[144], que promoveu a mobilização de práticas matemáticas, por meio da construção de um papel moeda pelos investigadores, com diferentes denominações, estabelecidas a partir das representações dos números racionais, como na Figura 38.

[143] O ambiente de aprendizagem é entendido como um espaço na sala de aula em que se promove a participação, a interação e a reflexão para a construção do conhecimento matemático.

[144] Os autores denominam de microssociedade "o espaço simbólico gerado na aula que tentou reproduzir, a pequenas proporções, algumas relações (econômicas, sociais, políticas, entre outras) e maneiras de atuar na sociedade, com o fim de trazer elementos do cotidiano para a aula de matemática" (PARRA-ZAPATA et al., 2021, p. 210, tradução nossa).

Figura 38 - Notas racionais da pesquisa de Parra Zapata et al. (2021).



Fonte: Parra-Zapata et al. (2021, p. 210).

A área de cada nota racional é proporcional à sua denominação. Por exemplo, a área da nota de um *MatePesos* é igual a cinco vezes a área da nota 0,2 *MatePesos*.

Os autores concluem que a tarefa das notas racionais foi significativa, "pois os elementos se converteram em instrumentos mediadores que permitiram a compreensão e a apropriação de saberes culturais institucionais acerca dos números racionais através da mobilização de suas práticas matemáticas" (p. 222). Tais instrumentos fortaleceram e modificaram outros aspectos da prática matemática dos alunos, como os conceitos e representações dos números racionais.

Pérez (2012) utilizou apoios virtuais para rever as operações com frações, por meio de problemas envolvendo situações do mundo real, o uso da transversalidade de diferentes áreas da Matemática e seu uso em contexto para solucioná-los. O objetivo central foi descrever as mudanças que ocorrem ao implementar um *Web Quest* como elemento nivelador de conhecimentos básicos de números racionais para alunos do ensino médio tecnológico.

Os resultados apontam que, após a aplicação do *Web Quest*, houve um aumento de 35% na transformação, simplificação, ordenação e operações com frações. Assim,

> Constatou-se que é educacionalmente proveitoso incluir várias formas que os alunos percebam o que querem transmitir, considerando a informática e seus elementos como um conjunto de ferramentas que visam melhorar e sinergizar a tarefa de aprendizagem envolvendo vários tipos de apoio virtual. (PÉREZ, 2012, p. 7, tradução nossa)

No entanto, "o uso de qualquer tipo de recurso educacional não garante, por si só, a geração de conhecimento" (PÉREZ, 2012, p. 7, tradução nossa) e, por isso, a atividade deve ser bem planejada para alcançar os objetivos propostos.

Envolvendo 28 graduandas de um curso de Pedagogia[145], a pesquisa de **Proença (2015)** explora as operações com frações sem o uso direto de algoritmos ou simbologia específica. O

[145] Disciplina Metodologia de Ensino de Matemática – 1ª a 4ª séries do Ensino Fundamental II.

autor mostra sua preocupação com o tema, afirmando que, “além das lacunas no conhecimento de frações e da falta de conhecimento do trabalho baseado na resolução de problemas de professores dos anos iniciais, percebe-se que isso já vem ocorrendo na formação inicial” (PROENÇA, 2015, p. 731).

O autor propõe a resolução de problemas como forma de ampliar a compreensão dos conceitos e procedimentos matemáticos, por meio da articulação de diferentes estratégias, sem o uso direto do algoritmo e simbologia específica, isto é, sem o uso do número fracionário ou o uso do MDC (Máximo Divisor Comum) ou a aplicação direta de algoritmos, de tal forma a evitar o cálculo direto do MMC (Mínimo Múltiplo Comum) nas operações.

A discussão no artigo retoma a adição $\frac{3}{4} + \frac{7}{10}$ presente em um problema contextualizado sobre o percurso percorrido por dois amigos[146]. As estratégias apresentadas consistiram em: 64% via desenhos (retângulos), 24% via cálculo do MMC, 4% via cálculo do MDC e 8% deixaram em branco. Considerando os acertos, 28% resolveram via desenhos e 24% usando o MMC, totalizando 52% de acertos. A homogeneidade nas estratégias dos futuros professores ao resolver as questões propostas é interpretada como conhecimento restrito sobre esta abordagem de ensino, como um conhecimento pedagógico do conteúdo.

