UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO

INSTITUTO DE MATEMÁTICA

PROGRAMA DE PÓS GRADUAÇÃO EM ENSINO DE MATEMÁTICA

MARCUS VINÍCIUS ABREU PRATES

ESTUDO SOBRE AVALIAÇÃO E VALIDAÇÃO EM ARGUMENTAÇÃO MATEMÁTICA EM SALA DE AULA

Rio de Janeiro

2024

MARCUS VINÍCIUS ABREU PRATES

ESTUDO SOBRE AVALIAÇÃO E VALIDAÇÃO EM ARGUMENTAÇÃO MATEMÁTICA EM SALA DE AULA

Dissertação apresentada à Banca Examinadora do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro (PEMAT/UFRJ), como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Ensino de Matemática.

Orientadora: Prof.ª Dr.ª Lilian Nasser
Coorientador: Prof. Dr. Carlos Augusto Aguilar-Júnior

Rio de Janeiro

2024

CIP - Catalogação na Publicação

Pe

Prates, Marcus

Estudo sobre avaliação e validação em argumentação matemática em sala de aula / Marcus Prates. -- Rio de Janeiro, 2024.

304 f.

Orientadora: Lilian Nasser.

Coorientadora: Carlos Augusto Aguilar Júnior.

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal do Rio de Janeiro, Instituto de Matemática, Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática, 2024.

1. Arguentação matemática. 2. Ensino de matemática. 3. Provas matemáticas. 4. Argumentação matemática em sala de aula. I. Nasser, Lilian, orient. II. Aguilar Júnior, Carlos Augusto, coorient. III. Título.

Elaborado pelo Sistema de Geração Automática da UFRJ com os dados fornecidos pelo(a) autor(a), sob a responsabilidade de Miguel Romeu Amorim Neto - CRB-7/6283.

MARCUS VINÍCIUS ABREU PRATES

ESTUDO SOBRE AVALIAÇÃO E VALIDAÇÃO EM ARGUMENTAÇÃO MATEMÁTICA EM SALA DE AULA

Dissertação apresentada à Banca Examinadora do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro (PEMAT/UFRJ), como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Ensino de Matemática.

Banca examinadora

____
Prof.ª Dr.ª Lilian Nasser
Universidade Federal do Rio de Janeiro – UFRJ
Professora orientadora (Presidente)

____
Prof. Dr. Carlos Augusto Aguilar-Júnior
Universidade Federal do Rio de Janeiro – UFRJ
Professor coorientador

____
Profª. Drª. Joilma Silva Carneiro
Universidade Estadual de Feira de Santana – UEFS

____
Prof. Dr. Ruy Cesar Pietropaolo
Universidade Anhanguera de São Paulo – UNIAN-SP

____
Profª. Drª. Marta Élid Amorim Mateus
Universidade Federal De Sergipe – UFS

____
Profª. Drª. Cláudia Coelho de Segadas Vianna
Universidade Federal do Rio de Janeiro – UFRJ

Agradecimentos

Agradeço aos meus pais e familiares por todo apoio dado nesse período de formação, especialmente à minha mãe, cuja dedicação durante minha vida escolar, as orientações e conselhos me permitiram chegar até aqui.

Aos meus orientadores, professora Lilian Nasser e professor Carlos Augusto Aguilar Júnior por sua paciência e esmero na realização deste trabalho de pesquisa. Agradeço também pelo incentivo e mesmo pelas cobranças para que participássemos, como grupo, de eventos acadêmicos. Essa parte também é muito importante não só em minha formação acadêmica, mas como profissional.

Aos meus colegas do GPA²M, que muito contribuíram com o andamento da minha pesquisa. Seus apontamentos, sugestões e opiniões durante nossos encontros foram essenciais para a realização desta pesquisa e escrita deste trabalho.

Ao meu orientador da graduação, Marcelo Bastos, a quem até os dias de hoje trato como professor (porque é) e que mesmo após seis anos do término da nossa parceria como orientador e orientando segue sendo alguém que muito me ajuda e ampara sempre que necessário.

Aos professores que aceitaram o convite para participar desta pesquisa, contribuindo para a produção de dados em três etapas distintas, realizadas em diferentes momentos.

Agradeço também aos meus colegas do PEMAT pelas trocas de experiências, conversas e apoio mútuo durante todo o período do curso de mestrado.

Por fim, agradeço aos meus alunos. Eles, que vibraram ao saber do meu ingresso no mestrado (mesmo sem saberem exatamente do que se trata), sempre perguntaram sobre o andamento do curso e da pesquisa e também me apoiaram nesse período, são a principal razão de tudo isso. Obrigado por serem o combustível que me faz seguir adiante e que me fez chegar ate aqui, sigo adiante para ser sempre melhor para vocês.

Resumo

Este trabalho investiga as concepções de professores em relação à argumentação matemática e à prova. Situações cotidianas em sala de aula, como a tendência dos alunos a buscarem apenas uma resposta final aos problemas propostos, foram as motivações iniciais para a elaboração deste trabalho. Tomamos como norteadores as tipologias propostas por Balacheff (1988) e Hanna (1990), além das funções apresentadas por De Villiers (1990), a fim de verificar como e se os participantes da pesquisa estão alinhados com o que é proposto por esses autores e como compreendem as provas matemáticas. Também consideramos dados produzidos em trabalhos de investigação como os de Caldato (2018), Mateus (2015) e Aguilar-Júnior (2012), o que nos faz levantar a hipótese de que os docentes não valorizam argumentos informais ou ingênuos apresentados pelos alunos da Educação Básica. A pesquisa foi realizada com professores que corrigiram uma atividade composta por duas questões, respondidas por alunos do 9º ano do Ensino Fundamental. Além disso, os professores responderam a um formulário sobre suas concepções acerca do tema proposto, além de uma entrevista semiestruturada feita virtualmente. Por fim, os dois documentos– o que contêm as respostas para a correção e o formulário sobre as concepções dos professores – e a transcrição da entrevista são analisados em conjunto para verificar as similaridades entre as concepções desses docentes, suas práticas e as propostas apresentadas pelos teóricos da área, a fim de responder à questão de pesquisa: como os professores participantes da pesquisa compreendem, avaliam e validam a argumentação matemática em sala de aula? Verificamos que os docentes estão bem alinhados às propostas dos referenciais teóricos, incluindo os documentos oficiais, apesar de poucos terem tido contato com estudos em argumentação em suas graduações.

Palavras-chave: Argumentação Matemática. Prova. Validação. Professor de Matemática

Abstract

This study investigates teachers' conceptions regarding mathematical argumentation and proof. Everyday classroom situations, such as students' tendency to seek only a final answer to proposed problems, were the initial motivations for developing this study. We took as guidelines the typologies proposed by Balacheff (1988) and Hanna (1990), in addition to the functions presented by De Villiers (1990), in order to verify how and if the research participants are aligned with what is proposed by these authors and how they understand mathematical proofs. We also considered data produced in research studies such as those by Caldato (2018), Mateus (2015) and Aguilar-Júnior (2012), which leads us to raise the hypothesis that teachers do not value informal or naive arguments presented by Basic Education students. The research was conducted with teachers who corrected an activity consisting of two questions, answered by 9th grade Elementary School students. In addition, the teachers answered a form about their conceptions about the proposed theme, in addition to a semi-structured interview conducted virtually. Finally, the two documents – the one containing the answers to the correction and the form about the teachers' conceptions – and the transcript of the interview are analyzed together to verify the similarities between the conceptions of these teachers, their practices and the proposals presented by theorists in the area, in order to answer the research question: how do the teachers participating in the research understand, evaluate and validate mathematical argumentation in the classroom? We found that the teachers are well aligned with the proposals of the theoretical frameworks, including the official documents, despite the fact that few had had contact with argumentation studies in their undergraduate courses.

Keywords: Mathematical Argumentation. Proof. Validation. Mathematics Teacher

Sumário

Lista de figuras

Lista de tabelas

Introdução

Existe um vasto campo de pesquisa em torno das argumentações e provas matemáticas, seguindo diferentes caminhos e com diferentes objetivos, como, por exemplo, os trabalhos de Tall (1980, 1995), Balacheff (1988, 2022), Hana (1990), Nasser e Tinoco (2003), Aguilar-Júnior (2012) e Caldato (2018). Algumas pesquisas buscam relacionar ambos os termos, compreendendo-os como partes do mesmo processo; outras definem e explicam ambos sob diferentes pontos de vista; em outros casos, são criadas categorias para os níveis de argumentações; e ainda há quem procure estudar o desenvolvimento de argumentos e provas em sala de aula - como professores trabalham esses aspectos e de que forma estudantes se apropriam desse conhecimento e os aplicam em suas atividades.

Antes de tudo, é preciso responder a uma pergunta: O que é argumentar (ou o que é argumentação)? Para Weston (1996), argumentar é apresentar razões/dados favoráveis para sustentar um ponto de vista, para que assim haja uma conclusão. Outra ideia, apresentada por Amossy (2011), é de que a argumentação ocorre quando se tenta reforçar, modificar ou reorientar uma visão/opinião utilizando recursos de linguagem. A autora também relaciona a argumentação com a retórica clássica, que é definida como “a arte de persuadir”. Já Van Eemeren *et. al.* (1996) dizem que a argumentação é uma atividade da razão, tendo em vista que a pessoa que argumenta apresenta explicações racionais acerca de determinado assunto, para defender seu ponto de vista. Essas explicações são direcionadas a outra pessoa – e aqui o ato de argumentar também apresenta um caráter social – para mostrar os prós e contras do ponto de vista do argumentador. Embora essas três ideias e definições sejam diferentes em suas palavras, todas convergem para a tentativa de convencimento (do outro) e a validação de algo, sob certa perspectiva.

Ainda que essas três ideias apresentadas tratem de validação de um discurso utilizando a razão, todas são dadas por autores do campo da linguística. Agora, repete-se a pergunta, com um enfoque diferente: O que é argumentar matematicamente (ou o que é argumentação matemática)? Balacheff (2022) explica que há diferentes abordagens, diferentes formas de compreensão acerca desses termos. Segundo o autor, no uso comum (em casos gerais) o termo “argumentação” é utilizado para designar o processo de argumentar e também seu produto – a argumentação –, esclarecendo que esse processo é uma interação social (um diálogo) entre indivíduos que buscam validar ou trazer verdades a uma linha de pensamento, ou refutar outra – em oposição.

Especificamente em relação à argumentação matemática, Balacheff (2022) propõe que ela é orientada a resolução de problemas utilizando estratégias para tal, de modo que sua validade não dependa de um agente. Para que um processo de argumentação seja uma argumentação matemática, deve ser potencialmente aceita dentro do contexto de sala de aula, de modo que, sendo esses argumentos aceitos como válidos, ganham o status de prova matemática. Destaca-se aqui o caráter social da argumentação, mesmo a argumentação matemática, já que para que os argumentos sejam validados dependem do contexto em que estão sendo apresentados.

Corroborando com essa ideia, Nasser e Tinoco (2003) defendem o estímulo à argumentação matemática desde a infância, fazendo com que a criança tente justificar de forma lógica a resolução de um problema, por exemplo, a fim de validar sua resposta – aqui, argumentar é justificar algo de forma lógica, visando a validação. Certamente haverá argumentos iniciais ingênuos, baseados em meras observações e cálculos elementares, que poderão ser desenvolvidos com exploração, conversas em grupo e até mesmo troca com os professores – argumentos que podem evoluir com o estímulo à exploração e a verificação de falhas em casos específicos, levando à tentativa de estabelecer um caso geral, por exemplo. Assim como a utilização desses termos em linguística, a argumentação matemática também busca validar algo por meio da razão, de argumentos que são utilizados para construir uma linha de raciocínio, um objeto de validação. Fica evidente aqui que o processo argumentativo é o caminho, a escalada para trazer a validade de uma afirmação, ou também um resultado.

Ainda segundo Nasser e Tinoco (2003), o que tem a função de validar um resultado ou afirmação, além de explicar a razão de sua veracidade, é a prova matemática. Tomando o mesmo sentido, Savioli e Silva (2016) dizem que a prova matemática (para eles, sinônimo de demonstração matemática) é um meio de justificar/validar, com critérios de verdade e de forma lógica, uma afirmação com a utilização de axiomas e teoremas. Eles sintetizam, com base em suas pesquisas, que a prova é uma forma de comunicação entre os matemáticos, utilizando linguagem matemática com regras rígidas, com o objetivo de esclarecer ao máximo determinado objeto, sem deixar margem para dúvidas e erros.

Já Hanna (1990) apresenta um movimento feito por professores, que, à época do artigo em questão, buscavam levar às salas de aula a ideia de que uma prova é um argumento suficientemente convincente – o que também é algo a ser aceito socialmente, isto é, o contexto social indicará quando as provas são suficientemente válidas. Isso porque provas muito formais afastavam os estudantes, que não compreendiam bem o que estava escrito nos livros. Além disso, a autora aponta que, para os matemáticos (a comunidade matemática), a aceitação de um teorema passa também por um processo social, de modo que uma prova matemática pode ser mais aceita por ser compreendida e carregar um significado do que por seu rigor matemático.

Com ideia similar, Tall (1995) aponta que há diferentes concepções do que é uma prova, podendo variar dependendo do contexto histórico e cultural, além de diferentes níveis de prova, que dependem do nível do desenvolvimento cognitivo de cada pessoa. Tall (1995) apresenta três tipos de provas (Prova ativa, prova visual e manipulativa) e todas elas, independentemente do nível cognitivo exigido e do rigor de cada uma, têm como objetivo validar algo. As provas, portanto, "desempenham um papel essencial em estabelecer a validade de uma declaração e em esclarecer seu significado" (Balacheff, 1988), ideia também presente nas "provas que provam" – que pura e simplesmente estabelecem a validade de uma afirmação – e nas "provas que explicam" – que, em seu desenvolvimento, explicam as razões da validade de algo, além de validar, por si só – apresentadas por Hanna (1990).

As definições e descrições de argumentação (nos dois campos abordados) e provas apresentam muitas semelhanças, principalmente no que diz respeito à validação. De fato, os autores supracitados entrelaçam esses dois conceitos, sempre citando "argumentação" ou "argumentos" ao tratar de provas (e demonstrações) matemáticas e explicam esses termos no decorrer de seus textos, mesmo que indiretamente. Mas sendo termos diferentes, mesmo com semelhanças, no que diferem? Com base no que foi apresentado aqui, entendemos que argumentar é apresentar ideias convincentes em um discurso, para que algo possa ser validado, para convencer – é o processo que gera o argumento. Já a prova é o que se usa para, de fato, validar, com base em argumentos – é o que se constrói *com* argumentos *para* a validação. Os dois se confundem pois, de fato, há fortes semelhanças conforme se aproximam da margem que os diferencia, uma linha tênue que separa uma ideia da outra. Portanto, durante a pesquisa e escrita deste trabalho, utilizaremos ambos os termos – por vezes nessa região em que tanto são parecidos -, sempre buscando diferenciar um do outro dentro do proposto.

Outro conceito importante nesse contexto é o de demonstração matemática, que, para Balacheff (2022), é a sistematização dos argumentos para a construção da prova, de forma a padronizar sua escrita. Em outras palavras, é algo formal, que segue um modelo e independe de pessoas ou grupos para estabelecer sua validade – o que se contrapõe à argumentação, que depende de agentes. Sendo a demonstração uma prova organizada, formal e padronizada e sendo a prova o produto final da argumentação (quando os argumentos são validados), esses dois conceitos parecem se contrapor em suas definições – algo que é apontado pelo próprio Balacheff (2022). Para o autor, as características da demonstração matemática devem

> garantir a possibilidade de transição para a norma da demonstração, mas também ser operacional quando se trata de arbitrar as proposições dos alunos e, possivelmente, institucionalizá-las para organizá-las e capitalizá-las na sala de aula (Balacheff, 2022, p. 811).

Experiências pessoais trouxeram a motivação inicial para a escrita deste trabalho, pois desde meu primeiro momento como professor regente em sala de aula notei um comportamento padrão, algo que foi incômodo: os alunos, em sua maioria, buscavam por resultados corretos, nada além. Ou seja, não havia preocupação em compreender o que era aprendido, ou interpretar problemas, talvez sequer vissem sentido no que aprendiam. Esse comportamento era acompanhado da utilização descabida de ferramentas prontas, apenas queriam saber que tipo de cálculo deveriam fazer, como se isso fosse resolver tudo o que precisassem. Isso mostra que certamente não compreendiam sequer o que eram tais ferramentas (mesmo que fossem apenas algoritmos básicos), pois não conseguiam saber onde e como utilizá-las. Esse condicionamento não tem causa aparente específica, portanto, pode ser fruto de falas que ouvem em casa sobre precisar chegar sempre ao resultado final, de alguma incompatibilidade nas relações com seus antigos professores, métodos de professores(as) particulares (explicadores), ou mesmo falta de motivação por outras causas quaisquer.

Além de meus próprios alunos, tive contato com relatos de sala de aula de familiares e amigos, bem como minhas vivências pessoais, em que os professores criavam o condicionamento de utilização de ferramentas prontas, aplicação de repetidos exercícios mecânicos e foco apenas em resultados finais, no “quanto dá”. Visto que havia esse comportamento na resolução de problemas e demais questões, os alunos não sabiam explicar o que deveriam ou sabiam fazer, menos ainda tentar argumentar sobre a validade de algo. Não haviam desenvolvido a habilidade de construir argumentos para validar seus resultados. Após minha imersão inicial nesse campo de pesquisa pelos motivos acima, tive contato com diversos trabalhos de professores pesquisadores e teóricos que traziam além de definições, classificações e reflexões, suas experiências em trabalhos envolvendo professores e alunos.

Estudos nessa área, como os de Knuth (2002), Aguilar-Júnior (2012) e Caldato (2018), são frequentemente desenvolvidos na Educação, em diversos níveis, com foco no desenvolvimento de argumentos e provas formais, na validação de provas informais, ou mesmo em como se trabalha tais aspectos em sala de aula. Isso porque mesmo que se queira fazer, por exemplo, uma análise de como o rigor exigido para se estabelecer uma prova matemática vem mudando ao longo do tempo, ou mesmo verificar se pessoas que atuam no campo da matemática compreendem e/ou conseguem desenvolver argumentos e provas suficientemente rigorosas, é preciso verificar também como chegaram a esse ponto, ou seja, como tudo se desenvolveu no ensino de Matemática ao longo do tempo.

Nesse sentido, Tall (1995) chama atenção para mudanças curriculares ocorridas na Inglaterra e nos Estados Unidos devido a dificuldades dos estudantes na compreensão de axiomas e de construções na geometria euclidiana, fazendo com que a exploração e os estudos nesse campo fossem reduzidos a ponto de serem usados apenas para construir provas para teoremas isolados. Em outras palavras, o estudo de geometria, que poderia ser mais abrangente no próprio campo, gerando ligações entre diversos assuntos e contextos, passou a ser utilizado de forma isolada, sem conexão entre diferentes temas e conceitos, para provar alguns teoremas. O autor explicita diferentes tipos de prova, que podem ser aceitos em diferentes contextos e são entendidos como etapas do desenvolvimento cognitivo de cada pessoa – ou até mesmo no desenvolvimento histórico do que é considerado prova matemática.

Tall (1980) diz que essas diferenças são vistas entre o matemático dito sofisticado e o estudante: enquanto o primeiro preza pela estética da demonstração, pela estrutura lógica construída e pela generalidade, o segundo reconhece como prova algo que explica seus resultados, mostrando a razão de serem verdadeiros. No mesmo texto, o autor sugere que professores devem se sensibilizar com as dificuldades e o ritmo de aprendizado de seus alunos, começando com argumentos informais e cuidadosamente, de forma sutil, aumentando o nível desses argumentos até que cheguem ao estágio da formalidade – do que é aceito e entendido como formal. Ainda assim, ele diz que os professores geralmente tendem a focar na formalidade, o que pode prejudicar estudantes que não desenvolvem tão rapidamente seu raciocínio lógico formal.

Esse ponto também é destacado por Aguilar-Júnior (2012, p. 67-68), o qual sugere que os professores precisam compreender o que é uma prova matemática, para que possam validar argumentos informais com base em experimentos e em exemplos genéricos dados por seus alunos – algo ainda informal. Outro ponto na pesquisa de Aguilar-Júnior (2012) similar ao que Tall aponta é a preferência de professores pelo formalismo exigido na academia, mesmo no Ensino Básico: ao corrigirem algumas atividades respondidas por estudantes do Ensino Básico, os professores, sujeitos de sua pesquisa, atribuíram maior grau às respostas mais formais, por se assemelharem às suas próprias respostas.

Apesar de haver grandes diferenças nas datas de realização dos estudos e também nos locais onde ocorreram, Tall e Aguilar-Júnior concordam em dois pontos. O primeiro aspecto se refere aos diferentes tipos de prova e à maneira como poderiam ser desenvolvidas com os estudantes ao longo do tempo. Já o segundo aspecto, talvez mais impactante, é que, apesar de haver 33 anos de diferença entre a pesquisa de Tall, em 1980, e a de Aguilar-Júnior, em 2012, em ambas existe a constatação de que professores optam por trabalhar com provas formais, deixando em segundo plano as provas informais, experimentações e as verificações de resultados utilizando exemplos genéricos.

Em contrapartida, Hoyles (1997) afirma que muitos estudantes têm preferência por argumentos que compõem procedimentos empíricos em detrimento a processos dedutivos. Isso porque os processos dedutivos, que são ou tendem a ser mais formais, não são mais que evidências, apenas validam e acabam sendo, para eles, apenas diagramas ou exemplos que podem não receber a devida atenção. Esse comportamento pode se dar por não haver sentido no processo dedutivo, para os alunos, por, na visão deles, nada explicarem – o que Hanna (1990) chama de “provas que provam” (mas não explicam).

Para além disso: mesmo com os avanços na Educação ao longo dos anos e em diferentes locais e de existirem diversos estudos, como nos casos de Balacheff (1988, 2022) e Nasser e Tinoco (2003), sobre a importância da validação de diferentes tipos de prova, considerando aspectos sociais e níveis cognitivos, parece haver, ainda em datas recentes, alguma resistência em abrir mão do formalismo e da rigidez mesmo no Ensino Básico.

Nesse contexto, podemos citar novamente o trabalho em que Nasser e Tinoco (2003) ressaltam a importância de respeitar o tempo dos estudantes e levar em conta suas explicações como suficientes para validar um resultado, elevando o nível com o passar do tempo, de forma sutil. Nesse livro vemos exemplos de atividades diversas que questionam a validade e a generalidade de determinadas situações, com respostas que variam de experimentações a fórmulas algébricas, passando por exemplos genéricos – todos eles sendo vistos como válidos.

Aproximadamente seis anos se passaram entre a pesquisa de Aguilar-Júnior e a implementação da nova Base Nacional Comum Curricular (BNCC) (Brasil, 2018), que prevê o trabalho com a argumentação matemática ainda no Ensino Fundamental, para que os estudantes possam aprender a conjecturar, formular e resolver problemas em diferentes contextos, além de aprender a usar diferentes ferramentas matemáticas nessas resoluções. O documento também prevê o início da avaliação da argumentação matemática no fim do Ensino Fundamental, o que estimulará o desenvolvimento do pensamento crítico dos alunos, além de indicar o trabalho com justificativas para soluções de problemas – com foco na argumentação – no Ensino Médio.

Tendo em vista os apontamentos feitos nessas pesquisas ao longo dos anos – e algumas delas mostram a convergência da preferência de professores por provas formais em sala de aula – e a recente implementação da nova BNCC (Brasil, 2018), que prevê o desenvolvimento de habilidades voltadas para a argumentação matemática, surge a questão a que buscamos responder neste trabalho: **Como professores do Ensino Básico avaliam e validam a argumentação matemática de alunos do 9º ano do Ensino Fundamental e 1º ano do Ensino Médio e como suas concepções interferem em sua avaliação?** O que buscamos investigar aqui é como e se argumentos utilizados por estudantes têm alguma validade para os professores. Ou seja, queremos entender se, na avaliação desses professores – e aqui entendemos a avaliação como o ato de avaliar e dar valor ou validar – os argumentos são levados em conta, são validados, mesmo quando não há uma resposta final explícita ou correta, por exemplo.

Aqui, nossa hipótese é de que ainda sejam pouco valorizados os argumentos informais e provas menos rígidas, como o que Balacheff (1988) classifica como empirismo ingênuo, experimento crucial e o exemplo genérico. Essa hipótese se justifica com base nos estudos já apresentados e na também já citada convergência do comportamento de professores em diferentes épocas e países, além da recente implementação da nova BNCC (Brasil, 2018) aqui no Brasil.

Outro ponto importante nesse aspecto é o crescimento de escolas integradas a cursos preparatórios, que parecem aderir às práticas mais mecânicas, via repetição de questões (dentro do mesmo assunto), visando treinar os alunos para fazer exames específicos com maior agilidade. Nosso objetivo geral neste estudo é **entender como os professores participantes da pesquisa compreendem, avaliam e validam a argumentação matemática em sala de aula**. Os objetivos específicos, a serem alcançados ao longo das etapas da pesquisa, são:

(i) Compreender o que os participantes da pesquisa entendem como argumentação e provas matemáticas;

(ii) Verificar como os participantes da pesquisa avaliam argumentos apresentados por estudantes em suas respostas dadas em uma atividade contendo questões que exigem argumentação;

(iii) Analisar as semelhanças e divergências entre a visão dos professores acerca da argumentação matemática e a forma como lidam, na prática, com diferentes tipos de argumentos.

Para responder a esse questionamento e alcançar esses objetivos, estruturamos esta pesquisa em seis etapas. Na primeira etapa, alunos participantes responderam a duas questões de uma atividade e esses questionários foram recolhidos. Na segunda, essas respostas foram analisadas e algumas foram selecionadas para compor um formulário de correção. Na terceira etapa, um grupo de professores, que lecionam em diferentes escolas no Ensino Básico, nas redes pública e privada, avaliou as respostas selecionadas – com exceção de uma resposta, criada por mim para suprir a falta de algo desejado no material colhido – de forma livre, utilizando seu critério, atribuindo um grau a cada resposta e justificando sua pontuação. Na quarta etapa, esses professores responderam um formulário em que expressam sua visão sobre o que é argumentação matemática e como entendem a prova matemática, além de se expressarem a respeito de como veem sua prática docente nesse campo. Na quinta etapa, os participantes foram entrevistados remotamente (via *Google Meet*) por meio de perguntas com enfoque em suas concepções e práticas escolares no que diz respeito ao tema da pesquisa – argumentação e provas matemáticas. Por fim, na sexta etapa, verificamos as convergências entre os pensamentos desses professores e a forma como avaliaram as respostas dos estudantes, para compreender de que forma, dentro das suas concepções a respeito da argumentação e da prova matemática em sala de aula, estão validando os argumentos e avaliando os estudantes.

A seguir, no capítulo 1, é apresentado o referencial teórico que embasa esta pesquisa, trazendo resultados de trabalhos na área, definições e diferentes pontos de vista em relação ao tema abordado. O capítulo 2 traz a abordagem metodológica do trabalho, descrevendo as etapas da pesquisa, a escolha dos participantes de pesquisa e sua classificação. No capítulo 3, são realizadas a descrição e a análise dos procedimentos adotados, em etapas, que serão exploradas em subitens: uma breve análise das respostas dos estudantes, comentando de forma sucinta suas respostas, ausências de respostas e outros aspectos gerais; uma visão de como os professores entendem a argumentação matemática e sua prática em sala de aula, com as respostas dadas pelos professores em seus formulários, comentando seus pontos de vista e como enxergam sua prática docente em sala de aula, traçando pontos convergentes entre os participantes – quando possível; análise dos protocolos em que os professores fazem correções das “provas” apresentadas pelos alunos, observando como os participantes da pesquisa validam argumentos informais e formais dos estudantes, observando em quais casos as respostas recebem maior ou menor grau, com suas justificativas para tal, também traçando pontos convergentes entre os participantes – quando possível; e, por fim, a síntese da visão dos participantes da pesquisa, avaliando, mediante seu entendimento teórico (formulário individual) e sua prática de avaliação – sua validação das respostas – como avaliam e validam esses argumentos, mediante sua compreensão do tema. A conclusão traz a síntese do trabalho, com a apresentação dos resultados obtidos – respondendo à questão de pesquisa –, das contribuições e limitações da pesquisa, além de traçar paralelos com o referencial teórico.

1. Referencial teórico

Antes de produzir e analisar dados, precisamos estabelecer parâmetros para tal, delineando nossos caminhos com base nos trabalhos de pesquisadores que contribuem para a literatura na área. Para isso, trazemos ideias importantes que auxiliam na compreensão não apenas dos conceitos de argumentação e prova matemática, mas também de diferentes tipos de prova e de argumentação. Além disso, há pesquisas que, assim como esta, contribuem para a análise, de forma mais ampla, de como professores, alunos do Ensino Básico e mesmo alunos de graduação trabalham, desenvolvem e pensam argumentos e provas matemáticas, que são importantes não apenas como modelo ou guia, mas para a verificação de pontos convergentes e divergentes. Por fim, é importante trazer à luz como documentos oficiais tratam e/ou preveem o trabalho nesse campo na Educação Básica do Brasil, que nos ajuda a compreender o que é esperado para os estudantes e os professores em sala de aula e se, neste caso, há preocupação com o desenvolvimento das habilidades previstas nesses documentos.

1.1. Aspectos importantes da argumentação e da prova matemáticas

Segundo De Villiers (1990), a prova matemática não é um prerrequisito para a convicção, mas o contrário: é por estarmos convictos da validade de algo que tentamos construir argumentos para, finalmente, provar o objeto em questão. Embora pareça que essa ideia entra em contradição com outras aqui apresentadas – de que a prova é, de fato, algo que visa convencer o outro da validade de algo –, isso não é verdade. O que se apresenta nessa afirmação é a ideia de que o objeto “prova” é construído por quem verifica – por processos empíricos, por observação – ou mesmo suspeita que determinada relação ou resultado é verdadeiro. Como questiona o autor, “poderíamos passar meses ou anos tentando provar certas conjecturas, se já não estivéssemos convencidos da sua veracidade?” (De Villiers, 1990). Assim, a criação da prova se dá com a construção de argumentos que buscam comprovar a suspeição (ou mesmo esse “convencimento”) sobre determinado evento.

É importante destacar, como citado na introdução, que a argumentação (o ato de argumentar) é o processo de validação de uma ideia, com um discurso suficientemente convincente dentro de determinado contexto. Quando argumentamos, tentamos necessariamente convencer alguém – e não algo –, ou seja, estamos inseridos em uma relação entre pessoas, mesmo que indiretamente (quando se lê um livro, por exemplo), portanto existe uma interação social. Nesse sentido, podemos entender que há diferentes maneiras de expressão em diferentes contextos sociais, o que vale também para o nível de argumentação que é suficiente e/ou necessário em cada ocasião.

Podemos pensar, por exemplo, que seria inadequado (ou até inviável) apresentar uma prova dita formal/rigorosa para estudantes do sexto ano do Ensino Fundamental (geralmente pré-adolescentes de 11 ou 12 anos): nesse caso, é possível que bastem explicações ou justificativas menos formais, com linguagem diferente da matemática formal, inclusive com apelo a exemplos que comprovem a veracidade do que se quer provar. O mesmo vale para casos em que esses estudantes dialogam entre si e tentam convencer o outro de algo, quando provavelmente não apresentarão argumentos rebuscados para tal.

Por essas razões, respeitando tais contextos sociais, é importante que esses discursos argumentativos (e os argumentos por si só) sejam aceitos pelos professores em seus mais diversos aspectos, respeitando e acompanhando o nível cognitivo e matemático dos estudantes e também fomentando seu desenvolvimento, conforme apontado por Nasser e Tinoco (2003), Pietropaolo (2005), Mateus (2015) e Tall (1980). Apesar disso, há pesquisas, como a de Aguilar-Júnior (2012) e Caldato (2018), que relatam a preferência (ou um indicativo de que haja essa preferência), por parte dos professores, por respostas mais formais e rígidas em detrimento de argumentos informais, que talvez estivessem de acordo com o nível cognitivo dos estudantes.

É preciso deixar claro que a prova matemática, sendo entendida como uma comunicação formal entre matemáticos, pode ser vista apenas como um conjunto de regras que valida algo, uma cadeia de axiomas ou teoremas dispostos de forma organizada para que alguém, devidamente letrado na linguagem matemática, possa entender. Entretanto, Hanna (1990) destaca que podemos ter dois tipos de provas: as **provas que provam** e as **provas que explicam**.

O primeiro tipo, já citado, é o de provas que envolvem uma axiomática rígida e organizada em etapas, de forma que registre ou pura e simplesmente prove que algo é verdade, apenas pela sequência dos argumentos utilizados. Já o segundo caso é o de provas que têm suas etapas e passos devidamente esclarecidos, explicados, mostrando as razões pelas quais alguns argumentos são utilizados - vão além de mera formalidade e do registro da validade de algo. A autora (1990) ressalta que ambos os casos apresentam tipos de provas válidos, não há um melhor ou pior que o outro, apenas são utilizadas em situações diferentes. Podemos pensar que talvez ambas as situações não sejam um contraste completo, não sejam extremos, mas que haja, em alguns casos, um "degradê", um caminho entre elas. Assim, haverá casos em que uma prova não será expressa/escrita exclusivamente em linguagem matemática formal, podendo haver comentários e pequenas explicações no decorrer do texto.

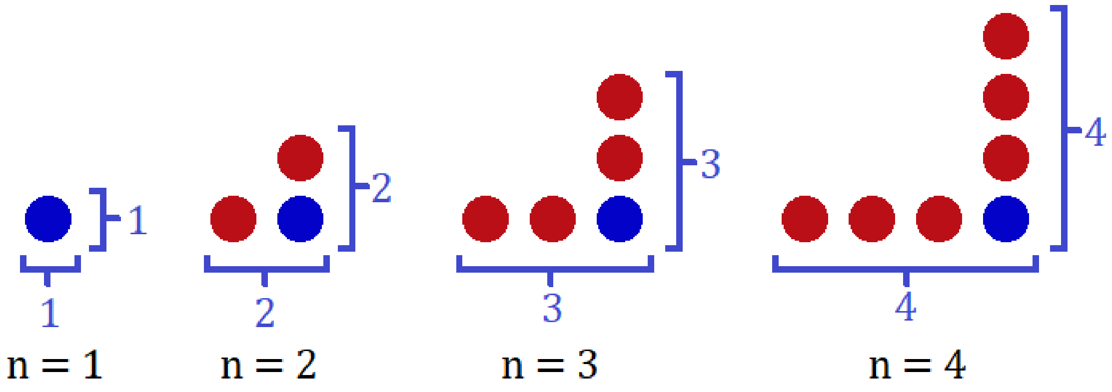
Tomemos como exemplo a soma dos n primeiros números ímpares, que apresenta um padrão que pode ser facilmente reconhecido, o que levantaria uma suspeita, mas não provaria relação alguma. O exemplo a seguir traz um processo de prova que pode ter como finalidade **verificar** uma suspeita, além de ter argumentos **estruturados** – duas funções da prova, segundo De Villiers (1990), o que será exposto mais à frente – e **explicar** o porquê da validade da relação final, sendo, portanto, um caso de prova que explica, na perspectiva de Hanna (1990):

Para provar a relação existente na soma dos n primeiros números ímpares, vamos realizar algumas somas para verificar se há alguma característica /padrão em todas elas:

Podemos considerar como já sabido que um número ímpar é representado por $2n - 1$, com n representando seu número de ordem. Dessa forma, por exemplo, o terceiro número ímpar é $2.3 - 1 = 6 - 1 = 5$.

Visualmente, é possível representar esses números com formas em 'L', de modo que a quantidade de elementos na posição vertical é a mesma que a *quantidade de elementos na posição horizontal, com um elemento comum às duas posições, representado em azul na imagem a seguir – daí o dobro da quantidade menos uma unidade, essa que é contada em duplicidade.*

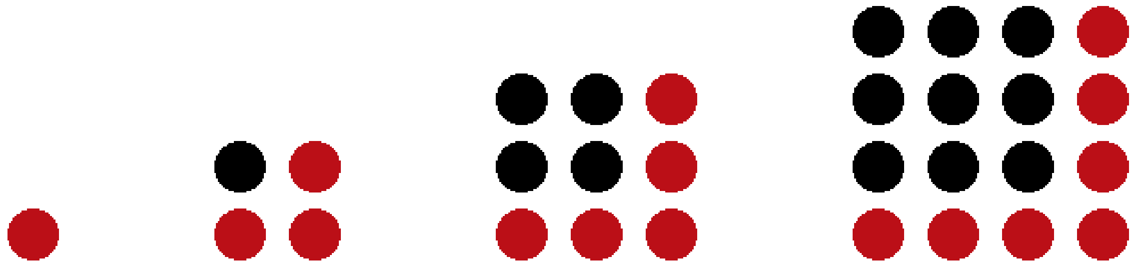
Figura 1 - Representação dos 4 primeiros gnómones



Fonte: o autor (2024)

Observando as bolinhas vermelhas em cada imagem, deixando de lado as azuis, é possível notar que a quantidade em cada posição (vertical e horizontal) é uma unidade menor que o seu número de posição. Além disso, é exatamente a quantidade de bolinhas nas duas posições da figura anterior. Assim, é possível encaixá-las sucessivamente, como uma boneca russa:

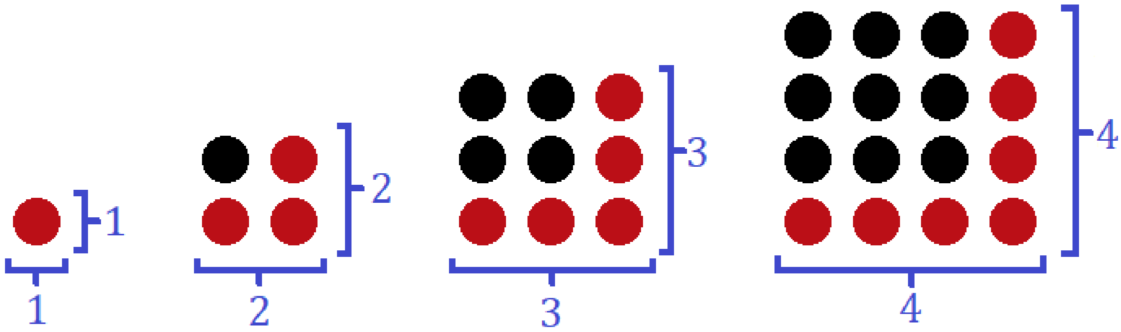
Figura 2 - Representação visual da soma dos números ímpares (1)



Fonte: o autor (2024)

Em cada imagem, as bolinhas vermelhas são o novo número ímpar adicionado (2n – 1) e as pretas são a soma anterior ajustada na nova soma, que forma uma disposição quadrada.

Figura 3 - Representação visual da soma dos números ímpares (2)



Fonte: o autor (2024)

A soma do primeiro número ímpar é 1, enquanto a soma dos dois primeiros é 4, dos três primeiros é 9 e dos 4 primeiros é 16, o quadrado de cada um dos números de ordem.

Assim, a soma dos n primeiros números ímpares pode ser escrita como o quadrado do número de ordem, representado genericamente por n. Logo, $S_i = n^2$

O pensamento de Hanna (1990) vai ao encontro ao que de De Villiers (1990) aponta quando diz que não existe um padrão absoluto para a correção lógica de uma prova matemática, nem mesmo um padrão na aceitação da comunidade matemática. Nesse sentido, podemos observar novamente que as provas passam a ser vistas como prova quando são aceitas como tal, ou seja, quando as pessoas de determinado ambiente aceitam a validade dos argumentos utilizados. Professores do Ensino Básico certamente não esperam o tipo de prova formal (nesse caso, as provas que provam) de seus estudantes, mas deveriam rejeitar argumentos ingênuos apresentados em suas turmas?

Se um adolescente ainda não é suficientemente letrado na linguagem matemática para enunciar, demonstrar ou utilizar teoremas ou estruturar um sistema de afirmações rígidas para provar algo, mas pode explicar e mostrar de forma convincente que algo é válido, essa prova não deve ser considerada? Mais que isso: pensando em introduzir e desenvolver essa linguagem e a habilidade de argumentar dos estudantes de forma gradual, eles não serão apresentados a essa formalidade inicialmente, mas sim estimulados a desenvolverem seus argumentos – o que vai finalmente se tornar uma prova, mesmo não formal.

Considerando a prova como o instrumento de validação, o produto final construído por argumentos e o processo de argumentação, tomamos como guia a tipologia proposta por Balacheff (1988), que categoriza os tipos de provas com base nos argumentos utilizados, sejam formais ou informais. Essa tipologia leva em conta as diferentes formas de pensar dos estudantes – o que eles pensam ser suficientemente convincente para estabelecer a validade de algo –, que carregam diferentes vivências e se utilizam de diferentes critérios para construir seus argumentos. O autor entende as provas que dependem da ação como pragmáticas, enquanto as que se utilizam da verbalização de propriedades e utilização de relações são as provas intelectuais.

É importante deixar claro, portanto, que o autor (Balacheff, 1988), para estabelecer os tipos de prova, leva em conta que a prova matemática é uma explicação (nesse caso, o discurso que pretende estabelecer a validade de algo) aceita por determinada comunidade em algum momento. Os tipos de prova apresentados são o **empirismo ingênuo**, o **experimento crucial**, o **exemplo genérico** e a **experiência mental**, sendo os dois primeiros compreendidos como provas pragmáticas e os últimos compreendidos como provas conceituais. Em cada tipo, mostraremos um exemplo correspondente – em todos os casos, a prova de que a soma de três números naturais consecutivos é sempre um múltiplo de três – com o raciocínio de um estudante fictício:

Empirismo ingênuo – Aqui os estudantes se baseiam em observações e no teste de casos particulares, imaginando que esses casos particulares validem a afirmação proposta. Nessas situações, eles verificam alguma regularidade e utilizam casos específicos para validar/justificar um caso geral. Esse tipo de prova não possui uma rigidez matemática formal, mas é suficiente para quem ainda não desenvolveu sua capacidade lógico argumentativa.

Destacamos aqui, novamente, a validade social da prova, visto que os argumentos aqui utilizados não são válidos formalmente – como uma comunicação padrão entre matemáticos, ou mesmo a nível acadêmico –, mas são suficientes no contexto em que esses estudantes estão: desenvolvendo suas habilidades básicas de argumentação. Dadas suas características, este é um caso de prova pragmática.

Exemplificamos o empirismo ingênuo na justificativa a seguir para a afirmativa de que “A soma de três números inteiros consecutivos é múltiplo de 3”:

“Bom, se eu somar 2 + 3 + 4, o resultado é 9 e 9 é múltiplo de 3.

Se eu somar também 7 + 8 + 9, dá 24, que também divide por 3.

Somando 14 + 15 + 16 dá 45 e 20 + 21 + 22 dá 63, todos múltiplos de 3.

Então, sim, se somarmos três números naturais consecutivos, o resultado é sempre múltiplo de 3”

Experimento crucial – Outra prova pragmática, que consiste em verificar a validade de algo testando uma etapa além das iniciais. No experimento crucial, após a verificação de que uma propriedade é válida para valores baixos, os estudantes precisam testar, precisam experimentar o que se deseja verificar com valores mais altos, a fim de garantir que tal propriedade é válida em todos os casos, de fato. É como se a “distância” entre as etapas garantisse algo – se funciona nas primeiras e, após muitas etapas ainda funciona, deve servir para todos.

Novamente utilizando como exemplo uma das questões aplicadas para este trabalho, podemos pensar que um estudante verifica da seguinte forma:

“As somas de alguns ternos de números consecutivos são múltiplos de três: 1 + 2 + 3 = 6; 2 + 3 + 4 = 9; 6 + 7 + 8 = 21

Se eu fizer isso com um número bem grande e funcionar, então é verdade...

Vamos tentar 222 + 223 + 224 = 669. Se dividir 669 por três, o resultado é 223, então também é múltiplo.

Se eu tentar 1027 + 1028 + 1029, a soma é 3084, que, dividido por três, dá 1028.

Se vale até pra esses números grandes, a afirmação é verdadeira!”

Exemplo genérico e **experiência mental** – Ambos são apresentados juntos (embora sejam situações distintas) porque o exemplo genérico pode ser visto como um tipo de “escada” para a experiência mental. Isso porque, no primeiro caso, um exemplo genérico/qualquer é tomado para análise, com a finalidade de compreender como a situação dada se comporta nesse exemplo e, posteriormente, retirar desse contexto (específico do exemplo tomado) e levar para os demais – em outras palavras, generalizar.

No processo de descontextualização do caso particular, em que se relaciona elementos observados e analisados, acontece a experiência mental. A experiência mental não depende apenas de um processo que está no âmbito da linguagem, mas depende também de aspectos cognitivos, da capacidade de “descolamento”, ou, nos termos de Balacheff, da “obliteração do tempo” e “despersonalização”. Ou seja, um grande passo do específico para o geral, para o abstrato – uma prova intelectual.

A seguir, uma possível construção de prova para o caso citado (a soma de três números naturais consecutivos), com a utilização de um exemplo genérico e o processo de experiência mental:

“Conheço algumas somas com essas características em que o resultado realmente é múltiplo de 3.

Eu sei que 45 + 46 + 47 = 138, que, dividindo por 3, tem quociente 46. Também sei que 11 + 12 + 13 = 36, que, dividindo por 3, tem quociente 12.

Se eu testar um valor maior, pode ser que o mesmo aconteça...

3121 + 3122 + 3123 = 9366 e 9366 ÷ 3 = 3122. É, também acontece aqui! – **O experimento crucial**

Essa soma também tem algo interessante: quando dividi por 3, o resultado é o valor do meio, como as outras.

Nos três casos, posso ‘desmontar’ a minha soma e fazer aparecer um número três vezes, já que se trata de múltiplos de 3.

No último exemplo, fica assim: 3121 + (3121 + 1) + (3121 + 2), aí o número 3121 aparece três vezes.

Reorganizando com as propriedades associativa e comutativa, fica assim: 3121 + 3121 + 3121 + 1 + 2, que posso escrever 3.3121 + 3. Se puser o 3 em evidência, fica 3.(3121 + 1) – **Exemplo genérico***.*

Realmente, toda sequência de três números consecutivos tem o primeiro deles, depois uma unidade a mais e depois duas a mais. Então, se pensar em um número qualquer, chamado n, posso entender que três números consecutivos são escritos como n - 1, n, n + 1 – **Comportamento da experiência mental**

Fazendo a soma, temos $n - 1 + n + n + 1 \rightarrow n + n + n + 1 - 1 \rightarrow 3n$

Como o termo 3n tem um fator 3, então mostra que sempre será um múltiplo de 3.”