Já com relação aos erros cometidos ao usar outros métodos, como o do desenho (36%), o principal foi não representar as frações por meio de um mesmo todo. O autor denomina este tipo de erro como ‘*dificuldades no conhecimento semântico do conceito de todo’*, que evidencia uma inconsistência no entendimento das diferentes interpretações de número racional, levando a estratégias limitadas e pouco flexíveis de ensino.

O pesquisador concluiu que, por meio da resolução do problema envolvendo a noção de equivalência de frações, o reconhecimento do *todo* como um conhecimento especializado de conteúdo ainda não estava devidamente constituído pelos participantes (PROENÇA, 2015, p. 751).

Retana e Muñoz (2018) analisam o conhecimento de conteúdo sobre números racionais (frações e números decimais) compartilhado por futuros professores. Os autores consideram que um professor do ensino fundamental “deve ter conhecimentos sobre o uso e gerenciamento de frações e decimais, que permitem resolver problemas ou exercícios do currículo do ensino fundamental” (RETANA; MUÑOZ, 2018, p. 115, tradução nossa). A pesquisa é quantitativa e o instrumento para coleta de dados foi uma prova de conhecimentos acerca de tópicos do ensino

[146] O autor não inseriu o problema no artigo.

fundamental, respondida por 275 futuros professores. O questionário é composto por 30 tópicos (denominados pelos autores de reativos).

Os autores concluem que:

> os futuros professores que participaram do nosso estudo conseguem resolver problemas com frações e decimais projetados para estudantes do ensino fundamental, ou seja, eles sabem operar com esse conjunto de números, por exemplo, resolver problemas envolvendo algumas das operações básicas. Embora, como observa-se na análise das informações, existam alguns alunos que não o fazem, bem como certos conteúdos que, apesar de ser muito elementares, não foram resolvidos corretamente por uma porcentagem considerável de participantes. (RETANA; MUÑOZ, 2018, p. 134, tradução nossa)

No entanto, os autores compreendem que isto não é o suficiente para o ensino de Matemática, pois são necessários outros tipos de conhecimento. Dentre outros resultados, os autores concluem que os futuros professores resolvem melhor os tópicos que envolvem números decimais do que os que envolvem as frações.

Riquelme e Vergara (2019) enunciam como objetivo elaborar uma proposta didática para facilitar o processo de ensino-aprendizagem do conceito de razão na educação básica e propõem uma investigação de elementos matemáticos que promovam a compreensão e aquisição do conceito de razão.

A pesquisa foi realizada com futuros professores da Universidade Metropolitana de Ciências da Educação do Chile, cujo curso de Pedagogia tem a disciplina "*Pensamento Variacional e Proporcional*" no quarto semestre. De acordo com o programa curricular, os alunos "devem possuir todo os conteúdos matemáticos e seu ensino, necessários para desenvolver nos alunos o pensamento variacional e proporcional" (p. 337). Entretanto, os futuros professores chegam ao quarto semestre "fortalecidos em seu conhecimento da matéria, que envolve o sistema de números naturais, inteiros e racionais, mas com deficiências em seu conhecimento pedagógico" (p. 337). Assim, uma grande parcela desses professores em formação encontra-se em um nível de pensamento pré-proporcional, que seriam concepções centradas em relações qualitativas.

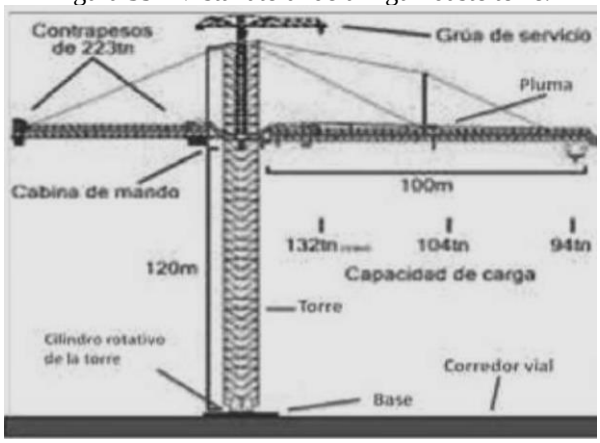
A pesquisa se desenvolveu com cinco sessões correspondentes aos temas da disciplina, sendo que na primeira sessão os pesquisadores identificaram quais conhecimentos os futuros professores possuíam sobre o tema[147]. É interessante observar que os futuros professores não tiveram dificuldades de resolver os problemas de razão e proporção (conhecimento de conteúdo), mas tiveram dificuldades em responder as questões conceituais como "o que é uma razão?" e "para que serve?".