Apresentamos essa tipologia para mostrar que mesmo argumentos mais elementares podem ser considerados como válidos para provar algo, levando em conta a etapa escolar de cada aluno. Portanto, considerando essa validade, podemos compreender se (e como) os professores participantes da pesquisa estão validando os argumentos apresentados nas respostas do questionário proposto. Para além disso, perceber se esses professores compreendem, de fato, o que são provas matemáticas - e quais delas podem ser consideradas suficientes para alunos de 9º ano do Ensino Fundamental e 1º ano do Ensino Médio.

Isso não significa, porém, que todas as respostas (dentro e fora deste trabalho) poderão ser encaixadas/enquadradas em alguma dessas categorias, visto que há fatores que precisam ser considerados - se o estudante compreendeu o enunciado, se já possui conhecimentos prévios que podem auxiliar na construção de seus argumentos além da exploração da situação proposta, entre outros fatores. Cabe destacar também que essa categorização não deve ser interpretada como uma separação de estágios do desenvolvimento argumentativo (Balacheff, 2022), ou seja, não são etapas a serem concluídas ou “superadas” em sequência – da mais elementar para a mais formal.

Podemos notar que a tipologia de Ballacheff (1988) se diferencia da proposta por Hanna (1990) porque ambas estão inseridas em momentos/etapas e situações diferentes. No primeiro caso, observamos diferentes níveis do desenvolvimento cognitivo de estudantes, ou seja, diferentes níveis de argumentação desenvolvidos por quem está aprendendo a conjecturar e provar algo. Já no ponto de vista de Hanna, há duas categorias do objeto, do instrumento prova – que podem possuir funções diferentes (além da validação), considerando que são situações distintas: explicar e comunicar.

Relacionando o que os dois autores propõem, entendemos que os níveis apresentados por Balacheff (1988) estão mais alinhados às provas que explicam de Hanna (1990), já que os aprendizes que se enquadram nesses tipos de prova sempre buscam a validação de algo fazendo verificações e construindo etapas, explicando, mesmo que informalmente, o que e por que está sendo feito.

Além das duas tipologias aqui citadas, De Villiers (1990) traz outras funções para a prova, que possuem semelhanças com as tipologias apresentadas: **verificação**, **explicação**, **sistematização**, **descoberta** e **comunicação**.

Verificação – Em alguns casos temos a suspeita, ou mesmo a convicção de que algo é verdadeiro, seja por observação ou pelo que o autor chama de “processo quase empírico”. Portanto, temos uma certeza que precisamos provar, precisamos verificar a validade do objeto em questão, iniciando o processo de prova a partir daí. O empirismo ingênuo e o experimento crucial são provas não mais aceitas como válidas em certas ocasiões (dada a fragilidade dos argumentos), mas poderiam ser vistas como processos que trazem essa certeza que precisa ser provada (agora de forma mais rigorosa). Portanto, aqui, a prova assume o papel de verificar/comprovar algo que há uma forte suspeita acerca de sua validade.

Explicação – Em muitas ocasiões, o processo empírico pode verificar que algo é válido para casos particulares, ou mesmo mostrar essa validade para casos gerais, mas isso não explica a razão dessa validade. Portanto, a prova, nesses casos, é o objeto que explica o porquê de ser válido, em vez de apenas mostrar/verificar. É importante ressaltar que nem todas as provas possuem o caráter explicativo, portanto, muitas vezes é impossível distinguir as provas que explicam e as que verificam.

É possível traçar aqui um paralelo entre as provas pragmáticas e intelectuais de Balacheff (1988), bem como as provas que provam e as que explicam, de Hanna (1990): os processos empíricos que compõem as provas pragmáticas (empirismo ingênuo e experimento crucial), descritas por Balacheff (1988), são aqui as situações em que se verifica que algo é – ou pode ser – verdade, porém não explica a razão de ser, apenas assume (ou pode assumir) a função de verificar. Por outro lado, quando se parte para o exemplo genérico e, por fim, a experiência mental, alcança-se o nível de generalidade, que garante a validade da propriedade em questão.

Mesmo que que nem toda prova tenha caráter explicativo – o que pode ocorrer, por exemplo, com o que é produzido no processo de experiência mental –, podemos entender que as provas que explicam apresentadas por Hanna (1990), por outro lado, têm a função de explicação, que, em sua essência, é a mesma de De Villiers (1990).

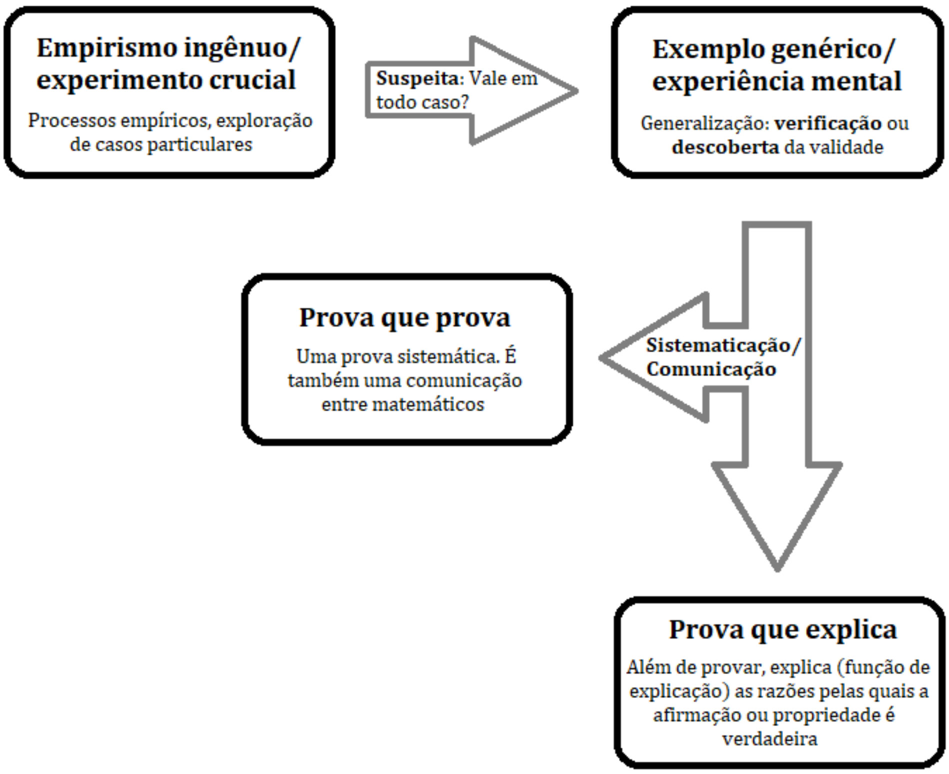
Sistematização – Outra função da prova é a sistematização, a organização das ideias em uma cadeia lógica que permite identificar falhas e inconsistências, interligar ideias, além de deixar o texto mais econômico e elegante. Aqui, a ideia central não é apenas comprovar se algo é verdade, mas montar um texto coeso e coerente, unificando os argumentos.

Descoberta – Em muitos casos, hipóteses são levantadas com a observação e processos quase empíricos, mas sem comprovação alguma. Mesmo que se recorra a exemplos genéricos, é possível que ainda não seja possível comprovar nada, embora a hipótese seja reforçada. Assim, é possível que, apesar de haver um objetivo no processo dedutivo e na organização dos argumentos – na construção da prova em si para a verificação –, surjam descobertas que não faziam parte do objetivo inicial.

Comunicação – As provas também assumem um papel de comunicação, como apontam Savioli e Silva (2016), comunicação entre matemáticos, estudantes, ou quaisquer grupos que considerem os argumentos em questão como válidos. Isso porque esses textos carregam informações do processo dedutivo, mostram os argumentos utilizados e a conexão entre eles (o que foi descrito na sistematização).

Algo que se pode perceber ao ler e compreender os conceitos supracitados é que, apesar das diferentes nomenclaturas e das diferentes formas de classificar as provas matemáticas e suas funções, existem ligações entre elas. A tipologia de Balacheff (1988) apresenta provas com as funções previstas por Hanna (1990) e De Villiers (1990). O esquema a seguir, autoral, explicita as relações:

Figura 4 - Relação entre os conceitos de prova de Balacheff (1988), Hanna (1990) e De Villiers (1990)



Fonte: o autor (2024)

Apresentadas tais definições e classificações, que utilizaremos como base neste trabalho, além das relações entre elas, trazemos, a seguir, algumas experiências com professores e licenciandos de Matemática. Essas experiências, descritas em estudos prévios, forneceram dados que contribuíram para a formulação de nossa hipótese e para a elaboração das ferramentas de coleta de dados desta pesquisa.

1.2. Experiências com professores e licenciandos de Matemática

Estabelecidos os parâmetros que utilizaremos para compreender o que são argumentos e provas, assim como suas funções e tipos, precisamos trazer referências de trabalhos feitos com professores e alunos de diferentes níveis (escolares e acadêmicos). Esses trabalhos apresentam pontos convergentes e nos dão alguma perspectiva sobre esta pesquisa, o que nos faz esperar pelo resultado exposto na hipótese de pesquisa. Algo que chama atenção nesses trabalhos é a preferência dos professores pelo formalismo, ou por algo que tenha “cara de matemática”, por assim dizer, além da falta de compreensão do que é uma prova, por parte dos estudantes.

É inevitável citar a pesquisa desenvolvida na Grã-Bretanha por Celya Hoyles (1997), que envolveu um grande número de professores, com o objetivo de verificar como eles valorizavam os argumentos informais apresentados por seus alunos. Além disso, é necessário expor e comentar a pesquisa de mestrado de Aguilar-Júnior (2012), pois há semelhanças entre sua pesquisa e esta.

O trabalho de Aguilar-Júnior (2012) buscou responder a duas questões: se os professores estavam inclinados a trabalhar/estimular a argumentação em sala de aula e como eles avaliavam os argumentos apresentados por estudantes. É no segundo questionamento que aparecem as semelhanças iniciais de sua pesquisa com esta e que, não por acaso, coorienta esta pesquisa. Para obter as respostas desejadas, ele montou um formulário com alguns questionamentos sobre a formação do professor e suas percepções acerca do tema, além de conter respostas de alunos dadas em uma atividade em sala de aula.

As diferenças metodológicas entre os dois trabalhos serão apresentadas no capítulo a seguir, porém há duas outras diferenças significativas: a primeira está nos objetivos e nas perguntas a serem respondidas pela pesquisa, enquanto a segunda é na mudança ocorrida em documentos oficiais que guiam a Educação no Brasil – mais especificamente, a implementação da BNCC (Brasil, 2018), que passou a ter como obrigatório o desenvolvimento de habilidades relacionadas à argumentação em sala de aula, algo que não existia à época da pesquisa de Aguilar-Júnior (2012). Em sua pesquisa, o autor verificou que alguns professores do Ensino Básico, sujeitos de sua pesquisa, tendem a avaliar melhor e validar argumentos mais formais, deixando em segundo plano aqueles que seriam mais comuns na idade escolar – os informais.

Cabe ressaltar que, embora a BNCC (Brasil, 2018) preveja trabalho com argumentação nos anos finais do Ensino Fundamental, e também apresente como uma das competências a serem desenvolvidas (competência 5) a validação de estratégias e resultados obtidos em problemas, nada se diz sobre provas matemáticas formais. O documento tem o desenvolvimento da comunicação matemática como um dos objetivos estabelecidos para o Ensino de Matemática no Ensino Fundamental, sendo a argumentação matemática um de seus componentes, que pode auxiliar a promover essa comunicação: “Nessa fase, precisa ser destacada a importância da comunicação em linguagem matemática com o uso da linguagem simbólica, da representação e da argumentação.” (Brasil, 2018).

Além disso, os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) (Brasil, 1997) indicam que a capacidade de argumentar é necessária para exercer a cidadania. Portanto, embora a BNCC (Brasil, 2018), documento que prevê objetivos a serem alcançados, além dos objetos de conhecimento a serem trabalhados e habilidades e competências a serem desenvolvidas, seja recente, os PCN (Brasil, 1997), que são um parâmetro para a Educação, já estimularam esse debate com duas décadas de antecedência.

Outro aspecto importante a se destacar na pesquisa de Aguilar-Júnior (2012) é que os questionários aplicados aos discentes tiveram baixo índice de resposta (muitas questões em branco) em três das cinco questões – todas dissertativas – aplicadas. Em outra questão, foram apresentados resultados corretos, mas sem argumentos para embasá-los. Quanto aos docentes, foi constatado que há uma tendência à valorização das provas mais formais – aquelas que parecem mais sofisticadas –, enquanto as provas mais ingênuas foram avaliadas com menor nota. O autor (2012) também constata que não há forte preocupação por parte dos sujeitos de pesquisa em trabalhar o desenvolvimento de habilidades voltadas para a argumentação e prova em sala de aula – já que a maioria dos entrevistados responde que se preocupa "em parte" com o desenvolvimento dessas habilidades. Assim, por mais que docentes e discentes sujeitos da pesquisa de Aguilar-Júnior (2012) não tivessem relação alguma, vemos que em ambos os grupos existe a carência desse tipo de trabalho.

Caldato (2018) verificou que licenciandos ingressantes no curso de Licenciatura em Matemática apresentam dificuldades para desenvolver uma argumentação dedutiva, além de não dominarem técnicas de prova e acreditarem que constatações numéricas (verificação por meio de exemplos) são suficientes para provar algo. Aqui, o autor aponta a possibilidade da preferência de parte dos professores do Ensino Básico por procedimentos, em vez do entendimento e da compreensão dos assuntos abordados.

Em síntese, o que Aguilar-Júnior (2012) verifica em sua pesquisa pode ser a causa ou um indicativo da problemática apresentada na pesquisa de Caldato (2018), sendo aqui importante frisar que, no primeiro caso, foi verificado diretamente (com os sujeitos da pesquisa) e, no segundo caso, há um indicativo (por conta de resultados obtidos com os sujeitos da pesquisa, que são licenciandos) de que pode ocorrer algo semelhante com professores de escolas, localidades e épocas diferentes.

Em um recorte da pesquisa supracitada, Caldato e Nasser (2022) dão enfoque a uma das questões corrigidas pelos licenciandos. A questão, similar à primeira questão da atividade proposta nesta pesquisa, pede que se prove que a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180°. As respostas dadas (nove, ao total), criadas pelos autores, foram enquadradas na tipologia de Balacheff (1988) com base nos argumentos usados, mesmo que não apresentasse uma resposta completamente correta.

O objetivo, como no trabalho original, era fazer uma investigação sobre as concepções de alunos ingressantes no curso de Licenciatura em Matemática acerca de argumentação, provas e demonstração. Nessa questão, notou-se que os licenciandos valorizaram de alguma forma todas as respostas – mesmo as incorretas –, sendo as duas mais valorizadas pautadas no raciocínio dedutivo, tendo índices superiores a 80% de aprovação. Entretanto, uma das respostas, mesmo sendo inconsistente, obteve grande aprovação dos participantes, de modo que um deles apresentou a justificativa de haver uma "ótima utilização algébrica e de raciocínio lógico" no texto.

Também foi verificado, no mesmo trabalho (Caldato, Nasser, 2022), que poucos participantes conseguiram notar contradições em alguns argumentos apresentados (que possuíam, de fato, tais contradições). No mesmo tópico, alguns dos licenciandos atribuíram notas altas às respostas com inconsistências, sob justificativa de haver um bom raciocínio algébrico. Os autores (2022) concluem que esses estudantes ainda carregam a ideia de uma matemática mais rígida e estereotipada no formalismo, o que os faz valorizar mais o raciocínio algébrico.

Outra pesquisa que se dedicou a estudar a forma como os licenciandos ressignificaram suas concepções em relação ao ensino de argumentação e demonstração matemática no ensino básico foi a realizada por Mateus (2015). Nela se evidenciou, por meio de sequências de atividades aplicada a estudantes de licenciatura, a necessidade de uma ressignificação quanto ao sentido da prova matemática na escola básica, levando estes futuros docentes a pensarem sobre os diversos sentidos da prova e a compreenderem que a organização curricular e a prática docente devem explorar as experimentações. Levantamento de conjecturas, argumentações, e até mesmo provas formais, são ações pedagógicas importantes ao desenvolvimento do raciocínio matemático.

O estudo doutoral de Pietropaolo (2005) buscou apontar a necessidade de uma reconfiguração da demonstração nos currículos da Educação Básica e da formação de professores de Matemática. Analisando as recomendações curriculares à época da pesquisa no que se refere às argumentações e provas na Educação Básica, por meio de uma pesquisa qualitativa com professores do ensino básico, intentou compreender as interpretações e avaliação dos professores a respeito de provas elaboradas por alunos do 9º ano do Ensino Fundamental. Dentre os resultados obtidos, observou que o sentido de prova matemática atribuído pelos participantes não se limita às provas formais, como as que estão descritas em livros didáticos, mas em atividades pedagógicas que estimulem o "fazer matemática", levando o aluno da escola básica a experimentar, argumentar e conjecturar.

Knuth (2002) já apresenta resultados mais animadores: no artigo em questão, em que um grupo de professores também corrige algumas atividades e passa por um processo de entrevista, verifica-se que os sujeitos da pesquisa não só compreendem bem o que é uma prova matemática, mas também sua importância não só na própria Matemática como área do conhecimento, mas na aula de aula. Aqui, seu objetivo era verificar se os professores participantes estavam alinhados com o novo padrão de ensino proposto pelo *National Council of Teachers of Mathematics* (NCTM) o que, em certa medida, trouxe resultados positivos.

Os resultados obtidos nas pesquisas supracitadas reforçam a hipótese da pesquisa, levantada na introdução, de que os professores participantes não valorizam os argumentos menos formais e ingênuos, embora, especialmente, o caso da pesquisa de Knuth seja positivo. Aqui, levamos em conta o contexto geográfico, já que os docentes que participaram desta pesquisa são formados e atuam no Brasil, enquanto Knuth apresenta uma pesquisa feita com professores estadunidenses – que atuam sob diferentes orientações de seus documentos oficiais, por exemplo.

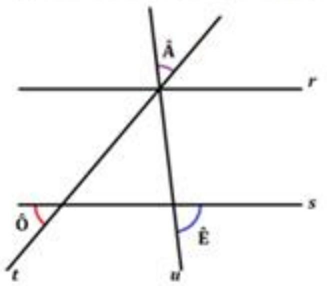
2. Metodologia

A produção de dados desta pesquisa ocorreu em seis etapas, como mencionado na introdução. Neste capítulo, cada uma delas será detalhada, destacando os pontos relevantes para o desenvolvimento da pesquisa.

Na primeira, alunos do 9º ano do Ensino Fundamental resolvem uma atividade com duas questões abertas, uma geométrica e outra algébrica, devendo justificar seu raciocínio. A Figura 1 mostra a atividade aplicada aos alunos.

Figura 5 - Questões propostas para os alunos

1) Na figura a seguir, formadas por duas retas paralelas, r e s, e duas transversais a elas, u e t, há três ângulos em destaque: Â, Ê e Ô. Existe alguma relação entre esses três ângulos? Como seria essa relação?



2) Os números 6, 7 e 8 são consecutivos e sua soma é 21, que é um múltiplo de 3. O mesmo acontece com os números 12, 13 e 14, que também são consecutivos e sua soma é 39, também múltiplo de 3. Isso acontece em qualquer soma de **três** números **consecutivos**? Justifique sua resposta, mostrando que é verdade para todos os casos, ou apresentando um contraexemplo (um caso falso), caso não seja verdade.

Fonte: o autor (2024)

Na segunda etapa, as respostas foram analisadas e selecionamos algumas delas para compor o formulário de correção; na terceira, professores selecionados corrigem essas atividades utilizando seus próprios critérios, atribuindo notas de 0 a 5 e justificando sua correção; na quarta, os mesmos professores respondem a um formulário contendo perguntas sobre suas práticas e concepções a respeito de argumentação e provas matemáticas; na quinta, os participantes são entrevistados – com a utilização de um questionário semiestruturado, o que dá opções mais abrangentes de resposta e traz um tom mais leve à entrevista –, com as perguntas tendo foco em suas práticas e concepções sobre argumentação e provas matemáticas; e na sexta etapa, esses dados são cruzados, para verificar convergências e divergências entre discurso e prática e, assim, responder à pergunta de pesquisa e alcançar os objetivos necessários. O formulário para correção (apêndice B) apresenta as duas questões, cada uma seguida de três respostas selecionadas, contendo um campo para a atribuição de grau/nota e outro para a justificativa da nota dada.

Para a quinta etapa, os professores receberam, via *e-mail*, um termo de consentimento livre e esclarecido (TCLE) contendo informações sobre a dinâmica das entrevistas, em que poderiam ou não concordar com sua participação nessa etapa. Todos os participantes foram informados sobre como os dados produzidos seriam utilizados e que nenhuma de suas informações pessoais seria divulgada, além de que receberiam um pseudônimo no texto desta dissertação. Os termos foram assinados e enviados de volta também via *e-mail*, enquanto as datas, horários e os *links* das reuniões foram acordados por mensagens de texto do *Whatsapp*. Após cada uma das entrevistas, os professores participantes receberam *links* de acesso a pastas digitais em que poderiam ouvir as gravações e ler as transcrições de suas entrevistas, podendo sugerir a retirada de trechos específicos, alterações na grafia, ou mesmo a não autorização da divulgação dos dados.

Como já apontado, há semelhanças entre esta pesquisa e a de Aguilar-Júnior (2012), tanto em relação à pergunta de pesquisa, quanto na parte metodológica. Cabe aqui, portanto, destacar as diferenças – além das recentes mudanças em documentos norteadores da Educação brasileira, citadas anteriormente. Em sua dissertação, o autor busca compreender as concepções gerais de um grupo de professores sobre argumentação, além de analisar os critérios utilizados para a correção de atividades já respondidas. Contudo, seu trabalho apresenta apenas um formulário para os professores, contendo não só perguntas sobre suas concepções, tempo de atuação e forma de trabalho em sala de aula, mas também as resoluções a serem corrigidas.

Por outro lado, este trabalho separa em duas etapas distintas a correção e o questionário justamente para que se possam confrontar ambos – não no sentido negativo da palavra, mas para verificar se discurso e prática estão de fato alinhados – e, a partir disso, compreender como esses professores avaliam os alunos e validam seus argumentos com base em suas concepções.

Ainda assim, entendemos que a similaridade é positiva, já que, como apontado por Kilpatrick (1996), um dos critérios para a relevância de uma pesquisa em Educação Matemática é a reprodutibilidade, que não anula a originalidade de uma pesquisa.

A reprodutibilidade de uma pesquisa é a possibilidade de que ela seja reproduzida utilizando-se dos mesmos critérios, para que outras pessoas possam chegar às mesmas conclusões, ou mesmo a outras diferentes. Já a originalidade vem das variáveis da pesquisa, da interpretação dada a ela e também das conclusões às quais se chega. Ou seja, mesmo que os procedimentos de uma pesquisa sejam reproduzidos em outra, a segunda terá sua originalidade com base em suas características específicas, que a difere das demais.

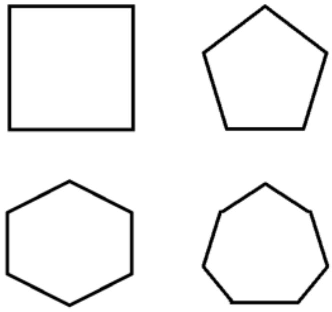
Ainda que esta pesquisa possua suas similaridades com a de Aguilar-Júnior (2012), ela foi pensada e estruturada sem essa influência – a ideia central desta pesquisa foi elaborada e delineada de forma independente e posteriormente sofreu influências do trabalho feito por Aguilar-Júnior (2012), que, por sua vez, teve como influência a pesquisa de Hoyles (1997). Podemos ver esta pesquisa como um trabalho que contribui para o campo da Educação Matemática por seguir, de certa forma, o modelo de uma pesquisa já feita, mas que traz inovações em relação à anterior – o enfoque diferente, a busca pela diversidade dos professores participantes da pesquisa e, além disso, embasamento e respaldo em diferentes trabalhos e pesquisas que aconteceram de 2012 até agora, com destaque para as competências e habilidades estabelecidas na BNCC (Brasil, 2018).

2.1. Escolha das questões e aplicação da atividade para a turma do 9º ano

Buscamos selecionar questões que pudessem dar oportunidade aos alunos de apresentarem seus argumentos para justificar e mostrar a validade de suas respostas. Houve um questionário piloto (apêndice D), de quatro questões, em que pudemos identificar e analisar pontos importantes para a escolha de questões da atividade final – a que foi utilizada, de fato. Uma das questões em que identificamos problemas é a que segue:

Figura 6 - Primeira questão do questionário piloto

1) Quantas diagonais tem um quadrilátero? E um Pentágono? E um heptágono? Como podemos descobrir quantas diagonais tem um polígono de n lados?



Fonte: o autor (2024)

Nessa questão, quase todos os estudantes apenas utilizaram a fórmula que estabelece a relação entre a quantidade de lados e a de diagonais dos polígonos e nenhum apresentou a construção dessa ideia (o processo). Havia também uma questão em que um losango era apresentado e se perguntava qual era a relação entre suas diagonais. A maioria dos estudantes apenas desenhou as diagonais e fez uma constatação visual – sem qualquer verificação ou tentativa de argumentar e construir uma prova – de que eram perpendiculares. Mais especificamente, os alunos observaram as diagonais traçadas e notaram alguma semelhança visual com dois segmentos perpendiculares, o que foi suficiente para afirmar a perpendicularidade. Outra questão que não apresentou o tipo de desenvolvimento necessário para a pesquisa apresentava uma situação em que havia um padrão de crescimento exponencial de base 2 e eram feitas perguntas sobre as quantidades de elementos em cada etapa. Por fim, perguntava-se a quantidade na etapa “x” (genérica). Nesse caso, como havia perguntas anteriores em que o padrão ficava claro, muitos estudantes apenas disseram que “era só dobrar até chegar onde queremos”, ou responderam de forma direta “2^x”.

Notamos, portanto, dois problemas no questionário piloto: um deles é que algumas questões não davam espaço para que algo fosse provado ou validado, de fato. A questão das diagonais, por exemplo, permitia a aplicação direta da fórmula, por ser um conhecimento que muitos já tinham e, além disso, não foi necessário desenvolver algo, apenas utilizar a ferramenta já conhecida. Outro problema era o comando das questões: não era dito de forma explícita ou clara que era necessário provar algo. Assim, nas questões em que se pedia para generalizar (a questão das diagonais dos polígonos e do padrão exponencial, por exemplo) algo, era solicitado apenas a etapa final, sem justificar ou provar nada. Esperávamos que, pela construção do enunciado, alguns estudantes pudessem tentar fazer a prova ou a validação de sua resposta, mas acreditamos que a falta do comando específico tenha dado margem para respostas mais diretas, sem sua validação.

Mantivemos, portanto, apenas uma questão do questionário piloto (questão 2), que solicitava a explicitação da relação entre ângulos formados por duas retas transversais a duas outras paralelas – com uma adaptação, excluindo uma das perguntas do enunciado. Os questionamentos feitos no enunciado eram se (a) existe alguma relação entre os ângulos marcados na figura e (b) como seria essa relação. Mesmo não havendo o comando explícito para que o estudante prove, a pergunta a respeito de como é a relação traz essa ideia.

A questão acrescentada – que não constava no piloto – apresenta duas somas de três números consecutivos e mostrava que o total é um número múltiplo de três. Em seguida, era solicitado que fosse provado que esse tipo de soma sempre geraria um número múltiplo de três – em caso positivo – ou que se apresentasse um contra exemplo – em caso negativo.

Inicialmente, nessa etapa, a atividade seria aplicada em algumas escolas de diferentes segmentos (públicos municipal, estadual e federal e particular), para que pudéssemos contar com uma grande quantidade de respostas, o que aumentaria as possibilidades de escolha – e as chances de encontrar diferentes respostas dentro do que era desejado. Entretanto, surgiram empecilhos: algumas escolas não permitiram a aplicação das questões, outras exigiram minha presença, mas em momentos que coincidiam com meu horário de trabalho, e outras se dispuseram a aplicar por conta própria, mas jamais retornaram o contato, ou entregaram a atividade com respostas idênticas – levando a crer que não houve supervisão.

Por essas razões, essas respostas foram descartadas/desconsideradas e decidimos que eu aplicaria a atividade na turma de 9º ano em que eu era professor regente. Orientei a todos sobre como responder às questões, tirando dúvidas sobre os enunciados, mas não sobre os assuntos constantes em cada questão. Isso faria com que suas respostas fossem autênticas e que pudessem utilizar seus próprios argumentos de forma natural, sem interferências externas. De fato, obtivemos melhores resultados (variedades de argumentos e de tipos de respostas).

2.2. Escolha das respostas dos estudantes para a composição do formulário de correção

Na segunda etapa, as respostas foram selecionadas com base na forma que os estudantes argumentaram e nos argumentos utilizados, independentemente de a resposta final estar correta. Assim, há respostas com argumentos consistentes e finalização errônea (ou incompleta), além de respostas erradas, de fato.

Para que nosso objetivo fosse cumprido, precisávamos escolher respostas que dessem aos professores a oportunidade de avaliar de diferentes formas, pontuando e avaliando de formas diversas e sobre diferentes perspectivas. Por exemplo, alunos que apresentassem argumentos aceitáveis, mesmo sem concluir de forma correta, poderiam receber alguma pontuação diferente de zero, sob alguma justificativa; assim como outros poderiam ser avaliados sob diferentes olhares por trazer respostas mais sucintas e corretas, sem apresentar seu desenvolvimento/justificativa. Diferentes professores podem considerar mais ou menos relevantes o mesmo argumento apresentado por um aluno, assim como também podem considerar uma resposta dita “seca” (apenas a resposta final, objetiva) correta, desconsiderando a ausência de qualquer desenvolvimento ou argumento.

Mesmo que o “plano A” fosse aplicar o questionário em diferentes escolas e realizar a pesquisa com diversos professores, a ideia aqui não é quantificar as informações dos dados produzidos. Pretendíamos obter grandes quantidades de respostas dos estudantes para ampliarmos as possibilidades de escolha, enquanto o grupo de professores selecionados possuiria diferentes sujeitos com diferentes vivências, experiências, tempo de trabalho e outros aspectos, de modo a obtermos dados mais plurais e uma pesquisa mais abrangente e consistente.

Tendo aplicado a atividade em apenas uma turma, houve poucas atividades para analisar e avaliar, mas, felizmente, o suficiente para compor o formulário para a correção. Selecionamos, assim, três respostas para cada uma das duas questões – dentro da proposta de haver diferentes tipos de respostas, incluindo as incorretas –, de modo que a terceira resposta dada à segunda questão foi criada por mim, pois não obtivemos uma correta para essa questão.

2.3. Seleção dos professores participantes e correção de atividades

Buscamos professores – recebemos, ao todo, dez respostas – de diferentes regiões do Brasil, para que os dados produzidos não fossem concentrados apenas no Rio de Janeiro (ou em outra região/cidade). Além disso, a fim de obter sujeitos mais plurais, também selecionamos professores que atuassem em diferentes esferas das redes públicas (municipais, estaduais e federais) e privadas (escolas que trabalham com diferentes metodologias e atendem a diferentes segmentos), com diferentes níveis de formação, formados em diferentes instituições e épocas e que possuíssem diferentes tempos de experiência no magistério.

A busca inicial pelos participantes aconteceu de diferentes formas, porém sem êxito em todas elas. Houve contato com pessoas próximas a mim (colegas de trabalho, ex professores, colegas da graduação e do curso de mestrado), mas desses, apenas dois retornaram e participaram. Também busquei em grupos de redes sociais com alguns milhares de membros, havendo também poucas respostas à solicitação, das quais apenas uma pessoa participou, de fato. Estive pessoalmente em algumas escolas, na tentativa de conversar com seus professores e professoras de Matemática, ou deixar meu contato (em caso de ausência), mas não houve resposta alguma. Por fim, um dos professores que já havia aceitado o convite convidou alguns colegas, que também aceitaram participar – e alguns desses também conversaram com outros colegas, totalizando dez professores.

Essa busca inicial foi feita, portanto, entre pessoas próximas, que poderiam convidar outros professores próximos a elas – uma “rede” de professores e professoras que são conhecidos, de alguma forma. Mas, dado o baixo nível de resposta e participação, recorremos às redes sociais, obtendo o mesmo nível de respostas e participações, e, por fim, solicitando a um desses participantes que convidasse colegas professores.

Selecionados os professores, foram enviadas as atividades a serem corrigidas via *e-mail*, com orientações sobre a correção e seu envio – iniciando-se a etapa 3 da pesquisa. O formulário foi enviado em um formato de arquivo editável e deveria ser devolvido como resposta à mesma mensagem de e-mail com as alterações solicitadas: a nota de cada resposta acompanhada da justificativa dada por cada professor para tal pontuação.

Dada a época do ano, aliada ao fato de alguns dos participantes atuarem nas redes públicas e estarem encarregados de projetos e preparação para avaliações de larga escala, houve alguma demora na devolução de parte dos formulários. Assim, as devoluções foram feitas entre outubro de 2023 e janeiro de 2024 – portanto, um intervalo de 3 meses para obter o retorno total dos participantes, 2 deles após o exame de qualificação.

2.4. Respostas dadas ao formulário *Google*

As informações pessoais e profissionais citadas no tópico 2.2 (tempo de atuação nas redes pública e/ou privada, tempo de atuação no magistério, local de atuação, entre outras informações pessoais e profissionais) foram coletadas no formulário da etapa 4 (apêndice C), não apenas para saber quem são e de onde os docentes vêm, mas para que suas correções e suas respostas dadas ao formulário possam fazer sentido dentro do perfil de cada um. O formulário foi montado na plataforma do *Google* e o *link* para que fosse respondido também foi enviado por *e-mail* aos participantes que já haviam corrigido as atividades.

Os participantes responderam às questões pessoais, de formação e tempo de atuação escolhendo objetivamente a opção que mais se adequava ao seu perfil: o estado de atuação (uma opção para cada estado do Brasil), se atua na rede pública ou privada (respondendo “sim” ou “não” em cada uma) e o tempo de atuação nelas (uma opção para cada intervalo de 3 anos, de 0 a 9 anos, ou poderiam escolher a opção “10 anos ou mais”). As perguntas seguintes eram referentes à atuação profissional e às concepções quanto à argumentação matemática em sala de aula. Entre elas, havia questões mais objetivas – com espaço para a opção “outros”, em que se poderia acrescentar outra resposta não listada – e questões nas quais avaliariam o nível de importância a cada tópico citado em uma escala no modelo de Likert, variando de 1 a 5.

Apenas uma das questões que possuíam a escala, sobre o tempo de aula ser suficiente para desenvolver as práticas desejadas, apresentou espaço para a justificativa, pois consideramos a possibilidade de os professores não conseguirem estimular a argumentação como desejado por falta de tempo hábil para tal.

Professores com diferentes vivências e experiências apresentam diferentes formas de perceber sua profissão e o processo de ensino-aprendizagem. Alguém que atua em sala de aula há 2 anos certamente não terá as mesmas experiências que alguém que tem 10 anos ou mais de carreira, da mesma forma que professores da rede privada estarão condicionados a determinadas diretrizes que não existem nas redes públicas – e vice-versa –, o que também influencia em seus métodos e escolhas metodológicas. O mesmo vale para o nível de formação, já que é possível se especializar em determinada área, ampliando os conhecimentos e experiências acadêmicas, produzindo e tendo acesso a novas pesquisas.

Voltando os olhares para os estudantes, é preciso entender que os alunos que cursaram o 9º ano do Ensino Fundamental e os que cursaram o 1º ano do Ensino Médio no ano de 2023 cursaram os três anos letivos anteriores no formato remoto (ou híbrido) emergencial – período em que enfrentávamos e sobrevivíamos à pandemia do vírus COVID-19. Destaco essa informação porque o contato com a álgebra – e, portanto, a ideia de generalização – se inicia no 7º ano, permanecendo no currículo até o fim da formação no Ensino Básico. É nessa etapa, nesse ciclo, que “precisa ser destacada a importância da comunicação em linguagem matemática com o uso da linguagem simbólica, da representação e da argumentação” (Brasil, 2018, p. 298).

Nessa etapa da vida escolar, esses estudantes viviam dias de incerteza, sem atividades presenciais nas escolas (em 2020, com retorno semipresencial em algumas escolas no ano seguinte) e, muitas vezes, em situações precárias. Com a suspensão das atividades presenciais, professores precisaram se acostumar (ou tentar) com o ensino remoto, desenvolvendo novas estratégias para capturar o interesse dos alunos e fazer funcionar essa nova modalidade de ensino. Por outro lado, os estudantes, muitas vezes em casa, precisavam vencer as distrações que poderiam ter, ou mesmo tentar superar as dificuldades de conexão, que prejudicavam o acompanhamento das aulas remotas. Pessoalmente, vi alunos precisando cuidar de seus irmãos menores em horário de aula, enquanto outros desenvolviam depressão e outros perdiam familiares para a doença.

2.5. Entrevista com os professores

Embora já houvesse dados a respeito da formação e da atuação de cada profissional, foi sugerido, durante o exame de qualificação, que uma nova etapa fosse acrescentada à pesquisa. De comum acordo, decidimos que uma entrevista semiestruturada em vídeo chamada seria o ideal, já que, além de estabelecer um contato mais direto entre as partes (pesquisador e professor participante da pesquisa), poderia dar a oportunidade para os docentes se expressarem com mais liberdade e acrescentarem falas e informações que julgassem pertinentes. Daria, ainda, a oportunidade, se fosse o caso, de esclarecer possíveis dúvidas quanto às respostas dadas no formulário, além de também permitir que os próprios participantes esclarecessem seus pontos de vista a respeito do tema da pesquisa.

Para essa entrevista – que, entre nós, chamamos de conversa – elaboramos um questionário de 5 questões mais 1 (uma delas é a repetição da primeira, para o caso de o docente possuir outras formações além da graduação), enfatizando o nível de formação, o tempo de formação, o entendimento de cada um sobre argumentação e provas matemáticas e a forma como costumam trabalhá-las em sala de aula. Essas experiências, descritas em estudos prévios, forneceram dados que contribuíram para a formulação de nossa hipótese e para a elaboração das ferramentas de coleta de dados desta pesquisa.

O contato com os professores participantes foi retomado em janeiro de 2024, logo após o exame de qualificação. Aqui, todos foram informados da necessidade dessa entrevista e tomaram conhecimento de como seria feita – em vídeo chamada, com gravação e transcrição do áudio –, além de uma breve explicação em relação à pesquisa em si. Também houve demora para obter as respostas desejadas, de modo que a última entrevista foi realizada em agosto de 2024.

Cada um dos participantes recebeu, via *e-mail*, um registro de consentimento livre e esclarecido com todas as informações que julgamos necessárias para explicar como a entrevista funcionaria e como os dados seriam utilizados. Após a devolução dos termos assinados, foram combinados as datas e horários de cada entrevista via *Whatsapp*, por onde também foram enviados os *links* das salas virtuais do *Google Meet*. Essas datas e horários foram acordados entre as partes, dando total liberdade aos professores em relação à sua escolha dentro de sua disponibilidade.

Por fim, as gravações e as transcrições das entrevistas foram enviadas para pastas do *Google Drive* nomeadas de acordo com cada professor. Esses, por sua vez, receberam acesso apenas às suas devidas pastas, para que pudessem revisar, sugerir possíveis retiradas de trechos e autorizar o uso das transcrições. Um *e-mail* foi enviado para cada um dos professores participantes, contendo o *link* dessas pastas, solicitando sua revisão e autorização de utilização das transcrições, além de informar que nenhum dado que pudesse identificá-los seria utilizado.

2.6. Análise de dados

Para alcançar os objetivos definidos para esta pesquisa e responder à pergunta proposta, relacionamos os dados obtidos até o momento: as informações fornecidas pelos professores nas etapas anteriores (etapas 4 e 5) e as correções realizadas por eles nas atividades propostas (etapa 3). Analisar apenas as correções implicaria em voltar os olhares apenas para a superfície, para o que seria a "ponta do *iceberg*" a ser observado. Essas correções são reflexo do que pensam e de como os professores participantes entendem e lidam com a argumentação matemática – que, por sua vez, são resultado da vivência, formação e tempo de experiência de cada um.

Antes disso, apresentamos uma análise das respostas dos alunos feita por mim, para apresentar como as interpretamos. Não foram atribuídas notas durante essa análise, apenas relacionamos, quando possível, com o referencial teórico, além de apontarmos alguns pontos relevantes de cada resposta. É importante deixar claro que, mesmo tentando relacionar com o referencial apresentado, ainda é uma análise pessoal, ou seja, meus próprios pensamentos, conceitos e mesmo valores influenciam na forma como essas respostas foram analisadas no início desta etapa – não há imparcialidade total. Ainda assim, essa análise é feita após a imersão no tema, diversos estudos e também levando em conta não só a idade escolar dos estudantes, mas seu perfil, tanto por conhecê-los como meus alunos, quanto por serem adolescentes que passaram por um período difícil de isolamento social, adaptações diversas (incluindo no ensino) e muitas perdas.

Aqui, analisamos os formulários respondidos por cada professor e buscamos relacioná-los com a forma como corrigem e validam as respostas apresentadas pelos estudantes nas atividades. Buscamos encontrar pontos de convergência e divergência entre seu discurso, sua formação, sua avaliação/correção e o que mostram entender a respeito do tema.

Quando perguntamos, por exemplo, se eles consideram correta uma resposta sem qualquer desenvolvimento (apenas o resultado final), sem decréscimo de pontuação, queremos saber se esse/essa profissional se interessa pelo processo (o argumento utilizado, o desenvolvimento), ou se quer saber apenas do resultado – talvez entrando no contraste do certo *versus* errado sem os pormenores. Nesse caso, entendemos que quem tem algum interesse no raciocínio utilizado para desenvolver uma resposta irá, talvez, descontar alguma pontuação de quem apresenta apenas o resultado final – já que não se sabe como aquele valor foi encontrado –, ou mesmo acrescentar uma observação a respeito disso durante a correção.

Se, em uma situação hipotética, algum participante responder que não considera completamente correta, mas durante as correções (etapa 3) não houve decréscimo de pontos ou nenhuma observação sobre isso em uma “resposta seca”, existe uma divergência entre seu discurso e uma situação prática. O mesmo vale para os casos em que o participante alega dar importância aos argumentos apresentados pelos alunos (em vez de priorizar fórmulas prontas), mas não considera, na correção das atividades, a resposta de um aluno que segue esse caminho.

Considerando também que a Educação evolui e surgem novos métodos, novos olhares e novas preocupações com o passar do tempo, julgamos importante incluir em nossa análise o tempo de formação e atuação de cada um. Quando perguntamos se houve alguma disciplina que abordasse diretamente o tema em suas formações, queremos entender se é algo que os participantes têm conhecimento desde o início de sua trajetória acadêmica, se tiveram contato com esse campo após a formação, ou sequer compreendem a argumentação e as provas matemáticas como um campo de estudos. Mais que isso, com essa análise, buscamos também verificar se, mesmo os casos em que o professor sequer tenha estudado algo sobre, ele se preocupa em validar as linhas argumentativas de seus estudantes e a estimulá-los em sala de aula, por julgar importante que desenvolvam esse aspecto.

Portanto, nesta etapa procuramos traçar, mesmo que não expondo diretamente, o perfil de cada professor participante, incluindo a forma como lida com a argumentação na prática (sua correção), como cada um afirma lidar com a argumentação em sala de aula e com suas vivências profissionais e acadêmicas. Não faz parte do objetivo levar em conta a frequência dos dados para compor a análise, mas sim as características apresentadas por cada um dos professores participantes em seus discursos, correções das atividades e formulário virtual, compondo o perfil de cada um e, a partir deles, verificar os pontos convergentes com o referencial teórico – portanto, uma pesquisa de cunho qualitativo (Bardin, 1995).

3. Análise dos dados

3.1. Breve análise das respostas dos estudantes

Os alunos da turma de 9º ano da qual sou professor regente responderam às questões propostas e obtivemos algumas resoluções que atenderam às nossas expectativas e foram selecionadas para compor o formulário de correção – especificamente cinco das seis respostas nele apresentadas. Buscamos selecionar respostas que pudessem ser interpretadas e avaliadas de diferentes formas, dependendo de quem fosse o avaliador.

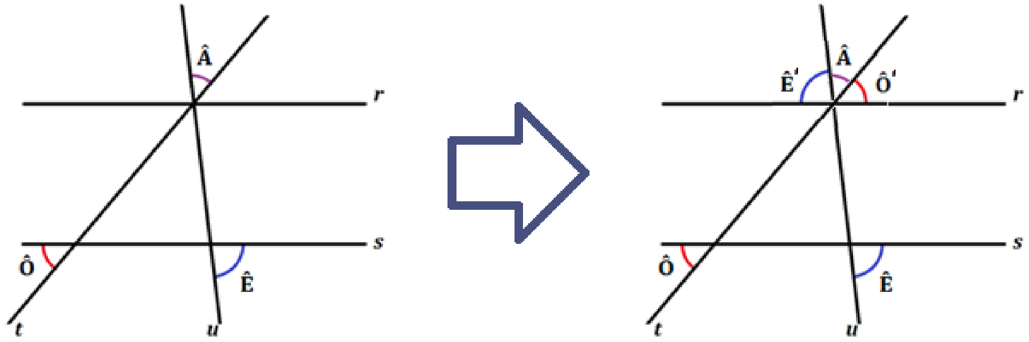
Neste tópico, trazemos uma análise dessas resoluções, feita com base no referencial teórico aqui apresentado, para estabelecer nossos parâmetros, isto é, apresentar como entendemos os pensamentos desses estudantes e como os avaliamos, para, a partir disso, analisar como os professores validam os argumentos apresentados.

A primeira questão, que, assim como a segunda, foi apresentada no capítulo 2 (metodologia), pede que se mostre a relação entre ângulos formados por duas retas paralelas e duas transversais a elas. Fica evidente a formação de um triângulo no desenho e os ângulos destacados são congruentes aos ângulos internos do triângulo – são seus ângulos opostos pelo vértice. Portanto, o esperado nessa questão era que os alunos participantes percebessem a relação com os ângulos internos do triângulo ou a correspondência de ângulos entre as retas paralelas e que, assim, as medidas dos três ângulos destacados somam, juntas, 180°.

A figura a seguir traz dois exemplos de possíveis linhas de raciocínio desses estudantes, não necessariamente seguindo as mesmas etapas ou o mesmo tipo de escrita:

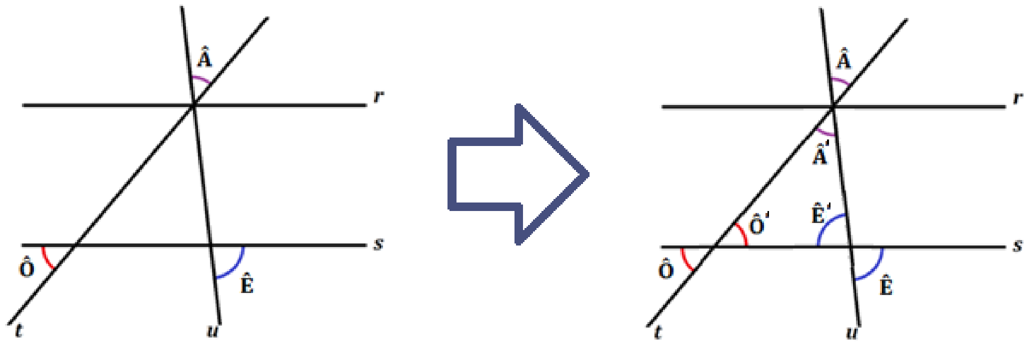
Figura 7 - Exemplos de respostas esperadas para a primeira questão

Exemplo 1:



Os ângulos Ô e Ô' são alternos externos, portanto congruentes, assim como Ê e Ê'. A soma das medidas de Ê', Â E Ô', formados sobre a reta *r* é igual a 180°. Dada a congruência entre Ô e Ô' e entre Ê e Ê', a soma das medidas de Â, Ô e Ê também é igual a 180°.

Exemplo 2:

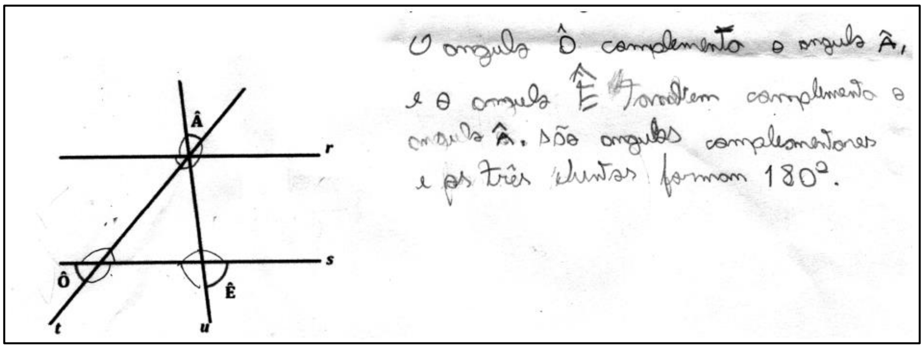


Os ângulos Ô e Ô' são opostos pelo vértice, portanto congruentes, assim como Â e Â' e Ê e Ê'. Os ângulos Â', Ê' e Ô' são internos ao triângulo da figura e a soma de suas medidas é igual a 180°. Considerando a congruência, a soma das medidas de Â, Ê e Ô também é igual a 180°

Fonte: O autor (2024)

As respostas foram variadas, algumas alcançando o objetivo esperado. A próxima figura traz a primeira resposta escolhida dessa essa questão.

Figura 8 - Resposta 1 à Questão 1



Fonte: dados produzidos na pesquisa (2024)

O texto da figura diz que “*O angulo Ô complementa o angulo Â, e o angulo Ê tambem complementa o angulo Â. São angulos complementares e os três juntos formam 180°.*”. Embora tenha sido usado o termo “complementares” para esses três ângulos, não fica claro se a intenção do aluno era dizer que eles se “completam” de alguma forma – nesse caso, compondo um ângulo de 180° –, ou se pensou, de fato, em ângulos complementares – o que estaria incorreto, visto que não se aplica a uma soma de medidas de três ângulos que resultam em 180°.

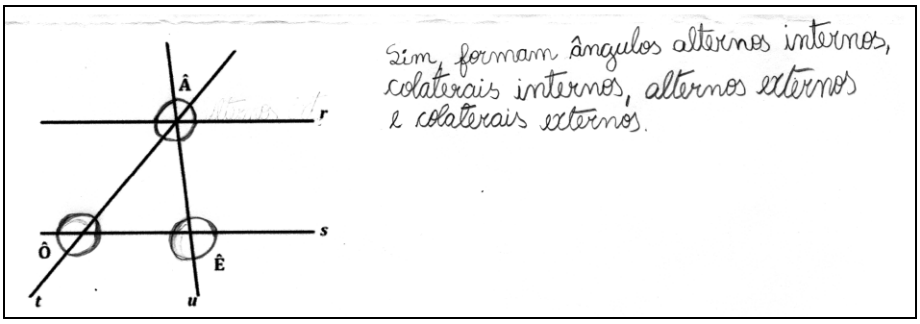
Ainda assim, no entorno de Â são marcados outros ângulos (correspondentes a Ê e Ô), explicitando o entendimento da correspondência e a formação do ângulo raso juntamente com Â, sobre a reta r. Além disso, o desenho feito mostra que houve a compreensão, embora não tenha deixado registro escrito, de que Ê, Ô e Â são opostos pelo vértice aos ângulos internos do triângulo, cuja soma, por sua vez, é 180°.

Entendemos que essa resolução traz argumentos que não apenas dão a resposta correta, mas apresentam as justificativas para isso no desenho e no texto. De certa forma, para esse/essa aluno/aluna, o que foi escrito e desenhado se mostra suficiente para provar a relação entre os ângulos e justificá-la, explicar a razão de ela existir, podendo ser um tipo de prova que explica, de acordo com as funções da prova propostas por Hanna (1990) e De Villiers (1990). Também podemos entender que, dada a ausência de exemplos particulares, ou seja, de valores específicos para testar a validade dessa relação, o pensamento exposto traz a ideia da generalidade, usando relações já conhecidas para explorar algo que a pessoa precisava confirmar: pensando na relação entre ângulos formados por retas paralelas e transversais, além do conhecimento prévio da soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo, prova que a relação entre esses ângulos é sua soma resultar em 180°.

Isso poderia ser, talvez, entendido como um caso de experiência mental da tipologia de Balacheff (1988), já que, novamente, não se faz o uso de casos particulares (não existe o processo empírico) para essa verificação, havendo a exploração do caso geral. Em contrapartida, não existe o exemplo genérico, o que poderia ser – mas não necessariamente é – o gatilho para a experiência mental. O que há aqui é a utilização de conceitos previamente estabelecidos como ferramenta/utensílio para a prova.

A segunda resposta à primeira questão, apresentada a seguir, é um exemplo de resposta errada.

Figura 9 - Resposta 2 à Questão 1

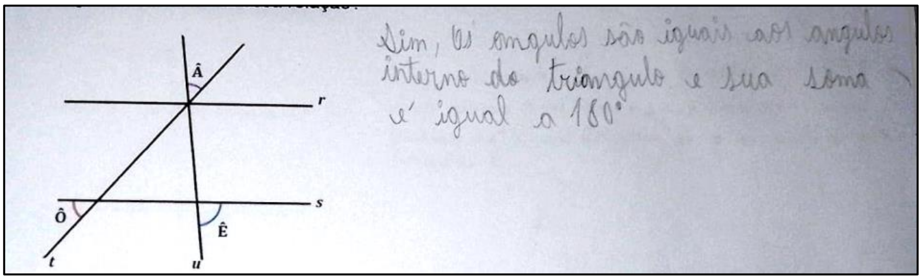


Fonte: dados produzidos na pesquisa (2024)

A resposta dada é “*Sim, formam ângulos alternos internos, colaterais internos, alternos externos e colaterais externos.*”, que apresenta apenas nomes de posições relativas pares de ângulos formados por duas ou mais retas paralelas e uma transversal. Aqui também há representações visuais que destacam alguns desses ângulos, mas apenas os nomes das posições, sem qualquer explicação ou indicação de onde estão ou como se relacionam. Como pura e simplesmente foram ditos os nomes de posições relativas, sequer há argumentos para justificar algum resultado, que também não existe.

O caso a seguir é a última resposta escolhida para essa questão, de um/uma estudante que diz que “*Sim, os angulos são iguais aos ângulos interno do triangulo e sua soma é igual a 180°*”

Figura 10 - Resposta 3 à Questão 1



Fonte: dados produzidos na pesquisa (2024)

A afirmação está, de fato, correta, mas não apresenta uma construção formal, organizada, ou mesmo desenhos para provar seu ponto. Ainda assim, o estudante utiliza o argumento – o único – de que os ângulos em questão são congruentes (utilizando o termo “iguais”) aos ângulos internos do triângulo e que, por conta disso, a soma de suas medidas seria igual a 180°. Portanto, por mais que pareça uma resposta certa sem fundamentos, entendemos que o aluno em questão precisa compreender a relação de ângulos opostos pelo vértice e também a relação entre os ângulos internos de um triângulo para chegar à sua conclusão.

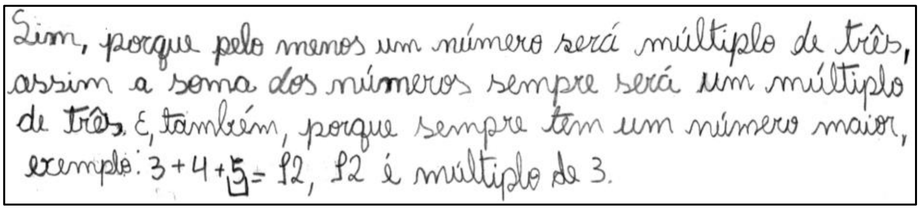
Escolhemos essa resposta por apresentar essas características, pois acreditamos que existam casos de professores que compreenderão como um golpe de sorte, ou mesmo um palpite, enquanto outros poderão validar com ressalvas por não haver um desenvolvimento explícito e outros, ainda, talvez entendam que essa justificativa, mesmo que curta, se utiliza de um argumento baseado em conhecimentos prévios implícitos na resposta.

A segunda questão apresenta duas somas de três números consecutivos e mostra que o resultado é múltiplo de três em ambos os casos. Em seguida, questiona se toda soma nesse formato segue a regra de resultar em um múltiplo de três, pedindo explicitamente para que a resposta seja justificada. Acreditamos que os exemplos dados, seguidos da justificativa, fossem um incentivo para o processo de verificação empírica, estimulando que os alunos fizessem o uso de exemplos genéricos ou não para verificar ou negar a afirmação (a afirmação de que a soma de três números consecutivos sempre resulta em um múltiplo de três, implícita na pergunta).

Obtivemos algumas respostas com argumentos parecidos, até mesmo repetidos, mas todos válidos para análise. Mesmo assim, precisamos fazer a seleção de apenas três e buscamos seguir os mesmos critérios utilizados para a questão anterior. Embora aqui tenhamos obtido resultados mais satisfatórios para o objetivo desejado, nenhum aluno apresentou um desenvolvimento completamente correto, o que fez necessária a criação dessa resposta.

O texto a seguir apresenta a primeira resposta selecionada: "*Sim, porque pelo menos um número será múltiplo de três, assim a soma dos números sempre será um múltiplo de três. E, também, porque sempre tem um número maior, exemplo: 3 + 4 + <u>5</u> = 12, 12 é múltiplo de 3.*"

Figura 11 - Resposta 1 à Questão 2



Sim, porque pelo menos um número será múltiplo de três,
assim a soma dos números sempre será um múltiplo
de três. E, também, porque sempre tem um número maior,
exemplo: 3+4+$\boxed{5}$= 12, 12 é múltiplo de 3.

Fonte: dados produzidos na pesquisa (2024)

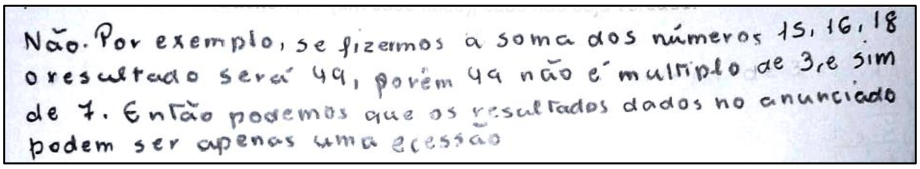
Parte do que é apresentado está correto e aqui é interessante notar o uso do exemplo numérico, que vem logo após um argumento que talvez pudesse responder completamente à questão (e então provar o que é solicitado), se fosse melhor desenvolvido. A pessoa que respondeu utilizou o argumento de que, a cada três unidades contadas, temos um múltiplo de três. Assim, ela entende que não importa a sequência de números consecutivos, ao menos um deles será divisível por três – e que isso é essencial para que a soma também seja. O trecho em questão está correto, mas a finalização é o problema, quando afirma que "sempre tem um número maior" e utiliza isso como justificativa.

Não é possível saber exatamente o que o estudante pensou para responder, podendo, inclusive, significar que esse "número maior" acumula duas unidades a mais que o primeiro, enquanto o segundo valor acumula uma unidade a mais que o primeiro, totalizando três. Também pode significar que, apesar de não entender bem a razão disso, percebe que esse número maior "impulsiona" a soma até atingir a terceira unidade após o primeiro valor. Pode ser, ainda, um princípio de ideia ou de pensamento que se perdeu e não se pôde continuar e jamais saberemos como terminaria. Não podemos descartar a possibilidade de ser apenas uma tentativa de responder algo para não deixar em branco, ou mesmo de ser um palpite sem embasamento.

Para finalizar sua construção, o estudante em questão traz um exemplo para comprovar seu argumento. Não poderíamos aqui dizer que esse passo enquadraria sua resolução no empirismo ingênuo (Balacheff, 1988), pois o exemplo não foi utilizado para construir, mas sim para verificar o que já havia sido argumentado anteriormente. Dessa forma, entendemos o exemplo dado como um experimento crucial (Balacheff, 1988), dada sua função de comprovação/verificação, embora não seja dado com valores altos e distantes do que já havia sido apresentado no enunciado.

O caso a seguir apresenta uma resposta errada, que tentou fazer o uso de um contraexemplo para negar a generalidade.

Figura 12 - Resposta 2 à Questão 2

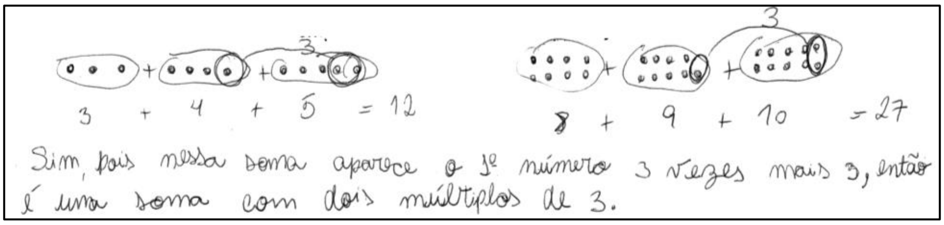

Não. Por exemplo, se fizermos a soma dos números 15, 16, 18 o resultado será 49, porém 49 não é multiplo de 3, e sim de 7. Então podemos que os resultados dados no anunciado podem ser apenas uma ecessão

Fonte: dados produzidos na pesquisa (2024)

Aqui, a afirmação é negativa: “*Não. Por exemplo, se fizermos a soma dos números 15, 16 e 18 o resultado será 49, porém 49 não é múltiplo de 3, e sim de 7. Então podemos que os resultados dados no anunciado podem ser apenas uma ecessão*”. Embora exista a utilização de um contraexemplo, sequer pode ser considerado, já que 15, 16 e 18 não são números consecutivos. Mesmo assim, essa escolha se deu para verificarmos como essa resposta é avaliada em relação às outras. Sendo mais específico: queremos observar se esse caso, que está errado em sua estrutura e em seu argumento, poderá receber a mesma pontuação da resposta anterior, que inicia de forma correta, “comprova” o que foi inicialmente levantado (para quem escreveu, é o suficiente), mas constrói de forma errada e não conclui de forma correta.

Para finalizar, temos a resposta construída por mim, que é correta e buscava abranger mais de uma função e aspecto da prova.

Figura 13 - Resposta 3 à Questão 2



Fonte: dados produzidos na pesquisa (2024)

Existe aqui uma construção gráfica e textual dos argumentos, para provar que, de fato, a soma de três valores consecutivos resulta em um múltiplo de três. Embora sejam dados dois exemplos pontuais, os desenhos feitos auxiliam na percepção do que ocorre em outras somas, ou seja, em um caso geral. Podemos dizer que ocorreu o exemplo genérico (Balacheff, 1988), sem alcançar a experiência mental – a generalização –, já que ainda existe forte apoio em casos particulares.

O texto completa a prova (informal, como as outras), já que além de traduzir o que está nas imagens, traz elementos que talvez não fossem claros à primeira vista. Por exemplo, um estudante do 9º ano poderia não notar que o valor inicial aparece três vezes nessa soma, configurando, assim, algo que teria o formato 3.n (com n representando o valor inicial). Em ambos os casos, o desenho destaca o "agrupamento" de três bolinhas no segundo e no terceiro valor, somando três ao termo anterior. Informalmente, o que essa resposta nos dá é o caso geral 3n + 3, que pode ser organizado e reescrito como 3.(n + 1), logo, divisível por três.

A prova apresentada tem a função de explicar (De Villiers, 1990; Hanna, 1990), já que explicita os argumentos utilizados e, de fato, explicam seu funcionamento. Tem também caráter exploratório, visto que não fica clara a existência de suspeitas em relação à veracidade da afirmação, enquanto o desenho evidencia uma construção exploratória, uma verificação. Podemos dizer, portanto, que a prova aqui também teve a função da descoberta, pela perspectiva de De Villiers (1990).

Apresentados nossos pontos de vista a respeito das respostas dos estudantes, veremos a seguir como os participantes da pesquisa, professores, as interpretam e avaliam.

3.2. Correção feita pelos professores

Vamos aqui apresentar a média das notas dadas para cada resposta, explicitando pontos de algumas correções que julgamos ser de destaque e/ou interessantes. É importante que tentemos compreender os aspectos validados e valorizados pelos docentes para que, posteriormente, seja possível verificar se suas concepções são condizentes com sua prática. Cabe lembrar que as respostas foram apresentadas no tópico anterior (3.1), portando, faremos apenas referências a elas, enfatizando as correções. Cada professor será identificado pela letra P seguida de um número de 1 a 10, já que são 10 participantes.

A primeira resposta dada à primeira questão trazia o argumento de que os ângulos se “complementavam”, formando um ângulo de 180° quando se juntam. Levantamos a hipótese de que houve apenas um uso inadequado do termo “complementar”, já que há um desenho – que faz parte da resposta – que mostra a compreensão da correspondência dos ângulos da imagem. Portanto, o termo “complementar” pode se referir aos ângulos “completarem” a parte de cima da imagem e não à ideia de somar 90° (que seria aqui erroneamente utilizada). Considerando todas as notas dadas, essa resposta apresenta média 3,37, com grande variação entre o grau atribuído por cada professor. Antes de qualquer análise das justificativas, chama atenção o fato de haver, nesse caso, as notas máxima e mínima, ou seja, atribuição de grau zero e grau cinco à mesma resposta – notas apresentadas na tabela a seguir.

Tabela 1 - Notas atribuídas à primeira resposta da questão 1

Notas atribuídas à primeira resposta da questão 1										
P1	**P2**	**P3**	**P4**	**P5**	**P6**	**P7**	**P8**	**P9**	**P10**	**Média**
5	4	3	4,9	0	5	2	4,8	2	3	3,37

Fonte: dados produzidos na pesquisa (2024)

Dentre os participantes, 7 comentam o uso incorreto do termo “complementar”, porém 2 desses deixam claro que houve entendimento da questão e que o aluno apenas utilizou o termo errado. Já em outros casos, houve decréscimo de pontuação por conta do termo utilizado, como o P5, que atribuiu grau zero porque “a noção de complemento de um ângulo não se aplica...”, e P7, que atribuiu grau 2 com a justificativa de que “Não sabemos se a soma de Ô e Â e Ê e Â formam um ângulo de 90º graus”. Embora P7 tenha justificado dessa forma, reconhece que o estudante chegou à resposta correta, mas sequer comenta os argumentos utilizados (o que inclui o desenho):

Figura 14 - Nota com justificativa de P7 à primeira resposta da primeira questão

Grau/nota	Justificativa: Não sabemos se a soma de Ô e Â e Ê e Â formam um ângulo de 90º graus. Por isso não podemos dizer que são ângulos complementares. Ele acertou ao dizer que a soma dos 3 ângulos é igual a 180º.
2	

Fonte: dados produzidos na pesquisa (2024)

Dois professores, P1 e P6, apenas confirmam que está correto e dão nota máxima, sem tecer qualquer comentário. Nesses casos, P1, P6 e P7 parecem apenas verificar o que está certo ou errado, sem observar a construção do texto e os argumentos que estão na resposta. Por um lado, P7 destaca que a afirmação do estudante (sobre ângulos se complementarem) não é verdadeira, sem interpretar – intencionalmente ou não – que poderia haver uma confusão com os termos por parte do estudante. Atribui uma nota baixa por ter a resposta final correta, alegando apenas que o estudante “acertou”, novamente passando a impressão de que o acerto, por si só, é o que importa, independente do caminho. Por outro lado, P1 e P6 parecem ir direto a esse último ponto, visto que não há qualquer comentário sobre o desenvolvimento, ou mesmo a “confusão” feita pelo estudante. Demais participantes apenas comentam o deslize, mas reconhecem o acerto levando em conta outros elementos da resposta, ou seja, consideram a argumentação feita pelo estudante.

A resposta seguinte (segunda da primeira questão) apresenta notas e correções com mais similaridades em pontuação e justificativa, com média 2,15.

Tabela 2 - Notas atribuídas à segunda resposta da questão 1

Notas atribuídas à segunda resposta da questão 1										
P1	**P2**	**P3**	**P4**	**P5**	**P6**	**P7**	**P8**	**P9**	**P10**	**Média**
2	0,5	4,5	0	0	5	0	4	0,5	5	2,15

Fonte: dados produzidos na pesquisa (2024)

Nela está o texto em que o estudante apenas cita os nomes de relações entre ângulos formados por retas paralelas e uma transversal, sem explicitar quais são os ângulos que apresentam essas relações e sem responder à pergunta, de fato. Seis docentes destacam esse fato – seja comentando a falta de conhecimento, ou apenas alegando que esses elementos não estão na imagem do enunciado – e dão notas iguais ou próximas a zero.

Entre eles, destacamos P4, que questiona quais são os ângulos alternos (e demais classificações) de quais outros ângulos, além de não explicar o que é cada nomenclatura, o que indica falta de conhecimento acerca do assunto. P5 também evidencia a falta de conhecimento do estudante, já que as relações citadas não são explicitadas e não possuem conexão com o que é solicitado, evidenciando pouco conhecimento a respeito do assunto.

Por outro lado, o participante P8 atribui grau 4 sem qualquer justificativa, enquanto P3 dá nota 4,5, justificando que essas relações existem, porém não foram explicitadas perfeitamente pelo aluno. De fato, levando em conta todos os ângulos ali formados, essas relações irão surgir, mas entre os ângulos já destacados não há tais relações. Já P6 dá nota máxima porque “são formados por ângulos iguais”, enquanto P10, que também atribui grau 5, alega que o aluno compreende claramente as relações entre os ângulos. Assim, 4 professores consideram essa resposta correta, sob diferentes justificativas.

Encerrando a questão, a última resposta traz o argumento de que os ângulos apresentados são “os mesmos” do triângulo – são correspondentes aos ângulos internos do triângulo formado na figura. Esse é um caso de resposta com um argumento sucinto, seguindo quase diretamente ao resultado final (nesse caso, o que se deseja) correto. Embora exista a possibilidade de ser apenas um palpite, é preciso lembrar que existem maiores chances de se conhecer o conceito de ângulos opostos pelo vértice do que um palpite certeiro – já que aqui essa correspondência não está explícita, o que faria com que esse palpite aleatório fosse um golpe de sorte.

Além disso, embora sucinto, existe um argumento, que é a relação entre soma dos ângulos internos do triângulo e os ângulos destacados. A construção da prova aconteceu com a utilização de um conceito já conhecido (soma dos ângulos internos de um triângulo), buscando uma forma de relacioná-los com os ângulos destacados (com a utilização do conceito de ângulos opostos pelo vértice).

A média aqui é 4,9 e, de fato, todas as avaliações (em nota) foram muito próximas, conforme tabela a seguir.

Tabela 3 - Notas atribuídas à terceira resposta da questão 1

Notas atribuídas à terceira resposta da questão 1										
P1	**P2**	**P3**	**P4**	**P5**	**P6**	**P7**	**P8**	**P9**	**P10**	**Média**
5	5	4,5	5	4,5	5	5	5	5	5	4,9

Fonte: dados produzidos na pesquisa (2024)

Entre as justificativas, 7 reconhecem o uso do conceito de ângulos opostos pelo vértice como argumento válido, aliado ao conhecimento da soma dos ângulos internos do triângulo. O professor P4, incluso nos 7 citados, destaca o fato de não haver qualquer demonstração a respeito da soma dos ângulos internos do triângulo (portanto um conhecimento prévio e não solicitado na questão), mas considera conceitualmente e matematicamente correta:

Figura 15 - Nota com justificativa de P4 à terceira resposta da primeira questão

Grau/nota	**Justificativa:**
5,0	Apesar de o aluno não conduzir uma demonstração ou raciocínio que prove que a soma dos ângulos internos é iguala 180°, ele foi capaz de identificar que esses ângulos são iguais aos ângulos internos do triângulo e que a soma é 180°. Sua resposta foi matematicamente correta: Ele explicou qual a relação entre os ângulos, respondendo completamente à pergunta.

Fonte: dados produzidos na pesquisa (2024)

Já P5 aponta para a falta da explicitação da relação, ou seja, do desenho ou da fala de quais ângulos cabem nessa relação. O professor P9 também cita a ausência de argumentos formais na construção da prova, mas valida o que o aluno apresenta. Os três participantes citados apresentam tempos de experiência profissional distintos, inclusive atuando em redes distintas. Dentre os três, dois estão em formação continuada: P4 está cursando mestrado e P5, doutorado.

Destacamos o contraste entre as falas de P4 e P5: enquanto o primeiro parece prezar pela formalidade em parte da resposta (para “completá-la”), o segundo parece sentir falta da explicação/esclarecimento. Isso pode indicar que, como professores (e aqui, não como matemáticos, no sentido mais formal), consideram que um estudante não precisa de rigidez e formalidade para mostrar compreensão. Podemos recorrer às falas de Hanna (1990) e Tall (1995) de que a prova matemática é algo que precisa ser socialmente aceito, o que é estabelecido no meio em que o indivíduo se encontra. Portanto, para um estudante do Ensino Básico, não cabem exemplos para provar a validade de algo, mas também não é necessário que seja extremamente formal (embora possa ser). Basta que utilize argumentos convincentes dentro de conceitos já estabelecidos e conhecidos.

Os outros 3 participantes apenas atribuem a nota e ratificam a resposta: está correto, esse é o resultado. Não é possível afirmar a razão de não haver comentários mais detalhados, porém justificar a nota apenas porque está correto, sem razão de ser, pode indicar que, para esses professores, basta ter a resposta final correta, independente dos meios e dos argumentos utilizados. De fato, esses participantes (P1, P6 e P7) trouxeram justificativas similares para as respostas anteriores: as notas altas foram dadas simplesmente por estar correto, enquanto as notas baixas apresentavam alguma justificativa (muito direta e pouco detalhada) para tal.

Seguindo adiante, agora na primeira resposta da segunda questão, temos o texto que afirma que a cada três números sempre haverá um múltiplo de três, além de sempre haver um “número maior”, o que deixa margem para algumas possibilidades, comentadas no tópico 3.1 deste capítulo. A média de pontuação foi 2,6, com notas ou muito altas, ou muito baixas, havendo apenas uma avaliação com nota 2 (mais longe dos extremos) de P2.

Tabela 4 - Notas atribuídas à primeira resposta da questão 2

Notas atribuídas à primeira resposta da questão 2										
P1	**P2**	**P3**	**P4**	**P5**	**P6**	**P7**	**P8**	**P9**	**P10**	**Média**
5	2	4,5	1	4	5	1	1,5	1	1	2,6

Fonte: dados produzidos na pesquisa (2024)

Assim como as notas, as justificativas também são variadas. Aqui, P3 e P5 chamam atenção para a falta do uso da linguagem matemática, mas de formas distintas: P3 sugere que o estudante deveria ter sido formal, utilizando linguagem algébrica para generalizar a soma – o que viria da experiência mental, dentro da tipologia de Balacheff (1988) –, enquanto P5 apenas diz que poderia ter usado a linguagem matemática para tentar generalizar.

Figura 16 - Nota com justificativa de P3 à primeira resposta da segunda questão

Grau/nota **4,5**	**Justificativa: Resposta correta, pois a soma de três números consecutivos sempre será múltiplo de 3, para uma definição mais generalizada como pede na justificativa da questão, devia ter feito assim** **X + (X + 1) + (X + 2) = 3X + 3 = 3 (X +1) confirmando que esta soma sempre será realmente, múltiplo de 3.**

Fonte: dados produzidos na pesquisa (2024)

Ainda assim, ambos reconhecem que houve a percepção da propriedade, mesmo com o uso de um caso particular (exemplo) para justificar e sem a generalização. Nesses dois casos, vemos que os argumentos do aluno são validados dentro do seu nível escolar, embora não consiga generalizar e, de fato, demonstrar o solicitado. P10 apresenta, em sua justificativa, a construção formal, assim como P3, mas não sugere que o estudante deveria ter seguido por tal caminho, apenas mostra que o conceito apresentado na questão não foi compreendido.

Outros professores dizem, de diferentes formas, que ter um múltiplo de três na sequência não garante a propriedade e que um caso particular não justifica a afirmação, atribuindo notas baixas ao estudante – em alguns casos, reconhecendo que houve um argumento que começou bem, mas não se desenvolveu (exemplo a seguir), concordando com a análise feita em 3.1.

Figura 17 - Nota com justificativa de P5 à primeira resposta da segunda questão

Grau/nota	Justificativa:
4,0	O estudante fez uma verificação a partir de um caso particular. Não demonstrou que a propriedade vale de forma geral, por meio da linguagem matemática, mas foi um indício de percepção da propriedade

Fonte: dados produzidos na pesquisa (2024)

Somente dois participantes atribuem grau máximo, justificando apenas que está correto, pois a soma é realmente um múltiplo de três, sem levar em consideração os argumentos expostos no desenvolvimento da resposta.

Uma das correções, de P8, atribui nota 1,5 e justifica essa nota à falta de exemplos dados:

Figura 18 - Nota com justificativa de P8 à primeira resposta da segunda questão

Grau/nota	Justificativa:
1.5	O estudante precisa indicar outras somas para compreender que a soma de três números consecutivos será múltiplo de 3. Aqui é possível verificar qual o conjunto numérico ira é V ou F
Resposta 2	

Fonte: dados produzidos na pesquisa (2024)

Essa justificativa pode indicar que, na visão do professor, o estudante deveria – isso porque ele afirma que o estudante "*precisa* indicar" – seguir o processo empírico para compreender e provar a propriedade. O que não fica claro, apenas observando esta correção, é se o participante acredita que os exemplos seriam suficientes, ou se seriam necessários como argumento para construir uma prova mais rigorosa com base em uma suspeita levantada pelos exemplos, cumprindo aqui a função de explicação (De Villiers, 1990).

Os professores que atribuíram notas altas ou medianas validaram, em algum nível, os argumentos dados na resposta, visto que, em seus comentários/justificativas, todos convergem para o mesmo ponto: pelo exemplo dado e pela forma como escreve, parece haver a compreensão da propriedade, embora a prova não tenha acontecido, de fato. O que foi levado em conta nessas correções foi o que o aluno traz de conhecimento, independente do “resultado” final. Mesmo o participante P4, que deu nota 1, evidenciou a percepção, embora o estudante não tenha feito o que a questão pede.

A resposta seguinte, a segunda da segunda questão, é o caso em que a afirmação é dada como falsa, utilizando um contraexemplo para isso. Porém, o contraexemplo dado não cabe, já que foi dada uma soma de três números não consecutivos. Portanto, é uma resposta incorreta, com argumentos inconsistentes.

Em geral, as notas foram baixas (a maioria, zero), com média 1,1.

Tabela 5 - Notas atribuídas à segunda resposta da questão 2

Notas atribuídas à segunda resposta da questão 2										
P1	P2	P3	P4	P5	P6	P7	P8	P9	P10	Média
0	0	0	1	3	5	0	s/n	0	0	0,9

Fonte: dados produzidos na pesquisa (2024)

Um dos participantes, P8, não pontuou, pois, em sua perspectiva, o estudante deveria refazer a questão, já que não apresentou um contraexemplo de números consecutivos. Entendemos que ele parte do pressuposto de que não poderia avaliar um argumento de um estudante que não compreendeu a questão ou que, por um descuido (a apresentação de três números não consecutivos), não deu a resposta correta. Por outro lado, talvez pudesse considerar o argumento apresentado, o contraexemplo, como válido, já que, para o estudante, estaria correto negar a afirmação – mas aqui são apenas suposições a respeito do que pensaram o estudante e o professor.

Um dos professores, P6, atribui nota máxima à resposta, justificando que “está correto, há exemplos de sequências de três números consecutivos que não são múltiplos de três.”. Causa estranheza que se tenha validado completamente o argumento utilizado, além de afirmar que existem somas de três números consecutivos que não são múltiplos de três. Ainda assim, por fazer parte da pesquisa, demos como válida sua correção e consideramos a pontuação na média de pontos.

Por outro lado, 8 professores comentaram sobre os números não serem consecutivos e 6 deram nota zero. Entre esses, houve diversas justificativas, incluindo a de P2, que afirma que o aluno não sabe o que são números consecutivos, enquanto P3 e P7 são mais brandos, sugerindo uma falta de atenção ou esquecimento.

Mais uma vez, P4 e P5 parecem considerar a resposta dada, embora tenham dado notas diferentes – 1 e 3, respectivamente. A justificativa de P4 é que, embora o exemplo dado não seja, de fato, um contraexemplo (por não caber na definição de números consecutivos), o estudante compreende que um contraexemplo basta para provar que uma afirmação é falsa. Portanto, embora seja equivocado, o argumento do estudante é validado de alguma forma, pois seu raciocínio se mostra coerente, apesar do possível deslize. O participante P5, apesar de ter sido mais sucinto em seu texto, apresenta a mesma justificativa. Cabe destacar que, embora haja a ideia de apresentar um contraexemplo, ele não foi apresentado, já que não há três números consecutivos aqui.

Figura 19 - Nota com justificativa de P5 à segunda resposta da segunda questão

Grau/nota	**Justificativa:**
3,0	**O estudante apresentou um contra-exemplo em seu argumento pois a sequência 15,16 e 18 não são números consecutivos mas o final da resposta demonstra que ele ainda não percebeu que a afirmação dada vale para todo natural.**

Fonte: dados produzidos na pesquisa (2024)

Finalizando as correções, temos a resposta que não foi dada por nenhum estudante, mas criada por mim, pois sentimos falta de uma resolução correta, baseada em argumento visual. Nesse caso, as notas são mais parecidas, próximas ou iguais a 5, com média 4,6. Dessas, 3 são nota 4 e o restante, 5.

Tabela 6 - Notas atribuídas à terceira resposta da questão 2

Notas atribuídas à terceira resposta da questão 2										
P1	**P2**	**P3**	**P4**	**P5**	**P6**	**P7**	**P8**	**P9**	**P10**	**Média**
5	4	5	5	4	5	5	4	5	5	4,7

Fonte: dados produzidos na pesquisa (2024)

Três professores (P2, P5 e P8), que atribuíram grau 4, trazem justificativas muito diferentes para suas avaliações, discriminadas a seguir:

A docente P2 alega que, apesar da compreensão do que são números consecutivos e do raciocínio com os pontinhos, “não daria a pontuação inteira, pois ele aplica o mesmo raciocínio com o exemplo (8+9+10).”. Ela reconhece o argumento como válido, mesmo que informal, e entende que, com essa resposta, o estudante compreende a construção. Entretanto, alega que não daria a nota máxima por não ter aplicado o mesmo raciocínio com a soma 8+9+10, quando, na verdade, a justificativa visual foi feita nos dois casos, além de o texto ser também válido para os dois casos.

Por sua vez, P5 valida completamente o argumento dado, dizendo que o estudante percebeu a propriedade por meio dos desenhos, embora – e aqui está a causa do decréscimo de um ponto – não tenha sido formal como a questão pede. Acrescenta, ainda, que “esse fato indica uma outra possibilidade de argumentar sobre propriedades matemáticas”, sendo “esse fato” o uso de desenhos como argumento para compor a prova.

Figura 20 - Nota com justificativa de P5 à terceira resposta da segunda questão

Grau/nota	**Justificativa:**
4,0	**Embora o estudante não tenha demonstrado formalmente(com uso , conforme solicitado, que o resultado vale para todos os naturais, ele percebeu uma característica presente na soma de 3 números consecutivos a partir do registro feito por meio dos desenhos. Esse fato indica uma outra possibilidade de argumentar sobre propriedades matemáticas**

Fonte: dados produzidos na pesquisa (2024)

Novamente, agora nessa resposta, P8 fala sobre exemplos, alegando que “o estudante poderia fazer mais exemplos para concluir”. Aqui, diferente do primeiro caso, o participante parece dar como suficiente a apresentação de exemplos para provar a afirmação. Aparentemente, para P8, seria um caso que poderia se encaixar no exemplo crucial, ou mesmo no empirismo ingênuo de Balacheff (1988), o que, para o professor, não prova, justifica ou explica nada, apenas levanta a suspeita.

Apesar de estar implícito no desenho o processo de experiência mental (Balacheff, 1988) por meio de um processo empírico, nenhum dos participantes deu como suficiente (ou se o fez, não comentou) a generalização vinda da percepção de que sempre acumulam 3 unidades em cada soma. Em contrapartida, houve comentários sobre a prova ser suficiente e de a resposta mostrar a compreensão do estudante, dando a entender que essa prova traz um caráter explicativo, encaixando-se nos conceitos apresentados por Hanna (1990) e De Villiers (1990).

A tabela a seguir sintetiza as notas atribuídas a cada resposta por cada um dos professores participantes, incluindo a média de cada questão.

Tabela 7 - Relação de notas atribuídas a cada resposta, com suas respectivas médias

Relação de notas atribuídas a cada resposta, com suas respectivas médias						
	Questão 1			**Questão 2**		
	R1	**R2**	**R3**	**R1**	**R2**	**R3**
P1	5	2	5	5	0	5
P2	4	0,5	5	2	0	4
P3	3	4,5	4,5	4,5	0	5
P4	4,9	0	5	1	1	5
P5	0	0	4,5	4	3	4
P6	5	5	5	5	5	5
P7	2	0	5	1	0	5
P8	4,8	4	5	1,5	s/n	4
P9	2	0,5	5	1	0	5
P10	3	5	5	1	0	5
Médias	3,4	2,2	4,9	2,6	0,9	4,7

Fonte: dados produzidos na pesquisa (2024)

É importante lembrarmos que os professores selecionados atuam ou atuaram no 9º ano do Ensino Fundamental ou 1º ano do Ensino Médio e que essa escolha se deu em razão da experiência com essa faixa etária e essas séries escolares. Esses termos foram informados aos professores, para que soubessem que as questões foram respondidas por alunos nesse nível escolar. Por essas razões, acreditamos que não caberia aqui dar como suficiente a exemplificação em um processo empírico para provar o solicitado, dada a faixa etária e nível escolar dos estudantes. Por outro lado, talvez seja demais exigir um alto nível de formalidade de alguém nessas condições.

Nas oito correções analisadas, podemos dar destaque para algumas particularidades, algumas características que se repetem: Alguns professores (destaque para P1 e P6), se atém a dizer se está certo ou errado, sem mais comentários e análises da resposta, e pontuar em cima dessa dicotomia. Além disso, o professor P6 deu nota máxima para todas as respostas, o que indica que possivelmente não as avaliou com cuidado – ou que tenha a concepção de que o que vale é apenas a resposta final, ou mesmo que não tenha conhecimento a respeito dos assuntos tratados. O professor P8 parece ter alguma preferência por exemplos nas respostas, mesmo que os argumentos possam ser suficientes para provar o desejado. Nesse caso, não fica claro, observando apenas as correções, se o participante entende ser necessário que haja tais exemplos, ou se é apenas para fins ilustrativos. Também vimos certa similaridade entre as correções de P4 e P5, que pareciam validar os argumentos dos estudantes, mesmo aqueles que não apresentavam a resposta correta, no fim. Ainda assim, P4 parece prezar mais pela formalidade na escrita, como comentado em algumas de suas justificativas.

3.3. Dados dos professores obtidos via formulário *Google*

Entre os professores participantes, que totalizam dez, quatro são do Rio de Janeiro, um é de São Paulo, um é da Bahia, um é do Ceará e três são da Paraíba. Metade dos participantes responde possuir apenas a graduação, enquanto dois cursam doutorado, um cursa mestrado e dois estão cursando alguma especialização. Durante as entrevistas (próxima etapa), a participante P7 informa ainda não ter terminado sua graduação, embora já atue como professora na rede privada. Como não havia essa opção no formulário, escolheu a mais próxima de sua realidade.

Quanto às experiências profissionais, vimos que cinco participantes estão atuando na rede pública de ensino, de modo que os cinco restantes nunca atuaram em escolas públicas. Entre os atuantes na escola pública, dois possuem entre um e cinco anos de experiência, um possui entre seis e dez anos de experiência e dois têm dez anos ou mais na rede. Somente quatro participantes estão trabalhando atualmente na rede privada, com apenas um coincidente com os atuantes na rede pública (P10). Portanto, dois desses professores não estão empregados em nenhum segmento (no momento em que responderam às questões). Três pessoas não têm experiência alguma na rede privada, enquanto duas têm entre quatro e seis anos, três têm mais de dez anos, uma tem entre sete e nove anos e uma tem de um a três anos de experiência.

A primeira questão sobre a atuação e as concepções desses profissionais é se eles consideram como correta, sem nenhum decréscimo de pontuação, uma resposta dada por alguém que não apresenta nenhum desenvolvimento, apenas o resultado final. Embora a pergunta sequer tenha tocado no tema da argumentação, a ideia era dar um passo para trás e verificar a importância da explicação e do desenvolvimento para esses professores. Um estudante que apresenta apenas a resposta final não deixa claro se tem algum conhecimento dos assuntos abordados, dando margem para algumas interpretações, entre elas o “chute” e a “cola”.

Apenas dois participantes alegaram considerar esse tipo de resposta, sendo uma, P1, a mesma que aparenta ignorar os argumentos apresentados nas respostas da atividade proposta aos alunos e foca apenas no resultado final. Embora seja coerente em suas posições – prática e concepções –, reforça a hipótese de que não se atém aos meios utilizados para dar a resposta, mas apenas ao produto final. Seis dos docentes alegam não considerar correto sem nenhum decréscimo e dois deles, P8 e P9, apresentam uma terceira opção: P8 alega que é dada a oportunidade, pós avaliação, de se conversar com o estudante sobre a resposta. Caso ele saiba explicar como fez para chegar ao resultado, tem sua pontuação total. Em caso contrário, apenas 10% da pontuação é dada. Portanto, é mais um professor que não valida completamente apenas a resposta final, sendo assim, sete, ao total. Já P9 considera apenas nas avaliações em que as questões são de múltipla escolha.

A terceira resposta dada à primeira questão era um caso em que o estudante apenas dizia que os ângulos desenhados eram os mesmos ângulos (internos) do triângulo, que totalizavam 180° juntos, apresentando um argumento sucinto para afirmar isso. Como já dito, essa foi a razão da escolha dessa resposta para compor o formulário de correções: ela está correta, mas não há um desenvolvimento formal ou uma construção argumentativa explicativa e/ou expositiva. Pode ser, para alguns, apenas uma “resposta final” certa. Ainda que seja isso e que sete dos oito professores tenham alegado para não pontuar totalmente uma resposta que é apenas a resposta final (correta), essa questão teve os maiores índices de pontuação, variando de 4,5 a 5.

Seguindo adiante, nove professores alegam considerar respostas de alunos que apresentem argumentos próprios e que trilhem seus próprios caminhos, mesmo que diferentes dos que foram apresentados em aula, para responder a uma questão/problema. De fato, podemos dizer que as respostas dadas foram bem diversificadas e aceitas, quando corretas. Em alguns poucos casos, houve observações sobre caminhos que os estudantes poderiam tomar – acompanhadas (referente a observações) da retirada de alguns poucos pontos –, sugerindo, geralmente, caminhos mais formais, como P5 e P3 na segunda questão (última e primeira respostas, respectivamente). Não houve aqui incoerências quanto a esse quesito, embora os casos citados sejam um sinal de alerta, juntamente com os dois professores que validaram praticamente todas as respostas, sem observar os argumentos utilizados.

Outra pergunta do formulário era se os professores orientam a memorização de fórmulas, com as opções “sim, apenas memorizar o formulário”, “Não oriento a memorização” e “sim, memorizar e compreender o processo”. Novamente, aqui não há menção direta à argumentação matemática, mas a pura memorização de uma fórmula – o que é, infelizmente, uma prática comum – já anula qualquer possibilidade de o estudante desenvolver suas capacidades argumentativas para que possa provar algo matematicamente. A ferramenta já vem pronta, talvez sequer seja compreendida, de fato.

Seis professores dizem que sim, orientam a memorização, mas com a compreensão do processo. Dois outros participantes criaram novas opções: Um deles, P7, praticamente repete essa opção, mas faz questão de deixar claro que não é algo que cobre em suas avaliações. Em outras palavras, seus alunos são estimulados a compreender as relações e fórmulas apresentadas, bem como lembrar delas, porém a memorização não será cobrada – o que indica a possibilidade de caminhos alternativos em suas avaliações, de seus alunos apresentarem maneiras próprias de resolução.

Esse pensamento é compartilhado por P8, que abre também uma nova opção, em que diz que não orienta a memorização, mas a compreensão. Dessa forma, os estudantes não esqueceriam o aprendizado e poderiam chegar à fórmula em questão mesmo que não lembrem dela. De fato, quando se constrói o conhecimento de algo por conta própria, utilizando seus métodos e estratégias e com a possibilidade de explorar, a obtenção do produto final – nesse caso, uma fórmula ou relação matemática – é algo que não resolve apenas o problema em questão, mas que dá uma ferramenta que pode ser reutilizada em problemas similares (Arcavi, 2005).

Citamos como exemplo um problema de crescimento exponencial, como o contágio de pessoas por uma determinada doença. Explorando esse tipo de problema, uma turma pode observar de que forma o número de novos doentes cresce, como é esse padrão e o que aconteceria se, por exemplo, uma das pessoas no meio do processo não transmitisse o vírus para outros. Com isso, questões que envolvem padrões exponenciais (como as funções exponenciais, quadráticas e de terceiro grau, por exemplo) podem ser mais facilmente reconhecidas e resolvidas. Podem utilizar como argumento o crescimento e/ou as características observadas na questão anterior, relacionando, inclusive, temas diferentes que seguem modelos matemáticos similares – seja por novos processos empíricos, ou indo direto à experiência mental de Balacheff (1988).