[147] Os autores utilizaram questões como: "O que é uma razão?", "Para que serve", "Identifique os elementos de uma razão", "Escreva a razão 3:5 com palavras", entre outros problemas envolvendo razão e proporção.

Considerando que os alunos da escola básica não alcançam as expectativas sobre a aprendizagem desta temática no ciclo escolar, a experiência apresentou uma proposta metodológica em cinco níveis, envolvendo conhecimentos a serem adquiridos em ordem crescente de dificuldade, e que permite ao professor identificar aspectos matemáticos da compreensão do conceito de razão: Ler e escrever uma razão; Simplificar; Identificar os elementos da razão e operar com eles; Calcular a constante k; Multiplicar os elementos da razão por seu valor unitário.

Reyes e Prieto (2015) apresentam uma experiência de um fenômeno de simulação por meio do funcionamento de um guindaste mecânico do tipo torre[148] (Figura 39), com alunos do ensino médio.

Figura 39 - Vista lateral de um guindaste torre.



Fonte: Reyes e Prieto (2015, p. 47).

Esta atividade de simulação no geogebra envolveu os subconstructos de número racional, além de conhecimentos de geometria plana, sendo necessário resolver uma série de tarefas de construção, de forma progressiva. No artigo, os autores apresentaram a parte da experiência que corresponde à construção de um corredor rodoviário. Os subconstructos parte-todo, quociente e operador foram abordados na experiência de simulação, sendo este último determinante na solução da questão proposta.

Os autores concluem que a familiaridade com o número racional foi determinante ao longo da experiência de simulação, sendo o conceito mais evocado. Em particular, uma perspectiva funcional da interpretação de número racional como operador é observada dando sentido à composição de funções lineares como uma simples transformação de um segmento.

[148] É uma estrutura metálica desmontável e usada comumente para transportar carga pesada dos portos marítimos ou na construção de grandes edificações. O guindaste em questão corresponde ao modelo K-10000 de origem dinamarquesa (p. 47).

Nesta experiência, ficou perceptível a conexão entre as distintas interpretações de um número racional e outras noções matemáticas, que ocorreu de uma forma dinâmica e contextualizada, e não mecânica.

Salazar et al. (2016) teve como objetivo "desenvolver uma sequência de ensino com o uso da tecnologia para estudantes de nível universitário, de forma independente, aprender com compreensão simplificar frações" (p. 162).

Os 14 alunos matriculados na disciplina de "*Fundamentos de Matemática*" de cursos de engenharia participaram da pesquisa. Diversos instrumentos metodológicos foram utilizados na coleta do material para análise: dois exames escritos, diagnóstico e final, a sequência didática utilizando tecnologias e uma enquete de avaliação das atividades. Os exames constam de 12 tópicos, envolvendo perguntas abertas e exercícios que requerem um procedimento para obter o máximo divisor comum ou a simplificação de frações. Para a sequência didática utilizou-se o geogebra, que continha dois deslizantes, um correspondendo ao numerador e outro ao denominador, cujos valores formavam um retângulo, dividido em partes iguais. A sequência consiste de seis páginas da web[149] vinculadas e a enquete teve a finalidade de saber a opinião dos alunos com relação a sequência didática.

Os autores concluem que a sequência didática proposta teve um impacto favorável, pois aumentou significativamente o rendimento acadêmico dos alunos, observado por meio dos exames escritos. Em destaque, os aspectos dinâmicos do software geogebra permitiram obter a representação geométrica de diferentes frações e suas equivalentes. Também foi possível relacionar o valor da fração, sua representação geométrica e sua representação numérica.

Sanchez-Luján e Moreno (2018) propõem uma investigação para identificar o nível de competência Matemática[150] em frações conforme os níveis estabelecidos pela OCDE (Organização para a Cooperação e Desenvolvimento Econômico) e os erros mais comuns que surgem na resolução de problemas de 42 alunos ingressantes de um curso superior em contabilidade.

Para atingir os objetivos propostos, os pesquisadores fizeram uma breve revisão dos algoritmos das operações com frações e aplicaram uma sequência didática apoiada na TSD (Teoria das Situações Didáticas) de Brousseau. Em seguida, eles propuseram 19 exercícios

[149] Início, frações, frações equivalentes, simplificação, máximo divisor comum e aplicação.
[150] "A capacidade de um indivíduo identificar e compreender o papel que desempenha a Matemática no mundo, fazer julgamentos bem fundados e utilizar e se envolver na Matemática de uma maneira que atenda suas necessidades vitais como um cidadão construtivo, comprometido e reflexivo" (OCDE, 2006, p. 74 apud SANCHEZ-LUJÁN; MORENO, 2018, p. 527, tradução nossa).

envolvendo operações de frações, com a finalidade de verificar se as dificuldades eram devido à interpretação dos problemas ou às dificuldades com as operações.

Os resultados apontam que os alunos não se posicionaram em um nível de competência maior ou igual a três. A interpretação dos pesquisadores é que o grupo analisado "carece de habilidades de comunicação", ou seja, os alunos não souberam justificar seus procedimentos e raciocínios. No geral, 29,7% dos alunos encontram-se no nível 2 e 70,3% nos níveis 0 e 1 de competência Matemática.

Ao comparar a sequência didática e a lista de exercícios, os pesquisadores apontam que o desempenho foi melhor na primeira (83,25 de média) do que na segunda (62,21 de média). Em geral, as dificuldades dos alunos não são relativas à interpretação dos problemas, quando estes lhe são familiares ou quando a resposta necessita de um procedimento direto.

Santana, Oliveira e Barreto (2015) refletem sobre a formação e prática docente e o uso de diferentes representações no ensino de frações, por meio de dois estudos. Aqui analisamos apenas o primeiro estudo[151], cujo objetivo foi investigar a compreensão de alunos de um curso de Pedagogia com relação à diversificação de registros de fração a partir de um roteiro de entrevista com 11 situações.

Respostas à situação problematizadora "*Represente o número racional dois terços de quatro maneiras diferentes*" foram analisadas, levando em conta a diversificação de registros. Os resultados apontam que os participantes utilizaram: o registro numérico fracionário (9); o registro figural contínuo (9); o registro numérico decimal (5); o registro numérico da divisão (3); o registro figural discreto (1); o registro em língua natural (1); o registro numérico percentual (1).

Alguns alunos não apresentaram os quatro tipos de representações diferentes, sugerindo "uma dificuldade de perceber a fração em registros diversificados" e "limitação quanto à percepção dos participantes em relação aos diferentes registros de representação semiótica de fração" (SANTANA; OLIVEIRA; BARRETO, 2015, p. 13). Apesar da diversidade de representações, observa-se uma predominância dos registros numéricos.

Refletindo sobre a prática do futuro professor, emerge como extremamente relevante o conhecimento acerca dos diferentes tipos de registros "que possibilitem a escolha de uma ou de várias representações que o ajudem a expressar a ideia que deseja comunicar" (SANTANA; OLIVEIRA; BARRETO, 2015, p. 14).

[151] O segundo artigo traz uma pesquisa cujos participantes são professores já formados, distanciando-se do foco de nossa pesquisa.

Silva, Cândido e Souza (2018) tiveram como objetivo investigar as estratégias utilizadas por futuros professores para resolver situações multiplicativas, levando em consideração o conhecimento comum de conteúdo e o conhecimento especializado de conteúdo. Para isto, propuseram às alunas do curso de Pedagogia a resolução de situações com estruturas multiplicativas de dois tipos: valor omisso e comparação.

Em referência ao conhecimento do futuro professor, os autores concluem que as alunas não dominam o "conhecimento comum de conteúdo" e antecipam que, possivelmente, elas terão dificuldades nas outras categorias de conhecimento:

> as participantes deste estudo tiveram dificuldades na compreensão do problema e, mesmo com os questionamentos, não refletiram sobre suas afirmações. Elas provavelmente terão dificuldades em sua atividade profissional ao ensinar sobre esse assunto, pois é essencial o conhecimento comum do conteúdo. (SILVA; CÂNDIDO; SOUZA, 2018, p. 32)

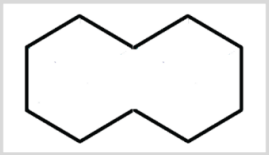
Por fim, os pesquisadores destacam a necessidade de um processo de formação continuada abordando tais conteúdos de maneira a proporcionar um conhecimento comum e especializado.

Silva, Carvalho e Campos (2018) identificaram e descreveram o conhecimento comum e especializado de conteúdo dos futuros professores acerca dos significados da divisão entre frações. Para isto, eles propuseram três situações, sendo duas tarefas e um *caso de ensino*[152], para 11 alunos de um curso de Licenciatura em Matemática.