Dois professores, P4 e P5, dizem não orientar a memorização de fórmulas, o que entendemos que sejam casos de professores que apresentam essas relações matemáticas, mas orientam a compreender o processo em vez de memorizar – algo confirmado na etapa das entrevistas. Lembremos que esses dois professores apresentaram correções (as justificativas, mais especificamente) similares, em que diziam sentir falta de rigidez e formalidade nas respostas. Mesmo havendo decréscimo de pontuação nesses casos, ambos validaram as respostas apresentadas quando havia argumentos que pareciam seguir o caminho correto. Aqui, novamente, vemos casos de coerência entre o discurso e a prática, mostrando que ambos os professores entendem a importância da autonomia dos estudantes na criação de seus próprios argumentos.

Ao serem questionados se o tempo que têm em sala de aula é suficiente para desenvolver suas práticas, devendo, para isso, escolher um valor em uma escala de 1 a 5 (em que 1 é tempo insuficiente e 5 é tempo suficiente), quatro participantes consideram ter tempo razoável – número 3, na escala. Três consideram tempo suficiente (5), dois consideram tempo insuficiente (1) e um deles aparentam ter tempo quase insuficiente (2) para desenvolvimento de suas práticas (o que consideram ser a prática ideal para cada um).

Precisamos obter essa informação porque, de fato, muitos de nós, professores, nos vemos com tempo insuficiente em sala de aula, muitas vezes tendo que escolher entre uma boa prática (o que é algo individual) e a utilização do livro didático completo, por exemplo. Além disso, essa falta de tempo poderia justificar eventuais problemas na metodologia de cada um, como também esclarecer que (e porquê) alguns desses professores não trabalham com argumentação em sala de aula e não estimulam essa prática com seus estudantes. Aqui, mesmo entre os professores que alegaram ter pouco tempo de aula, não houve casos em que alegam não trabalhar o desenvolvimento da argumentação e de provas matemáticas em sala de aula.

Cada um dos docentes apresentou uma razão para sua escolha e, entre os que alegaram ter pouco tempo, as justificativas são: a reformulação do Ensino Médio, que reduziu os tempos da disciplina; a cobrança no cumprimento do currículo, que é extenso e não cabe no tempo estipulado junto com uma prática considerada ideal; a falta de interesse dos estudantes, que faz com que o professor use parte de seu tempo para reter a atenção da turma.

Na mesma escala da última questão, de 1 a 5, agora os docentes são questionados sobre o estímulo que seus alunos recebem para justificar resultados apresentados, de modo que 1 representa nenhum estímulo e 5 representa que sempre são estimulados. Nove professores escolheram o valor máximo, enquanto apenas um escolheu o número quatro – e aqui, precisamos acender um alerta.

Embora todos os participantes aparentem dar importância às justificativas apresentadas por seus estudantes, ou, melhor, ao estímulo para que essas justificativas sejam dadas, tivemos casos nas correções em que os argumentos não foram levados em conta. O que apontamos aqui não é para uma incoerência de modo sensacionalista, mas para alertar que, em muitos casos, os profissionais podem não saber como lidar com esse tema, ou mesmo não saber o que é justificar, argumentar e explicar um resultado.

Especialmente P1 e P6 teceram apenas comentários sobre estar certo ou errado em suas correções, não comentando o que cada estudante disse/escreveu. Já outros professores invalidaram a primeira resposta da primeira questão pelo equívoco – novamente, se puder ser considerado como tal – do estudante que disse que os ângulos se complementam. O termo utilizado pelo aluno teve um peso significativo em sua avaliação, frente ao seu desenho e ao restante de seu texto. O mesmo vale para a última resposta da segunda questão, que obteve notas altas, mas com comentários de que poderia ter dado a fórmula, ou que poderia haver mais exemplos. Novamente, algo pequeno frente aos argumentos utilizados para responder à questão.

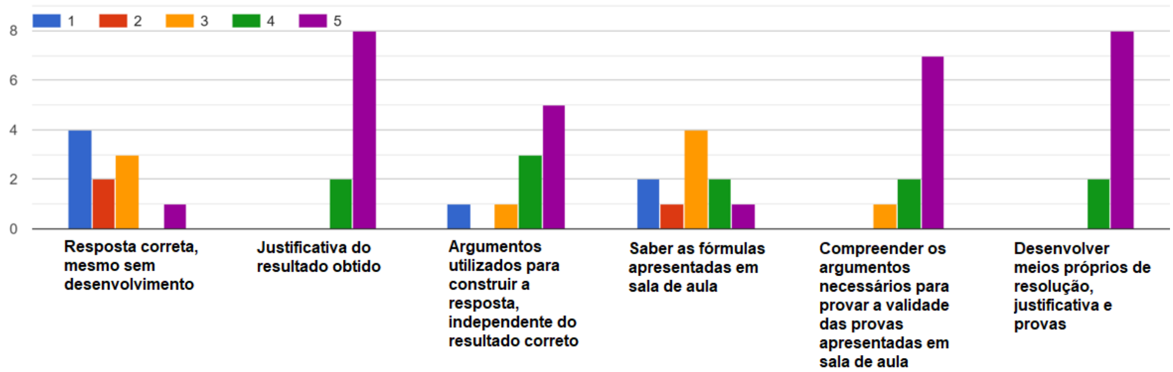
Em seguida, são questionados, sob a mesma escala, sobre os estudantes serem apresentados à demonstrações de teoremas e fórmulas e se são estimulados a demonstrar teoremas e fórmulas em sala de aula. Três professores marcaram a opção “4” e três marcaram “5”, demais professores marcaram “2”. Todos os professores que marcaram a opção 2 alegaram ter pouco tempo de aula para desenvolver suas práticas. Um dos professores que marcou a opção 4, P4, disse, na pergunta sobre ter tempo suficiente, que seu tempo de aula era insuficiente, escolhendo a opção 1, na ocasião.

É coerente que os professores que alegam não ter tempo sejam os mesmos que não apresentam e estimulam a demonstração de teoremas em aula – justamente por precisarem priorizar outros aspectos. Os dois professores que marcaram a opção 5 aqui são os mesmos dois que marcaram a opção 5 quando questionados sobre o tempo de aula ser suficiente.

Destacamos que um deles, P8, justificou, na questão anterior (sobre o tempo de aula), que costuma trabalhar com uma metodologia de resolução de problemas em que apresenta um problema inicial antes de qualquer conceito ser desenvolvido. A partir disso, os estudantes podem investigar possibilidades, construir argumentos e desenvolver métodos para chegar ao desejado. Dessa forma, o processo de formalização e demais estudos sobre o assunto, segundo P8, seriam facilitados. É possível, portanto, que esses processos de demonstração estejam inclusos em sua metodologia.

A última questão desse formulário apresentava seis aspectos que os participantes deveriam apresentar um grau de importância de 1 a 5. Para condensar as informações, trazemos aqui o gráfico com as informações dessa pergunta.

Figura 21 - Gráfico com o nível de relevância de alguns aspectos apresentados pelos alunos, na perspectiva dos participantes da pesquisa



Fonte: dados produzidos na pesquisa (2024)

O primeiro aspecto teve a maioria dos professores escolhendo a opção de menor relevância, o que condiz com suas correções, com exceção de P1, que, novamente, apenas comentava estar certo ou errado. Já a justificativa para os resultados obtidos teve o resultado inverso: oito professores veem esse aspecto como muito importante/essencial. Como já comentado aqui, alguns casos parecem incoerentes por não terem levado em conta os argumentos nas justificativas dos estudantes no formulário de correção.

Cinco professores dão importância máxima para os argumentos utilizados pelos estudantes, independente do resultado final estar correto. São os casos em que se tem um desenvolvimento correto, com argumentos coerentes e bem amarrados, mas, por alguma razão, o final pode não estar correto. Todos esses professores, de fato, levaram em conta o que foi respondido nas questões, atribuindo alguma pontuação sempre que possível. Existiu, de fato, a valorização da argumentação dos estudantes. Apenas um professor deu importância mínima a esse aspecto, P6, que, em duas ocasiões, considerou como corretas respostas erradas, além de apenas confirmar o que era dito, algo como “sim, está correto, é isso mesmo”.

As opiniões ficam mais divididas a respeito de saber as fórmulas e relações apresentadas em sala de aula, de modo que quatro professores atribuem importância média (3), dois dão importância mínima (1) – novamente P4 e P5 –, um dá importância máxima (5), dois dão grande importância (4) e um entende como pouco importante (2). A única pessoa que deu máxima importância para esse item é P1, o que se mostra coerente com seu posicionamento até então. Entre os dois professores que deram importância 4, está P3, que, de fato, exigiu algum formalismo a mais em algumas respostas, mostrando que pode ser um professor que preza pelos aspectos mais formais e rígidos.

Sete professores alegam dar importância máxima à compreensão dos argumentos necessários para provar a validade de provas apresentadas em sala de aula e oito professores consideram o desenvolvimento de argumentos próprios para a resolução de questões, justificativas e provas como extremamente importante. Seria, em nosso ponto de vista, o ideal, porém vimos que alguns dos argumentos dos estudantes não foram completamente validados nas correções.

3.4 Entrevista semiestruturada

Conforme dito no capítulo de metodologia, buscamos escolher professores de diferentes localidades e com diferentes vivências para compor o grupo de participantes, de modo a obter dados mais plurais desse grupo. De fato, há diferenças consideráveis no tempo de atuação docente, nos estados de atuação e mesmo nas esferas (pública ou privada) em que atuam. Entretanto, aqui aparecem informações que não se distanciam tanto de professor para professor – o que não prejudica a produção de dados ou mesmo sua análise.

Os professores participantes se formaram entre os anos de 1992 e 2021, porém, sete dos dez concluíram sua graduação entre 2015 e 2021 e uma professora, P7, a concluir no ano de 2024. Os dois professores restantes, P5 e P8, concluíram em 1992 e 2006, respectivamente. Assim, embora o tempo de atuação profissional de cada um seja consideravelmente diferente, as formações de P5 e P8 se diferem em 14 anos, enquanto as de P8, quando comparado a P1 e P2, que se formaram em 2015, apresentam um intervalo de nove anos. Dessas até a presente data, temos um intervalo de nove anos com sete professores formados e uma em formação.

Considerando tais diferenças, é possível que os professores formados pós 1992 tenham sofrido influências dos PCN (1997) em suas formações, assim como os formados a partir de 2018 possivelmente estudaram ou ao menos tomaram conhecimento da versão vigente da BNCC (2018). Isso, contudo, não inviabiliza o contato de professores formados há mais tempo com os referidos documentos, até porque P5 e P8 atualmente cursam doutorado na área de Ensino de Matemática, além de haver também a possibilidade de terem realizado cursos de extensão, ou mesmo que tenham se atualizado em relação aos documentos. Por outro lado, demais professores, mesmo formados após sua implementação, podem não ter um conhecimento vasto a respeito das propostas dos PCN e da BNCC, o que inclui tópicos referentes ao trabalho com argumentação e provas matemáticas.

Outro ponto em comum é que oito desses professores se formaram (P7 concluindo) em instituições públicas – estaduais ou federais –, sendo P3 e P6 na modalidade EAD. Já P8 e P10 são formados por instituições particulares, em São Paulo e no Rio de Janeiro, respectivamente. No caso de P10, sua formação inicial é em Bacharelado em Matemática, realizada em uma universidade federal também no Rio de Janeiro, tendo optado por cursar licenciatura em seguida. Reforçamos que tais similaridades não influenciaram negativamente na pesquisa, já que, embora a maioria dos participantes tenha sua formação em universidades públicas, elas ocorreram em locais e instituições diferentes – em alguns casos, em modalidades diferentes. Além disso também precisamos levar em conta a formação continuada e a experiência profissional de cada um.

Ainda na questão da formação docente, algo nos chama atenção: apenas dois professores, P7 e P8, estudaram argumentação matemática em suas graduações – cursaram disciplinas voltadas para a área ainda nos primeiros períodos da graduação. Por outro lado, todos alegaram reconhecer processos de prova em outras disciplinas, principalmente Análise Real e Álgebra, alguns deles entendendo também esse processo como o processo argumentativo. Cabe aqui comentar que o reconhecimento do contato com a argumentação matemática depende do que cada um compreende por esse conceito e alguns apresentam concepções pouco próximas do que apresentamos no referencial teórico. Já em relação às provas, a confusão de conceitos tende a ser menor, uma vez que ficava claro para eles, enquanto docentes, que estavam em um processo de prova, algo que era dito explicitamente durante as aulas.

A argumentação matemática é algo que permeia diversos campos da Matemática (como área do conhecimento) e apresentamos a importância do trabalho com a argumentação em idade escolar, como propõem os PCN (1997) e a BNCC (2018). Além disso, o estímulo à argumentação envolve a utilização do raciocínio lógico (Nasser e Tinoco, 2003) e também contribui para outras áreas do conhecimento. Por conta disso, consideramos importante a existência de estudos específicos nessa área nos cursos de licenciatura, para que futuros professores compreendam diferentes formas de argumentar matematicamente e construir provas, em vez de apenas ter contato indireto (dentro de outras disciplinas), muitas vezes apenas repetindo processos ou aprendendo por observação.

Um estudo realizado por Caldato e Nasser (2024), recorte de uma tese de doutorado, apresenta dados produzidos em uma entrevista com 14 alunos concluintes ou recém egressos do curso de Licenciatura em matemática. Nesse trabalho, os autores apresentam a esses 14 participantes suas respostas dadas a uma questão algébrica, objeto de pesquisa de dissertação de Caldato (2018). Além disso, deveriam responder se mudaram suas concepções e como responderiam essas questões atualmente.

Os autores verificaram que, embora a maioria dos participantes entenda que suas respostas originais apresentavam um desenvolvimento com argumentos insatisfatórios, os sujeitos que desenvolveram provas pragmáticas na primeira pesquisa (2018) conseguiram desenvolver provas conceituais na segunda pesquisa (2024). Além disso, uma parte considerável dos participantes alegou não conseguir pensar em uma resposta no momento da entrevista, pois precisariam estudar algo relacionado ao tema e como provar o que era solicitado. Vemos que, nesse caso, houve pouco avanço em relação ao pensamento dedutivo dos participantes da pesquisa ao ingressar e ao concluir a licenciatura.

Podemos fazer uma ligação do que Caldato e Nasser (2024) apresentam com as falas de alguns dos professores participantes desta pesquisa a respeito de como tiveram contato com provas matemáticas em sua graduação. Eles alegam ter tido contato com um processo mecânico de prova, em que precisavam provar teoremas em exercícios, sem apoio para o desenvolvimento de suas habilidades argumentativas. Em outras palavras, as provas eram apresentadas, não construídas, e esses professores, à época de sua graduação, apenas assimilavam as etapas expostas, sem compreender o processo ali presente.

Considerando a possibilidade de os sujeitos da pesquisa de Caldato e Nasser (2024) terem passado por um processo similar ao que os professores participantes desta pesquisa descreveram, é compreensível que apresentem algumas dificuldades em criar estratégias para elaborar argumentos e criar uma estrutura que possa, por fim, provar o solicitado algebricamente – generalizando o caso. Isso porque o processo citado pelos docentes aqui entrevistados cai no mecanicismo apresentado por Nasser e Tinoco (2003), a repetição de exercícios que não tem sentido algum para os estudantes. Embora as autoras tenham sua fala voltada para estudantes do ensino básico, entendemos que algo similar, guardadas as devidas proporções, pode acontecer com os estudantes da graduação, nesse caso.

Com isso, queremos dizer que a ausência de estudos sobre argumentação durante a graduação pode resultar em professores recém-formados que apresentam dificuldades com o pensamento/processo dedutivo – talvez pelo contato exclusivo com exposições de demonstrações em vez do estímulo à argumentação. Além disso, também consideramos que licenciandos expostos a essas práticas mecanicistas, que apresentam estruturas argumentativas rígidas e formais/padronizadas – portanto, demonstrações (Balacheff, 2022) –, podem se tornar professores que apresentam tendências a validar argumentos mais formais em detrimento dos informais, por considerá-los inválidos.

Em relação ao que os professores participantes compreendem por argumentação e provas matemáticas, temos falas diversas. Ainda assim, a maioria delas se aproxima, uns mais e outros menos, do que os teóricos propõem. Destacamos as falas de P1, P3 e P6 como as que mais se distanciam das definições apresentadas no referencial teórico. P1 entende que argumentação matemática é uma forma de expressar o que foi aprendido sobre determinado assunto – o que inclui também expressar opiniões –, portanto, uma relação entre sujeitos, uma interação social.

Embora a ideia de argumentação como interação social seja apresentada por Balacheff (2022), as falas de P1 não apresentam quaisquer elementos que relacionem argumentação à validação, o que está presente nas ideias apresentadas por Nasser e Tinoco (2003) e Balacheff (2022) em relação à argumentação matemática e também no que Weston (1996) e Van Eemeren *et. al.* (1996) propõem como argumentação. Em relação à prova matemática, ela entende que é algo que precisa ser feito para mostrar a origem de determinados conceitos e que isso (a prova) deve ser contextualizado. Também não relaciona diretamente a prova com a argumentação matemática, portanto, não também não expressa a ideia de validação para a prova.

Já P3 parece entender a argumentação matemática como um meio de detalhar uma resolução ou conceito para facilitar o aprendizado e o entendimento de alguém. Apesar de defender que os estudantes precisam compreender como surgem algumas relações algébricas, fórmulas e teoremas e que isso vem da argumentação matemática, também apresenta falas em que essa compreensão vai além da dedução de fórmulas ou da generalização de um caso: serve também para quaisquer resoluções de questões e/ou problemas. Apesar de Nasser e Tinoco (2003) citarem a resolução de problemas como uma estratégia para estimular o desenvolvimento da habilidade de argumentar e Balacheff (2022) entender que a argumentação matemática está ligada com a resolução de problemas, as falas de P3 parecem remeter a algo mais geral, mais distante do que aqui entendemos por argumentação matemática.

Por sua vez, P6 entende que argumentar matematicamente é uma forma de facilitar, ou até mesmo de "traduzir" determinados conceitos para que os estudantes possam assimilar/compreender e aprender. É tornar um conceito mais acessível para o estudante. Seu ponto de vista tem pontos em comum com o de P1, mas as falas são diferentes em sua totalidade – e também não estão em acordo com as definições apresentadas na introdução deste trabalho. Para ele, as provas matemáticas são essenciais porque se pode provar numericamente – portanto, não há generalidade em sua concepção de prova.

Em contrapartida, podemos citar P4 como um dos casos que tem compreensão dos dois conceitos, embora não tenha os estudado formalmente. Para ele, argumentar matematicamente é construir uma cadeia lógica com o objetivo de validar seu ponto de vista e a prova é um objeto matemático construído por essa cadeia lógica chamada argumentação. P5, por sua vez, relaciona a argumentação com as justificativas, já que, para ele, argumentar matematicamente é justificar resultados obtidos, validar o que foi respondido ou encontrado. Em seu ponto de vista, a prova se relaciona com a argumentação matemática, porém, é algo que tende a ser mais formal, que apresenta uma escrita mais formal.

Outro professor que apresenta um pensamento similar é P10, que também entende a argumentação como um processo de validação, mas define como algo estruturado e formal, rígido, que se utiliza de axiomas e postulados para provar algo – a prova, portanto, é a ponta final da argumentação, seu objetivo. Nesses três casos (P4, P5 e P10), vemos semelhanças com as definições de provas apresentadas por Balacheff (1988), Tall (1995) e Nasser e Tinoco (2003), também relacionadas à argumentação matemática. No caso de P10, notamos similaridades com a definição de provas matemáticas apresentada por Savioli e Silva (2016) e com o que Balacheff (2022) entende como demonstração.

As formas como os professores participantes estimulam seus alunos a argumentar são diversas, mas também há pontos em comum. Os professores P1, P3 e P5 utilizam recursos visuais e materiais concretos em suas aulas, para que seus alunos possam explorar propriedades geométricas. Já P2 e P4 procuram pedir que os estudantes sempre justifiquem o que estão respondendo, mesmo que seja em problemas com uma resposta numérica. O docente P8, por sua vez, trabalha com resolução de problemas e também pede que seus estudantes sempre justifiquem suas respostas e há ainda o momento da chamada “plenária”, em que todos discutem seus resultados e trocam experiências – algo também similar ao que P2 faz em sala de aula.

Embora dito de forma sucinta, P1 diz preferir trabalhar com materiais concretos e lúdicos, em que o estudante possa explorar as características do que está sendo estudado. Como exemplo, cita um material que mostra geometricamente a relação do teorema de Pitágoras, com três quadrados construídos sobre os lados dos triângulos. O professor P3 já aborda esse tópico de forma mais direta, dizendo ter preferência também pelo material concreto por tornar as aulas mais dinâmicas, além de poder utilizá-lo como ponto de partida para o entendimento de um conceito. Após a exploração dos materiais, o docente recorre à escrita, construindo textualmente estruturas dedutivas que levem a fórmulas e relações geométricas. De forma similar, P5 também costumava trabalhar com os materiais concretos para explorar ideias iniciais e, posteriormente, trabalhar com provas escritas. Essas provas não tinham aspectos formais inicialmente, algo que se desenvolveria ao longo dos anos.

O trabalho com recursos visuais, nesse caso, está ligado à ideia de “provas sem palavras”, que não são, de fato, provas formais, mas um meio de auxiliar na exploração, elaboração e construção de uma prova (Nelsen, 1993). Esses materiais também podem ser úteis em processos empíricos, em que há a observação de casos particulares que podem levar à prova – portanto, mostram a possibilidade de uma propriedade ou regularidade, levam à suspeição para iniciar o caminho para a construção de uma prova (De Viliers, 1990).

No caso de P4, existe a preocupação de expor aos alunos as razões pelas quais uma propriedade é verdadeira. Essa exposição acontece como a construção dos conceitos, o caminho percorrido para chegar a algo que será apresentado. Com isso, os estudantes têm contato com a escrita formal, mas esse não é o único meio adotado por P4: também é uma prática comum que seus alunos sejam indagados sobre suas resoluções, eles sempre devem justificar suas respostas e resoluções, de modo que precisem construir uma argumentação lógica para tal, como propõem Nasser e Tinoco (2003) e a BNCC (Brasil, 2018).

Outro docente que destacamos é P6, que, entendendo a argumentação matemática como uma forma de facilitar a compreensão do estudante, ou, utilizando o termo anterior, “traduzir” conceitos para que os alunos possam aprender, diz estimular seus alunos levando casos que remetam ao cotidiano. Nesse caso, o docente está se referindo a explicações gerais, até mesmo de conceitos/definições. Por outro lado, o professor P9, que também adota a prática de sempre relacionar os conceitos trabalhados com as realidades de seus alunos, parece seguir a linha de Paulo Freire (1968).

Nesse caso, P9 entende que a realidade de seus alunos (o que inclui a estrutura escolar) dificulta seu processo de aprendizado e que o trabalho específico com argumentação matemática também é prejudicado por tantas defasagens. Como possível solução, o docente procura compreender as realidades de seus alunos, levando temas relevantes para eles para a sala de aula, de modo que possam desenvolver o processo de ensino-aprendizagem a partir daí. Com isso, trabalha situações-problema e também solicita que a turma justifique suas resoluções, descrevendo o passo a passo do que construíram. Aqui, vemos mais uma vez o estímulo às justificativas proposto na BNCC (Brasil, 2018), adaptado à realidade apontada pelo docente.

Por fim, a última pergunta feita nas entrevistas, a respeito da validação dos argumentos apresentados pelos estudantes, apresentou respostas similares. Todos os professores alegam aceitar quaisquer argumentos apresentados, desde que sejam coerentes ou que façam sentido dentro do que é solicitado. Portanto, um estudante pode utilizar desenhos ou textos para construir uma estrutura argumentativa e provar algo – como no caso da terceira resposta dada à primeira questão nas atividades propostas aos alunos, escolhida na etapa 2 desta pesquisa – e essa construção será validada, desde que esteja correta.

Alguns detalhes diferenciam as posturas dos docentes em relação à essa aceitação e validação, mas todos ainda convergem em seus pontos de vista, de modo geral. A docente P2, por exemplo, reforça que a resposta final não é o objetivo do processo, de modo que, mesmo quando o resultado está correto, não é validado se o raciocínio apresentado no desenvolvimento for incorreto ou ausente. P3 destaca que avalia o desenvolvimento dos argumentos apresentados e que procura sempre avaliar observando o que pode ser aproveitado na resposta do estudante. O docente P4 segue pelo mesmo caminho, porém acrescenta que não considera exemplos numéricos como provas válidas, mas como um passo do processo de prova. Nesse sentido, descarta o que seria uma prova feita via empirismo ingênuo (Balacheff, 1988), mas entende que o processo de prova toma como ponto de partida esse empirismo (De Villiers, 1990).

Outro ponto levantado por P4 é que consideraria uma estrutura argumentativa informal ou pouco rigorosa menos válida em turmas mais avançadas, pois espera que alunos mais velhos e experientes apresentem argumentos mais rigorosos e consistentes – portanto, menos ingênuos, que não sejam baseados em casos pontuais, por exemplo. Esse ponto de vista não é compartilhado por P5, que entende que seus alunos passaram por diferentes processos e vivências antes de estarem na turma em que é professor regente. Por conta disso, alguns terão menos bagagem que outros e que, por essa razão, procura ser compreensivo em relação ao seu desenvolvimento, como propõe Tall (1980), e validar provas ingênuas de seus estudantes.

Já P8 considera que toda construção apresentada pode ser válida, mesmo que se distancie do esperado em relação à uma argumentação matemática. Para ele, o estudante precisa ser estimulado positivamente, entendendo que seu desenvolvimento é valorizado, assim como os métodos que escolhe para resolver problemas (já que essa é a metodologia adotada por P8). Além disso, o docente entende que uma pontuação numérica não pode traduzir o desenvolvimento de um aluno, portanto, tem preferência por avaliar de forma construtiva e dar *feedbacks*. É preciso lembrar aqui que há a “plenária”, proposta por ele, em sala de aula, onde toda a turma pode trocar experiências e fazer sua autoavaliação, conversando, inclusive, sobre o que será considerado ou não válido – portanto, os sujeitos envolvidos no processo decidem quando uma prova é ou não válida (Balacheff, 2022).

Observamos, dessa forma, que, embora haja particularidades nos pensamentos de cada um dos professores participantes, todos compreendem que o nível escolar de seus alunos não permite que elaborem provas rigorosas e formais. Por conta disso, avaliam os argumentos apresentados, sejam eles de qualquer natureza, validando os que estão corretos. Vemos presentes a preocupação em respeitar o tempo e a maturidade dos estudantes, destacada por Tall (1980) e até mesmo dinâmicas que se assemelham ao que é proposto por Nasser e Tinoco (2003) nessas avaliações.

A flexibilização a respeito do que é uma prova, considerando que os estudantes possam se convencer com processos empíricos, também se faz presente – mesmo que alguns dos docentes entendam a prova como algo formal e rigoroso. Portanto, as ideias que permeiam a tipologia proposta por Balacheff (1988), assim como sua fala a respeito da aceitação de uma prova (Balacheff, 2022) – que se alinha à de Tall (1995) – estão presentes nas falas desses professores, quando comentam sobre a validação de argumentos.

Os dados produzidos nas entrevistas e aqui descritos de forma geral – todos os professores juntos – são detalhados no tópico a seguir, sendo relacionados com as correções (etapa 3) e as informações fornecidas no formulário *Google* (etapa 4). Cada professor participante tem sua análise feita individualmente, de modo a traçar seu perfil e, a partir disso, atingir os objetivos da pesquisa.

3.5 Análise individual dos dados produzidos para cada professor participante

3.5.1 Participante P1

Professora há mais de dez anos, formou-se em 2015 em uma universidade federal no Rio de Janeiro – já atuava antes de sua formação como professora de matemática – e não possui, até a presente data, formação continuada. Segue em atividade na Educação Básica da rede privada, sem atuação, até os dias atuais, na rede pública de ensino.

Ao ser questionada sobre seu entendimento a respeito de argumentação e provas matemáticas, pareceu, inicialmente, não compreender tais conceitos. Isso porque respondeu que a argumentação é “você dialogar, é você expor sua opinião (...) é você expor o que você aprendeu, a sua opinião em relação à matemática, a sua posição em relação a isso.” (P1). Mesmo havendo uma tentativa sutil de minha parte de levá-la à direção correta – nesse caso, que entendesse que se tratava do processo argumentativo e não sobre conversas –, P1 não seguiu por esse caminho.

Em relação às provas, assim como em outros casos, houve a dúvida sobre se tratar de um instrumento de avaliação. Após o esclarecimento, a participante diz entender a prova como algo exato e necessário, que “tem que ser feito mesmo”, para que alguns conceitos (ou talvez fórmulas e teoremas) possam ficar mais claros e que tenham razão de ser, ou seja, que sua origem seja esclarecida/explicada. Nesse sentido, a concepção de prova trazida por P1 teria a função explicativa, de acordo com De Villiers (1990), além de se aproximar do que Hanna (1990) chama de “prova que explica”, já que aqui existe a ideia de mostrar o porquê de uma afirmação ou teorema ser verdadeiro.

Ainda assim, as falas da docente indicam que não há conhecimento formal sobre os conceitos em questão, já que sequer cita a questão da validação ou do convencimento, além de não relacionar os dois conceitos. E, de fato, P1 diz não se lembrar ter – embora acredite que tenha tido em uma das universidades em que estudou – uma disciplina voltada para a argumentação matemática em sua graduação. Apesar disso, de não ter esse contato explícito e direto, alega ter reconhecido o processo argumentativo em algumas disciplinas, citando um professor que trazia essa abordagem, além de também reconhecer tal processo nas práticas de um amigo que atuava como professor de Física. Mesmo sem o conhecimento formal, a participante mostra, em algumas falas, compreender alguns aspectos da argumentação matemática.

Para tentar compreender melhor seus pensamentos e saber seu posicionamento em relação aos tipos de argumentos apresentados por estudantes, perguntei se ela entende como prova matemática e se aceita que um estudante apresente uma prova informal, sem a linguagem matemática formal.

Não houve uma resposta direta à pergunta, mas defendeu a ideia de que as provas matemáticas devem ser contextualizadas, para que os alunos possam compreender melhor o que é abordado – portanto, dar sentido ao aprendizado. Como apontado por Nasser e Tinoco (2003), com a resolução pura de exercícios, o aluno não vê sentido no aprendizado e apenas repete mecanicamente o que é apresentado. Para as autoras, a habilidade de argumentar é desenvolvida em um processo ao longo da vida escolar dos estudantes, utilizando atividades diversas, como jogos ou problemas-desafio.

Mais especificamente, P1 comenta que, em uma turma do ensino básico (8º ano, por exemplo), os estudantes não compreenderiam uma prova apresentada no curso de Álgebra da graduação, por se tratar de algo com conceitos mais avançados e de provas muito mais formais. Por conta disso, defende que as provas sejam desenvolvidas dentro de um contexto, para que a compreensão por parte dos estudantes seja facilitada – o que remete a uma "adaptação" da linguagem e do rigor para o nível escolar dos estudantes.

Essa "adaptação" faz sentido, levando em conta o desenvolvimento gradual do processo dedutivo, apontado por Nasser e Tinoco (2003), além do fato de que a prova é válida dentro de um contexto local/social (Hanna, 1990), é aceita como tal pelo "grupo". Logo, processos empíricos e provas mais informais, ou ingênuas – utilizando as palavras de Balacheff – podem ser aceitas dentro desse contexto de sala de aula.

Em sua resposta ao formulário (etapa 4 desta pesquisa), P1 alega orientar que seus alunos não só memorizem fórmulas matemáticas, mas que compreendam o processo que leva a elas. Além disso, em uma escala de 1 a 5, considera que estimula ao máximo (grau 5 da escala) seus alunos a desenvolverem seus próprios argumentos em sala de aula, além de apresentar demonstrações de teoremas em fórmulas matemáticas em sala de aula.

Também considera que, por parte dos estudantes, o desenvolvimento dos próprios meios de resolução, justificativa e provas, assim como a compreensão dos argumentos necessários para provar a validade das afirmações ou resultados apresentados em sala de aula, tem máxima importância. Essa mesma ideia – de os alunos não só memorizarem fórmulas, mas compreenderem seu mecanismo, além de defender novamente que haja sempre um contexto – é reforçada em sua entrevista, quando ela diz que tem o hábito de estimular seus alunos com materiais lúdicos. Citou, como exemplo, ter utilizado um material concreto que "prova... Monta o teorema de Pitágoras", um recurso que explora a área de quadrados formados sobre os lados de um triângulo retângulo.

Nesse aspecto, podemos dizer que há, de fato, um estímulo para a visualização e o pensamento visual do estudante, que poderá, porventura, compreender e estabelecer seus próprios argumentos por meios visuais – talvez, em algum momento se aproximando, ou mesmo desenvolvendo alguma prova visual. Esse apoio visual pode ser chamado de "prova sem palavras", que auxilia o estudante a ver a razão de uma afirmação ser verdadeira e também pode servir como apoio para a investigação, para o início do processo de prova (Nelsen, 1993). Com ideia similar, Arcavi (2005) defende a utilização de aspectos visuais para auxiliar na resolução de problemas e no processo de prova.

Corroborando com os aspectos apresentados por P1 para estimular seus alunos, ela diz considerar como válidas respostas que apresentem argumentos de qualquer natureza, desde que sejam coerentes com o problema, ou com o tema abordado. Segundo ela, a resposta/argumento tem que ter coerência para que, assim, possa ser analisado (por ela) e creditado, mesmo que esse argumento seja informal, ou mesmo um desenho – o que se encaixa com a ideia de prova ser um argumento suficientemente convincente, apontado por Hanna (1990) e também com a percepção de Balacheff (1988) em suas tipologias de prova, que se adaptam aos níveis cognitivos dos estudantes. Porém, nessa fala, estão inclusos os estudantes que apresentam respostas sem qualquer construção ou desenvolvimento – nesse caso, respostas dadas a problemas que poderiam ter algum processo argumentativo ou dedutivo em seu desenvolvimento, não necessariamente problemas em que fosse solicitada uma prova matemática.

Em concordância com essa última ideia, no formulário da etapa 4, alega considerar válidas, sem decréscimo de pontuação (em uma avaliação), respostas que apresentam apenas a resposta correta, sem nenhum desenvolvimento – algo notado em suas correções, o que será comentado a seguir. Ainda assim, em outra pergunta do formulário da etapa 4, considera que uma resposta correta sem desenvolvimento tem pouca relevância (grau 1, em uma escala de 1 a 5), enquanto a justificativa de uma resposta – talvez, aqui uma prova – tem relevância máxima (grau 5). Vemos aqui, portanto, que, embora tais respostas (ditas “respostas secas”) sejam aceitas, possuem menor relevância em detrimento de outras que apresentem desenvolvimento e apresentação de argumentos.

Em contrapartida, ainda no formulário da etapa 4, respondeu que o estudante que apresenta uma resolução correta sem seguir os passos formais apresentados em aula, ou seja, sem seguir o padrão apresentado, mas utilizando os próprios argumentos, não tem sua resposta validada. Esse ponto específico entra em contradição com o que foi apresentado acima, já que parece haver o estímulo e a aceitação ao próprio desenvolvimento dos estudantes.

Voltando os olhares para suas correções (etapa 3), vemos que em muitos casos, como das respostas 1 e 3 da questão 1 e a resposta 3 da questão 2, P1 atribui nota máxima sob a justificativa de que a resposta está correta, sem mais comentários. Como comentado anteriormente, parece que a professora participante se atém apenas ao que está certo ou errado, já que não tece comentários sobre a construção da resposta – os argumentos utilizados. Já na primeira resposta à segunda questão, ela também atribui grau máximo, justificando que “que está viável e coerente, pois os consecutivos são um número depois do outro. São múltiplos de três, porque somam-se se três números em sequência” (P1).

Embora o que escreve esteja correto, de fato, a resposta dada pelo estudante não prova o que é solicitado, apenas apresenta uma sequência de três números consecutivos como exemplo – em uma tentativa de “provar” a afirmação – e tenta argumentar que o fato de ao menos um dos três números ser múltiplo de três é suficiente para que toda a soma seja. Apesar disso, P1 atêm-se à definição de números consecutivos e parece aceitar a justificativa dada na resposta, de que o simples fato de serem 3 números somados faz com que o resultado seja múltiplo de 3.

Podemos entender que há coerência em sua correção em relação à sua visão apresentada na entrevista e no formulário, já que aceitou os argumentos apresentados e validou as respostas que apresentavam o final correto, mesmo com o desenvolvimento parcialmente correto. Apesar disso, a falta de comentários a respeito do desenvolvimento das respostas não deixa claro se considerou todo o processo ou apenas a resposta final.

Diferente dessas correções, atribui nota 2 à segunda resposta da primeira questão – em que o estudante diz que os ângulos são “alternos internos, colaterais internos, alternos externos e colaterais externos” – sob a justificativa de que “os ângulos não são alternos e nem colaterais internos” (P1). Já à segunda resposta da segunda questão, atribui nota 0, corrigindo a parte em que o estudante não utiliza um exemplo com números consecutivos. Aqui, novamente parece se ater à resposta final, ou a um erro dentro da resposta que invalida o final, não levando em conta que o estudante apresenta um argumento viável – um contraexemplo – para provar seu ponto de vista. Dentro do erro apresentado, sua justificativa está correta.

Embora sejam pouco próximas das ideias apontadas por Balacheff (1988), Hanna (1990) e De Villiers (1990), as ideias de P1 acerca da argumentação e das provas matemáticas também se distanciam da visão mais formalista que Caldato (2018) e Aguilar-Júnior (2012) observaram em suas pesquisas. A professora considera válidos argumentos informais de seus estudantes, independentemente de como forem estruturados, desde que, em seu ponto de vista, estejam dentro do contexto e façam sentido em relação ao que é solicitado.

Ainda que não se recorde de ter tido alguma disciplina voltada para a argumentação matemática na graduação (houve o reconhecimento do processo argumentativo em outras disciplinas, como em Álgebra), ou mesmo leituras sobre o tema, ainda que sua concepção sobre argumentação e provas matemáticas não tenham sido expostas de forma clara durante a entrevista, P1 apresenta traços, em suas ações, que mostram que compreende parte do processo argumentativo e de prova matemática.

Esses traços aparecem quando ela cita os métodos lúdicos que facilitam a visualização dos conceitos abordados por seus estudantes, permitindo que, nesse processo, eles possam desenvolver novas ferramentas, talvez conjecturar e criar base argumentativa para construir uma prova futura. Além disso, quando diz aceitar os argumentos de seus estudantes, seja com desenhos ou em uma estrutura matemática informal, desde que sejam coerentes, mostra respeitar o desenvolvimento dos estudantes, sem forçá-los a seguir por caminhos específicos predeterminados por ela – indo ao encontro das ideias apresentadas por Nasser e Tinoco (2003).

Por outro lado, a valorização e o estímulo à argumentação podem, talvez, ser deixados de lado devido à aceitação de respostas sem qualquer desenvolvimento. Em outras palavras, mesmo que P1 alegue que uma resposta "seca" tenha menos relevância que uma construção, ambas acabam tendo o mesmo peso para seus estudantes, que recebem a mesma nota ou retorno, tendo apenas a resposta final correta ou uma estrutura de prova bem desenvolvida.

3.5.3 Participante P2

Formada em uma universidade federal no estado da Bahia em 2016, P2 ainda não possui experiência na rede pública de ensino, mas é professora na rede privada, com tempo de atuação entre 4 e 6 anos. Possui duas especializações voltas para o ensino de matemática, sendo uma delas em uma instituição privada e a outra na rede Federal.

Assim como a maioria dos participantes, P2 não teve uma disciplina voltada para argumentação e provas matemáticas em sua graduação, porém reconhece, com clareza, que teve contato com o processo argumentativo e de prova em outras disciplinas. Afirma ter sofrido um choque ao ingressar na universidade e ter contato com a escrita matemática, pois acreditava que iria apenas (ou talvez majoritariamente) realizar cálculos. Em suas palavras, "a gente escreve mais do que uma pessoa que faz Letras, eu não tenho dúvida, porque a gente argumenta, tem que provar" (P2).

Além da “surpresa”, teve dificuldades em se habituar à nova realidade, pois, segundo ela, não possuía vocabulário suficiente para construir um processo argumentativo, havendo a necessidade de recorrer a materiais que a auxiliassem na redação matemática. Atribui essa dificuldade às diferenças entre os níveis de exigência na rede pública do ensino básico e no Ensino Superior – embora os PCN do Ensino Médio (Brasil, 2000) tenham como um de seus objetivos a valorização das demonstrações matemáticas. O documento também reconhece que aprender Matemática nessa etapa deve ir além de apenas memorizar fórmulas, mas saber fazer Matemática, o que passa por um processo lento, em que um dos objetivos é desenvolver a capacidade de argumentação. Vale destacar que a BNCC (Brasil, 2018), como já apontado, destaca a importância da comunicação em linguagem matemática ainda no Ensino Fundamental.

Seu desenvolvimento argumentativo deu-se em uma disciplina de Geometria Euclidiana, em que era necessário provar teoremas. Nesse processo – resolvendo questões de um livro em que precisava desenvolver provas – conseguiu melhorar sua escrita, também com a ajuda de um professor, que mostrou, por exemplo, que não precisava desenvolver a mesma prova diversas vezes em uma mesma questão (com itens *a*, *b*, *c* e *d*), podendo aproveitá-las para as etapas seguintes.

Tendo passado por esse processo, P2 entende que argumentação matemática é uma construção, é um processo realizado para provar logicamente algo, ideia similar às apresentadas por Nasser e Tinoco (2003) e ao que Tall (1995) e Balacheff (1988) entendem como prova. Quando questionada especificamente sobre a prova matemática, alegou fazer parte do mesmo processo da argumentação. Para ela, “os dois estão ligados, não tem como você provar algo sem argumentar”. Portanto, são conceitos similares e intrínsecos, mas ainda diferentes. É possível notar em suas falas que, assim como apontado aqui, no primeiro capítulo, a argumentação, a construção dos argumentos é o processo, enquanto a prova é o produto final. Sua fala também parece trazer uma ideia implícita de que a prova é um objeto construído a partir da estruturação de ideias (os argumentos) para provar a validade de algo – algo que já é dado como verdade, ou mesmo que se tem a suspeita de que seja verdade –, o que poderia ser ligado à função de verificação que uma prova possui, de acordo com De Villiers (1990).

Inicialmente, durante a entrevista, P2 também confundiu provas com o instrumento de avaliação chamado prova, o que trouxe à tona seus métodos avaliativos e seus pensamentos a respeito do desenvolvimento argumentativo de seus estudantes. Para ela, os estudantes sempre devem trazer seus meios de resolução às avaliações, que são todas abertas – nenhuma de múltipla escolha. Além disso, são sempre orientados a justificar suas respostas, a construir argumentos que trilhem os caminhos da resolução e venham, porventura, a provar algo que é solicitado – novamente, indo ao encontro do proposto por Nasser e Tinoco (2003). Logo, entende que o desenvolvimento de justificativas e meios próprios é de extrema importância, enquanto respostas mais diretas, apenas com resultado final, são menos relevantes (conforme respondido no formulário da etapa 4). Uma das formas de estímulo, segundo ela, é dar *feedbacks* aos estudantes, em que comenta sobre ter pensado em uma resolução, mas prioriza e devolve um reforço positivo em relação às respostas dadas por eles.

Apesar do esforço, considera não ter tempo suficiente para desenvolver as práticas que gostaria em sala de aula (conforme formulário da etapa 4), o que possivelmente faz com que não haja tempo hábil para apresentar formalmente a demonstração de fórmulas e teoremas. Além da falta de tempo hábil, existe a questão de seus estudantes não terem letramento matemático suficiente para compreenderem escritas matemáticas muito formais. Portanto, P2 busca sempre estimular o desenvolvimento da argumentação de seus estudantes respeitando seu tempo e sua bagagem, como apontado por Tall (1980) e Nasser e Tinoco (2003).

Para ela, além de permitir que seus alunos se desenvolvam em seu ritmo, esse processo pode fazer com que seus estudantes tenham mais interesse pela matemática, que se torna mais acessível – em contraste com os processos mecanicistas, por exemplo, ou com a formalidade geralmente apresentada no Ensino Superior. Sua grande vontade é atuar na esfera pública para dar a oportunidade para alunos que, assim como ela, não têm a oportunidade de um ensino mais democrático e acessível, receberem o estímulo necessário para desenvolverem seu raciocínio matemático.

Tendo em vista suas ideias a respeito do processo argumentativo e das provas – como algo que estrutura um pensamento para provar algo, para provar um ponto de vista –, perguntei se ela orienta ou incentiva, em algum momento, seus estudantes a começarem a estruturar seu raciocínio, seus argumentos, para que comecem a caminhar para a formalidade matemática. Tratando-se de um processo de aprendizagem, é importante, de fato, que o tempo do aluno seja respeitado e que ele possa se expressar livremente – com desenhos, textos, cálculos e exemplos – em momentos iniciais, porém também é importante que a organização faça parte desse processo, estímulo previsto nos PCN (1997). Em resposta, diz que não consegue fazer com todos, mas cita um caso específico, de um aluno que quer seguir como estudante de matemática, e esse recebe um direcionamento à parte para não sofrer com o mesmo choque que P2 teve ao ingressar na universidade.

Isso não significa que ela não veja importância nessa parte do desenvolvimento, já que deixa claro que entende a importância desse processo e da escrita formal. O que se vê aqui é que existem algumas etapas a serem superadas antes dessa, entre elas o desinteresse de alguns, o medo da matemática de outros, ou mesmo a falta de aptidão que algum dos alunos tenha. Aqui, ela deixa claro que, embora entenda a necessidade do desenvolvimento da capacidade argumentativa e do processo de construção de provas, entende também que não se pode chegar a essas etapas sem corrigir, orientar e direcionar seus estudantes em relação a possíveis déficits que tenham em questões mais elementares.

Essa liberdade dada aos estudantes para se expressarem, aliada à ideia de explicitar suas resoluções para os colegas, de usá-las como novos métodos para todos – portanto, a democratização das estratégias desenvolvidas por cada um – tornam os alunos protagonistas de seu próprio processo de aprendizagem. Além disso, esse processo reforça o caráter social da argumentação apontado por

Balacheff (2022), em que os sujeitos precisam interagir para argumentar e validar seu ponto de vista.

P2 defende que “a argumentação abre portas”, já que seus alunos podem entender que, mesmo que saibam pouco, podem ter uma boa avaliação com base no que mostrarem, em suas justificativas, no desenvolvimento das suas resoluções. O processo de desenvolvimento da argumentação matemática, nesse sentido, é também um estímulo para os discentes, que veem sua relevância em seu processo, se aproximam mais da matemática e se entendem como sujeitos de aprendizagem.

Em relação à validação dos argumentos apresentados por seus estudantes, P2 reitera que valida quaisquer tipos de argumentos, desde que estejam corretos. Para ela, “o caminho tem que estar certo, não importa qual caminho seria esse, mas o caminho, ainda assim, tem que dar certo. Um raciocínio tem que ser válido, dentro, matematicamente falando, para ser validado.” (P2). Essa fala reitera as anteriores, de que os estudantes têm seu espaço de validação em que podem construir livremente seu raciocínio para responder algo.

Esse “espaço de liberdade” não é desmedido, a aceitação não é a mesma em todas as turmas: ela afirma que, conforme as turmas avançam de série, suas argumentações vão “ganhando corpo”, elas amadurecem com o tempo. Assim, uma turma que poderia apenas utilizar figuras ou exemplos – talvez no nível argumentativo que Balacheff (1988) classificaria com empirismo ingênuo – precisa melhorar sua estrutura argumentativa nas séries posteriores. O rigor matemático exigido é diferente em cada turma, de modo que vão, aos poucos, caminhando para o formalismo matemático.

Portanto, parece haver um tipo de “contrato” com as turmas – um combinado entre professora e alunos – em que o nível de aceitação de uma prova (ou de argumentos) se torna mais rígido com o passar do tempo, considerando o amadurecimento desses estudantes, além do aumento de bagagem matemática que eles terão. Nesse caso, a aceitação dessas provas é de caráter social e levam em conta o nível cognitivo dos estudantes, como bem apontam Hanna (1990) e Tall (1995)

É possível, de fato, notar que P2 leva em conta os argumentos utilizados nas resoluções dos estudantes, analisando-os e validando o que lhe parece coerente. Todas as respostas corrigidas na etapa 3 apresentam comentários a respeito do caminho tomado por cada aluno, justificando a nota dada. Na primeira resposta da primeira questão, o estudante comenta que os ângulos Ô e Ê, na parte de baixo da figura, "complementam" o ângulo Â, na parte de cima da figura.

Como comentado anteriormente, a utilização da palavra "complementam" pode ter sido usada para dar o sentido de completar algo (nesse caso, o ângulo de 180°) em vez de ter a intenção de trazer o conceito de ângulos complementares. A professora participante levanta esse ponto e entende que o estudante confunde os conceitos de ângulos complementares e suplementares, mas, por outro lado, entende que o argumento utilizado – nesse caso, apresentado com desenhos – une a soma dos ângulos internos do triângulo e o conceito de ângulos opostos pelo vértice. Ou seja, ela entende que esse aluno não poderia dar sua resposta da maneira como fez se não soubesse a relação entre ângulos opostos pelo vértice e como aplicar esse conceito na questão – utilizando o triângulo.

Por entender que o estudante utilizou argumentos válidos, atribui nota 4, mesmo que essa resposta não tenha sido apresentada de maneira formal – com um texto matemático organizado. Caso similar acontece na terceira resposta da mesma questão, em que ela atribui nota máxima. Aqui, o argumento dos ângulos internos do triângulo é mais explícito e aparece de forma escrita, porém os ângulos opostos pelo vértice não são citados. Ainda assim, ela entende que o estudante precisa reconhecer a congruência para utilizar esse argumento.

Já a segunda resposta, que diz que os ângulos são "alternos internos, colaterais internos, alternos externos e colaterais externos" e apresenta no desenho todas as marcações dos ângulos formados em cada interseção, recebe nota 0,5. Como justificativa, P2 alega que "o aluno reconhece o conteúdo de classificação de ângulos, mas não faz ideia qual tipo seria. Desta forma, não solidificou o conteúdo ministrado pelo professor(a).”. Nesse caso, mesmo que tenha utilizado os nomes das relações entre os ângulos, assim como na primeira resposta, nada além disso foi feito e essas relações sequer foram explicitadas.

As correções das respostas da segunda questão seguem pelo mesmo caminho, aproveitando os conceitos utilizados pelos estudantes e as construções de seus argumentos. Por exemplo, embora a primeira resposta não apresente uma estrutura argumentativa convincente ou rigorosa – traz um exemplo e alia aos outros dois dados no enunciado, além de utilizar a presença de um “número maior” como justificativa e de um múltiplo de três na sequência –, P2 consegue extrair que sua tentativa foi válida, embora falha, além de destacar que o estudante reconhece o conceito de números consecutivos, dando nota 2.

Não há comentários sobre a resposta trazer à tona a presença de um múltiplo de três em toda sequência de três números consecutivos – o que, para quem respondeu, serve como justificativa. Seguir por esse caminho poderia ser uma saída, se considerar que os outros dois números, que não são múltiplos de 3, ao serem somados também resultam em um múltiplo de 3. Por ser apenas uma possibilidade, não há como inferir que essa foi a intenção do aluno, então é possível que P2 não tenha comentado (mesmo como feedback) por não ter certeza da intenção por trás desse trecho. Já a utilização do exemplo, que, para nós, poderia cumprir a função de um experimento crucial (Balacheff, 1988), parece ter cumprido papel mais determinante na justificativa apresentada. Mesmo assim, não houve menção a esse exemplo, de forma positiva ou negativa.

Essas correções mostram que P2 realmente tenta extrair algo do que é respondido, da construção feita por cada estudante. Ou seja, suas ideias apresentadas durante a entrevista aparecem na correção, em que ela entende que o nível argumentativo e o rigor matemático de estudantes do 9º ano do Ensino Fundamental não são os mesmos de um estudante de graduação, por exemplo. Por conta disso, argumentos mais ingênuos e informais são validados e, em alguns casos, parece observar nas entrelinhas ou além do exposto nas respostas.

É possível que essas atitudes, essa forma de trabalho, seja fruto de suas observações, como disse na entrevista, e de sua insistência em melhorar sua escrita matemática no curso superior. Isso porque, como apontou, não teve nenhum estudo específico sobre argumentação matemática, apenas reconheceu esse processo nas disciplinas da graduação. Este último caso (primeira resposta da segunda questão), em especial, apresenta uma resposta que utiliza exemplos como parte de sua justificativa, o que, como já dito, poderia ser entendido como um caso de experimento crucial, na tipologia proposta por Balacheff (1988), dentro de uma prova empírica.

É possível que, por não ter tido contato com estudos na área de argumentação matemática e por não estar imersa nesse campo, P2 não reconheça esse passo na resposta do estudante, já que, de fato, analisando friamente, o exemplo nada prova. Um exemplo é mais um caso, não a prova de um caso geral, portanto não traz a generalização da regra. Ainda assim, levando em conta a literatura, esse exemplo pode ser suficiente para um estudante que ainda não desenvolveu a habilidade de provar rigorosamente – a utilização de diversos exemplos pode ser suficiente para provar que algo é verdade, já que é válido para muitos casos. Sob essa perspectiva, talvez possa ser visto como um caso de empirismo ingênuo (Balacheff, 1988).

Dito isso, vemos que P2, mesmo sem estudos formais, apresenta pensamentos confluentes com os estudos na área, principalmente no que se refere ao estímulo e no entendimento de que é necessário respeitar o desenvolvimento de cada aluno. Mas ainda há situações de divergência, como essa, em que o exemplo apresentado não é considerado como justificativa/argumento para provar o ponto do estudante.

Algo similar acontece na segunda resposta dessa questão, que é avaliada com nota zero porque é calcada em um contraexemplo falho: são apresentados três números não consecutivos e, consequentemente, sua soma não é um múltiplo de três. Por conta disso, o discente afirma que não é em todo caso que a afirmação é verdadeira. Como já comentado, embora a resposta final esteja errada, o aluno verificou algo correto dentro de seu erro. Houve uma falha na parte inicial de sua resposta, o que gerou uma resposta final errada.

Para P2, isso foi suficiente para zerar a questão. Em um primeiro momento, essa correção parece entrar em contradição com suas falas e até mesmo com suas outras correções, que tentavam extrair algo correto no desenvolvimento de cada resposta. Pensando que houve apenas um equívoco na parte inicial, mas que, levando isso em conta, o desenvolvimento está correto, por que descartar todo o pensamento desse aluno? A resposta pode estar em uma fala ao fim de sua entrevista: a docente não cobra o mesmo rigor matemático de alunos de séries diferentes, portanto não irá avaliar de forma menos rigorosa alunos que estão no fim do Ensino Fundamental – o que é o caso em questão. Sob essa perspectiva, é possível que um estudante do 6º ano fosse melhor avaliado com a mesma resposta. Além disso, levando em conta o que a questão pede, de fato essa “prova” não é verdadeira.

A avaliação feita na última resposta tem melhor aceitação. A construção do argumento, feita majoritariamente utilizando aspectos visuais, é citada como válida e a pontuação dada é 4. Para P2, a resposta mostra que existe compreensão do conceito de números consecutivos, que houve um raciocínio válido com os pontinhos desenhados, mas que houve uma falta: mostrar a validade para a segunda soma apresentada como exemplo. Na verdade, a prova visual apresentada – e entendida por nós como um exemplo genérico, na tipologia de Balacheff (1988) – serve para ambas as somas trazidas como exemplo. É possível que P2 não tenha entendido que a explicação escrita se referia aos dois casos e já era um passo para a generalização.

De modo geral, vemos que P2 compreende o que é o processo argumentativo e a prova matemática, mesmo que não tenha dito de forma direta. Além disso, de acordo com suas falas, estimula o desenvolvimento das habilidades de argumentar e de dedução em suas turmas, sempre questionando e pedindo justificativas. Também existe a percepção de que turmas mais avançadas precisam ser mais rigorosas que as turmas mais novas em seu processo dedutivo e nas construções de suas justificativas e provas. Por outro lado, a professora participante alega não conseguir desenvolver suas práticas como gostaria, o que possivelmente não permite que ela alcance seus objetivos esperados em todas as turmas – o que é apontado pela própria.

Portanto, apesar da falta de contato com estudos desse campo, os pensamentos de P2 têm um alinhamento considerável com o referencial teórico apresentado nesta pesquisa. Em alguns casos, como citado acima, pode haver divergências, o que pode ser explicado tanto pela falta de estudos a respeito do tema, quanto pela falta de recursos – como o tempo de aula insuficiente – apontados por ela.

3.5.3 Participante P3

O professor participante P3 atuou em sala de aula no estado do Ceará, onde também concluiu seu curso de licenciatura no ano de 2021, sem formação continuada até a presente data. Apesar de licenciado em 2021, cursou sua primeira graduação há aproximadamente vinte anos, sem concluir. À época de sua graduação em licenciatura, P3 possuía outra formação profissional e uma carreira, cursando Licenciatura em Matemática por afinidade – um desejo pessoal – e para, se possível, obter renda complementar.

Por ter outro trabalho, de sua formação inicial (formação técnica), sua experiência como docente não é extensa: atuou como professor temporário na rede pública de ensino por aproximadamente 2 anos à época de sua primeira graduação – e pouco lembra de suas práticas de sala de aula, dado o tempo decorrido. Já na segunda graduação, atuou como monitor em uma escola da rede privada, também por pouco tempo (não especificado). Nesse último caso, sua função era exclusivamente resolver exercícios com estudantes, sem espaço para desenvolver sus próprios métodos de ensino.

Seu contato com a argumentação matemática na graduação – na segunda, pois não se recorda da primeira – ocorreu em disciplinas como Análise Real e Combinatória, portanto, disciplinas que não eram voltadas, de fato, para o processo argumentativo e de prova. Assim, P3 alega reconhecer que seus professores utilizavam argumentos matemáticos para construir as provas necessárias em sala de aula. Esse reconhecimento, entretanto, parece estender-se a processos que não possuíam intenção de provar, de chegar à generalização de um caso. Algumas de suas falas fazem parecer que, para ele, um exercício ou problema resolvido em detalhes ou em etapas carregam uma construção argumentativa.

Essa ambivalência também aparece quando explica o que entende ser a argumentação matemática. Para ele, “para o aluno ter maior segurança para o entendimento matemático, ele tem que entender os argumentos iniciais da explicação de algo matemático” (P3), o que, novamente, parece se estender a casos mais gerais, como a resolução de um problema (o cálculo utilizado para tal). Essa ideia surge em outros momentos ao longo da entrevista, em falas que parecem se referir a qualquer tipo de argumentação, inclusive àquela que apenas leva a uma resposta final – que explica um resultado específico.

Porém, também julga importante que os estudantes entendam a origem das fórmulas matemáticas que estudam, compreender como surgem. Nessa fala, P3 se refere ao processo dedutivo, em que, de fato, existe a construção de uma prova com a utilização da argumentação matemática. Cita também que a argumentação é importante para a evolução do conhecimento dos estudantes, para que possam compreender as ferramentas que estão sendo utilizadas. Acrescenta que julga necessário que não se estude apenas com base em exemplos específicos, mas que sejam compreendidos os porquês de os conceitos – cita especificamente fórmulas e teoremas – serem como são. Nesse momento, também se refere à prova matemática, entendendo como parte do processo citado.

Embora seja dito com certa sutileza, quando diz que é importante que os alunos não estudem *apenas* com base em exemplos, ele não descarta a utilização de exemplos. Aqui, P3 não ressalta a importância da utilização de exemplos para uma prova empírica, mas não os vê como algo descartável. Sabemos da importância do processo empírico, apontado por De Villiers (1990) e

Balacheff (1988), que o entendem como uma etapa anterior à prova formal, ou à prova rigorosa, que vai trazer o caso geral.

Sua concepção de argumentação matemática, utilizada tanto para a construção de uma prova (o que não foi dito diretamente) quanto para a resolução de problemas, pode ser encaixada nas ideias apresentadas por Balacheff (2022) e Nasser e Tinoco (2023), que entendem a argumentação – ou o ato de argumentar – como um processo que tem a intenção de validar algo logicamente. Sob essa perspectiva, um estudante que desenvolve a resolução de um problema em vez de apenas respondê-lo de forma direta está apresentando elementos que validam sua resposta, de fato. Esse ponto de vista, porém, se distancia do que os teóricos apontam como prova matemática, que aqui, como indicado na introdução, é o produto final da argumentação.

Isso porque, como apontado no referencial teórico, o conceito de prova matemática está fortemente ligado a ideias de generalização, ao processo dedutivo. Isso é perceptível no conceito trazido por Savioli e Silva (2016); nas funções da prova apresentadas por De Villiers (1990), que trazem a ideia de construir um objeto que comprove a veracidade de uma afirmação; na tipologia de provas de Balacheff (1988), em que uma delas trata do exemplo genérico seguido da experiência mental, quando o estudante consegue sair do caso particular para ir para o geral, para o genérico, alcançando a generalização. Assim, associar a argumentação com a prova pensando no primeiro como algo mais específico – ou seja, casos em que apenas se encontra um resultado – não parece o ideal.

Notemos, portanto, que embora sua fala a respeito da argumentação matemática se aproxime parcialmente das ideias que os teóricos apresentam, ela se distancia em certa medida quando pensamos nas provas matemáticas. Pensando de forma independente, como dois processos distintos, P3 se alinha parcialmente às definições do referencial, enquanto pensando como conceitos intrínsecos, P3 se distancia dessas mesmas definições.

Ainda assim, essas respostas não foram dadas de forma direta quando perguntado. O participante opinou sobre essas ideias em vez de explicar seus conceitos e, a partir daí, suas concepções apareceram. Importante destacar que a segunda graduação – que foi, de fato, concluída – foi feita no formado EAD (Educação A Distância), com um encontro semanal para sanar dúvidas. Mesmo com a falta de contato diário com o corpo docente, P3 percebeu o processo de prova nos materiais fornecidos pela instituição de ensino, além de também se recordar de fazer exercícios em que precisava provar teoremas.

Enquanto professor, assim como P1, P3 trabalhava com materiais concretos (aqui ele cita um material par trabalhar circunferência), para que os estudantes pudessem observar os conceitos trabalhados, para que vissem acontecer na prática. A partir dessa observação, os estudantes poderiam notar que algo acontece, mas ainda sem provar – apenas havendo a suspeição. Como apontado por De Villiers (1990), o processo de prova vem da suspeição de que algo é verdadeiro e, por conta disso, precisamos provar tal suspeição. Assim, esses materiais poderiam também servir como apoio visual para o desenvolvimento do processo de prova (Arcavi, 2005).

Após as explorações, havia o momento de provar os conceitos, de “levar a teoria para o quadro e eles entenderem o porquê o cumprimento da circunferência tem aquela forma e eles terem o entendimento” (P3). Não é dito se seus alunos eram estimulados a desenvolver sua argumentação de forma escrita, ou se havia algum tipo de conversa com a turma para estabelecer o que seria considerado suficiente para validar a suspeição. O que é dito com clareza é que eles eram apresentados a tais provas, ao “salto” entre a observação nos materiais concretos e o que era levado para a escrita no quadro.

Também não é dito se esse “salto” acontece por fazer parte de seu método, ou se é por falta de tempo em sala de aula, já que no formulário (etapa 4) classifica seu tempo de sala de aula como mediano (3 em uma escala de 1 a 5) para desenvolver suas atividades. Em relação a esse ponto, comenta o fator desinteresse (por parte dos estudantes), o que costuma tomar tempo de aula.

Embora pareça que esse “salto” dado entre o lúdico/concreto e o quadro apresente um “buraco”, ou uma ligação entre as etapas, no formulário *Google*, ele afirma que estimula ao máximo (grau 5 na escala de 1 a 5) seus alunos a desenvolverem a habilidade de argumentar matematicamente. Porém, em relação a seus alunos serem apresentados a provas e demonstrações, atribui grau 4, ainda que em sua fala na entrevista fique claro que ele o faz com frequência.

Vemos aqui que, aparentemente, não existia um processo gradual de desenvolvimento, de fato, da habilidade de argumentação. Ao que tudo indica, os alunos observavam os materiais levados para a sala de aula, levantavam algumas hipóteses e eram apresentados à formalização no quadro, sem exercitarem a escrita, a organização e, talvez, sem conjecturar. De acordo com Tall (1980), Balacheff (1988) e De Villiers (1990), o empirismo é uma das etapas no processo de prova, embora não seja considerado como prova formal. Ainda assim, como já dito, o que é considerado prova depende do contexto social em que se está (Hanna, 1990). Os materiais concretos/lúdicos em questão, poderiam ser considerados como exemplos – portanto, parte do processo empírico –, mas não havia a continuidade do processo gradual ao longo do tempo.

Em relação à validação do que seus alunos apresentam, ele afirma que sempre tenta validar os argumentos utilizados, desde que tenham fundamento. Cita, inclusive, que alguns estudantes podem errar na aritmética, nos cálculos realizados, mas ele irá observar se a construção da resposta tem coerência e é fundada, validando parte da resposta. O que não é dito, tanto na entrevista quanto no formulário *Google*, é que apenas uma resposta final não é aceita, mesmo que correta – precisa haver o desenvolvimento. Questionado sobre argumentos informais, P3 afirma que trabalhou apenas no Ensino Fundamental e seus estudantes não tinham maturidade para uma prova estruturada formalmente, mas ainda assim, via coisas “geniais” na simplicidade.

Voltando os olhares para as correções feitas por P3, observamos que parece haver preocupação em analisar e validar o desenvolvimento apresentado por cada estudante. Entretanto, há casos em que o participante parece confundir ou não compreender bem alguns conceitos apresentados nas questões, além de validar uma das respostas que foi feita com base em exemplos.

Na primeira resposta da primeira questão, atribui nota 3, pontuando que o entendimento está correto, mas que o estudante confundiu os conceitos de ângulos complementares com ângulos suplementares – no caso em que se diz que os ângulos se “complementam” para formar 180° – e corrigindo: “os ângulos Ô, Â e Ê, são suplementares e não complementares, pois tomando como base a reta r, os três ângulos citados, juntos fazem um ângulo raso de 180º e não 90º (...)” (P3).

Novamente temos destaque para o termo utilizado, que pode ser entendido como incorreto, já que não se sabe a intenção do estudante em seu uso. Porém, a definição de ângulos suplementares é referente a um par de ângulos, não mais que isso. Também comenta, embora o estudante não tenha utilizado nenhum desses termos, que houve a utilização dos conceitos de ângulos alternos internos – possivelmente por conta das marcações feitas no desenho, que também podem indicar que o aluno compreende o que são ângulos correspondentes e opostos pelo vértice.

Já na segunda resposta, em que o estudante apenas cita nomes de relações entre ângulos formados por retas paralelas e transversais, a nota dada é 4,5. Para justificar a nota, P3 diz que a afirmação está correta e com os nomes corretos, mas não tendo escrito (ou indicado) esses nomes no desenho, não recebeu nota máxima (5). Essa resposta não alcança o objetivo da questão, que questiona a existência de uma relação e pede que se mostre como ela é – e não qual é (ou quais são) –, mas aqui P3 parece pontuar apenas nomes corretos dados, mesmo que não haja contexto.

De acordo com uma de suas falas na entrevista, ele procura validar ou pontuar as respostas de estudantes de acordo com os argumentos utilizados, verificando se há fundamento e se a resolução/resposta segue uma linha de raciocínio correta. Em caso de desenvolvimento parcialmente correto ou de haver resposta final errada com desenvolvimento correto, o estudante será pontuado parcialmente, de acordo com o que foi apresentado. Nesse caso, embora os nomes das relações existam, elas sequer foram apresentadas ou destacadas na imagem, levantando a dúvida sobre o entendimento do estudante a respeito do tema da questão, além de a resposta solicitada não ter sido dada. Ainda assim, a nota dada foi próxima à máxima.

A mesma nota (4,5) é dada à resposta seguinte, em que o estudante diz, de forma sucinta, que os ângulos expostos na imagem são congruentes aos ângulos internos do triângulo e que esses, por sua vez, somam 180°. Em sua justificativa, comenta essa percepção, destacando que o aluno entende a relação entre os ângulos apresentados e os ângulos internos do triângulo, apenas destacando como negativa a falta da representação de tais ângulos na região interna do triângulo – daí a nota 4,5 em vez de 5.

Na primeira resposta da segunda questão, também atribui nota 4,5. Alega que a resposta está correta "pois a soma de três números consecutivos sempre será múltiplo de 3" (P3) e destaca que, para uma solução que generalizasse, deveria ter usado a linguagem algébrica, confirmando, dessa forma, que a soma sempre será um múltiplo de 3. De modo geral, a afirmação está correta: a soma de 3 números consecutivos sempre resulta um múltiplo de 3, mas não há a prova.

Analisando friamente, P3 considerou como correta uma afirmação correta, assim como considerou o desenvolvimento satisfatório, mesmo que apresentasse um exemplo como comprovação e argumentos inconsistentes (a presença de um múltiplo de 3 e um "número maior", na sequência de números). Logo, ele realmente está validando algo que faz sentido (nesse caso, o exemplo e a resposta final) apresentado na resposta, como disse em sua entrevista. Por outro lado, também levantou a preocupação de os estudantes não ficarem só à base de exemplos para compreender conceitos e justificar respostas – o que ocorreu nesse caso –, entendendo ser algo insuficiente em uma argumentação matemática.

Em sua concepção, um estudante que apresente um desenvolvimento "simplório", mas que justifique seu resultado, será bem avaliado. Completa sua fala dizendo que no Ensino Fundamental não há tanta complexidade (na construção de provas), então aceita que os estudantes apresentem argumentos informais. Levando em conta esse pensamento, P3 considera que, embora possa ser simples, a justificativa com exemplo é suficiente para responder à questão – mesmo que parte do texto esteja errada. A ideia de que exemplos são suficientes para provar algo, e, portanto, a utilização de exemplos para compor uma prova, é o tipo de prova que Balacheff (1988) classifica como empirismo ingênuo, enquanto De Villiers (1990) entende que esse processo pode ser o caminho para a construção da prova, não o objeto propriamente dito.

Cabe, então, questionar o que, para P3 é considerado como argumento suficientemente convincente para que um estudante (Hanna, 1990) de 9º ano do Ensino Fundamental ou 1º ano do Ensino Médio componha uma prova. Por um lado, o estudante que utilizou um termo que poderia (não há como afirmar, apenas supor) estar mal colocado alcançou nota 3, enquanto o que se utilizou de apenas um exemplo alcançou nota 4,5.

Atribui nota mínima (zero) à questão seguinte, que apresenta um contraexemplo “falho”, justificando que a resposta está errada porque o estudante não sabe a definição de números consecutivos. Completa que “Pela falta de atenção, a nota mínima” (P3). Assim como P2, não teceu comentários sobre a utilização de um contraexemplo, nem considerou algo minimamente correto, levando em conta que o que está errado é o exemplo utilizado.

Por fim, a nota dada à última resposta é a máxima, comentando que a demonstração foi “excelente”, com exemplos e de forma sucinta. Mesmo não havendo formalidade, existe a utilização do termo “demonstração” por P3, levando a crer que de fato entende a resposta como prova, além de a expressão gráfica ilustrá-la. Essa resposta não faz a utilização da linguagem algébrica para expressar a generalidade da regra, mas P3 não comenta sobre isso como fez na primeira resposta dessa questão.

O que notamos a respeito desse participante é que suas concepções se alinham parcialmente com o que é apontado pelo referencial teórico, mesmo sem ter tido qualquer contato com estudos nessa área. Embora suas falas a respeito dos conceitos de argumentação e de provas matemáticas pareçam não se alinhar completamente ao que apresentamos no referencial – especificamente a respeito da argumentação, ele a vê com certa ambivalência –, P3 apresenta ideias que estão de acordo com nosso referencial.

Ele entende que o aspecto visual, levado à sala de aula em seus materiais concretos, estimula a exploração, além de auxiliar no processo dedutivo (Nelsen, 1993; Arcavi, 2005). A exploração desses materiais também pode auxiliar os estudantes a perceberem padrões em determinados casos, os levando a levantar hipóteses ou a suspeitar da existência de um caso geral, levando à necessidade do processo de prova – algo apontado por De Villiers (1990).

A forma como valida os argumentos dos estudantes parece não apresentar um padrão, de modo que pontuou com notas maiores respostas que apresentavam mais inconsistências, em alguns casos. Ao mesmo tempo que considerou um exemplo como suficiente para provar um caso geral, considerou parcialmente correta uma resposta que apenas confundia um termo utilizado – além de também confundir o conceito abordado.

Levando em conta que a prova, como apresenta a pesquisa de Hanna (1990), é dada por um argumento suficientemente convincente e que os argumentos visam validar um ponto de vista de forma lógica (Nasser e Tinoco, 2003; Balacheff, 2022); considerando também que a prova é uma forma de validar ou justificar de forma lógica uma afirmação com a utilização de axiomas (Savioli e Silva, 2016), além de explicar a razão de ser verdade (Nasser e Tinoco, 2003); e, por fim, tendo em vista que Hanna (1990) e Tall (1995) destacam que a aceitação/validade de uma prova depende do contexto em que está inserida, e que Balacheff (1988) entende que uma prova empírica, sem a generalização, pode ser considerada válida dependendo do nível de desenvolvimento de cada estudante, cabe a pergunta: o que P3 considera como prova?

A resposta para esse questionamento não é clara, já que foram utilizados diferentes critérios para a avaliação das respostas apresentadas. Já na entrevista, ele alega validar quaisquer tipos de argumentos, desde que façam sentido dentro do contexto, além de considerar também que alunos do Ensino Fundamental apresentariam respostas mais simples – portanto, respostas consideradas simples seriam aceitas, nesse caso.

Embora P3 esteja parcialmente alinhado com o referencial teórico, como os processos de validação e exploração visual discutidos por Balacheff (1988) e De

Villiers (1990), sua prática não demonstra um entendimento consolidado de provas matemáticas como produtos generalizáveis baseados em dedução lógica.

3.5.4 Participante P4

Cursando mestrado em Ensino de Matemática em uma instituição federal, P4 concluiu sua graduação, também na rede Federal, no ano de 2022 – mesmo ano de ingresso no curso de mestrado, realizando sua pesquisa em História da Matemática. Não possui experiência no ensino público, mas atuou na rede privada do Rio de Janeiro por um curto período de tempo.

Nos primeiros períodos de sua graduação, teve contato com o processo de prova matemática em uma disciplina chamada "Fundamentos da Matemática", que era focada em provar teoremas e em trabalhar aspectos da lógica matemática. Além dessa, reconhece o trabalho com argumentação nas disciplinas de "Álgebra" e "Geometria Plana", que utilizavam o método axiomático para provar teoremas, mas não houve nenhuma voltada especificamente para a argumentação. O participante P4 reconhece que teve contato com o processo argumentativo e que o objetivo das disciplinas em questão era provar matematicamente, porém não houve exposição, conversas ou debates que diferenciassem o processo de argumentativo da prova – apenas era dito que estavam construindo provas.

Questionado sobre o que entende por argumentação e provas matemáticas, P4 responde que é

> sustentar uma cadeia de raciocínio lógico para mostrar que aquele raciocínio tem coerência (...) defender uma linha de raciocínio que mostra que a sua ideia tem coerência, que leva à conclusão de que aquilo que você está falando é uma verdade.

Para ele, os dois conceitos estão intimamente ligados, de modo que a prova é o construto, é o objetivo, enquanto a argumentação é o caminho percorrido para construir a prova, uma cadeia de raciocínios coerente para provar algo. Mesmo não tendo qualquer contato formal, ou seja, mesmo que não tenha estudado o assunto diretamente, seu ponto de vista é extremamente próximo dos apresentados por Balacheff (1988, 2022), Tall (1995), Nasser e Tinoco (2003) e Savioli e Silva (2016).

Embora não tenha, nesse momento, citado o caráter social de uma prova (que uma prova é considerada como tal por uma convenção social), compreende que, em turmas de níveis escolares e etários diferentes, faria uma avaliação também diferente das provas apresentadas. No exemplo citado, uma turma de 3º ano do Ensino Médio teria uma avaliação (no sentido amplo da palavra) e exigências mais rigorosas que uma turma de 8º ano do Ensino Fundamental. Além disso, também diz que não apresentaria uma demonstração formal em sala de aula, a menos que coubesse no nível e no contexto da turma.

A compreensão de que o nível cognitivo pode determinar o que o estudante compreende como prova, portanto o que aceita como suficiente para validar um ponto de vista, se alinha às ideias de Balacheff (1988) e Tall (1955), que apresentam diferentes tipos de níveis de prova – a serem aceitas de acordo com o nível cognitivo dos alunos. Esse último aspecto também é citado por outros professores participantes.

Em relação às suas práticas em sala de aula, P4 afirma sempre apresentar assuntos novos, destacando pontos que façam seus estudantes compreenderem os conceitos abordados, a construção do que é apresentado. Segundo ele, sempre deixa claro que o importante é a compreensão de como tudo está sendo construído, para que faça sentido para os estudantes. Por conta disso, não estimula que os alunos decorem fórmulas (essa decisão fica a cargo deles), mas que entendam como elas funcionam e como chegar a elas. Ainda assim, alega que não move esforços específicos para mostrar o processo argumentativo ou focar na construção de provas. Deixa claro, no formulário da etapa 4 da pesquisa, que considera ter tido tempo insuficiente (nível 1 de suficiência, na escala de 1 a 5) em sala de aula para desenvolver suas práticas.

Analisando essas falas, pode parecer que são contraditórias – e são –, mas é possível que P4 apenas não tenha notado a conexão entre os pontos abordados, talvez pela falta de estudos específicos a respeito do assunto. Quando diz que não estimula seus alunos a decorarem fórmulas, mas que, em vez disso, orienta a compreender o processo que leva a elas, inevitavelmente está desenvolvendo um processo de argumentação em sala de aula. Portanto, parece repetir sua experiência na graduação, mas agora no papel de professor: desenvolve o processo argumentativo em sala de aula e estimula que seus alunos pensem por esse caminho, mas não cita explicitamente – e, pelo que diz, sequer percebe – que está desenvolvendo o processo argumentativo dedutivo.

Uma de suas falas parece confirmar essa hipótese: “Mesmo que ele [um aluno] fizesse alguns cálculos ou alguns desenhos que estivessem bagunçados, se desse para captar que existia uma organização lógica ali que faz sentido, eu pontuava” (P4). O termo “organização lógica” que usa aqui se conecta com a sua própria fala quando explica o que entende por argumentação. Ele reforça que considera mais importante o processo realizado para resolver um problema (ou questão) que a resposta final por si só, já que, como também disse, estimula seus alunos a compreenderem a construção dos conceitos – logo, estimula a desenvolver caminhos, a criar argumentos que considerem suficientes para responder o que é solicitado. Já respostas que apresentem apenas resposta ou resultado final não são pontuadas (quando for o caso) completamente, mesmo que corretas.

Ainda em relação ao estímulo à argumentação e à validação dos argumentos, P4 entende que casos em que exemplos são apresentados para provar um caso geral – um caso que talvez pudesse ser classificado como o empirismo ingênuo ou o experimento crucial de Balacheff (1988) – são parcialmente considerados como válidos. Em sua concepção, esse tipo de desenvolvimento não deve ser desconsiderado, pois mostra que o estudante “entendeu qual é a ideia, que ele está tentando investigar, está tentando arrumar argumentos para mostrar que aquilo, que aqueles argumentos conduzem ao fato de aquilo ali ser verdade” (P4). Em outras palavras, P4 compreende que a utilização de exemplos é um passo inicial, uma estratégia para tentar chegar à generalização, à prova.

Como aponta De Villiers (1990), os processos empíricos levam à prova (ou à necessidade da prova) matemática, já que levantam a suspeita da validade de algo. Pela fala de P4, um aluno que está nesse processo de investigação, nessa tentativa de encontrar argumentos já suspeitaria, de fato, de que existe algo a ser provado e, por conta disso, essa prova a ser construída teria a função de verificar/confirmar a suspeita – uma das funções da prova também apresentadas por De Villiers (1990).

Sua perspectiva a respeito de como trabalhar a argumentação em sala de aula, como estimular os estudantes e, também, a forma de avaliar, de validar as respostas, ficam evidentes nas correções feitas por P4. Há comentários detalhados em todas as respostas, explicitando a razão pela qual a nota de cada uma delas é dada. Na “resposta 1” da primeira questão, o docente atribui nota 4,9, destacando a coerência na resposta e o possível equívoco no nome da relação entre os ângulos – aqui talvez chamados de complementares, pois o estudante diz que eles se “complementam”. Portanto, apesar de haver tal deslize, não é suficiente para rebaixar a nota dada, pois o que é levado em conta é o raciocínio que conduz à resposta final.

Já a resposta seguinte recebeu nota mínima (zero), sob a justificativa de que apenas nomes de relações foram citados, sem explicitar como elas ocorrem. Questiona, como um *feedback* dado em uma avaliação, quem são os alternos internos e quem são os colaterais – para ele, “Parece que o aluno simplesmente escreveu os nomes que ouviu na aula/leu no caderno, sem atribuir significado nenhum” (P4). Tais questionamentos poderiam ser sugestivos para estudantes reais, de modo a estimulá-los a buscar novos caminhos, a justificar sua resposta com outros argumentos, o que é proposto na BNCC (Brasil, 2018).

Se levarmos em consideração sua hipótese de que os nomes das relações foram simplesmente escritos nas respostas, sem atribuir significado, podemos supor também que o estudante sequer vê sentido em sua própria resposta. Por consequência, provavelmente não estaria convencido de sua validade. Assim, o *feedback* dado poderia ser também um incentivo para que o estudante tente convencer a si mesmo – um “passo inicial”, como proposto por Hoyles (1997).

Seguindo adiante, na última resposta dessa questão, que é sucinta, o docente atribui nota máxima, observando que não houve nenhuma demonstração ou raciocínio que comprovasse a soma, mas a associação com os triângulos foi suficiente para validar a resposta. Notemos aqui que o que P4 chama de demonstração é o processo, a organização de argumentos, para criar a prova – algo mais formal, que talvez cumpra a função de sistematizar, segundo as nomenclaturas de De Villiers (1990). Ideia essa que mais comumente é apresentada no Ensino Superior, com demonstrações mais formais e organizadas.

Não queremos aqui (e não vamos) alegar que P4 quis, de fato, apontar a falta desse tipo de demonstração, mas entendemos que, com sua fala, referia-se a algo mais formal que o apresentado pelo estudante. Apesar disso, reconhece que o passo dado, portanto, a associação com os ângulos internos do triângulo, foi suficiente para provar seu ponto. Logo, embora informal, sem uma estrutura organizada e sem muita rigidez, esse estudante apresenta um argumento suficientemente convincente, o que é uma prova (Hanna, 1990). O fato de o professor aceitar seu argumento informal, considerando, talvez, seu nível escolar, também corrobora com a proposta de Nasser e Tinoco (2003).

Outro *feedback* dado a uma questão com nota baixa aparece na “resposta 1” da segunda questão, que recebeu nota 1. Aqui, P4 atribui um ponto por haver o esforço em investigar padrões aritméticos que comprovassem seu ponto de vista. Em contrapartida, deixa claro que “o fato de um dos números ser múltiplo de 3 não implica que a soma seja também um número múltiplo de 3” (P4), acrescentando que isso seria válido na multiplicação (e não na soma). Nesse caso, o retorno dado ao estudante não o instiga diretamente a buscar novos argumentos, apenas nega ou invalida os que foram dados.

Ainda assim, foi valorizada a tentativa de perceber um padrão por recorrência – uma prova do tipo “empirismo ingênuo” (Balacheff, 1988), considerada como tal pelo próprio estudante, que pareceu convencido de seu argumento –, houve a valorização desse aspecto, o que, junto com o feedback, pode ser o estímulo necessário para o estudante, conforme sugerem Hoyles (1997) e Nasser e Tinoco (2003).

Caso similar acontece na próxima resposta, que recebe a mesma pontuação (1 ponto). Aqui, o docente alega que o fato de os números não serem consecutivos descartaria qualquer justificativa, mas, ao mesmo tempo, reconhece como positiva a manobra do estudante de provar algo – nesse caso, negar – com um contraexemplo. Esse último aspecto, segundo P4, foi o que justificou receber alguma pontuação.

Por fim, a última resposta recebe a pontuação máxima, pois, segundo ele, o raciocínio apresentado conduz à demonstração da propriedade. Destacamos que novamente há o uso do termo “demonstração”: enquanto na terceira resposta da primeira questão P4 entende que não houve demonstração, aqui ele entende que houve. No primeiro caso, levantamos hipótese de o docente considerar como demonstração o processo, a estruturação dos argumentos que levaram ao processo de prova (já que ele considera que houve a prova, apenas não houve a demonstração) – o que se aproxima do que Balacheff (2022) entende como demonstração, uma sistematização dos argumentos utilizados para a prova em um tipo de estrutura particular.

Entretanto, ao dizer que há a demonstração na última resposta, levantamos outra possibilidade. Em ambos os casos há a prova – algo reconhecido pelo docente –, mudando apenas o processo de sua construção em cada um. Enquanto no primeiro caso o argumento é muito direto, no segundo há um pequeno texto que explica, aliado a uma imagem. O que P4 chama de demonstração parece ser não o processo de demonstrar descrito por Balacheff (2022), mas uma explicação da prova, a razão pela qual é verdade, algo que vai além de provar. Sendo esse o caso, a "demonstração" em questão é algo que torna a prova uma prova que explica, de acordo com o proposto por Hanna (1990).

As concepções de P4 aqui expostas possuem muitos pontos confluentes com o que é proposto pelo referencial teórico, embora existam algumas diferenças (e não divergências). Talvez possamos atribuir tais diferenças ao pouco contato ou à ausência de contato e estudos sobre argumentação matemática, o que não impediu o docente de compreender ideias importantes ao longo de sua graduação, observando seus professores. P4 apresenta uma trajetória acadêmica sólida e um entendimento implícito do processo de argumentação e provas matemáticas, ainda que sua formação e prática docente necessitem de uma abordagem mais formal sobre o tema. Mesmo que afirme não mover esforços específicos para trabalhar a argumentação, suas práticas e concepções – que dialogam com a literatura da área – indicam que desenvolve o processo argumentativo de maneira implícita.

3.5.5 Participante P5

Cursando doutorado em uma instituição federal desde 2021, formado mestre em 2001 e graduado em 1992, o professor “P5” atua há mais de 21 anos na rede pública de ensino (nas redes municipal e federal) no estado do Rio de Janeiro e já atuou na rede particular, em um período entre quatro e seis anos. Sua pesquisa de doutorado é relacionada à EJA, modalidade em que também atua como docente.

Assim como a maioria dos professores participantes da pesquisa, P5 não teve estudos específicos relacionados a argumentação e provas na sua graduação, embora reconheça que teve contato com o processo argumentativo para provar teoremas (em disciplinas como Análise Real e Álgebra Linear). Na verdade, apenas entendia que tinha como objetivo provar algo, era um processo necessário, embora não fosse tópico de discussão. Passou a tomar contato com estudos sobre argumentação em algumas atividades de formação promovidas pela prefeitura do município em que trabalha, nas quais participava de oficinas – e algumas dessas oficinas tinham como tema argumentação e provas matemáticas. Também não tem lembranças de haver discussões sobre esse tema em seu curso de mestrado, dada a proposta do programa.

Diante de seus estudos e sua vivência, P5 entende que a argumentação e as provas estão ligadas, embora sejam conceitos diferentes. Para ele, a argumentação é o processo em que se justifica determinados resultados em matemática, podendo ser de forma escrita ou gráfica (com desenhos). Já a prova tende a ser algo formal e sistemático, que pode passar por processos escritos ou gráficos (coincidindo, nesse caso, com a argumentação) até chegar à demonstração. Enquanto seu entendimento a respeito de argumentação é similar ao que sintetizamos com o referencial teórico, a prova vem a ser algo formal e que é intimamente ligada à demonstração – que não é definida ou explicada por ele, mas que, levando em conta a formalidade citada, poderia refletir o ponto de vista de Savioli e Silva (2016), em que as provas matemáticas são uma comunicação entre matemáticos, escritas em linguagem matemática de forma rígida.

Para P5, a demonstração é algo a ser construído por alunos da graduação (a partir desta etapa), enquanto os alunos do ensino básico, dadas suas vivências e maturidades, apresentam outros meios de argumentação. Ele considera como satisfatório que alunos do Ensino Fundamental utilizem desenhos e textos informais como argumentos para a resolução de problemas ou para tentar provar (ou generalizar) algum padrão matemático apresentado – como a segunda questão da atividade proposta nesta pesquisa. Cita como exemplo um livro didático com o qual trabalhou, que trazia questões que estimulavam os alunos a investigarem, argumentarem e provarem – da forma que considerassem suficiente – determinadas afirmações ou propriedades. Essas provas, que P5 considera como válidas no 6º ano do Ensino Fundamental, eram construídas com base em exemplos, por recorrência, portanto, o empirismo ingênuo de Balacheff (1988).

Com o apoio desse mesmo material didático, trabalhava atividades investigativas em sala de aula, inclusive com o uso de materiais concretos e com desenhos – um recurso visual. A partir dessas práticas investigativas, os estudantes percebiam determinados padrões geométricos ou numéricos e tentavam provar à sua maneira, sem a exigência de rigor. Em outras palavras, percebemos novamente a prova (mesmo que informal), como propõe De Villiers (1990), como um instrumento de verificação.

O docente entende tais questões como um estímulo ao processo de desenvolvimento da habilidade argumentativa dos estudantes, algo que vai se desenvolver ao longo dos anos – segundo ele, no material didático do 8º ano, já eram solicitadas provas mais rígidas, mas ainda não formais. Já com os alunos do 9º ano, procurava desenvolver provas mais formais, estruturadas, mas ainda partindo de uma atividade investigativa. Esses estímulos aconteciam além do material didático, como já citado, e aumentando a rigidez com o passar dos anos, mudando o nível de exigência a cada nova etapa – prática proposta por Tall (1980) e Nasser e Tinoco (2003).

Tais atividades já não são mais propostas em suas aulas, pois precisa seguir o material didático padrão da rede municipal, além de cumprir o conteúdo programático em prazos determinados para a realização de provas (avaliações). Segundo ele, os professores são orientados a atingir metas, uma pontuação mínima nas avaliações – que também são padronizadas, produzidas por uma equipe da rede municipal. Além do material didático não ser mais escolha dos professores, considera não ter tempo suficiente para desenvolver suas práticas como gostaria e perde sua liberdade criativa em sala de aula, ficando praticamente impossibilitado de atender às necessidades de seus alunos.

Assim, os estudantes são “moldados” para passarem por essas avaliações e alcançarem a nota desejada (a meta), de modo que as aulas precisem ser adequadas e pensadas para essas avaliações, não o contrário. Com isso, o professor fica condicionado a seguir por esse caminho em “linha reta”, sem espaço para debates e apenas preocupado em cumprir o conteúdo – o que lembra o conceito de educação bancária proposto por Paulo Freire (1968). Toda essa estrutura inviabiliza as práticas propostas pelos teóricos e também pelos documentos oficiais, como os PCN (1997) e a BNCC (2018), guias para a educação pública brasileira.

Sempre é solicitado por P5 que seus alunos mostrem como encontraram determinado resultado ou resolução, mesmo com um texto informal, desenho – não importa o caminho. Ele afirma que seus alunos sempre são incentivados a justificar suas respostas, em contraposição à memorização de fórmulas, o que não é indicado ou estimulado. Ainda assim, existem casos em que alguns estudantes lembram de fórmulas/relações vistas durante as aulas e as aplicam diretamente nas questões, o que não é um problema para P5. Casos em que há apenas a resposta final, sem qualquer desenvolvimento, não são aceitos, mesmo que corretos.

O que é avaliado em suas atividades é o desenvolvimento, os argumentos traçados pelos estudantes: mesmo que a resposta final não esteja correta, o professor vai verificar o quanto os alunos aprenderam e o quanto conseguem expressar esse aprendizado. Ele traz dois casos como exemplo: no primeiro, um estudante precisava resolver um problema que envolvia a área de uma figura. Enquanto outros alunos aplicaram fórmulas, esse decompôs a figura à sua maneira, explicando textualmente seus passos. No segundo caso, o estudante explicou a resolução de uma questão de progressão aritmética utilizando meios muito particulares, também levando à resposta correta.

Nos dois casos apresentados, não houve algo a se generalizar, de provar o caso geral, mas foram apresentados argumentos convincentes que validaram o ponto de vista do agente (nesse caso, os estudantes). Aqui, levamos em conta as definições de argumentação apresentadas por Balacheff (2022) e Nasser e Tinoco (2003), em que a argumentação (ou o ato argumentar) visa o convencimento, a validação de uma ideia.

Sua postura de aceitar argumentos informais de seus estudantes não se restringe ao Ensino Fundamental. P5 entende que seus alunos possuem vivências diferentes, portanto, meios diferentes de se expressar e também tiveram acesso a diferentes métodos de ensino. Isso significa que um estudante recém-chegado em sua turma não terá a mesma maturidade e as mesmas vivências que seus alunos antigos, podendo não conseguir desenvolver questões propostas com a mesma desenvoltura que os alunos antigos.