A primeira tarefa consistiu na representação das frações por meio de figuras.

Figura 40 - Atividades da pesquisa de Silva et al. (2018).

1) Represente metades, quartos, sextos e duodécimos da figura a seguir:



2) Considerando a unidade da figura anterior, se cada duodécimo for formado por um triângulo equilátero e cada quarto for formado por um trapézio, quantos trapézios caberiam em 11 triângulos. Represente os cálculos aritmeticamente.

3) Analise a situação fictícia e reflita sobre a situação: "Um dos alunos resolveu o problema anterior e encontrou como resultado $3\frac{1}{6}$. Discuta essa resposta"

Fonte: Silva, Carvalho e Campos (2018).

Sobre a segunda tarefa os autores pontuam que foi possível encontrar indícios de que:

> induziu a maioria dos futuros professores a resolvê-la por meio da observação empírica das divisões marcadas na figura e, quando solicitados a representar aritmeticamente, se valeram da seguinte relação entre quantidades:

[152] Instrumento de natureza descritiva, com uma situação real ou fictícia como ferramenta para potencializar o processo reflexivo na formação docente.

$\frac{quantidade\ de\ triângulos\ destacadoos\ na\ unidade}{quantidade\ de\ triângulos\ de\ cada\ trappézio}$, sem tentar estabelecer relação entre as frações representativas de cada figura $\frac{11}{12} \div \frac{1}{4}$. (SILVA; CARVALHO; CAMPOS, 2018, p. 212)

Deste modo, foi possível a discussão do seguinte algoritmo: $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} \div \frac{bc}{bd} = \frac{ad}{bc}$.

Os autores concluem que os futuros professores estavam dotados de conhecimento acerca dos cálculos necessários para realizar a operação de divisão entre frações. Além de concluir ser possível, por meio das atividades e discussões, ampliar o conhecimento especializado de conteúdo e conhecimento pedagógico de conteúdo.

Dentre as pesquisas que analisaram os três níveis de ensino, **Silva e Dias (2015)** tiveram como objetivo identificar as marcas das relações institucionais nas relações pessoais dos alunos da educação básica e ensino superior, referentes à evolução dos conhecimentos acerca da representação decimal de números racionais. As perguntas que nortearam a pesquisa foram: "Como a noção de fração em sua representação decimal é trabalhada na Educação Básica?" e "Ocorre evolução dos conhecimentos dos estudantes da Educação Básica, quando da resolução de tarefas associadas à representação decimal das frações?".

Os autores analisaram a abordagem apresentada em alguns livros didáticos (quarto, quinto e sexto anos) a respeito das frações e as tarefas mais comuns encontradas nos textos analisados foram: i) passar de um objeto ostensivo[153] de representação pictórico ou figural para outro, em particular, para a representação decimal; ii) passar da linguagem natural para a representação decimal; iii) Comparar números decimais; iv) Somar e subtrair números decimais. A partir desta análise, construíram um teste diagnóstico, fundamentado na TAD.

Para os autores, "nenhum estudante expressou a resposta na representação decimal" (p. 125) e assim, "a relação pessoal com o objeto ostensivo 'representação decimal' parece não ter sido apropriada pelos estudantes, mesmo quando esse conteúdo tenha sido revisitado nos anos subsequentes à sua introdução (4° ano)" (p. 125). Eles concluem que, apesar da representação decimal ser utilizada socialmente, sua utilização em situações escolares não é eficiente, apontando para a necessidade de um trabalho específico em relação às diferentes representações e processos de conversões.

[153] Os autores denominam de objeto ostensivo aqueles "percebidos aos sentidos humanos, podendo ser manipulados, como, por exemplo, as fórmulas, as figuras, os gráficos, a escrita, os gestos etc.). Já os não ostensivos são "aqueles que, por si só, não podem ser vistos sem a manipulação dos ostensivos, mas apenas evocados como, por exemplo, o conceito de função, a noção de proporcionalidade etc" (p. 121). Assim, eles propõem considerar como objetos ostensivos as representações (fracionária, pictórica, decimal e língua natural) e como objetos não ostensivos os diferentes significados de números racionais (parte-todo, quociente, probabilidade, operador multiplicativo, número, medida e razão), baseado em Cavalcanti e Guimarães (2008).

Vale a ressalva de que é difícil afirmar que a ‘representação decimal’ não foi apropriada pelos alunos, porque o enunciado da questão não solicitava uma resposta usando esta representação. Os próprios autores mencionam este ponto. Além disso, acreditamos não ser possível concluir, a partir da resposta de uma única questão, que um aluno não se apropriou desta forma de representação. Como discutido no capítulo 4.2, diversas pesquisas, principalmente as que envolvem as operações com frações, destacam que muitos alunos convertem os números racionais na forma de frações para sua representação decimal para depois operá-los.

Soto (2017) tem como objetivo “estudar o processo de elaboração, implementação e análise de uma ‘sequência de trabalho em sala de aula’ que aborda a revisão e (ou) reconstrução do conhecimento associado à razão e à proporcionalidade” (p. 1204) e investigar como esta sequência contribui para o processo de desenvolvimento de competência matemática dos futuros professores. Para isto, foi realizada uma experiência de ensino dividida em quatro sessões com alunos do curso de Pedagogia, na disciplina “Didática da Matemática”, com tipos de tarefas matemáticas específicas.

No primeiro encontro, foram levantadas as seguintes expectativas de aprendizagem com relação ao subconstructo razão e a ideia de proporcionalidade (p. 1205): 1) Reconhecer o valor social das comparações entre quantidades; 2) Elaborar e aplicar diferentes estratégias que permitam interpretar e resolver problemas de situações cotidianas, no que se requer da aplicação do conceito de razão; 3) Aplicar e justificar a relação de equivalência entre razões; 4) Expressar uma razão mediante distintas representações.

Embora interessante, os resultados apresentados não foram discutidos em profundidade.

Trevisan e Domingues (2017) têm como objetivo explorar as distintas ideias e contextos nos quais o pensamento proporcional se aplica e se consolida. A pesquisa foi desenvolvida usando uma prova em fases como instrumento, com uma turma do terceiro ano do ensino médio. A ideia foi elaborar questões em uma perspectiva de avaliação enquanto prática de investigação e oportunidade de aprendizagem” (p. 1).

Os autores abordam um único problema de comparação da prova em fases. As estratégias utilizadas pelos alunos na resolução do problema, que exigia apenas comparações, foram: subtração (9), divisão (6) e regra de três simples (1), sendo este último, o único grupo que resolveu de maneira correta e evidenciou uma compreensão da situação.

Os autores concluem que: a dificuldade em estabelecer conversões entre as representações (fracionária e decimal) ficou evidente, sendo que os alunos “evitam o máximo usar esse conceito, mostrando não associá-lo como forma de representação do raciocínio

proporcional" (TREVISAN; DOMINGUES, 2017, p. 6); que os problemas de comparação se mostram mais difíceis de resolver do que os de valor omisso.

Vecino (2015) cujo objetivo foi explorar os modos de resolução de um problema envolvendo porcentagem, foi a única pesquisa com este foco. Para isto, o pesquisador propôs um problema[154] sobre uma situação habitual. Os recursos utilizados pelos participantes na resolução foram: equação, sistemas de equações e regra de três. Com relação aos erros[155], os autores classificaram em três grupos: os que não registaram a solução, os que não veem a % como operador (21 casos) e os que traduziram incorretamente a situação.

Os autores concluem que a porcentagem é predominantemente considerada como uma quantidade e não como um operador, e por isso, os participantes da pesquisa apresentaram soluções absurdas. De uma perspectiva cognitiva, a percepção do problema e os erros cometidos têm sua "origem nas representações rígidas dos conteúdos escolares, desconectadas das redes de significados que deveriam ter sido construídas pelos alunos" (p. 384). Já de uma perspectiva pessoal, os erros estão relacionados a crenças comuns sobre a matemática escolar, com pouca relação com o mundo real.

[154] "Cinco amigos viajaram para Barcelona e, depois de uma semana, decidiram ir todos juntos para Madri em um dos trens de alta velocidade. Procurando o preço da passagem pela internet, eles descobrem que se reservarem no trem da AVE com uma semana de antecedência, cada dois passageiros que viajam juntos, o segundo paga 60% do valor da passagem. Eles resolvem aproveitar essa oportunidade que acaba custando 462 euros. Qual é o custo da passagem no trem AVE para uma pessoa que viaja sozinha?" (VECINO et al., 2015, p. 379).

[155] Índices de erros: aspirantes ao ingresso (79%); estudantes secundários (34%); docentes em formação (50%).