Portanto, sendo essa a situação, o professor valida seu desenvolvimento assim como validaria de alunos de séries anteriores. Entretanto, como já relatado, existe a preocupação de trabalhar argumentação de forma gradual ao longo dos anos, de modo que os estudantes se habituem, aos poucos, a estruturar, organizar e formalizar seus argumentos, caminhando para a construção de provas formais. A preocupação com a avaliação e a validação de argumentos informais ou ingênuos não invalida a forma de trabalho ao longo dos anos, elas se complementam, talvez possamos entender como um nivelamento.

É curioso observar que embora haja a consciência e a preocupação de avaliar o desenvolvimento das resoluções propostas, P5 atribui nota zero à primeira resposta da primeira questão da atividade dos estudantes. Não estamos aqui apontando contradições ou incoerências entre discurso e prática, mas destacando que há diferenças entre o que os professores entendem como argumento válido ou suficiente. Enquanto outros professores consideram que a associação que o estudante faz com os ângulos internos do triângulo (ou com os três ângulos formados na reta *r*) é suficiente para mostrar a relação entre os ângulos destacados, P5 não considera. A questão é: por que alguém que diz estimular a habilidade de argumentar de seus estudantes e valorizar seus argumentos mais informais não pontua essa resposta?

Sua justificativa para tal é que “a noção de complemento de um ângulo não se aplica ao problema proposto e o argumento apresentado não justifica a relação entre os ângulos Â, Ê e Ô” (P5). A questão da nomenclatura utilizada também foi levantada por outros docentes, mas aqui o argumento (e é considerado um argumento) da relação com os triângulos não é validado. De fato, o estudante não explicita verbalmente que existe essa correspondência, ou mesmo que esses ângulos são opostos pelo vértice aos ângulos internos do triângulo, mas completa o desenho, marcando todos os ângulos formados. Sob essa perspectiva, o estudante ter feito essa associação pode ser apenas uma suposição, não uma certeza. Outra possibilidade é que o docente tenha levantado a hipótese de o estudante ter notado os ângulos opostos pelo vértice, mas por não ter explicitado e, além disso, não ter explicado como ocorre essa relação, não foi validado.

A resposta seguinte também recebe nota zero, sob a justificativa de que as classificações citadas não correspondem ao que é solicitado, além de não ter explicitado as relações entre os ângulos. Segundo o docente, “esse fato indica ausência de conhecimento a respeito de ângulos opostos pelo vértice e a relação entre os ângulos de um triângulo” (P5). Aqui, P5 destaca que não há conhecimento a respeito do conceito de ângulos opostos pelo vértice, o que realmente não foi utilizado. Mas outros docentes entendem que esse mesmo conceito foi utilizado na primeira resposta para que o estudante associasse que os ângulos destacados correspondiam aos ângulos internos do triângulo, diferente de P5. Esse fato reforça as hipóteses levantadas a respeito da correção da resposta anterior.

Encerrando a questão, o professor participante considera o argumento utilizado na última resposta como válido, atribuindo nota 4,5. Segundo ele, o estudante percebe a relação entre os ângulos opostos pelo vértice – já que relacionou verbalmente com os ângulos internos do triângulo, diferente da primeira resposta – e que vale, portanto, a lei angular de Tales. Há uma ressalva: as relações de igualdade entre os ângulos destacados e os ângulos do triângulo não foram explicitadas. Levando em conta que P5 entende que o estudante reconheceu a relação entre os ângulos opostos pelo vértice, entendemos que por “explicitar” o docente se refere a marcar os ângulos em questão na figura.

Apesar de P4 e P5 atribuírem notas similares a essa resposta, suas justificativas em muito se diferenciam: enquanto P4 apenas reconhece a validade da prova, apontando para a falta de uma demonstração, P5 explicita o argumento apresentado pelo estudante, citando a lei angular de Tales, não sentindo falta de uma “demonstração” – apenas da representação gráfica. Além do caráter pessoal, ou seja, a forma como diferentes sujeitos podem interpretar ou entender o mesmo objeto (a resposta dada, nesse caso), entendemos que as diferentes justificativas apresentadas – que, por sua vez, são análises sob diferentes perspectivas – são fruto das diferentes vivências e formações desses professores.

Também evidenciamos que o que ambos entendem como demonstração também se difere: P4 parece entender que a demonstração é algum tipo de explicação ou de justificativa, o que relacionamos com as provas que explicam de Hanna (1990) e a função de explicação de Tall (1995); já P5, por suas explicações dadas durante a entrevista, apresenta falas que remetem à definição de prova feita por Savioli e Silva (2016). Nenhuma das duas concepções se assemelha ao que Balacheff (2022) aponta como demonstração.

Conforme dito na entrevista, o docente tinha o costuma de trabalhar o estímulo à argumentação com atividades investigativas, muitas vezes com o uso de materiais concretos, além de um dos livros didáticos que utilizou que trabalhava da mesma forma. Podemos perceber um traço dessa preferência em sua correção à primeira resposta da segunda questão, em que um exemplo é utilizado para provar que a soma de três números consecutivos sempre será um múltiplo de três. Aqui, P5 atribui nota 4, justificando que o estudante justificou utilizando um caso particular, portanto sem o uso da linguagem matemática para tal (não generalizou). Mas, ainda assim, houve um “indício de percepção da propriedade” (P5).

Embora não tenha provado formalmente, ou mesmo apresentado argumentos informais que fossem mais consistentes, o professor compreende que o exemplo usado foi uma tentativa de justificar algo que é considerado verdadeiro. Nesse caso, o argumento ingênuo – sequer um processo empírico – foi validado. Além do exemplo utilizado, o estudante também comenta sobre a existência de haver um múltiplo de três em toda sequência que segue esse formato, o que pode ter sido levado em conta por P5, mesmo que não tenha sido comentado por ele. Assim como P4, P5 nota a utilização de um contraexemplo na segunda resposta, valorizando mais o recurso utilizado, com nota 3, mas destaca também a utilização de números não consecutivos. Entendemos que aqui a estratégia, portanto, o argumento utilizado, foi valorizado, embora estivesse errado. Isso condiz com o que P5 diz sobre sua atuação em sala de aula, que leva em conta a argumentação dos estudantes, mesmo que ao final não se chegue à resposta certa.

A aceitação e validação de argumentos informais, com desenhos e explicações não sistematizadas/estruturadas, também é vista na correção da última resposta da atividade. Atribuindo nota 4, o professor participante diz que a percepção da propriedade por meio de registros gráficos (desenhos) é uma maneira de argumentar matematicamente. Ainda assim, destaca a falta de uma demonstração formal, o que mostraria a validade para todos os casos, que é o que solicita a questão. Ainda que a resposta mostre que a propriedade é válida, P5 parece ter preferência por algo mais formal, como o que ele descreve ser a demonstração.

Dadas as falas de P5, percebemos que suas concepções são, de fato, próximas ao que propõe o referencial teórico. A forma como costumava trabalhar em sala de aula (quando considerava possível), estimulando seus estudantes, segue as orientações da BNCC (Brasil, 2018). Além disso, reconhece não ter tempo hábil atualmente para trabalhar conforme deseja, dadas as exigências da Secretaria Municipal de Educação, fazendo com que precise seguir um “roteiro” e cumprir a meta estipulada. O docente reconhece que seus alunos possuem diferentes vivências e experiências escolares, fazendo com que alguns deles não argumentem com a mesma desenvoltura que outros. Dessa forma, entende que precisa validar respostas que mostram um processo de argumentação mais informal, de modo a não só reconhecer as diferenças entre seus estudantes, mas estimular que desenvolvam sua linguagem matemática até que possam construir provas com a linguagem matemática formal.

Como vimos, essa validação acontece em suas correções, entretanto, em alguns casos parece haver alguma preferência por caminhos mais formais, ou mesmo informações mais explícitas, que evidenciem com mais clareza o que o estudante pensa – como o caso da última resposta da primeira questão, em que o estudante não faz a representação dos ângulos na imagem. Em relação ao último caso, é possível que P5 não queira avaliar o que os alunos escreveram com base em hipóteses, já que o estudante não esclarece todas as informações que utilizou para resolver a questão. Outra possibilidade é que o apontamento feito pelo professor seja um estímulo para que os estudantes se expressem com mais clareza, de modo a esclarecerem suas ideias e argumentos utilizados – o que é condizente com seus métodos de ensino, citados durante a entrevista.

3.5.6 Participante P6

Formado em uma universidade estadual no Ceará em 2018, P6 atua na rede pública de ensino há aproximadamente seis anos, ainda sem experiências na rede privada. Como a maioria dos professores, não teve uma disciplina de argumentação em sua graduação – cursada na modalidade EAD, com encontros semanais –, mas alega ter estudado algumas que eram voltadas para essa área, embora não tenha citado os nomes. Especificamente, lembra de um professor que apresentava de forma mais explícita o processo argumentativo, experiência que certamente foi mais marcante, já que aqui ganha destaque. Também alega não ter tido contato, em congressos, livros ou artigos, com estudos sobre argumentação e provas matemáticas.

Havendo o reconhecimento de que teve contato com argumentação matemática em sua graduação, precisamos compreender o que é argumentar, sob sua perspectiva. Para P6, argumentar é um meio de provar algo a alguém de forma simples, seja simples para o agente que apresenta ou constrói a prova, seja para quem precisa ser convencido. Esse processo pode ocorrer por vários meios, podendo ser por escrito, com a utilização de exemplos (incluindo exemplos cotidianos), com palavras ou “através de situações” (P6). Ao comentar como foi seu contato com argumentação matemática na graduação, diz que os professores abordavam todo o conteúdo de forma simplificada, “argumentando dentro do tema” para que todos compreendessem e que explicavam através de números –

talvez a utilização de exemplos numéricos, ou mesmo a resolução de alguns problemas.

Em relação às provas, o docente entende ser algo mais “fácil”, porque é possível provar “através de números” e é sabido que “números não mentem”. Para ele, quando se prova algo com a utilização de números, é impossível “burlar”, já que a matemática é exata. Para exemplificar, cita uma situação em que seu professor da graduação justificou o resultado 2 + 2 = 4. Nesse caso, utiliza o termo “argumentar” ao se referir ao processo feito por seu professor, que, entre outras operações, passava por potenciação e também utilizava números fracionários. Não fica claro se o processo feito foi a demonstração da soma utilizando o método axiomático, mas P6 traz a ideia de prova ligada a um resultado numérico, enquanto a argumentação é um tipo de explicação acessível.

As ideias que o professor participante apresenta a respeito de argumentação e provas não condizem com o que propõe o referencial teórico. Na verdade, ao entender que argumentar é explicar algo – é o que se pode entender em sua fala –, temos a interação social apontada por Balacheff (2022) em um processo argumentativo, embora o conceito em si não seja similar ao apresentado por P6. Especificamente em relação à explicação, Balacheff (2022) entende que é um recurso de fato ligado à argumentação, porém mais amplo: explicação é quando há a conexão entre um enunciado e informações prévias, de modo a se fazer compreender – e é também a base da argumentação. Sob essa perspectiva, é possível relacionar a concepção do docente com a de Amossy (2011), já que existe o uso de recursos de linguagem para reforçar ou reorientar algo – nesse caso, um conceito apresentado em sala de aula. Sua concepção de prova, por sua vez, não tem como finalidade validar algo ou convencer alguém, mas apresentar um resultado numérico, algo específico.

Voltando agora à sua fala sobre reconhecer o processo argumentativo, ou melhor, o trabalho com argumentação nas aulas da graduação, podemos pensar que o docente se referia a explicações, no sentido mais amplo. Explicações de conceitos, talvez definições, ou mesmo a resolução de algum problema proposto, mas não especificamente o processo dedutivo ou a elaboração de argumentos rigorosos para provar algo – um caso geral, um teorema. Portanto, quando P6 diz que seus professores argumentavam de forma a simplificar para os alunos, ele se refere a, de fato, explicar ou apresentar algo de forma inteligível.

Ainda que os dois conceitos apresentados pelo docente não estejam alinhados com o que é apresentado pelos teóricos, eles ainda estão conectados. Ao passo que argumentar é visto como o explicar, a simplificação de um discurso ou explicação com a utilização de recursos diversos e que a prova é algo que se mostra com números, portanto, um resultado numérico ou a mostra de exemplos, é possível passar por esse processo argumentativo para chegar à tal prova. Ou, ainda, o contrário: dado o resultado final (prova), podemos explicá-la a alguém para que se entenda como chegamos a tal resultado (argumentação).

Ao ser questionado sobre como estimula seus alunos a argumentar em sala de aula, P6 diz explicar a seus estudantes a importância de aprender matemática, visto que muitos não se identificam com a disciplina, seja por ter dificuldades, ou mesmo por influências externas. Novamente, P6 compreende a argumentação como algo mais amplo/geral, que diz respeito a explicar de forma simplificada. Especificamente, nesse caso, fala sobre mostrar a importância da matemática para os estudantes a fim de que mostrem interesse em aprender, alegando, inclusive, que a matemática está em outras áreas do conhecimento, então "não adianta você fugir, ir para outra disciplina, vai envolver matemática" (P6).

Percebendo que o docente não havia entendido o sentido da pergunta, reforcei que o foco era o estímulo à argumentação, não o interesse pela matemática. Com isso, P6 alega que uma parte considerável de seus alunos vêm de zonas rurais, sem muitos recursos, além de terem estudado de forma ainda mais precária no período da pandemia de COVID-19 (do início de 2020 ao fim de 2021). Esses fatores teriam prejudicado o processo de aprendizado dos estudantes, fazendo com que ele precisasse retomar conceitos básicos e tivesse "um pouco de dificuldade de tentar arrancar deles essa situação de argumentar alguma coisa" (P6). Cita a dificuldade que muitos alunos do Ensino Médio têm em resolver equações e realizar cálculos algébricos (adição e subtração), devido à defasagem que tiveram no período de distanciamento social.

De fato, são dois fatores a se considerar (a origem humilde aliada à falta de recursos dos estudantes e o período de distanciamento social entre os anos de 2020 e 2021), já que é preciso levar em conta as carências educacionais das turmas e retomar conceitos que foram “perdidos” no período citado. Mesmo assim, lembremos que a concepção de P6 sobre argumentação e provas não é a mesma que apresentamos no referencial teórico, sendo essa relacionada a explicação de conceitos e resultados (numéricos). Levando isso em conta, o que o docente expressa aqui é a dificuldade de dar seguimento com os conteúdos previstos em sala de aula e explicar de forma que seus alunos compreendam os conceitos abordados.

Mesmo que as dificuldades apontadas fossem referentes ao processo argumentativo (que apresentamos na introdução e no referencial teórico), o que seria um apontamento válido, haveria a possibilidade de trabalhar esse estímulo conforme as propostas de Tall (1980) e Nasser e Tinoco (2002). Ou seja, trabalhar questões em que se solicita a justificativa para os resultados obtidos, sempre respeitando a bagagem das turmas e elevando sutilmente o nível de rigor exigido conforme o avanço dos alunos.

Questionado sobre quais aspectos leva em conta ao avaliar uma resposta, mais especificamente, quais elementos são validados no desenvolvimento de argumentos de seus estudantes, P6 diz validar qualquer resposta, desde que esteja correta. Para ele, não importa como a resposta foi desenvolvida, mesmo que copiada de um site ou matéria de jornal, é validada se estiver correta. Vale lembrar que, no formulário *Google* da etapa 4, afirmou não pontuar completamente respostas sem resolução. Sua justificativa para tal é a já citada carência de seus estudantes (não só econômica, mas também social e educacional), que resulta em pouco interesse e rendimento dos alunos em sala de aula. O termo “argumentação” é novamente utilizado como algo geral, o que poderia incluir o desenvolvimento de um cálculo ou a explicação de determinado conceito.

Para levá-lo à direção correta da pergunta, apresentei um exemplo: que tipo de resposta é considerada válida se a pergunta for “a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180°. Como podemos mostrar que isso é verdade?”. A princípio, o exemplo dado foi interpretado como o caso de questões em que se solicita a medida de um ângulo, dadas outras medidas. Sob essa perspectiva, P6 alega considerar válido qualquer desenvolvimento, com ou sem cálculos. Entretanto, ao compreender o real sentido da pergunta e do exemplo dado, explica que seria difícil que um de seus alunos respondesse à questão e que precisaria de uma aula “muito específica” para isso – aula em que os elementos e outras informações sobre triângulos seriam apresentados e estudados.

Dado o contexto escolar e social de seus alunos, é compreensível que o professor apresente dificuldades em trabalhar alguns conteúdos, já que precisaria revisitar outros conceitos e até mesmo lidar com barreiras que vão além das aulas de matemática propriamente ditas. Para suprir tais carências, seria necessário ter tempo suficiente em sala de aula para trabalhar conteúdos que estão além do previsto para cada série – e a falta de tempo em sala de aula é um dos fatores apontados por P6 no formulário *Google*. Embora esse tópico não seja relacionado diretamente ao cerne da pesquisa, é importante que entendamos o contexto escolar em que esse docente atua.

Antes de adentrar às correções feitas por P6, é preciso novamente lembrar que o termo “argumentação” ou o ato de argumentar, para ele, está relacionado a compreender conceitos, a desenvolver uma resolução e saber expressar uma ideia. Além disso, há o também citado contexto escolar em que está inserido e, sendo ele o único ambiente em que o docente atuou até o momento, é possível que o modo como corrige e avalia as respostas esteja intimamente ligado e seja influenciado por suas práticas com seus alunos – alunos esses com diversas defasagens. Também é importante trazermos à luz que o docente dá importância mínima (1, na escala de 1 a 5 do formulário *Google*) aos argumentos utilizados para a responder a uma questão, independentemente de o resultado ou resposta final estarem corretos. Ou seja, mesmo que toda a construção esteja correta ela tem pouca importância, sendo válida a resposta final.

Todas as respostas receberam nota máxima, sem exceção. Na maioria dos casos, a justificativa é limitada à confirmação da resposta do estudante, dizendo estar correta, sem mais detalhes. A primeira resposta da primeira questão, em que o estudante diz que os ângulos se complementam – algo comentado pela maioria dos professores participantes – recebeu nota máxima porque é “Exatamente isso que acontece, fazendo a soma desses três ângulos formam 180º” (P6). Nesse caso, realmente é o que ocorre: a soma é 180°, porém não houve quaisquer comentários sobre os meios utilizados pelo estudante para chegar a essa conclusão. O mesmo acontece na terceira resposta, que é apenas confirmada como correta e recebe nota máxima.

A resposta seguinte, que sequer responde o que é solicitado, também recebeu nota máxima. Para P6, “isso acontece porque são formados por ângulos iguais.” (P6). Entendemos que, ao validar tal resposta, o docente levou em conta as relações de correspondência entre os ângulos, desconsiderando suas medidas e quaisquer outras relações. Entretanto, o estudante não esclarece a quais ângulos se refere, trazendo a impressão, como aponta P4, que os nomes das relações foram citados a esmo. Outro aspecto a se destacar aqui é que P6 utiliza o termo “iguais” em vez de “congruentes” para se referir a ângulos que possuem a mesma medida. Vemos aqui algo anteriormente dito pelo docente: as respostas são validadas, não importando como sejam feitas, desde que estejam corretas. Nesse caso, levantamos a hipótese de ter sido dada a nota máxima por existirem as relações citadas pelo estudante – se existem, estão corretas – mesmo sem nenhum esclarecimento a seu respeito.

Na questão seguinte, a primeira resposta teve avaliações diversas feitas pelos professores, com diferentes tipos de comentários e avaliações. No caso de P6, que atribuiu nota máxima, a justificativa para a nota é peculiar: “o número 5 é múltiplo de três e qualquer sequência de três números que tenha o 5 será múltiplo de três” (P6). Em primeiro lugar, chama atenção o comentário sobre o número cinco ser múltiplo de três, o que não é verdade. Em segundo lugar, o docente traz como justificativa uma afirmação que se assemelha ao enunciado ao dizer que “qualquer sequência de três números ...”, algo que não se explica, além de incluir novamente o número cinco. Pensando em sequências de três números em que um deles é o cinco, temos 2, 4, 5; 4, 5, 6; 5, 6, 7 e a soma dos números em cada uma delas resulta, de fato, em um múltiplo de três, mas não acontece por haver o número cinco nelas.

Também recebe nota máxima a resposta que apresenta um contraexemplo “falho”, mas sem nenhum comentário a respeito dessa estratégia, ou mesmo de seu uso indevido – com uma sequência de números não consecutivos. Nessa correção, P6 afirma que “está correto, há exemplos de sequências de três números consecutivos que não são múltiplos de três.” (P6). Não se sabe o critério utilizado pelo docente para a correção, porém não é possível, nesse caso, afirmar que a resposta está correta. Além disso, sua justificativa afirma que há alguns exemplos em que a soma de três números consecutivos é um múltiplo de três, quando, na verdade, isso acontece em todos os casos.

A última resposta também é validada e está correta, de fato. Porém, de acordo com P6, a resolução está correta porque “na maioria dos casos sempre haverá mais de um número múltiplo de três em uma sequência de três números consecutivos” (P6). Na verdade, em uma sequência de três números consecutivos sempre haverá apenas um múltiplo de três e, além disso, essa informação (com a qual ele concorda) não foi apresentada na resposta.

Pelo que foi apresentado na entrevista, entendemos que as concepções de P6 sobre argumentação e provas matemáticas não apresentam semelhanças com os conceitos e definições apresentados pelos teóricos e, consequentemente, as práticas não estão alinhadas ao que os documentos oficiais propõem. Isso não significa necessariamente que o docente não compreenda o que é argumentar (ou provar) matematicamente, já que existe a possibilidade de ser uma questão de associação do termo (da nomenclatura) com os conceitos. Assim, uma hipótese que levantamos é que o professor participante pode compreender perfeitamente o que é o processo argumentativo e como trabalhá-lo em sala de aula, apenas não associa o processo à terminologia.

Por conta disso, precisamos considerar que P6 se referia a explicações ou demonstrações (no sentido mais amplo da palavra) do que se entende de determinado conceito quando falava de argumentar ou de argumentação. Com isso, o estímulo em sala de aula a que se refere não é o mesmo que Tall (1980), Nasser e Tinoco (2003) e a BNCC (Brasil, 2018) propõem – e que tratam da argumentação matemática propriamente dita –, mas a um estímulo geral de aprendizado, para que seus alunos saibam expressar ou mostrar o que aprenderam. Com isso, quando diz que aceita e valida qualquer resposta correta, está se referindo a respostas de problemas, cálculos, ou mesmo resolução de equações – exemplo que é citado durante a entrevista.

Em suas correções, realmente notamos que avalia positivamente as respostas, mas isso se estende até as respostas incorretas e suas justificativas confirmam a validade dessas respostas. Na verdade, confirma as respostas – mesmo as incorretas – e justifica com uma afirmação que não se explica, segue algo que está no enunciado. Nesse caso, não vemos relação entre suas falas apresentadas na entrevista e sua correção, visto que seus critérios não ficaram claros. O que se pode afirmar é que os argumentos utilizados pelos estudantes parecem não ter sido avaliados, já que, sem distinção, todos foram pontuados igualmente e confirmados de forma sucinta e direta.

3.5.7 Participante P7

Diferente dos demais professores participantes, P7 ainda não concluiu sua graduação – atualmente cursa o oitavo período em uma instituição federal na Paraíba –, mas atua como professora na rede privada há aproximadamente um ano. Também diferente dos professores apresentados até então, cursou a disciplina “Argumentação Matemática” no primeiro período da graduação. Segundo ela, a disciplina tinha como objetivo desenvolver as habilidades de argumentar e de provar, além de também focar na escrita, na construção dessas provas.

De forma sucinta, P7 expõe seu ponto de vista a respeito dos conceitos abordados: para ela, argumentar é o “caminho” para a construção da prova, que é a validação de algo – um teorema, um conceito, um resultado –, o que se assemelha ao que verificamos na introdução desta dissertação. A ideia de que a prova tem a função de validar vai ao encontro do que dizem Balacheff (1988), Talll (1995) e Nasser e Tinoco (2003), embora nenhum referencial tenha sido citado por P7 – apesar de a docente não explicitar em suas falas, a disciplina citada (Argumentação Matemática) parece ter foco na prática, não em estudos sobre argumentação.

O estímulo à argumentação é algo que a docente considera de extrema importância. Esse estímulo acontece de diferentes maneiras em suas aulas: P7 tem preferência por trabalhar com Etnomatemática, além de sempre contextualizar suas questões e temas abordados em sala de aula com assuntos de interesse e do cotidiano de seus estudantes. Para ela, é importante que os assuntos abordados tenham significado e façam sentido para seus alunos, daí a utilização de assuntos do cotidiano deles em aula, como propõe Freire (1968). Além disso, sempre apresenta provas matemáticas em sala de aula, para que as turmas tenham contato com essas práticas e possam, com isso, se habituar a construir suas próprias provas.

Outra prática comum em suas aulas é solicitar que os estudantes justifiquem seus resultados, ou tentem verificar se e/ou por que uma afirmação é verdadeira, como propõem Nasser e Tinoco (2003) e também a BNCC (Brasil, 2018). Com isso, assim como P4 e P5, prioriza a compreensão dos processos que levam às fórmulas e outras relações (processo de generalização), em vez de sugerir que essas fórmulas sejam memorizadas. Apesar disso, P7 considera não ter tempo suficiente em sala de aula para desenvolver suas práticas como deseja.

Além do tempo insuficiente, a professora aponta outro problema que enfrenta em suas aulas: os alunos apresentam dificuldades em interpretação de problemas – algo também apontado por P1. Aqui, P7 tem preferência por resolução de problemas e atividades contextualizadas, além de sempre solicitar justificativas, mas seus alunos têm mais facilidade em resolver questões mais diretas, em que apenas se solicita que calcule determinado resultado, por exemplo. Nasser e Tinoco (2003) comentam que a prática com exercícios mecânicos e repetitivos não leva os estudantes a refletir, mas apenas a repetir métodos de seus professores, além de não ver sentido nesses procedimentos.

Apesar disso, as falas de P1 e P7 indicam que esse tipo de atividade parece ser mais fácil para seus alunos, que apresentam dificuldades em interpretar questões contextualizadas. É possível que tal dificuldade seja dada por não haver o hábito, até então (já que P7 atua há aproximadamente um ano), de trabalhar atividades em que se exige justificativas e o exercício do pensamento lógico matemático, mas sim de questões em que apenas se calcula algo mecanicamente.

Dada a prática de estimular que seus alunos não só justifiquem suas respostas, mas criem meios próprios para a resolução de problemas e de argumentar, a docente considera válidas as respostas e resoluções que estejam coerentes e que façam sentido dentro do que é proposto. Embora questões com resposta "seca" (sem desenvolvimento) não sejam completamente aceitas, ela destaca que, nos casos em que se pede para provar algo, não há a possibilidade de surgir esse tipo de resposta. Então, o desenvolvimento é avaliado e os elementos coerentes são validados, independentemente do resultado final (um valor ou uma prova, dependendo do caso).

A fala de P7 em relação à aceitação de respostas e argumentos apresentados por estudantes, desde que eles façam sentido, não é exclusividade sua – outros professores participantes pensam da mesma forma. Porém, é preciso lembrar que existe subjetividade nessa avaliação, já que o que uma pessoa considera como válido, outra pode não considerar, talvez por haver diferenças nos olhares, nos elementos que cada um decide valorizar em suas correções.

No caso da primeira resposta dada à atividade proposta aos alunos do 9º ano, P7 avalia com nota 2, alegando que não se pode afirmar que os ângulos em questão formam 90°, pois não se sabe se isso é verdade, logo, eles não podem ser complementares. Novamente a utilização desse termo foi destacada com o entendimento de que o aluno quis se referir ao conceito de ângulos complementares. Quando a docente diz que "não sabemos se a soma de Ô e Â e Ê e Â formam um ângulo de 90º graus" (P7), levantamos a hipótese de ela estar se referindo ao ponto de vista do estudante, já que é uma informação que não é sabida por ele, a princípio – para nós, é algo conhecido: a soma das medidas desses ângulos é 180°.

Considerando essa colocação como uma mensagem ao estudante, podemos entender como um *feedback*, o que, assim como apontamos na análise de dados de P4, pode ser um incentivo – nesse caso, um incentivo para que explore e prove as relações entre os ângulos. Ou mesmo que justifique a razão de a soma ser 90° (verificando, ao fim, ser uma afirmação falsa) como sugerem a BNCC (Brasil, 2018) e Nasser e Tinoco (2003).

Na resposta seguinte, que recebe nota zero, apenas justifica que “nenhum desses três ângulos formam os itens citados” (P7), portanto, não é uma resposta válida. É verdade que, nesse caso, o estudante apenas cita nomes de posições relativas entre ângulos – talvez a esmo – e não cumpre com o que a questão solicita, porém também marca esses ângulos na figura, todos eles. Não é possível afirmar qual foi sua intenção com a marcação na figura, mas algumas das relações citadas são contempladas em seu desenho – algo que P7 não considera ao dizer que os ângulos não possuem as relações citadas.

De forma direta, a última resposta dessa questão recebe nota máxima, por estar correta – essa é a justificativa. Aqui, o estudante apenas afirma que os ângulos marcados são iguais aos ângulos internos do triângulo, cuja soma é 180°, sem marcações na imagem. Diferente da primeira resposta, P7 não questiona os ângulos serem congruentes aos ângulos internos do triângulo, apesar de não haver qualquer justificativa do estudante para essa afirmação. Podemos entender que em ambos os casos há informações ausentes, já que a relação com os ângulos internos do triângulo (na terceira resposta) e a soma das medidas dos ângulos ser 90° (na primeira resposta) não são justificados.

Ainda assim, a docente entende que uma das respostas é suficiente para provar o que se pede e a outra não, ou seja, é convencida pelos argumentos utilizados em uma das respostas, enquanto considera insuficientes os que são usados na outra – o que reforça a ideia de perspectiva durante as correções. Com isso, vemos surgir uma prova, já que os argumentos da terceira resposta foram aceitos como válidos (Balacheff, 2022), considerados suficientes para P7, enquanto os da primeira não foram – portanto, não é uma prova, em sua perspectiva.

Seguindo para a segunda questão, P7 entende que a primeira resposta não apresenta argumentos convincentes – o que também é apontado por outros professores –, alegando que o estudante errou a justificativa apresentada, e atribui nota 1. Mesmo que a resposta, como um todo, não esteja correta, o trecho da resposta em que o aluno diz que “pelo menos um número será múltiplo de três” é algo que de fato acontece. Embora esse trecho traga uma informação verdadeira e que pode mostrar que o estudante começa a perceber uma propriedade, como aponta P5, P7 não parece considerá-lo.

Como a docente alega considerar válidas respostas e argumentos que fazem sentido dentro do contexto da questão e aqui, em que esse parece ser um desses casos, sequer há comentários, levantamos duas possibilidades: a primeira é que, novamente, sob sua perspectiva de avaliação, esse aspecto apontado na resposta não é relevante. A segunda é que sua avaliação leva em conta a resposta como um todo, sem considerar partes dela. Sendo esse o caso, a resposta dada não é correta, de fato. Já a resposta seguinte foi avaliada com nota zero por não apresentar um exemplo que contemplasse o que é solicitado na questão, como aponta a maioria dos docentes.

Embora apresente um comentário sucinto para a nota máxima dada à última resposta, P7 entende que houve a generalização, portanto, nota que os exemplos apresentados e analisados foram utilizados para encontrar o caso geral – exemplo genérico e experiência mental (Balacheff, 1988). A docente apenas diz que o estudante “conseguiu achar uma justificativa que serve para todos os números naturais [3(n+1)]” (P7), sem tecer comentários sobre os argumentos, o que reforça a hipótese de que as respostas são avaliadas por ela como algo único, sem levar em conta os argumentos que a constroem individualmente.

Levando em conta a forma como corrigiu as questões, geralmente de forma sucinta, não podemos afirmar muito sobre seus critérios. Porém, como já apontado, levantamos a hipótese de que os componentes de uma resposta e os argumentos utilizados para construir a prova não são verificados separadamente, apenas em conjunto. Assim, se a argumentação, como instrumento único, está correta, ou seja, é considerada como prova (ou próxima de uma prova) recebe nota alta; caso contrário, recebe nota baixa. Outro aspecto interessante a se observar é que, em nenhum momento, P7 se incomoda ou sugere que as respostas deveriam ser mais formais, ou mesmo apresentar argumentos mais rigorosos.

Como aponta Balacheff (2022), os agentes envolvidos em um processo argumentativo decidem quando estão convencidos ou não. Nesse caso, P7 decide com base em seus critérios e, caso estivesse lidando com suas turmas, seguindo contratos didáticos, o que é ou não uma prova. Partindo do pressuposto de que a docente estabelece tal contrato com suas turmas, podemos dizer que existe um acordo entre as partes em que é instituído que tipo de argumento é aceito como prova. Portanto, nesse contexto, é possível que seus estudantes estejam habituados a formular argumentos que criem uma cadeia lógica e funcionem como um único instrumento de validação.

As concepções de P7 acerca dos conceitos de argumentação e prova matemáticas, embora apresentadas de forma sucinta, são condizentes com o que propõem os teóricos. Isso inclui a forma como estimula seus alunos e orienta sempre que justifiquem suas respostas, embora aponte a dificuldade que possuem com interpretação de problemas e questões propostas. As justificativas apresentadas em suas correções, embora também sucintas, podem ser interpretadas como *feedbacks* dados aos alunos, um convite à reflexão – considerando que tenha esse hábito em sala de aula.

3.5.8 Participante P8

Dentre todos os professores participantes desta pesquisa, P8 se destaca por uma razão: suas pesquisas de mestrado, finalizado em 2016, e de doutorado, em curso desde 2020, são sobre argumentação, provas e demonstrações matemáticas. Atua como professor na rede pública de ensino na cidade de São Paulo há mais de dez anos e, embora não seja mais vinculado à rede privada, também atuou nela por mais de dez anos.

Como a maioria dos demais participantes, não teve uma disciplina voltada para estudos sobre argumentação em sua graduação, apenas teve contato por meio de outras disciplinas em que precisava provar teoremas, muitas vezes mecanicamente. Essa prática mecânica, de pura resolução de exercícios fazia com que o docente não visse sentido nas práticas de sala de aula, algo similar ao que Hoyles (1997) comenta sobre estudantes do ensino básico. O docente não atribui a ausência de estudos sobre argumentação a seus professores, mas ao modelo atual das licenciaturas, que

> ainda é muito engessado e não trabalha com esses aspectos que [fazem] você preparar o professor para ele desenvolver atividades para fazer o aluno trabalhar com argumentação, prova e demonstração.

De fato, apenas dois dos dez professores participantes tiveram disciplinas voltadas para esses estudos, enquanto os demais relatam apenas ter tido contato com as provas matemáticas quando precisavam provar teoremas. Não havia, em todos os outros casos, discussões sobre o que estava sendo construído em sala de aula, era apenas um processo necessário para seguir com os assuntos previstos para tais disciplinas. Apesar disso, felizmente, podemos perceber que os professores aqui entrevistados apresentam, em sua maioria, concepções que se alinham – de diferentes formas e em diferentes níveis – ao que é proposto pelo referencial teórico a respeito desses conceitos.

Por sua imersão na área (argumentação, provas e demonstrações matemáticas), P8 entende que existem diferentes definições e concepções sobre o que é argumentar e provar matematicamente, algo que vimos na introdução deste trabalho. Esses diferentes pontos de vista apresentam pontos de convergência e tomamos esses pontos de convergência como nosso guia para esta pesquisa. Mesmo com tais diferenças, o docente expõe suas concepções: para ele, a argumentação matemática é o processo em que se tenta justificar algo para que o outro seja convencido de seu ponto de vista. Ainda que esteja se referindo à argumentação matemática, o que o docente expressa se assemelha à definição apresentada por Weston (1996) e ao que Balacheff (2022) traz como “argumentação em seu sentido geral”.

A prova matemática, por sua vez, está na continuidade desse processo, é a “ponta” dele, quando finalmente há o convencimento – corroborando com o que propõe Balacheff (2022). P8 destaca que a validade dessa prova precisa ser discutida em sala de aula, ou seja, o que é considerado uma prova precisa ser debatido na sala de aula – portanto, o contexto social citado por Hanna (1990) e Tall (1995) – para que, a partir daí, o processo argumentativo seja trabalhado.

A motivação para que P8 iniciasse seus estudos em argumentação veio de experiências em seu ambiente de trabalho: questionamentos de estudantes a respeito da razão de ser de determinados teoremas despertaram sua atenção para um possível problema. Percebendo também que pouco se falava sobre argumentação, provas e demonstrações em sala de aula e que, além disso, os estudantes não percebiam a importância da argumentação para suas vidas além das aulas de matemática, o docente decidiu por conta própria iniciar seus estudos para atender às necessidades de seus alunos.

Partindo desses questionamentos, o docente toma a postura de sempre fazer com que seus estudantes compreendam os conceitos abordados em sala de aula, sua construção, sua base, em vez de simplesmente lembrar de fórmulas apresentadas – assim como P4 e P5. Em adição a essa prática, P8 sempre mostra às turmas a dedução/demonstração de fórmulas e teoremas trabalhados em sala de aula – embora julgue importante que os alunos saibam as relações trabalhadas. Com isso, tomou a decisão de seguir sua carreira acadêmica com pesquisas nesse campo, relacionando argumentação, provas e demonstrações com resolução de problemas.

E é dessa forma que estimula seus estudantes a argumentar em sala de aula: sempre que um novo assunto é iniciado em sala de aula, um problema é apresentado para que seus alunos tentem desenvolver meios de resolvê-lo. Segundo ele, a intenção é que o pensamento intuitivo utilizado para a resolução de problemas auxilie no desenvolvimento do pensamento dedutivo. Assim, como propõem Nasser e Tinoco (2003), sugere que seus alunos desenvolvam resoluções de problemas e justifiquem as respostas, para que possam desenvolver sua habilidade de argumentar nesse processo. É válido lembrar aqui que Balacheff (2022) também entende a argumentação matemática como um processo voltado para a resolução de problemas.

Após a resolução do problema proposto, a turma se reúne para o que P8 chama de plenária, em que eles discutem os resultados e os métodos de resolução escolhidos por cada um. Aqui acontece a troca de experiências e ideias, de modo que um aluno tenha acesso e a oportunidade de entender (e aprender com) as práticas do outro. Esse processo é contemplado nas estratégias usadas para desenvolver as habilidades de argumentação propostas no livro “Argumentação e provas no ensino de matemática” de Nasser e Tinoco (2003), em que as autoras sugerem, ainda, que os alunos avaliem as justificativas dadas pelos colegas. Também destacamos que, quando um estudante participa desse tipo de relação, “nascem condições para o movimento de ação do seu conceito matemático” (Silveira, 2015, p. 90).

Com essa prática (utilizando a resolução de problemas como metodologia), o professor P8 entende que, ao avaliar argumentos desenvolvidos por seus alunos, deve levá-los à reflexão. Segundo ele, não é dito aos estudantes quando uma resposta (e isso inclui o processo) está errado, isso é devolvido a cada um deles para que discutam entre si – no momento da plenária – e vejam qual dos colegas apresenta uma resposta que faça sentido. Essa troca, como dito, serve para que possam aprender uns com os outros e para que, como sugere Hoyles (1997), convençam a si mesmos com seus argumentos.

Ainda assim, em um caso em que não é possível que haja essa troca (como na correção das atividades propostas na etapa 3), P8 aceita respostas com argumentos que façam sentido dentro do que é proposto – como demais professores participantes. Para ele, não importa o meio em que o estudante apresente seu desenvolvimento – com textos escritos na língua materna, desenhos, cálculos, ou o que quer que seja: todas as formas podem ser válidas se seguirem uma linha de raciocínio coerente. Vale destacar que todo esse método privilegia as preferências dos alunos, que podem se utilizar de procedimentos empíricos – que, como aponta Hoyles (1997), de fato é tido como preferência por alunos, mas, ao mesmo tempo, os leva gradualmente ao processo dedutivo.

Destacamos que P8, assim como demais professores participantes da pesquisa, incentiva e estimula seus alunos para que eles desenvolvam a habilidade de argumentar matematicamente. Além disso, entende que deve considerar válidos argumentos apresentados de diferentes maneiras quando eles estão de acordo com o que está sendo trabalhado em sala de aula e/ou solicitado na questão. Assim, mesmo que a BNCC (Brasil, 2018) e os PCN (1997) sugiram que essa argumentação seja “aprimorada”, que os argumentos dos estudantes sejam mais estruturados ao longo dos anos, aqui os docentes entendem que precisam se adequar às suas realidades sociais e escolares para trabalhar o desenvolvimento dessas habilidades.

Não é necessariamente falta de conhecimento a respeito dos documentos oficiais, ou mesmo em relação às propostas feitas pelos teóricos da área, mas uma tentativa de remanejar suas propostas de trabalho de acordo com as turmas em que estão atuando.

Conforme já apontado, as correções da etapa 3 foram feitas sem haver qualquer conversa de P8 com os estudantes. Destacamos essa informação porque o docente mostra preferência por conversar com seus alunos para que eles possam desenvolver melhor suas respostas, algo que não é possível aqui. Dessa forma, ele precisa analisar o que tem em mãos sem devolução e novas orientações aos estudantes. Ao corrigir a primeira resposta dada à primeira questão, que recebeu nota 4,8, P8 reconhece que o estudante percebeu a relação entre os ângulos, que somam 180°. Destaca que a utilização do termo “complementa” foi equivocado e que o professor pode reforçar os conceitos de complemento e suplemento para sanar o que ele chama de “pequenas distinções”.

A utilização desse termo não foi entendida como um fato irrelevante, mas algo contornável, talvez ínfimo em relação ao que o estudante apresenta na resposta. Portanto, o que P8 leva em conta para pontuar essa resposta é a sua construção, de fato – é o desenho feito por cima da imagem e que leva à conclusão de que os ângulos destacados formam 180° juntos. Mesmo não sendo explícito, P8 mostra validar os argumentos (nesse caso, pictóricos) apresentados pelo estudante, mesmo sendo informal e não explicitando completamente a relação entre imagem e conclusão da resposta.

Nenhuma justificativa foi dada para a nota 4 atribuída à segunda resposta dessa questão. Pela nota, 80% do valor total possível, entendemos que o docente considera a resposta coerente – seguindo na direção oposta à dos demais professores participantes –, apesar de não expressar suas razões. Não sabemos, portanto, quais critérios utilizou para essa avaliação, mas cabe lembrar que o estudante não entregou o que era solicitado. Uma das possibilidades é que P8 considere que as nomenclaturas utilizadas pelo estudante sejam relações que atendam ao enunciado – considerando que o enunciado seja abrangente quando diz “relação”.

Na última resposta dada a essa questão, P8 atribui nota máxima, justificando que o estudante percebeu a relação de ângulos opostos pelo vértice, assim como P4. Outro professor que apresentou comentário similar foi P5, destacando que o aluno percebe a relação entre os ângulos marcados na imagem e os ângulos opostos pelo vértice, mas sugere que ainda falta algo para completar a questão: deixar explícita a razão pela qual a soma dos ângulos é 180°. Diferente disso, P8 interpreta que essa etapa, esse passo, já foi feito pelo estudante, sem a necessidade de uma construção para tal – sendo esse um conhecimento prévio utilizado e aceito pelo professor.

Novamente podemos perceber as diferentes formas de avaliação e de validação em diferentes indivíduos. Enquanto P5 aceita a resposta com ressalvas – entendendo que seriam necessários mais argumentos para mostrar a soma dos ângulos internos do triângulo –, P8 e P4 entendem que a parte escrita da resposta já mostra que o aluno compreende tais conceitos, pois não poderia chegar à conclusão apresentada sem tal conhecimento. Assim, P5 parece preferir (e não entender como obrigatório ou mais importante) justificativas mais detalhadas, talvez mais estruturadas, enquanto P8 de fato aceita que as provas sejam mais diretas, desde que estejam coerentes.

Durante a entrevista, enquanto comentava sua pesquisa em argumentação com resolução de problemas, P8 defendeu a ideia de que os estudantes devem sempre justificar suas respostas e que isso, como também defendem Nasser e Tinoco (2003), auxilia o desenvolvimento da habilidade de argumentar. Cita um caso em que um estudante poderia trabalhar com exemplos, seja por qual meio for (desenhos, textos na língua materna ou cálculos), para que esse processo indutivo possa caminhar para o processo dedutivo em algum momento. Esse pensamento não invalida, mas corrobora com a proposta de Balacheff (1988) em seu empirismo ingênuo e, posteriormente, no exemplo genérico e na experiência mental. Especificamente, P8 parece entender que esses dois tipos de prova (que aqui podem ser processos) são etapas do desenvolvimento do estudante, algo que não estava nas ideias iniciais do autor e foi esclarecido recentemente (Balacheff, 2022).

Embora Balacheff tenha feito tais considerações, não podemos invalidar a possibilidade de esses processos citados por P8 serem etapas do desenvolvimento, já que fazem parte do estímulo proposto pelo docente e também é endossado pelo referencial teórico. Outro ponto explicitado por P8 é a compreensão por parte dos professores em relação ao processo de aprendizado de seus alunos, como também defendem Tall (1980) e Nasser e Tinoco (2003): para ele, o professor deve entender que seus alunos utilizarão métodos informais para investigação, de modo que desenvolverão a estruturação de seus argumentos com o tempo. Assim, em seu ponto de vista, deve haver a sensibilidade dos docentes em relação à utilização da língua materna – que se complementa à linguagem matemática, que possui regras próprias e universais e que precisam ser aprendidas e compreendidas pelos alunos (Silveira, 2015) – e de outros tipos de argumentos apresentados por alunos.

Com isso, adentramos à correção da segunda questão, em que podemos ver parte das ideias de P8 sendo expressas logo na primeira resposta. Aqui, ele atribui nota 1,5, dizendo que o estudante deveria apresentar outras somas para verificar que o resultado é verdade. À primeira vista, parece endossar a utilização de exemplos como prova – como algo suficiente, porém, levando em conta sua forma de trabalho apresentada na entrevista, podemos entender que esse é um incentivo para que o estudante analise os exemplos dados. Essa análise, caso não seja considerada como suficiente pelo aluno, pode indicar a ocorrência de certo padrão, levar à suspeita de alguma propriedade – ideia defendida por De Villiers (1990).

A forma como lida com a resposta seguinte (a segunda da segunda questão), errada, mostra outro aspecto citado em suas falas: o *feedback* ao estudante para que aprimore sua resposta. Nesse caso, em que um exemplo é dado com números não consecutivos, o docente não pontua e afirma que devolveria ao estudante para que ele possa responder corretamente. Como já dito, a interação professor-aluno não foi possível durante essas correções, portanto, P8, como outros participantes, teve que lidar apenas com o material recebido, sem retornar aos alunos. Ainda assim, por receber um caso em que o estudante erra por um deslize – apresenta um contraexemplo e argumenta com ele, mas esse contraexemplo não está correto – o professor opta por não avaliar e sugere devolução.

Fechando as correções, a última questão recebe nota 4,0. Os esquemas em desenho não são comentados, nem os exemplos utilizados, ou mesmo a separação de três bolinhas/pontinhos a cada soma para a generalização. O que é dito é que poderiam ser feitos mais exemplos para concluir, algo similar ao que ocorre na primeira resposta. A diferença entre os dois casos é que o primeiro, em que não ocorre a generalização e nem chega próximo disso, recebe nota abaixo da metade, enquanto o segundo recebe uma nota mais alta, certamente por apresentar mais elementos em seus argumentos que se aproximem do que é solicitado.

É possível que essa sugestão tenha sido dada para que a separação das três bolinhas em cada caso fosse "confirmada". Em outras palavras, já que nessa resposta houve a percepção de que em cada soma o número inicial aparece três vezes, portanto 3n (sendo n o primeiro número), somando sempre 3 unidades (acumuladas nos segundo e terceiro números – 1 + 2), mais exemplos serviriam como "degrau" para a confirmação de que isso acontece em todos os casos. Seria, talvez, uma tentativa de incentivar uma análise com mais elementos, mais exemplos genéricos, para que, assim, houvesse o passo da experiência mental (Balacheff, 1988).

Percebemos que o docente P8 compreende bem os conceitos de argumentação e provas, como outros participantes, mas se destacando por possuir embasamento teórico para tal. Assim, suas concepções a respeito dos assuntos abordados se assemelham ao que aponta o referencial teórico, com o reconhecimento de que há algumas pequenas diferenças entre os autores apontam. A forma como estimula suas turmas também está alinhada ao que De Villiers (1990), Tall (1980) e Nasser e Tinoco (2003), propõem, incluindo o cuidado com a evolução de seus estudantes, com seu ritmo de aprendizado. O professor participante também compreende a importância de aprimorar o processo argumentativo ao longo dos anos escolares, como orientam a BNCC (Brasil, 2018) e os PCN (Brasil, 2017), mas também entende que deve suprir as necessidades das turmas, “alongando” esse processo.

Assim, P8 evidencia um equilíbrio entre embasamento teórico e práticas adaptativas, além de validar construções que demonstram compreensão dos conceitos, mesmo com algumas imprecisões, e aceita respostas apresentadas de formas variadas. Suas práticas são baseadas em autores como Balacheff (1988, 2022), De Villiers (1990), Tall (1980), e Nasser e Tinoco (2003).

3.5.9 Participante P9

O professor P9 atua na rede pública de ensino há aproximadamente 5 anos e trabalhou na rede privada por mais de dez anos – portanto, desde antes da conclusão de sua graduação, em 2017. É formado em Licenciatura em Matemática por uma universidade federal da Paraíba e, assim como P7, em sua grade curricular havia uma disciplina voltada para argumentação matemática. Nessa disciplina, segundo P9, são estudados o método axiomático, o princípio de indução finita e as provas por absurdo, além de algo que seria uma “introdução à lógica”. O docente reconhece ter estudado e utilizado argumentação matemática para provar teoremas em outras disciplinas de sua graduação, como em Análise Real – nesse caso, reconhecendo esse processo ainda durante o curso, já que a disciplina de argumentação matemática, oferecida no início do curso de graduação, trabalhou tais conceitos.

Possuindo essa base, o docente entende que argumentar matematicamente é utilizar conhecimentos já adquiridos, dados e deduções feitas em um campo lógico (processo dedutivo) com veracidade para a resolução de um problema. O que P9 entende por argumentação matemática se assemelha ao que Savioli e Silva (2016) entendem por prova matemática, além de entender também que o processo argumentativo é utilizado na resolução de problemas, como também defende Balacheff (2022). Já em relação à prova, P9 entende como o ato de validar algo de forma lógica e/ou utilizando o processo dedutivo, de modo que essa validação não seja refutada – o que também se aproxima da visão de Balacheff (2022) a respeito da argumentação que se torna prova.

Embora sua fala a respeito das provas também traga elementos em comum com o que Nasser e Tinoco (2003) propõem, P9 não deixa explícito em sua fala que entende a prova como um *objeto* que tem a função de validar, mas como uma *parte* – a parte final – de um processo de validação. Como suas concepções a respeito dos dois conceitos se assemelham, entendemos que P9 considera a argumentação e a prova como parte do mesmo processo – mesmo que ele não tenha tecido nenhum comentário a respeito dessa relação. No ambiente de sala de aula, o professor participante vê a prova matemática – e aqui também cita as demonstrações, mas como parte da prova – como algo de extrema importância, pois mostra de onde determinados conceitos (teoremas ou fórmulas) surgem, além de instigar a curiosidade dos estudantes.

As demonstrações citadas por P9 são entendidas por ele como parte integrante do processo de prova, uma parte em que a prova se torna formal e rigorosa e que ele julga ser importante que os estudantes do ensino básico sejam apresentados a essa formalidade. Em outros momentos da entrevista, P9 cita novamente as demonstrações, dizendo lembrar-se de trabalhar esses processos (de provas e demonstrações) em sua graduação, destacando seu caráter de abstração.

Com isso, fica mais evidente que ele entende a demonstração como parte da prova, os dois estão interligados – mas não são exatamente sinônimos. Precisamos, portanto, tentar compreender o que são as demonstrações, para P9. Não é explicado diretamente e nem dito com clareza a diferença entre os dois processos (ou conceitos) durante a entrevista. O que temos são falas em que P9 cita a demonstração como um processo de formalização e abstração, algo que parece ser a estruturação dos argumentos – a prova cumprindo sua função de estruturação e até comunicação (De Villiers, 1990).

Sob essa perspectiva, as provas e demonstrações, como conjunto, também se assemelham à definição de provas feita por Savioli e Silva (2016), que apresentam a ideia de ser algo mais estruturado e formal, além de ter a função de comunicar. Por outro lado, se fizermos o esforço de “isolar” aqui a demonstração, portanto, a parte formal do processo, podemos notar que também se aproxima do que Balacheff (2022) entende como demonstração – e apenas podemos dizer que se aproxima, já que P9 não detalha o que entende por esse conceito isolado, pois o entende como parte da prova.

Esse aspecto formal e rigoroso apresentado foi um dos pontos de dificuldade de P9 na graduação. Não só dele, mas de outros licenciandos, sendo objeto de discussão entre os professores da instituição – o que fez com que algumas disciplinas fossem criadas e oferecidas nos primeiros períodos da grade curricular, como a de argumentação matemática. Tal dificuldade não é exclusiva do curso de graduação, ocorrendo também no ensino básico, o que podemos, talvez, entender como causa e consequência – hipótese similar à que Caldato (2018) levanta em sua pesquisa. Especificamente nesse caso, P9 relata dificuldades em seu ambiente escolar, já que, assim como P6, trabalha com alunos muito humildes e grande parte deles vai à escola quase que exclusivamente para se alimentar. Além disso, há também o problema das salas de aula lotadas, a disputa com os *smartphones* e a falta de recursos da escola e de seus próprios alunos.

Esses empecilhos fazem com que P9 não consiga trabalhar determinados conceitos como gostaria, já que precisa reduzir o ritmo das aulas e suprir necessidades e defasagens no aprendizado de seus alunos referentes aos anos anteriores – ainda que considere ter tempo suficiente para exercer suas práticas. Como saída para contornar o desinteresse (que acontece por diversas razões), o docente procura sempre levar situações problema em que são utilizados aspectos cotidianos dos estudantes, como propõe Freire (1968). Ainda assim, cada indivíduo na sala de aula possui suas próprias vivências e experiências, assim como cada um percebe e compreende a realidade, o que inclui os conteúdos abordados, à sua própria maneira, o que faz com que o método escolhido não seja garantia de sucesso (Silveira, 2015).

Dessa forma, o estímulo inicial ao desenvolvimento da habilidade de argumentar que P9 faz em sala de aula é com a resolução de problemas, algo que o professor alega ser muito frequente (resposta dada ao formulário da etapa

4). Mais especificamente, instigando seus alunos a interpretarem e resolverem problemas, desenvolvendo seus próprios textos e justificativas, similar ao que P8 propõe. A prioridade de P9 é fazer com que seus alunos se vejam nas situações problemas e se sintam estimulados a participar e responder o que é solicitado. No processo, o professor espera que “eles consigam enxergar as possíveis formas de chegar na solução e descrevam o passo a passo e argumentem aquilo que foi utilizado em cada etapa para chegar ao resultado final” (P9), corroborando com as propostas de Nasser e Tinoco (2003) e da BNCC (Brasil, 2018).

Além das dificuldades já apontadas, o modelo de prova proposto à escola (que não é feita pelos professores, chega pronta à escola) tem questões exclusivamente de múltipla escolha, não permitindo que os alunos expressem seus pensamentos e possam praticar sua argumentação. Por isso, assim como P5, P9 precisa adaptar suas aulas aos exames/provas, enquanto também tenta, dentro de suas possibilidades, proporcionar aulas que estimulem a criatividade de seus estudantes – incluindo na argumentação matemática. Por conta desses fatores, o professor não trabalha argumentação e provas em sala de aula como propõem os documentos oficiais e o referencial teórico, embora ele entenda sua importância.

Para ser mais específico, propus um exemplo durante a entrevista: como trabalhar a soma das medidas dos ângulos internos de um polígono, incluindo a relação entre número de lados e essa soma, em sala de aula? Em resposta, P9 diz trabalhar apresentando os argumentos à turma, mas de forma interativa, todos podem participar. Essa apresentação é feita muitas vezes com materiais concretos (como nesse exemplo dado), havendo, portanto, o auxílio visual na construção da prova, como propõem Nelsen (1993), em relação às provas visuais, e Arcavi (2005). Esses recursos também são utilizados porque P9 entende que muitos estudantes chegam ao fim do Ensino Médio sem compreenderem como usar argumentos lógicos, sem compreenderem a necessidade de argumentar.

Segundo o docente, esse processo é muito abstrato para os estudantes, é algo “surreal” para eles, portanto sua prática é também um meio de facilitar a compreensão, auxiliar na visualização dos processos e até mesmo de, em algum momento, auxiliar no letramento matemático dos alunos. A observação do professor em relação a essa última dificuldade dos seus alunos vai ao encontro do que Hoyles (1997) aponta em relação à falta de sentido do processo dedutivo e da abstração para os alunos. Esses processos ocorrem para que os estudantes não apenas memorizem fórmulas e relações, mas compreendam as etapas que levam a ela.

Da mesma forma que demais professores participantes, P9 também considera diferentes tipos de argumentos apresentados por seus alunos. Sua justificativa é que ele entende o lugar do estudante, que, lembremos, possui algumas adversidades em seu processo de aprendizado, e tenta ver as coisas sobre sua perspectiva. Assim, seja apresentado por um texto, uma imagem, ou mesmo oralmente, o argumento é avaliado e validado se corresponder ao que é proposto corretamente. As respostas “secas”, sem desenvolvimento, são aceitas, mas não com a mesma relevância que uma em que os alunos se expressam – no caso das avaliações de múltipla escolha, são completamente aceitas.

É possível observar que, de fato, P9 não vê a formalidade na construção e organização dos argumentos como prioridade, prevalecendo a importância dada à linha de raciocínio em si. Isso porque algumas respostas corrigidas por ele na etapa 3 mostram sua sensibilidade em avaliar o que foi apresentado em vez de como foi apresentado. Entretanto, isso não significa que qualquer resposta é validada ou pontuada com notas altas – precisamos lembrar novamente sobre os diferentes pontos de vista de cada um dos participantes e que os aspectos que cada um julga relevante se diferenciam de um para o outro.

Por exemplo, na primeira resposta da primeira questão, o docente entende que apenas a resposta final (os ângulos destacados formam, juntos, um ângulo de 180°) está correta, mas a justificativa é inválida, atribuindo nota 2. Isso por conta do termo utilizado pelo estudante, como demais professores também destacam. Ainda assim, as marcações dos ângulos feitas na imagem da questão não são comentadas, podendo indicar que o professor as considera irrelevantes para a resposta dada – levando em conta sua afirmação de que aceita argumentos informais e pictóricos.

Assim como P4, P9 comenta, na segunda resposta da primeira questão, que o estudante parece apenas citar os nomes das relações entre ângulos aleatoriamente, sem destacá-las, ou mesmo mostrar onde e como ocorrem. Ainda que tenha essa percepção, atribui nota 0,5, talvez pelo reconhecimento dos nomes das relações. Em contrapartida, na última resposta dessa questão, à qual pontua com nota máxima, o docente entende que o estudante não só compreende o conceito envolvido na questão, mas mostra o que é solicitado, mesmo que não tenha argumentado formalmente. O fato de a resposta não trazer uma construção argumentativa formal gerou apenas um comentário, sem qualquer alteração na pontuação dada, mostrando que, para P9, o importante foi a resposta, não como ela foi construída.

Também podemos destacar que P9, da mesma forma que P4 e P8, entende que o estudante utilizou seus conhecimentos sobre ângulos opostos pelo vértice – algo que aqui é comentado pelo docente – e relacionou com a soma das medidas dos ângulos internos do triângulo. Mesmo que o aluno não tenha deixado claro quais recursos utilizou, isso fica implícito em sua resolução e os professores participantes entendem que não seria possível chegar a essa resposta relacionando os ângulos marcados com os do triângulo sem ter se utilizado de tais conceitos.

Na primeira resposta dada à segunda questão, que recebe nota 1, o professor participante entende que houve a utilização de apenas um exemplo, algo que o enunciado já faz, para afirmar que a propriedade é válida. Para ele, o que está correto é o "sim" que confirma a propriedade, enquanto o exemplo dado nada comprova, é apenas mais um exemplo. Diferente de P8, que entende que a utilização de mais exemplos poderia contribuir para a suspeita da regularidade e, portanto, seria um incentivo para a construção da prova, P9 não tece comentários nesse sentido – e em ambos os casos os professores consideram a resposta dada insuficiente, mas apresentando diferentes justificativas. Assim como P7, P9 não comenta a afirmação de que sempre há um múltiplo de 3 nesse tipo de sequência.

Casos particulares não confirmam uma regularidade, nem podem ser utilizados como prova para uma propriedade, de fato. Porém, procedimentos empíricos podem ser o passo inicial para a percepção de um padrão/regularidade, levando à necessidade de realizar a prova (De Villiers, 1990). Além disso, se levarmos em conta as propostas de Balacheff (1988), esses procedimentos podem ser considerados como prova por alguns estudantes, considerando que o que é considerado prova depende da comunidade ali envolvida e de quem aceita os argumentos como suficientes (Tall, 1995). Com isso, embora a resposta de fato não apresente diversos casos para tal comprovação, é possível que P9 não tenha considerado essa possibilidade, já que há apenas 3 casos expostos (o da resposta e os presentes no enunciado) e não houve quaisquer comentários sobre a utilização de outros exemplos, como fez P8.

O caso da tentativa de utilizar de um contraexemplo (segunda resposta da segunda questão) recebeu nota zero, sob alegação de que a resposta final está errada por conta de uma justificativa errada. Como em outros casos, aqui, a estratégia de utilizar um contraexemplo não foi pontuada, já que o exemplo dado não é de três números consecutivos. Já a última resposta é avaliada com nota máxima. Para P9, a resposta dada se assemelha ao método indutivo – logo, também similar ao exemplo genérico e à experiência mental (Balacheff, 1988). Para o professor, essa resposta mostra que o estudante teria conhecimento sobre sequências numéricas, além de ter recursos suficientes para chegar a "conclusões interessantes", já que, na série em que essa atividade foi proposta, o método indutivo ainda não teria sido apresentado.

Entendemos que o professor "P9" mostra compreender os conceitos abordados, havendo proximidade entre o que ele entende por argumentação e provas matemáticas e o que é proposto pelo referencial teórico. A forma como alega desenvolver suas aulas nesse sentido e estimular a habilidade de argumentar matematicamente de seus alunos também é condizente com as propostas dos teóricos e dos documentos oficiais, embora haja algumas dificuldades para que isso ocorra. Essas dificuldades vão desde a estrutura escolar à situação socioeconômica dos alunos, de modo que P9 precisa se sensibilizar às defasagens de suas turmas e às dificuldades enfrentadas por seus alunos – o que não o impede de adaptar suas aulas, incluindo o trabalho com argumentação matemática.

Seu discurso acerca da validação do que os alunos apresentam como argumentos é similar ao dos demais professores participantes, porém, como já citado anteriormente, o que os diferencia é sua perspectiva, é o que consideram importante a ponto de ser analisado para avaliação e possível validação. Assim, alguns elementos não são comentados por P9 e, portanto, não contribuem para a avaliação da resposta, o que não significa que o docente invalide tais elementos, apenas considera outros mais relevantes para compor sua avaliação. Sob essa perspectiva, ele está, de fato, levando em conta as respostas apresentadas e analisando seu conteúdo, independente do recurso utilizado pelos alunos.

Sua prática, que esbarra em dificuldades em seu ambiente de ensino, busca conciliar a teoria da argumentação matemática com as realidades de seu contexto pedagógico, ajustando suas abordagens para ser mais eficaz no ensino, mesmo diante das limitações estruturais e contextuais.

3.5.10 Participante P10

O último dos professores participantes iniciou sua formação no curso de Bacharelado em Matemática em uma instituição federal e posteriormente cursou licenciatura na rede privada, concluindo em 2019. Logo após a conclusão de sua graduação, cursou especialização em Metodologia de Ensino de Matemática. Atua como professor da rede privada de ensino há aproximadamente 9 anos, e há aproximadamente 5 anos na rede pública.

Seguindo o padrão dos demais professores participantes, P10 não cursou nenhuma disciplina voltada para argumentação matemática em sua graduação (licenciatura e bacharelado), nem durante a especialização. Reconhece que, embora não fosse objeto de estudo, foi apresentado e trabalhou a construção de provas nas disciplinas de Análise Real e Álgebra, algo que considerou com insuficiente, “corrido”. Assim, trabalhava a construção de argumentos apenas para provar teoremas, porque era previsto na ementa dessas disciplinas, mas não houve qualquer discussão mais profunda sobre como argumentar matematicamente. Por conta dessa falta, sentiu a necessidade de aprimorar essas habilidades e cursou a disciplina de Lógica, oferecida na grade do curso de Filosofia – e que nada teve com a lógica matemática.

Ainda que não tenha tido contato formal com estudos nessa área, P10 entende que a argumentação matemática “são as sequências de raciocínios utilizando axiomas e postulados e todos esses ‘tijolos’, que, por fim, desencadeiam em uma prova matemática” (P10). Seu entendimento sobre esse conceito é muito similar à definição que Savioli e Silva (2016) apresentam para as provas matemáticas, já que também trazem a ideia de uma construção lógica com a utilização de axiomas. Comparando essa definição com o que Nasser e Tinoco (2003) e Balacheff (2022) entendem por argumentação matemática, podemos dizer que a definição de prova apresentada por Savioli e Silva (2016) contempla também o processo argumentativo. O professor P10 entende, portanto, a prova como a etapa final da argumentação – quando a argumentação é validada e ganha status de prova matemática (Balacheff, 2022).

Para ele, a prova matemática tem como função estabelecer algo que generalize um caso e que não pode ser contradito ou desmentido. Cabe lembrar que uma prova é considerada como tal quando aceita por uma comunidade, como apontam Hanna (1990), Tall (1995) e Balacheff (2022), que também apresenta esse ponto de vista ao propor sua tipologia de provas em 1988. Apesar disso, o discurso de P10 traz a ideia de prova como uma verdade que não se questiona, que seja válida para todos, que é o que se busca fazer ao seguir um padrão coletivo de escrita e rigidez, como nas demonstrações matemáticas (Balacheff, 2022). Apesar de entender a prova como algo rígido e inquestionável, o docente também compreende que seus estudantes irão apresentar argumentos que são válidos e suficientes para eles mesmos, ou seja, argumentos que, no nível cognitivo de seus estudantes, são provas.

Para que seus alunos desenvolvam habilidades argumentativas em sala de aula, P10 costuma trabalhar com atividades exploratórias utilizando materiais concretos/lúdicos – com apoio visual. Ainda assim, esses recursos não são utilizados para o processo e composição da prova em si, mas para servir como apoio visual no momento da exploração. Nesse processo, o professor guia seus estudantes com perguntas chave, de modo que eles precisem encontrar meios de visualizar possíveis caminhos para responder o que é solicitado. Ainda que o apoio visual, como aponta Arcavi (2005), seja de extrema importância e que essa atividade em grupo seja importante para o desenvolvimento das habilidades em argumentação dos alunos (Nasser e Tinoco, 2003), o professor participante destaca que tal metodologia é adotada quase exclusivamente nas aulas em que trabalha conceitos de geometria.

Embora entenda a necessidade de esse tipo de trabalho ser realizado em todos os temas trabalhados em sala de aula, P10 alega ter dificuldades em desenvolver tais atividades nas aulas em que trabalha álgebra. Segundo ele, são assuntos que trazem uma abstração pouco compreendida pelos alunos e que ele não consegue contextualizar e/ou levar aplicações como faz em geometria. Além de tudo isso, existe outro problema: o tempo reduzido em sala de aula. O tempo que atua em cada turma não é considerado suficiente para desenvolver suas atividades como gostaria, já que precisa seguir o currículo dentro de um cronograma, embora tente se adaptar a isso.

Não é impossível desenvolver atividades algébricas que trabalhem a argumentação matemática em sala de aula. Temos alguns exemplos apresentados no trabalho intitulado "*Teachers' conceptions of proof in the context of secondary school mathematics*", de Kunth (2002), além de diversas questões comentadas no livro "Argumentação e provas no ensino de matemática" de Nasser e Tinoco (2003), ou mesmo questões como a que utilizamos nesta pesquisa, envolvendo um padrão de soma. O ponto aqui é que P10 não vê seus alunos interessados ou motivados o suficiente para aderirem a práticas/dinâmicas que não envolvam o lúdico e, como já apontado, esse tipo de trabalho é mais desenvolvido por ele ao abordar assuntos em geometria, pois não vê as mesmas possibilidades em álgebra.

Quando questionado sobre o que entende por argumentação matemática, P10 apresenta falas que remetem a um processo formal, algo estruturado, que se utiliza de axiomas, uma construção lógica. Apesar disso, também compreende que seus alunos não apresentarão essa desenvoltura ao argumentar matematicamente e entende que deve aceitar construções argumentativas mais informais por parte de seus estudantes. Isso inclui respostas textuais pouco organizadas, ou mesmo desenhos, como foi feito em uma das questões propostas na etapa 1 desta pesquisa.

É interessante observarmos que o docente não cita um desenvolvimento gradual das habilidades argumentativas de seus alunos quando fala sobre a forma como os estimula – como sugerem a BNCC (Brasil, 2018), Tall (1995) e Nasser e Tinoco (2003) –, mas mostra compreender que eles não irão desenvolver argumentos rebuscados e rigorosos. Justamente por ter essa compreensão, alega relevar argumentos ingênuos e pouco rigorosos, avaliando e validando quando estão corretos e pedindo auxílio dos próprios estudantes em alguns casos, solicitando esclarecimento verbal. Assim, vemos que há a percepção, por parte de P10, de que os estudantes estão em desenvolvimento e precisam de tempo para tal e que precisa haver compreensão de sua parte para avaliá-los.

A correção das atividades (etapa 3) feita por P10 não mostra com clareza a forma como diz validar respostas dadas por seus estudantes. Não apontamos aqui uma contradição, mas talvez a necessidade de obtermos algumas informações adicionais para estabelecer essa conexão – entre sua correção e a forma como alega lidar com a validação das respostas. Por exemplo, na primeira resposta da primeira questão, aponta, como a maioria dos professores participantes, a utilização da palavra “complementam”, corrigindo a resposta nesse sentido. Aqui, P10 completa que “a relação dos três é uma relação de suplementação, a soma dos ângulos é igual 180°” (P10), embora o estudante tenha também dito que a soma das medidas é igual a 180°. Além da correção do termo, afirma haver, de fato, uma relação entre os ângulos, sem citar qual. A essa resposta o professor atribui nota 3.

Já na segunda resposta, o docente atribui nota máxima, justificando que o estudante compreende perfeitamente as relações entre os ângulos destacados. Sua correção vai no sentido oposto ao das correções feitas pela maioria dos outros professores participantes, que entendem não haver conhecimento do estudante sobre o que é solicitado. Poderíamos entender que existe a possibilidade de o estudante ter percebido todas essas relações e ter citado seus nomes, entretanto, não houve qualquer marcação que as destacasse, já que todos os ângulos possíveis foram marcados, o que leva a crer, que, de fato, os nomes foram ditos a esmo – como destacam alguns dos docentes. Ainda assim, P10 entende que o estudante percebeu essas relações (que, de fato, existem) e valida sua resposta.

Em relação à terceira resposta, o docente, assim como P4, P5, P8 e P9, considera que o estudante só pode responder corretamente como fez se entender a relação de congruência entre os ângulos opostos pelo vértice e que esses ângulos, agora na região interna do triângulo, somam 180°. Portanto, mesmo sem uma construção formal e apenas com a utilização do apoio visual – prática adotada por P10 em suas aulas – o docente valida a resposta como correta e também atribui nota máxima. Nesse caso, vemos não só a aceitação como a validação do argumento utilizado, que não é construído em uma estrutura complexa, tampouco formal.

A ideia da argumentação formal exposta por P10 aparece nas correções da segunda questão. Não apenas isso, sua percepção de que a álgebra traz elementos mais formais e abstratos que a geometria também aparece em seus comentários. Na primeira resposta, por exemplo, o docente pontua com nota 1 porque o aluno não consegue perceber o processo envolvido (o padrão apresentado) na questão. Em seguida, apresenta uma possível resposta, que talvez possa ser uma sugestão, com uma formalidade que talvez não seja o comum para um estudante de 9º ano: “seja x ϵ Z, então ∀ x ϵ Z, teremos x – 1, x, x + 1, (x – 1) + (x) + (x+ 1) = 3x, que é número divisível por 3” (P10). Embora essa seja, de fato, uma resposta formal para a questão – utilizando, inclusive, a linguagem algébrica para generalizar –, até então, não fica claro se esse tipo de desenvolvimento é o que o docente esperaria para essa resposta. O que percebemos é que, de fato, existe a tendência de ver conteúdos algébricos como mais formais.

Essa dúvida é sanada na correção da última resposta, quando P10 valida a solução apresentada, mesmo que ela não se utilize da linguagem algébrica para tal. Os desenhos feitos, aliados ao texto explicativo, são suficientes para que o professor participante atribua nota máxima, já que, para ele, a explicação foi perfeita. Ainda assim, o docente explica novamente a resolução da questão da mesma forma como fez na primeira resposta, como se traduzisse para a linguagem algébrica – reforçando seu ponto de vista a respeito da formalidade da álgebra. Já a segunda resposta da segunda questão recebeu nota zero porque o contraexemplo apresentado não trazia números consecutivos.

É possível perceber, com isso, que o professor P10 entende a argumentação e a prova matemáticas de maneira similar à que apresentamos no referencial teórico, porém tendendo a compreendê-las como algo formal. Por outro lado, a forma como diz estimular suas turmas se assemelha ao que outros professores participantes também apresentaram, apesar de aqui não explicitar mais características que se alinhem ao que propõem Tall (1995) e Nasser e Tinoco (2003) – principalmente no que diz respeito ao acompanhamento desse desenvolvimento. Ainda assim, tem total compreensão de que seus alunos ainda estão em fase de desenvolvimento dessas habilidades e precisa, por conta disso, validar respostas que trazem uma argumentação mais elementar, ingênua. Em outras palavras, compreende que seus alunos não apresentaram estruturas argumentativas bem estruturadas, rigorosas e formais e que precisa aceitar a forma como apresentam seus argumentos.

4. Conclusões

Este trabalho teve como objetivo geral entender como os professores participantes da pesquisa compreendem, avaliam e validam a argumentação matemática em sala de aula, sendo os específicos (i) compreender o que os participantes da pesquisa entendem como argumentação e provas matemáticas; (ii) verificar como os participantes da pesquisa avaliam argumentos apresentados por estudantes em suas respostas dadas em uma atividade contendo questões que exigem argumentação; (iii) analisar as semelhanças e divergências entre a visão dos professores acerca da argumentação matemática e a forma como lidam, na prática, com diferentes tipos de argumentos. Para alcançar tais objetivos, estruturamos a pesquisa nas seis etapas descritas ao longo do texto.

Estabelecemos, na introdução desta dissertação, os parâmetros que utilizamos para os conceitos de argumentação e provas matemáticas. Embora os referenciais utilizados não definam ou apresentem tais conceitos da mesma forma, observamos que há fortes pontos de convergência. Assim, sintetizando as ideias apresentadas por Balacheff (1988, 2022), Hanna (1990), Tall (1995), Nasser e Tinoco (2003) e Savioli e Silva (2016), entendemos que a argumentação é o processo em que se apresentam ideias convincentes (os argumentos) visando a validação, o convencimento. Já a prova matemática é o que se constrói com argumentos e que, de fato, valida o que se defende. Assim, ambos os conceitos são partes do mesmo processo, sendo a prova a “ponta” final.

Tendo essa referência demarcada, trouxemos outro ponto essencial para esta pesquisa: já que a prova matemática é o que estabelece a validade de algo, quem determina quando uma construção argumentativa se torna prova? Consideramos de suma importância evidenciar essa discussão, já que aqui lidamos com professores do ensino básico e suas concepções a respeito do conceito “prova matemática”, que podem não ser as mesmas de seus estudantes. Nesse caso, o que é considerado válido? Conforme apontado por Tall (1995), esse conceito pode variar de acordo com o contexto social e histórico em que está inserido, enquanto Hanna (1990) e Balacheff (2022) entendem que uma argumentação se torna prova quando é aceita como tal pelos indivíduos envolvidos no processo.

A tipologia de provas proposta por Balacheff (1988) corrobora com esses pensamentos, já que um processo empírico, para o autor, pode ser considerado como uma prova válida por um estudante com nível cognitivo mais baixo – um estudante das séries iniciais, por exemplo. Podemos pensar que essa validação, daquilo que será considerado como prova, pode ser estabelecido por um tipo de contrato didático entre as partes (professor e turma). Além disso, cabe aos docentes compreender que seus estudantes não possuem maturidade suficiente para elaborar provas rigorosas na linguagem matemática.

Ter essa compreensão não significa permitir que os estudantes sigam trabalhando com argumentos informais e com processos empíricos, utilizando alguns casos particulares como regra. Apresentamos aqui as propostas de Nasser e Tinoco (2003) para que a habilidade de argumentar seja desenvolvida ao longo dos anos escolares, sempre havendo o cuidado de compreender as dificuldades dos estudantes e respeitando seu tempo de aprendizado (Tall, 1980). Ainda em relação ao desenvolvimento dos estudantes, temos a BNCC (Brasil, 2018) e os PCN (1997) apresentando orientações e diretrizes para o ensino em argumentação, apontando a necessidade e a importância do trabalho gradual desde as séries iniciais.

Com essa base bem estruturada, buscamos responder à pergunta da pesquisa: Como professores do Ensino Básico avaliam e validam a argumentação matemática de alunos do 9º ano do Ensino Fundamental e 1º ano do Ensino Médio e como suas concepções interferem em sua avaliação? Baseado nos resultados obtidos na pesquisa de Aguilar-Júnior (2012) e Caldato (2018), levantamos a hipótese de que os professores não sejam tão abertos a validar argumentos informais dos alunos, preferindo os que tendem ao formalismo – algo que pode ser incomum para alunos do 9º ano do Ensino Fundamental.

Para responder a essa pergunta, é preciso compreender o que os professores em questão entendem como argumentação e provas matemáticas. As concepções dos professores participantes a respeito desses conceitos, assim como as formas de estímulo, avaliação e a viabilidade do trabalho com argumentação e provas em sala de aula foram sintetizadas em um quadro, exposto no apêndice P. Dentre os dez docentes entrevistados, dois, P1 e P6, parecem não entender o que é argumentação matemática, apresentando ideias muito distantes do que os teóricos apontam como tal. Para P1, argumentar tem a ver com expor opiniões a respeito da matemática e do que se aprende em sala de aula, enquanto P6 entende que é um meio de facilitar o aprendizado, algo como “traduzir” a matemática em sala de aula.

Outros dois participantes apresentam uma definição próxima do que expusemos na introdução desta dissertação: P3 pensa na argumentação matemática como uma ferramenta para justificar resoluções de problemas, além de provar teoremas. O professor P9 também cita a resolução de problemas como objetivo da argumentação matemática, mas entende que passa pelo processo dedutivo, que é uma construção lógica com critérios de verdade, sendo essa fala muito similar ao que Savioli e Silva apresentam como prova matemática (2016). De fato, a questão da solução de problemas é trazida por Balacheff (2002), que afirma que a argumentação matemática é orientada para a resolução de problemas. Além disso, A BNCC (Brasil, 2018) prevê o trabalho com a validação de resultados obtidos em problemas, além da orientação às justificativas em resolução de problemas – como também orientam Nasser e Tinoco (2003).

Apesar de o trabalho com a resolução de problemas ser prevista pela BNCC e por trabalhos de outros pesquisadores, a questão da validação e do convencimento é intrínseca ao processo argumentativo, que irá terminar na prova matemática. Em relação a esse aspecto, ressaltamos que P3 também cita a questão da prova, mas é pontual. As suas falas, em geral, são mais direcionadas à resolução de problemas. Ainda assim, de forma indireta, apresenta a ideia de que a prova matemática está ligada à argumentação, pois é parte desse processo, é seu produto final. Já no caso de P9, a questão da validação aparece quando se fala da prova, que, para ele, é a validação de algo com a utilização de lógica e/ou do processo dedutivo, tornando a afirmação (ou o que for validado) algo irrefutável.

Demais professores, P2, P4, P5, P7, P8 e P10, compreendem bem o conceito de argumentação matemática, apresentando falas que se diferenciam em suas construções, mas que seguem a mesma linha: argumentação é um processo em que se quer validar algo com a utilização de argumentos, da lógica.

Já a prova matemática é a parte final do processo argumentativo, ou mesmo seu produto – um objeto construído a partir da argumentação –, que valida algo. É a partir da aceitação dos argumentos que eles se tornam uma prova, como aponta Balacheff (2022) e Nasser e Tinoco (2022). A questão da aceitação dos argumentos, especificamente da validade de uma prova, é levantada por Balacheff (1988), Hanna (1990) e Tall (1995), que compreendem essa validação como algo a ser aceito socialmente, dependendo dos sujeitos envolvidos no processo – algo que aqui é citado apenas por P2 e P8, que estabelecem com suas turmas o que será ou não considerado como prova.

Destacamos que P5 e P10 apresentam alguns aspectos em suas falas que remetem a questões mais formais da prova. P5 define a prova como uma construção formal e sistemática, que conduz à demonstração matemática – algo consideravelmente similar ao que Balacheff (2022) entende como demonstração. Já o professor P10 apresenta falas que remetem a esse rigor quando define argumentação, defendendo que é um processo lógico em que se usa axiomas e postulados e que desencadeará em uma prova. Assim, dos seis professores que mais se aproximam dos conceitos propostos no referencial teórico, quatro apresentam foco na validação e no processo que leva a ela, enquanto dois, além dessas ideias, trazem a questão do rigor, da estruturação formal do que virá a ser uma prova.

Concluímos aqui que seis dos dez professores participantes compreendem bem os conceitos de argumentação matemática e prova matemática, enquanto dois mostraram não ter conhecimentos a respeito e dois parecem compreender parcialmente, apresentando falas próximas às propostas dos teóricos. Com isso, podemos entender como ocorrem o estímulo à argumentação e a validação desses argumentos em sala de aula – levando em conta o que cada docente entende por esses termos.

Quanto ao trabalho em sala de aula, especificamente a forma como esses docentes estimulam seus alunos a argumentar, temos dados mais diversificados. Isso ocorre porque, além de possuírem diferentes perspectivas, opiniões e concepções a respeito de como trabalhar em sala de aula, uma parte dos professores participantes entendem as particularidades de suas turmas e buscam desenvolver seu trabalho focado nessas particularidades. Ainda assim, seis participantes, P2, P4, P5, P7, P8 e P9, entendem que solicitar justificativas em resoluções de problemas é um caminho viável para que seus alunos se habituem a argumentar para defender seu ponto de vista, conforme sugerido por Hoyles (1997), Nasser e Tinoco (2003) e orientado pela BNCC (Brasil, 2018).

Mesmo que esse incentivo à justificativa seja um ponto comum a esses seis docentes, há outras práticas que os diferenciam. Os professores P4, P7 e P8 também entendem que apresentar o processo de prova para seus alunos é algo importante, para que observem como podem vir a estruturar seus argumentos. Especificamente P4 alega trabalhar as construções dos conceitos, para que seus estudantes não precisem decorar relações e fórmulas, mas que possam compreender os caminhos para sua formação – portanto, os argumentos utilizados para chegar à generalização. Já P8, além do incentivo às justificativas e da exposição, desenvolve seu trabalho focado na resolução de problemas, o que, segundo Balacheff (2022), é intimamente ligado à argumentação matemática.

Destacamos que, desses seis docentes, apenas um, P8, considera possuir condições favoráveis para desenvolver seu trabalho como deseja. Os outros cinco, embora apresentem métodos que seguem conforme as propostas dos teóricos e orientações dos documentos oficiais, alegam estar em situações desfavoráveis, tornando seu trabalho inviável ou parcialmente viável. O empecilho mais comum apontado é a falta de tempo em sala de aula para desenvolver seu trabalho como desejado. Cabe também fazer outro apontamento: os seis professores que optam por trabalhar com o incentivo à justificativa coincidem quase completamente com os seis professores que entendem os conceitos de argumentação e provas matemáticas como são apresentados pelos teóricos aqui referenciados. A diferença entre os dois grupos (de seis) está em P10 e P9 – enquanto o primeiro define bem os conceitos, o segundo apresenta métodos mais próximos das propostas e orientações apresentadas.

Os professores P1, P3, P5 (além das justificativas) e P10 optam por trabalhar com materiais concretos, que auxiliam na visualização dos conceitos trabalhados. No caso de P1, esse foi o único método de estímulo informado, enquanto os demais apresentam outras possibilidades. P3 também trabalha com exposição após o trabalho exploratório, fazendo a conexão entre o que é observado com os materiais concretos e a escrita, enquanto P10 alega utilizar esse recurso apenas para assuntos relacionados à geometria. Para ele, trabalhar conceitos algébricos que lidam com a generalização é algo complicado por duas razões: a primeira é que seus alunos apresentam dificuldades com a questão da generalização, é algo que não compreendem por não ter sentido – o que já era destacado por Hoyles (1997). A segunda é por não enxergar muitas possibilidades de uso de material concreto no trabalho com álgebra.

Temos, portanto, um grupo de sete entre os dez professores participantes (P2, P4, P5, P7, P8, P9 e P10) que compreende bem os conceitos abordados, além de apresentar métodos de estímulo conforme as orientações dos teóricos e documentos oficiais – embora também tenhamos a "troca" de P9 por P10 de um caso para outro. Desses sete professores, apenas três (P7, P8 e P9) estudaram argumentação matemática formalmente, enquanto P5 teve um breve contato com esse campo e os demais apenas reconheceram trabalhar com o processo argumentativo em suas graduações, com a finalidade de provar teoremas.

Em relação aos argumentos que validam, ou seja, ao que aceitam como argumentos ou estruturas argumentativas válidas, tivemos respostas mais homogêneas durante a entrevista: todos, sem exceção, dizem aceitar e validar quaisquer tipos de argumentos apresentados em respostas e resoluções de problemas de seus estudantes, desde que estejam coerentes com o que é proposto. Os professores P1 e P10 aceitam respostas sem desenvolvimento – portanto, respostas apenas com resultado final, sem qualquer justificativa para tal –, enquanto P4 e P9 aceitam parcialmente esse tipo de resposta, reduzindo a pontuação em caso de uma avaliação formal/somativa.

O participante P6 alega não aceitar casos em que apenas a resposta final é apresentada, porém entende como válida qualquer construção apresentada por seus estudantes, mesmo que seja copiada de alguma fonte. Sua justificativa está nas dificuldades socioeconômicas de seus estudantes – o docente entende que seus alunos não apresentam condições, dados os aspectos socioeconômicos e a estrutura escolar – de desenvolver respostas mais estruturadas. Com isso, permite que consultem e até mesmo copiem dados e respostas de outras fontes, considerando que essa prática pode ser benéfica, já que haverá uma pesquisa, mesmo que superficial, sendo feita.

O caso de P8 é particular, pois adota um posicionamento diferente dos demais. A aceitação acima referenciada acontece nos casos em que não há a possibilidade de troca com os estudantes (como na correção da etapa 3 desta pesquisa). Fora dessas situações, o docente adota a postura de permitir que sua turma troque experiências e se autoavaliem, com objetivo de que possam, entre si, decidir o que será ou não considerado como prova, quais argumentos parecem mais convincentes e como estruturar suas respostas. É similar à prática proposta por Hoyles (1997), em que os estudantes devem se habituar a convencer a si mesmos antes de tudo, além da convenção do que é considerado como prova, como apontado por Tall (1995) e Balacheff (2022).

Levando em consideração apenas as respostas dadas nas entrevistas, portanto, o discurso, entendemos que existe a preocupação desse grupo de docentes em validar não só os argumentos, mas os pensamentos e mesmo as formas de se expressar de seus alunos – o que pode ser um reforço positivo em seu desenvolvimento. Especificamente em relação ao desenvolvimento da habilidade de argumentar – e aqui, precisamos lembrar dos docentes que não compreendem o que é argumentar matematicamente –, entendemos que existe a preocupação e a sensibilidade apontados por Tall (1980) e Nasser e Tinoco (2003) em relação ao desenvolvimento desses alunos.

Não só isso, a tipologia de provas proposta por Balacheff (1988) apresenta o “empirismo ingênuo”, portanto, uma verificação empírica, com a utilização de exemplos, como válida. Embora P4 tenha ressaltado que não entende exemplos como totalmente válidos, mas como um caminho para a validação, esses professores compreendem que argumentos ingênuos e informais apresentados – talvez como no caso do empirismo ingênuo – podem ser validados. Além disso, também são considerados como válidos os casos em que se apresentam desenhos (aqui, algo como as provas visuais) e textos na língua materna para construir uma prova.

Nesse quesito, percebemos que os dez professores, dentro do que entendem como argumentar matematicamente, de fato apresentam práticas alinhadas às propostas dos teóricos. Cabe destacar que não foram citados quaisquer tipos de provas apresentados no referencial teórico nas respostas dadas a essa pergunta, ou seja, não houve nada formal que referencie as tipologias e funções de prova apresentadas nesta pesquisa. Estamos focando na prática em si, visto que a maioria dos docentes em questão não teve qualquer contato com estudos sobre argumentação, mas ainda assim apresentam atributos que são previstos nas pesquisas desse campo.

Mais um aspecto a se considerar é a diferença entre as definições de provas (e argumentação) matemáticas e as falas a respeito de sua aceitação e validação: mesmo que alguns professores participantes entendam a argumentação matemática e/ou a prova matemática como processos construídos com certo rigor e formalismo, suas falas sobre avaliação e validação não seguem por esse caminho. Com isso, notamos que existe a percepção de que precisa haver um “ajuste”, ou uma flexibilização para lidar com estudantes do Ensino Fundamental, que não apresentarão tal rigor em suas respostas, justificativas e provas.

Por fim, as correções das atividades, a parte prática que se conecta à última pergunta da entrevista, também revela semelhanças entre os professores, com alguns detalhes que os diferenciam. Anteriormente, apontamos as diferenças entre as perspectivas desses docentes em relação ao que foi avaliado, aos elementos que receberam sua atenção para essa correção. Não fizemos juízo de valor em relação ao que foi escolhido para ser avaliado, portanto, não apontamos quais elementos julgamos mais ou menos importantes para comparar com o que os docentes analisaram.

Aqui, o objetivo foi observar como e se essas correções fazem jus às suas falas e, além disso, se estão de acordo com o que tomamos como guia/parâmetro no referencial teórico. Sob essa perspectiva, vimos que a maioria dos professores observa os argumentos utilizados e os leva em consideração na avaliação, com exceção de P1 e P6. No caso de P1, parece haver alguma prioridade em avaliar a resposta final, independente do que foi apresentado como justificativa, o que fica em segundo plano. Assim, faz sentido que respostas finais corretas sem desenvolvimento sejam aceitas pela docente, já que parece priorizar o resultado final. No caso de P6, todas as respostas receberam nota máxima, com a confirmação de que as respostas estavam corretas – inclusive as erradas. Entendemos que ou nenhum dos argumentos foi avaliado por ele, ou que ele não compreende os conceitos abordados nas questões, a ponto de considerar todas as respostas como corretas.

Já nos casos em que as justificativas foram vistas e avaliadas (nos casos de P2, P3, P4, P5, P7, P8, P9 e P10), há algumas diferenças, sem influenciar significativamente nos aspectos gerais. P7 parece avaliar as respostas como um todo, ou seja, parece fazer uma síntese das respostas em vez de verificar os elementos individualmente. O professor P4 apresenta feedbacks nas respostas, como se houvesse uma devolutiva ao estudante, e sente falta de maiores explicações (ou desenvolvimento) nas respostas. Os docentes P5 e P10 apresentam alguns traços que aparentam desejo por alguma formalidade maior nas respostas, mas isso não influencia nas notas dadas.

Na verdade, P5 é mais rigoroso nas correções e comenta, em alguns casos, que sente falta de demonstrações – o que aqui pode ser apenas uma explicação mais elaborada e não necessariamente uma estrutura formal e padronizada (Balacheff, 2022). Por outro lado, P10 apresenta construções algébricas nas respostas da questão 2 enquanto tece comentários, como se ele apresentasse alguma preferência por seguir esses caminhos – não que esperasse que os estudantes seguissem. Apesar desses dois casos, os docentes não apresentam a tendência de avaliar melhor respostas mais formais, o que também observamos em suas falas durante a entrevista.

Isso significa que, ao avaliar dessa forma, sem pontuar melhor os mais formais em relação aos informais, além de validar os argumentos ingênuos, os professores participantes mostram compreender que aquilo que foi apresentado é algo válido para esses alunos, portanto, estando correto, é considerado por eles (os alunos) como prova. Isso corrobora com a visão de Balacheff (1988), de Tall (1980) e de Nasser e Tinoco (2003), como já apontamos.

Concluímos aqui que, contrariando a hipótese de pesquisa e o apontamento de Tall (1980) sobre haver a preferência pelo formalismo, e seguindo o caminho oposto ao que Aguilar-Júnior (2012) verificou, os professores participantes desta pesquisa, em sua maioria, compreendem bem os conceitos de argumentação matemática e prova matemática. Da mesma forma, os métodos que utilizam para estimular o desenvolvimento da habilidade de argumentar de seus alunos também é similar, se não o mesmo proposto pelos teóricos e documentos oficiais.

Com isso, notamos clara diferença entre o observado por Aguilar-Júnior (2012) e maior semelhança ao que Knuth (2002) verifica em sua pesquisa. Trazemos certo otimismo com o que pudemos concluir nesta pesquisa, já que pode representar um sinal de avanço em relação ao que Aguilar-Júnior, também no Brasil, concluiu. Além disso, os professores que aqui participaram parecem fugir ao perfil levantado na hipótese de Caldato (2018), de que os professores dos sujeitos de sua pesquisa (alunos ingressantes da graduação) tivessem preferência por procedimentos mecânicos em vez de priorizar a compreensão dos estudantes.

Mesmo assim, sete dos dez participantes não tiveram contato algum com estudos em argumentação matemática e um dos três que tiveram apenas teve essa imersão em seu curso de mestrado. Portanto, apenas dois professores participantes, ambos do estado da Paraíba, estudaram argumentação matemática em suas graduações. Embora tenhamos obtido dados positivos em relação a esses professores, é preocupante que apenas dois tenham tido a oportunidade de estudar argumentação matemática em suas graduações, visto que é um tema de extrema importância e que permeia diversas áreas da Matemática.

Trazemos novamente os resultados apresentados por Caldato e Nasser (2024), em que os mesmos sujeitos da pesquisa de Caldato (2018), agora alunos concluintes e recém egressos, apresentam visões e comportamentos similares ao que tiveram quando eram alunos ingressantes da graduação. Essa similaridade – ou talvez “falta de mudança” – pode ser resultado da falta de estudos específicos na área da argumentação, algo que vimos com os professores que participaram desta pesquisa – e que, felizmente, estão de acordo com as propostas dos teóricos, mesmo sem conhecimento formal na área. Levando em conta que a maioria dos participantes reconhece o trabalho com a argumentação matemática em disciplinas cujo objetivo não era especificamente esse, entendemos a necessidade de haver estudos em argumentação ainda durante a graduação. Nesse caso, assim como P7 e P9, futuros professores de matemática poderiam ter acesso e compreender importantes ferramentas e técnicas para o trabalho com o desenvolvimento de argumentos em sala de aula, além da compreensão dos diferentes tipos e funções de prova – levando à compreensão de que uma construção argumentativa e de uma prova não precisa sempre ser formal e padronizada.

Considerando o tempo do curso de mestrado, foi preciso limitar o número de participantes – o que também ocorreu por não receber resposta de muitos professores contatados – e adaptar os objetos utilizados para a produção de dados. Por conta disso, a análise aqui feita fica restrita a esse pequeno grupo, que não representa um retrato ou perfil geral dos professores de matemática brasileiros, apesar de o grupo ser plural em diversos aspectos. Por tais fatores, não é possível que utilizemos tais dados para generalizar comportamentos, preferências e mesmo ações dos professores com base neste estudo, mas sim utilizá-lo como um indicativo, algo representado exclusivamente por esse grupo.

Dessa forma, mesmo com tais limitações, acreditamos que esta pesquisa apresente contribuições para o campo da argumentação matemática, podendo ser utilizada como referência para outras pesquisas, seja pela metodologia adotada, estruturação textual ou pelos resultados obtidos. Esses resultados, por sua vez, também podem indicar um importante fator de mudança em relação ao que é apresentado nas pesquisas de Aguilar-Júnior (2012), Mateus (2015) e Caldato (2018) – com possível influência das mudanças na BNCC (Brasil, 2018) – , que, por sua vez, foram de suma importância para esta pesquisa. Entendemos que os resultados aqui obtidos podem ser utilizados para criar hipóteses de novas pesquisas, ou mesmo auxiliar na composição de um retrato da Educação no Brasil no que diz respeito aos estudos em argumentação e provas matemáticas.

Referências

AGUILAR-JÚNIOR, C. A. **Postura de docentes quanto aos tipos de argumentação e prova matemática apresentados por alunos do ensino fundamental**. Orientadora: Profª. Drª Lilian Nasser. 2012. 126 p. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) - Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2012.

AMOSSY, R. Argumentação e Análise do discurso: perspectivas teóricas e recortes disciplinares. **Revista Eletrônica De Estudos Integrados Em Discurso E Argumentação**, [*s. l.*], v. 1, n. 1, p. 129-144, nov. 2011. Disponível em: http://periodicos.uesc.br/index.php/eidea/article/view/389. Acesso em: 30 jun. 2023.

ARCAVI A. The Role of Visual Representations in the Learning of Mathematics. Educational Studies in Mathematics v. 52. p. 215–241, 2003.

ARCAVI, A. Developing and using symbol sense in mathematics. **For the Learning of Mathematics**, v. 25, n. 2, p. 42-47, 2005.

BALACHEFF, N. A study of students' proving processes at the junior high school level. **Second UCSMP International Conference on Mathematics Education**, Chicago, 1988.

BALACHEFF, N. A argumentação matemática: um precursor problemático da demonstração. **Educação Matemática Pesquisa Revista do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática**, São Paulo, ano 2022, v. 1, n. 24, p. 770-815, 2022. Disponível em: https://www.researchgate.net/publication/360188220_A_argumentacao_matematica_um_precursor_problematico_da_demonstracao. Acesso em: 15 jun. 2023.

BARDIN, Laurence. **Análise de conteúdo.** Lisboa: Edições 70, 1995. 225 p. ISBN 972-44-0898-1

BRASIL. Ministério da Educação e Desporto. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília: MEC, 2018. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/abase/. Acesso em 15 jun 2023.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais:** matemática. Brasília: MEC/SEF, 1997.

BRASIL. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **Parâmetros curriculares nacionais**: Ensino Médio. Brasília: MEC/SEF, 2000.

CALDATO, J. **Argumentação, Prova E Demonstração: Uma Investigação Sobre As Concepções De Ingressantes No Curso De Licenciatura Em Matemática**. Orientador: Profª. Drª. Lilian Nasser. 2018. 218 p. Dissertação

(Mestrado em Ensino de Matemática) - Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2018.

CALDATO, J.; NASSER, L. Interpretando e avaliando argumentações: Uma análise com licenciandos ingressantes da Matemática. **VIDYA**, Santa Maria, ano 2022, v. 42, n. 2, p. 25-44, 2022. DOI https://doi.org/10.37781/vidya.v42i2.4208. Disponível em: https://periodicos.ufn.edu.br/index.php/VIDYA/article/view/4208. Acesso em: 11 out. 2023.

CALDATO, J.; NASSER, L. De ingressantes a concluintes/recém-egressos de cursos de licenciatura em Matemática: uma análise sobre as argumentações de uma questão algébrica. In: IX Seminário Internacional De Pesquisa Em Educação Matemática, 2024, Natal. Anais. SBEM, 2024. P. 1-15.

DE VILLIERS, Michael D. The role and function of proof in mathematics. Pythagoras, v. 24, p. 17-24, 1990.

FREIRE, P. **Pedagogia do oprimido**. 83. ed. Rio de Janeiro: Paz e Terra, 2022. 256 p. ISBN 978-85-7753-418-0.

GIL, A. C. Como elaborar projetos de pesquisa. 4. Ed. São Paulo; Atlas, 2002. 175 p.

HANNA, G. Some Pedagogical Aspects Of Proof. **Interchange**, Ontário, Canadá, v. 21, n. 1, p. 6-13, 1990.

HOYLES, C. The Curricular Shaping of Students‘ Approaches to Proof. **For the Learning of Mathematics**, Vancouver, British Columbia, Canadá, v. 17, n. 1, p. 7-16, Fev, 1997.

KILPATRICK, J. Fincando estacas: Uma tentativa de demarcar a Educação Matemática como campo profissional e científico. **Zetetiké**, Campinas, São Paulo, v. 4, n. 5, p. 99-120, Jan./Jun. 1996.

KNUTH, E. J. Teachers' conceptions of proof in the context of secondary school mathematics. **Journal of Mathematics Teacher Education**, Dordrecht, v. 5, p. 61-88, 2002.

MATEUS, M. E. A. Um estudo sobre os conhecimentos necessários ao professor de Matemática para a exploração de noções concernentes às demonstrações e provas na Educação Básica. 269 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Universidade Anhanguera de São Paulo, São Paulo, 2015.

NASSER, L.; TINOCO, L. A. A. (2003): Argumentação e Provas no Ensino de Matemática. 2ª edição, 109 p. – UFRJ/Projeto Fundão, Rio de Janeiro, Brasil.

NELSEN, R. B. **Proofs without words**: exercises in visual thinking. 1 ed. USA: The Mathematical Association of America, 1993.

PIETROPAOLO, R. C. (Re)significar a demonstração nos currículos da educação básica e da formação de professores de Matemática. 388 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – PUC-SP, São Paulo, 2005.

SAVIOLI, A. M. D.; SILVA, E. M. Provas e demonstrações matemáticas. *In*: BATISTA, I. L. (org.). **Conhecimentos e saberes na Educação em Ciências e Matemática**. Londrina: UEL, 2016. cap. Seção II, p. 209 - 226.

SILVEIRA, M. R. A. **Matemática, discurso e linguagens**: Contribuições para a Educação Matemática. 1. ed. São Paulo: Livraria da Física, 2015. 305 p. ISBN 978-85-7861-342-6.

TALL, D. Cognitive aspects of proof, with special reference to the irrationality of $\sqrt{2}$. *In*: International Conference for the Psychology of Mathematics Education, 3. 1980, Warwick. **Proceedings** [...]

TALL, D. Cognitive development, representations and proof. In: **Proceedings of justifying and proving in school mathematics**. London: Institute of Education, 1995. p. 27-38.

VAN EEMEREN, F. H. *et al*. **Fundamentals Of Argumentation Theory**: a Handbook Of Historycal Backgrounds And Contemporany Developments. New York: Lawrence Erlbaum Associates, 1996. 808 p.

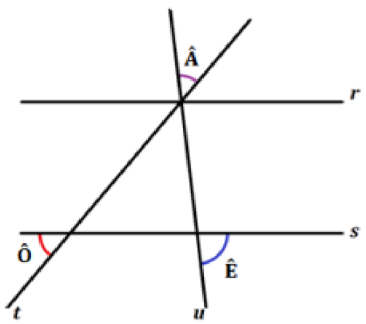
WESTON, A. **A arte de argumentar**. 2. ed. Lisboa: Gradiva, 1996. 88 p.

Apêndices

Apêndice A – Atividades respondidas pelos estudantes

Olá! Meu nome é Marcus Prates, sou professor de Matemática e mestrando na Universidade Federal do Rio de Janeiro (UFRJ), no Programa de Pós Graduação em Ensino de Matemática (PEMAT). Este questionário é parte da minha pesquisa de mestrado e preciso de sua ajuda para concluí-la! Responda ao questionário com seriedade, utilizando seus conhecimentos e tentando chegar à(s) resposta(s) solicitada(s). Em nenhum momento sua identidade será revelada, apenas suas respostas serão utilizadas. Entregando esta folha de atividades ao/à seu/sua professor/professora, você concorda em participar da pesquisa, cedendo suas respostas de forma completamente anônima. Muito obrigado!
Nome:____ Turma:_________ Escola: _______________________________________ Idade:_________

1) Na figura a seguir, formadas por duas retas paralelas, r e s, e duas transversais a elas, u e t, há três ângulos em destaque: Â, Ê e Ô. Existe alguma relação entre esses três ângulos? Como seria essa relação?



2) Os números 6, 7 e 8 são consecutivos e sua soma é 21, que é um múltiplo de 3. O mesmo acontece com os números 12, 13 e 14, que também são consecutivos e sua soma é 39, também múltiplo de 3. Isso acontece em qualquer soma de **três** números **consecutivos**? Justifique sua resposta, mostrando que é verdade para todos os casos, ou apresentando um contraexemplo (um caso falso), caso não seja verdade.

Apêndice B – Formulário para a correção da etapa 3

Olá! Meu nome é Marcus Prates, sou professor de Matemática e mestrando do Programa de Pós Graduação em Ensino de Matemática (PEMAT), na Universidade Federal do Rio de Janeiro (UFRJ). Minha pesquisa é sobre a correção de questões de Matemática no Ensino Básico. Por favor, corrija cada questão da forma que julgar justa, atribuindo grau/nota (de zero a cinco pontos) e justificando a nota dada, conto com sua ajuda! Em nenhum momento sua identidade será revelada. Após esta etapa, enviarei um formulário digital por e-mail, para dar seguimento à pesquisa.

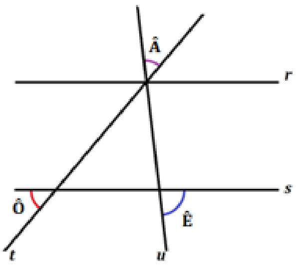
Entregando esta folha de atividades corrigida, você concorda em participar da pesquisa, cedendo suas notas e justificativas de forma completamente anônima.

Muito obrigado!

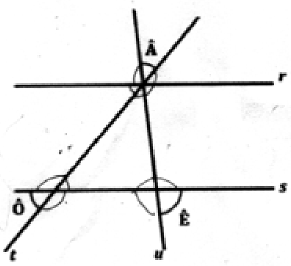
Nome:

E-mail: Celular:

Questão 1 - Na figura a seguir, formadas por duas retas paralelas, r e s, e duas transversais a elas, u e t, há três ângulos em destaque: Â, Ê e Ô. Existe alguma relação entre esses três ângulos? Como seria essa relação?



Resposta 1

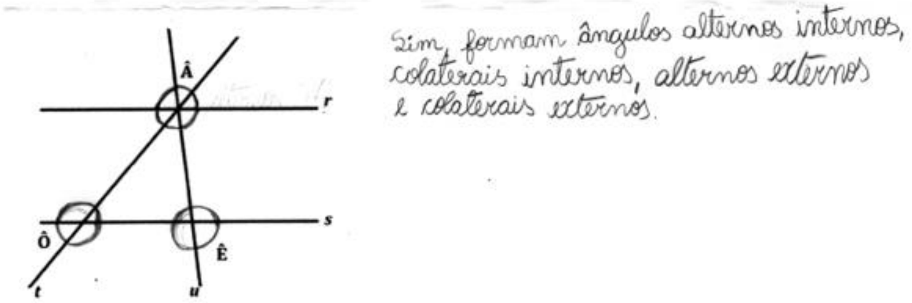


O angulo Ô complementa o angulo Â, e o angulo Ê tambem complemento o angulo Â. São angulos complementares e os três juntos formam 180º.

Transcrição: "O angulo Ô complementa o angulo Â, e o angulo Ê tambem complementa o angulo Â. São angulos complementares e os três juntos formam 180°."

Grau/nota	**Justificativa:**

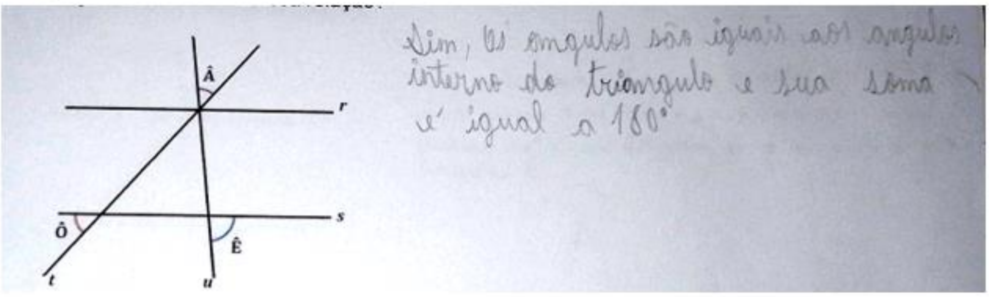
Resposta 2



Transcrição: "Sim, formam ângulos alternos internos, colaterais internos, alternos externos e colaterais externos."

Grau/nota	Justificativa:

Resposta 3

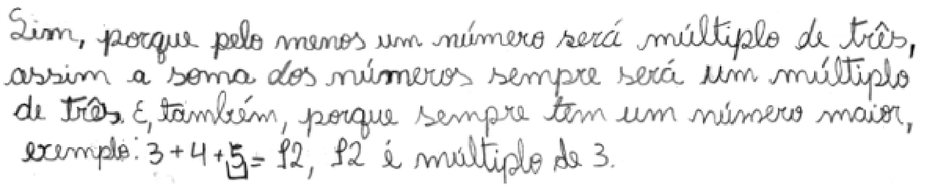


Transcrição: "Sim, os angulos são iguais aos ângulos interno do triangulo e sua soma é igual a 180°"

Grau/nota	Justificativa:

Questão 2 - Os números 6, 7 e 8 são consecutivos e sua soma é 21, que é um múltiplo de 3. O mesmo acontece com os números 12, 13 e 14, que também são consecutivos e sua soma é 39, também múltiplo de 3. Isso acontece em qualquer soma de **três** números **consecutivos**? Justifique sua resposta, mostrando que é verdade para todos os casos, ou apresentando um contraexemplo (um caso falso), caso não seja verdade.

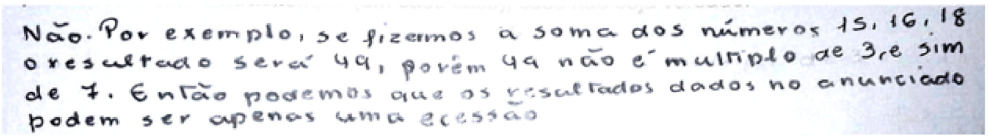
Resposta 1



Transcrição: “Sim, porque pelo menos um número será múltiplo de três, assim a soma dos números sempre será um múltiplo de três. E, também, porque sempre tem um n´mero maior, exemplo: 3 + 4 + <u>5</u> = 12, 12 é múltiplo de 3.”

Grau/nota	**Justificativa:**

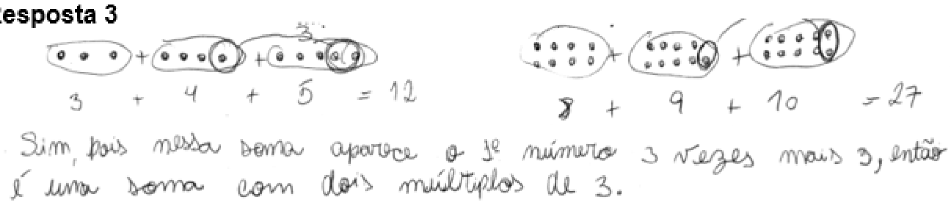
Resposta 2



Transcrição: “Não. Por exemplo, se fizermos a soma dos números 15, 16 e 18 o resultado será 49, porém 49 não é múltiplo de 3, e sim de 7. Então podemos que os resultados dados no anunciado podem ser apenas uma ecessão”

Grau/nota	**Justificativa:**

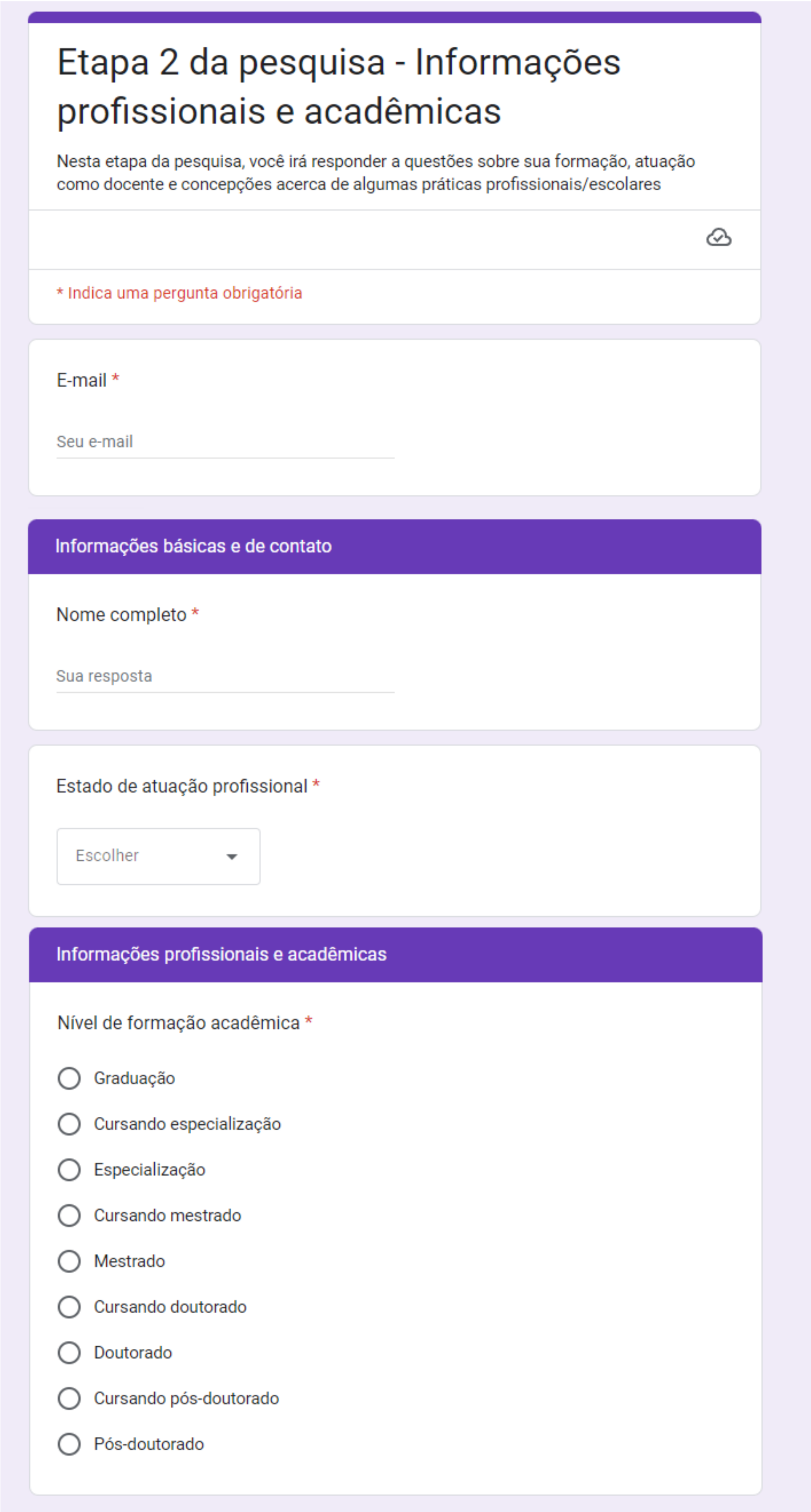
Resposta 3



Transcrição: “Sim, pois nessa soma aparece o 1º número 3 vezes mais 3, então é uma soma com dois múltiplos de 3.”

Grau/nota	**Justificativa:**

Apêndice C – Formulário *Google* enviado aos professores na etapa 4



Etapa 2 da pesquisa - Informações profissionais e acadêmicas

Nesta etapa da pesquisa, você irá responder a questões sobre sua formação, atuação como docente e concepções acerca de algumas práticas profissionais/escolares

* Indica uma pergunta obrigatória

E-mail *

Seu e-mail

Informações básicas e de contato

Nome completo *

Sua resposta

Estado de atuação profissional *

Escolher

Informações profissionais e acadêmicas

Nível de formação acadêmica *

- Graduação
- Cursando especialização
- Especialização
- Cursando mestrado
- Mestrado
- Cursando doutorado
- Doutorado
- Cursando pós-doutorado
- Pós-doutorado

Está atuando na rede pública de Ensino Básico atualmente? *

- ○ Sim
- ○ Não

Tempo de atuação na rede pública de Ensino Básico (em anos) *

- ○ 0
- ○ 1-5
- ○ 6-10
- ○ 11-15
- ○ 16-20
- ○ 21 anos ou mais

Está atuando na rede privada de Ensino Básico atualmente? *

- ○ Sim
- ○ Não

Tempo de atuação na rede privada de Ensino Básico (em anos) *

- ○ 0
- ○ 1-3
- ○ 4-6
- ○ 7-9
- ○ 10 anos ou mais

Questões sobre práticas escolares

Marque a opção que mais se adequa à sua prática profissional. Caso sua resposta não esteja classificada apenas como "sim" ou "não", ou mesmo que seja um caso intermediário que necessite comentar ou explicar, marque "outro" e acrescente seu texto.

Em suas avaliações, você considera corretas, sem decréscimo de pontuação, questões que apresentam apenas o resultado correto, sem desenvolvimento? *

- ○ Sim
- ○ Não
- ○ Outro: ____________

Um estudante que apresenta uma resolução correta com argumentos próprios, que não seguem as fórmulas padrão (por exemplo, não utiliza a fórmula da relação entre lados e diagonais para encontrar o número de diagonais de um polígono), tem sua resposta validada? *

- ○ Sim
- ○ Não
- ○ Outro: ____________

Você sempre orienta seus estudantes a memorizar fórmulas e relações, como o Teorema de Pitágoras e a fórmula de resolução de uma equação polinomial do segundo grau (conhecida como Fórmula de Bháskara)? *

- ○ Sim, apenas memorizar o formulário
- ○ Sim, memorizar e compreender o processo
- ○ Não oriento a memorização
- ○ Outro: ____________

Questões sobre práticas escolares

Responda as questões marcando uma opção em escalas de 1 a 5, em que 1 é o nível mais baixo e 5 é o nível mais alto dentro do questionado.

Você considera ter tempo suficiente em sala de aula para desenvolver sua prática docente como considera adequado? Justifique sua resposta na caixa de pergunta a seguir. *

	1	2	3	4	5	
Não	○	○	○	○	○	Sim

Espaço para justificativa *

Sua resposta

Em suas aulas, os alunos são estimulados a apresentar argumentos que justifiquem seus resultados? *

	1	2	3	4	5	
Não	○	○	○	○	○	Sim

Em suas aulas, os alunos são apresentados às demonstrações de teoremas e fórmulas e/ou estimulados a mostrar a validade de teoremas e fórmulas? *

	1	2	3	4	5	
Não	○	○	○	○	○	Sim

Questões sobre práticas escolares

Responda as questões marcando uma opção em escalas de 1 a 5, em que 1 é o nível mais baixo e 5 é o nível mais alto dentro do questionado.

Marque a seguir o nível de relevância de cada aspecto apresentado por seus alunos, sob sua perspectiva *

	1	2	3	4	5
Resposta correta, mesmo sem desenvolvimento	○	○	○	○	○
Justificativa do resultado obtido	○	○	○	○	○
Argumentos utilizados para construir a resposta, independente do resultado correto	○	○	○	○	○
Saber as fórmulas apresentadas em sala de aula	○	○	○	○	○
Compreender os argumentos necessários para provar a validade das provas apresentadas em sala de aula	○	○	○	○	○
Desenvolver meios próprios de resolução, justificativa e provas	○	○	○	○	○

Apêndice D – Questionário piloto feito para os estudantes

Olá! Meu nome é Marcus Prates, sou professor de Matemática e mestrando na Universidade Federal do Rio de Janeiro (UFRJ), no Programa de Pós Graduação em Ensino de Matemática (PEMAT).

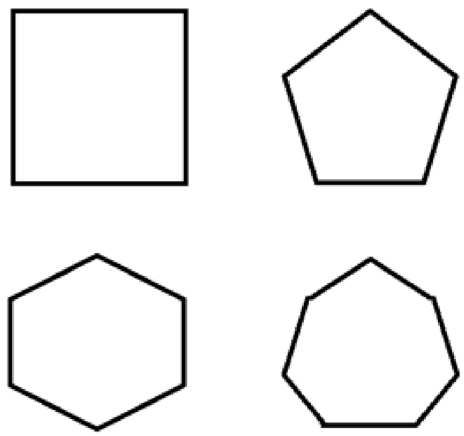
Este questionário é parte da minha pesquisa de mestrado e preciso de sua ajuda para concluí-la! Responda ao questionário com seriedade, utilizando seus conhecimentos e tentando chegar à(s) resposta(s) solicitada(s).

Muito obrigado!

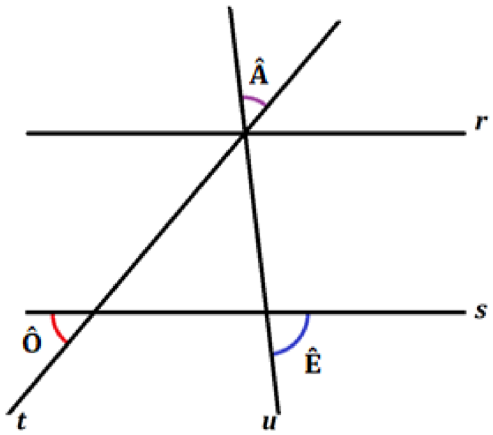
Nome:____ Turma:__________

Escola: ____ Idade:__________

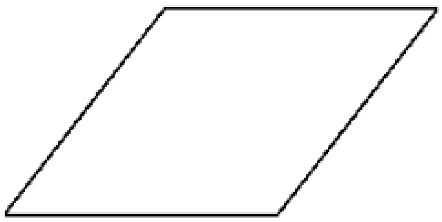
1) Quantas diagonais tem um quadrilátero? E um Pentágono? E um heptágono? Como podemos descobrir quantas diagonais tem um polígono de n lados?



2) Na figura a seguir, formadas por duas retas paralelas, r e s, e duas transversais a elas, u e t, há três ângulos em destaque: Â, Ê e Ô. Existe alguma relação entre esses três ângulos? Como seria essa relação? Existe relação entre esses e outros ângulos não marcados no desenho?



3) Abaixo você vê um losango, que é um paralelogramo. Trace suas diagonais e responda:



a) O que você pode afirmar sobre os ângulos formados entre as diagonais? Justifique sua resposta

b) Como as diagonais dividem os ângulos internos do losango? Justifique sua resposta

4) Biologicamente, todo ser humano precisa de outros dois para nascer: Pai e mãe. Esses são chamados de parentes de primeiro grau (pais e filhos), enquanto os avós são parentes de segundo grau e os bisavós de terceiro grau. Pensando nisso, cada pessoa tem, biologicamente falando, dois parentes de primeiro grau (pai e mãe). Da mesma forma, cada indivíduo tem quatro parentes de segundo grau (avós), sendo os pais do pai e os pais da mãe. Seguindo esse raciocínio, responda:

a) Quantos parentes de sexto grau uma pessoa tem?

b) De que forma a quantidade de parentes de cada grau aumenta em relação ao grau anterior?

c) Como poderíamos calcular a quantidade de parentes de grau X de uma pessoa?

Apêndice E – Perguntas para a entrevista da etapa 6 via *Google Meet*

1 – Em qual ano e instituição você concluiu sua graduação?

1.1 (se for cabível) – Em qual ano e instituição você concluiu sua pós graduação? Sua pesquisa foi feita em qual área?

2 – O que você entende por argumentação e prova matemáticas?

3 – Você teve contato, seja direto ou indireto (dentro de uma disciplina, ou por outros meios), com o tema da argumentação em sua formação?

4 – De que forma seus alunos são estimulados a desenvolver argumentos e provas matemáticas em sala de aula?

5 – Quais elementos você considera (ou valida) no desenvolvimento de argumentos de seus alunos para validar suas provas/respostas?

Apêndice F – Transcrição da entrevista com a participante P1

Marcus Prates: Pronto, vamos começar agora. Então, como a gente tinha falado, eu estou gravando e transcrevendo. Você autoriza a gravação e a transcrição dessa conversa?

P1: Autorizo, sim. Autorizado.

Marcus Prates: Vamos lá, então... Como eu tinha falado, tem algumas perguntinhas aqui. Eu vou te perguntando e, conforme for, a gente pode discorrer sobre isso e talvez aumentar um pouquinho, conversar sobre coisas que não estão nessas perguntas aqui. Mas se tiver necessidade, se não, a gente vai seguindo só elas. Então a primeira pergunta: qual foi o ano e qual foi a instituição em que você concluiu a sua graduação?

P1: Foi em uma universidade federal, concluí em 2015.

Marcus Prates: Beleza. Você não teve nenhuma formação continuada depois, não teve pós, nem mestrado, nem nada, só graduação?

P1: Não, não tive nada.

Marcus Prates: Ótimo. Para dar segmento aqui, e aí entrando mais no assunto, o que você entende por argumentação e provas matemáticas?

P1: Argumentar é você trocar uma ideia, entendeu? É você dialogar, é você expor sua opinião. Agora a prova... A prova é, assim, meio mecânica, que você, as pessoas fazem a prova para provar o que você aprendeu. Eu sou meio que contra a prova.

Marcus Prates: Não, não... Eu digo argumentação matemática e prova matemática, não é instrumento de avaliação.

P1: Pensei que era instrumento de avaliação.

Marcus Prates: Não.

P1: Argumento matemático, que você está falando?

Marcus Prates: Isso, argumentação matemática e prova matemática. O que você entende por esses termos? Na sua concepção, o que que você acha que é, como é que você enxerga...?

P1: Para mim, argumento matemático é você... É o que estou falando, é você expor o que você aprendeu, a sua opinião em relação a matemática, a sua posição em relação a isso. E prova matemática, você está falando prova matemática o quê? O quê que a gente...

Marcus Prates: Provar, provar matematicamente. Prova matemática.

P1: Provar matematicamente? A prova matemática é algo, assim, exato e que... Eu acho que a prova tem que ser feita mesmo, entendeu? Porque senão fica meio vago, temos que provar, sim. De onde surgiu aquilo, o motivo, quem fez...

Marcus Prates: Entendi. E aí, falando de prova, por exemplo, só para ter uma ideia... A gente tem casos em que, por exemplo, tem provas que são muito rígidas, no sentido de... a linguagem matemática é muito forte ali presente. Então, por exemplo, se uma criança for ler uma prova matemática a nível de graduação eles não vão entender, não é? E aí, só para citar um exemplo, quando eu ponho no quadro aquele o conjunto dos números racionais, que é aquela codificação: o conjunto de Racionais é uma fração, só que é tudo com letra, eles já não entendem. Tem que explicar passo a passo daquilo e aquilo não é uma prova, aquilo é uma definição, só que com símbolos. Uma definição simbólica. Você entende também como prova matemática algo que a gente escreve de um jeito muito informal, sem precisar ser tão formal assim quanto, por exemplo, a prova de um teorema, que a gente precisa entrar a fundo e provar aquele teorema? Você considera como um válido uma prova informal que um aluno faça, por exemplo?

P1: Não, eu... Me pega a premissa de que tem que ser contextualizada. A prova tem que ser contextualizada, entendeu? Tem que ter uma base ali no que... um fundamento que você tá querendo que o aluno passe. Passar para o aluno aquilo ali, entendeu?

Marcus Prates: sim

P1: Só que quando você contextualiza uma questão, o aluno se perde. Eu não sei por que isso... Na verdade, nós sabemos o porquê, não é? Interpretação é o problema.

Marcus Prates: Sim, sim.

P1: Porque se você... Vamos supor, quando a gente faz nossa graduação, tem uma parte lá que é uma parte de álgebra. Se você der pra um aluno de oitavo ano, nós sabemos que álgebra no oitavo ano é bem rigorosa, né? E você dá a mesma prova, mas se você contextualizar eles vão ficar com dificuldade por causa da interpretação. Mas tem que ser assim mesmo, porque o mundo aí fora tá com tudo contextualizado, todas as questões.

Marcus Prates: Sim. Na sua na sua graduação, no curso que você fez, você lembra se você teve contato direto ou indiretamente, e só para te explicar o que que eu entendo, o que que eu estou querendo dizer como "direta ou indiretamente": diretamente é dentro de uma disciplina que deixou claro que ia trabalhar isso, ou uma disciplina voltada para isso. E indiretamente, estou querendo dizer com professores ou professoras que comentaram que estavam trabalhando isso em sala de aula, embora não fosse o tema. É tipo, por exemplo, a gente levar questões de física para dentro da Matemática, trabalhar de forma indireta... não é o meu tema, não é o meu tópico, mas eu estou levando para dar um apoio. Então, você teve contato direto ou indireto com esse tema de argumentação matemática na sua formação? Você lembra se teve?

P1: Eu não lembro, não, mas eu acho que eu tive sim, mas não foi onde me formei, não. Eu tive em uma universidade particular, que eu também... Eu comecei a fazer na [universidade] particular e depois fui para a pública. Lá na particular eu tive um pouquinho.

Marcus Prates: Falando sobre argumentação matemática, não é?

P1: sim

Marcus Prates: Porque falar de prova, a gente sabe que sempre tem. Porque ao fazer graduação em matemática, tem várias matérias em que o centro delas é você provar teorema, é trazer a prova de coisas e fazer aquela coisa toda... Eu não sei se é o seu caso, mas é meio difícil a gente conhecer alguém que, em sala de aula parou e falou: “não, olha só, isso aqui é um processo de argumentação” ou “isso aqui é argumentação”, entendeu?

P1: É, mas lá tinha um professor que era desse nível aí, desse jeito. Eu lembro disso.

Marcus Prates: Que esmiuçava tudo, ele falava tudo.

P1: Eu também tinha um amigo lá que era da Física, que já tinha formação em Física. Então ele puxava esse lado, entendeu?

Marcus Prates: Ah, entendi, entendi. E aí, falando agora dos seus alunos, você enquanto professora. Virando ao contrário agora, você estava com uma aluna e agora como professora. Como que os seus alunos, em sala de aula, nas suas aulas, são estimulados a desenvolver os próprios argumentos e, porventura, provas matemáticas? Como são estimulados argumentar, a argumentar para provar algo.

P1: Eu gosto muito... Eu gosto muito das aulas lúdicas, eu sou dessas de levar para sala de aula barra de ferro, tijolo... Entendeu? Eu sou desse nível aí.

Marcus Prates: Sim, sim.

P1: Eu gosto disso, sempre gostei. Tem até um... Algo que a gente nem usa mais, que eu até esqueci o nome, que a gente prova ali... Monta o teorema de Pitágoras. É um tabuleiro que tem vários... vários preguinhos. Eu tinha aquilo, meu avô fez pra mim. Então aquilo ali é maravilhoso, hoje em dia nem se usa mais.

Marcus Prates: Tem um que é com água, não é? Esse da água eu queria fazer, mas é muito grande.

P1: Eu tinha esse... esse meu avô fez, foi enorme... Enorme, eu levava para a faculdade direto, isso, eu adorava, mas hoje em dia quase não se usa. Eu uso essa base aí.

Marcus Prates: Então, no caso, eles são apresentados ao lúdico, ao visual, para poder criar esse...

P1: Isso, ao visual para poder criar...

Marcus Prates: Os próprios argumentos, entendi. E aí, para fechar, no caso, para fechar as perguntas previstas aqui: quando você, por exemplo, vai corrigir uma questão, uma avaliação, ou mesmo fazer um problema em sala de aula, que tipo de elemento na resposta do aluno, que tipo de coisa que esse aluno te responde, que você considera como válido no desenvolvimento de argumento dos seus alunos, para que eles validem a prova deles? Entendeu a pergunta? Os alunos, eles podem responder de várias formas, não é? Tem aluno que é mais “seco” respondendo, tem outros que fazem de outro jeito, tem outros que desenham... O que que você considera como argumento válido para a prova que eles estão querendo propor na questão?

P1: Quando ele responde com coerência o que eu estou pedindo, entendeu? Tem que ter coerência. Ele pode... O cara pode até fazer de uma maneira diferente, mas tem que estar no contexto do que eu dei. Eu vou analisar aquilo ali e vou dar crédito a ele, certo?!

Marcus Prates: Sim. Então, por exemplo, no caso, só para ter um norte aqui: uma questão daquela que a gente fala... Você falou do teorema de Pitágoras, não é? Vamos botar o teorema de Pitágoras. Você considera como prova válida alguém fazer essa construção do material que você falou?

P1: Sim, acho válido, sim, me provar ali. Claro. Com certeza!

Marcus Prates: Entendi. Que desenhasse aquilo, ou alguma coisa assim, mas que, se trouxesse como prova, você consideraria válida...

P1: Com certeza!

Marcus Prates: Tranquilo, então. Eu acho que é isso. Foi rapidinho, muito sucinta. Para mim está ótimo. Tem mais alguma consideração a fazer?

P1: Tá bom. Não, não... Tem não.

Marcus Prates: Então vou encerrar vou encerrar a gravação.

Apêndice G – Transcrição da entrevista com a participante P2

Marcus Prates: Está gravando legal... Começando, fala para mim qual foi o ano e qual foi a instituição em que você concluiu a sua graduação.

P2: Eu fiz em uma universidade federal da Bahia. Terminei no semestre de 2015.2, mas foi no ano de 2016. Porque eu peguei greve.

Marcus Prates: Ah, sim, entendo. Eu também fui assim. E aí você botou aqui que tem especialização, não é? Você chegou a terminar, no caso?

P2: Tenho, tenho duas. Tenho em Tópicos Especiais de Matemática, por uma instituição privada, e tem uma por uma instituição federal na Bahia.

Marcus Prates: Entendi. Aí, no caso, eles... Esse segundo seria voltado para sala de aula? Ou os dois são?

P2: Sim, os dois são.

Marcus Prates: Os dois são? Tá.

P2: Mas a da federal foi mais "mão na massa", foi a gente pensar... Inclusive meu TCC foi sobre uma prática que eu tive em sala de aula, que foi de ladrilhamento, aí eu apliquei com os meus alunos. Eu fiz um projeto, também, voltado à temática Negra: eu peguei bonecas, Barbies, só que eram todas as retintas, todas negras, e os alunos tinham que construir roupas para as bonecas sem costura, só usando o sólido geométricos. Aí a gente estudou ladrilhamento, quadrado, retângulo, tudo. E aí a gente calculou a área, perímetro, enfim, desses entes geométricos nas roupas.

Marcus Prates: Nossa, nunca ia pensar nisso na minha vida, de fazer uma coisa parecida com isso. Bem interessante.

P2: Sem costura, não podia usar nada, os alunos piraram porque eles tinham que pensar nos recortes para amarrar para a roupa ficar na boneca. E quem ficou foi minha filha, com as bonecas, com as roupas todas das bonecas que foram feitas.

Marcus Prates: Eu lembrei daquela ideia de fazer o desenho sem tirar o lápis. Passou essa ideia, tem que pensar no desenho antes do trajeto. Você vai fazer sem tirar o lápis. Claro que não é a mesma coisa, mas eu lembrei disso. E aí... A pergunta que seria central aqui, não é? Ou uma das perguntas sendo centrais, mas é que eu acho mais importante. O que você entende por argumentação e prova matemáticas? Por esses conceitos, qual é o seu entendimento sobre isso?

P2: A gente pensa na faculdade, não é? Mais na dureza do argumento de você provar logicamente o que o professor quer, não o que você acha certo, o caminho que você permeia. Só que na prática quase nunca a gente usa a mesma coisa que a gente vê na faculdade. Então, eu primo mais pelo caminho que o aluno leva, todas as minhas provas são abertas. Não tem nenhuma de marcar. Eu sei que o ENEM é só de marcar, mas como eu estou no [Ensino] Fundamental 2, cada aluno vai pensar de uma forma, então eu pontuo o raciocínio. Quando eu faço gabarito eu coloco vários caminhos e vou pontuando cada um deles, então se o aluno não consegue chegar na resposta final, que vale 0,01 da nota, ele não zera a questão, ele não zera. Não tem como aluno ir mal na minha prova se ele sabe alguma coisa, porque o ponto do raciocínio dele. Então, eu acredito que matemática é isso, não é? Eu tento pegar o que a gente pensa na de olimpíadas, na segunda fase de do aluno mostrar o que ele entende, e faço isso nas minhas provas. Eu tenho muitas turmas olímpicas, então para mim um raciocínio é o que mais importa, o resultado final é um mero detalhe. Então eu gosto muito de...

Marcus Prates: A construção...

P2: A construção, para mim, é mais importante do que o resultado final e meus alunos sabem disso, que a resposta final Vale 0,01% da resposta. Por isso que eu fico muito “arretada” agora com minha filha. Quando a professora, por exemplo, ela escreveu certidão de “nacimento”, não foi “nascimento” e ela cortou a questão. Não era nem prova de português, era uma prova de história. Então até que ponto a avaliação é punitiva e não assertiva, não é? Ela não premiou que ela sabia o que era uma certidão de nascimento, ela simplesmente cortou porque a palavra nascimento estava errada. Até que ponto isso aleija a criança? Pensando como mãe, como professora... Então nas minhas provas eu tento não fazer isso eu tento mostrar assim, “você sabe, você não sabe tudo, mas você sabe até aqui” e eu sempre pontuo isso “ó, faltou isso”. Às vezes eu peço todos os detalhes, todas as contas, de mais, menos, multiplicação, divisão, tudo. Porque eu quero entender onde é que ele está errando. E aí eu pontuo, “é o quarto ano”, “não sabe isso não, sabe aquilo... Onde você viu isso?”. E minhas aulas são assim, eles se acabam de rir, eu digo “eu estou tirando da minha conta e estou botando na do outro professor”, e eles ficam rindo porque eu digo “isso aqui, você viu no terceiro ano, não é? Isso aqui você viu a quinta série, você viu no sexto, está no dúvida no oitavo, mas esse assunto é do sexto. Então não é que você não sabe o assunto dessa série, você não está sabendo a base, você não sabe de lá de trás. Então você tem que correr atrás na frente do seu prejuízo”.

Marcus Prates: Exatamente. Agora, só para me situar porque você foi falar da argumentação e aí você entrou na ideia da construção, não é? Eu achei interessante que você ligou, mas deixa eu te perguntar.

P2: Sim

Marcus Prates: Deixa eu te perguntar de argumentação e de prova. Isso que você falou entra onde? Só para eu entender, assim, por onde você está pensando.

P2: Na argumentação. A prova você fala prova... Prova instrumento avaliativo?

Marcus Prates: Não é prova avaliação, não. Prova... Prova matemática.

P2: Prova matemática, entendi. Então entra nos dois, para mim. Os dois estão ligados, não tem como você provar algo sem argumentar. Eles estão intrínsecos, são conceitos muito próximos, na minha visão.

Marcus Prates: Sim, são conceito próximos. É como se tivesse uma diferença pequena entre um e outro, no caso?

P2: Sim, entre um e o outro.

Marcus Prates: Beleza, ok, ok. E aí, falando disso, você como acadêmica, seja na graduação ou na especialização, você teve algum contato com esses conceitos de forma direta – e o que é de forma direta? É uma matéria voltada para isso, ou que na ementa da matéria tivesse isso – ou de forma indireta – e aí de forma indireta é: você está lá na aula de análise e aí você entende que aquele processo é um processo de argumentação e de prova, você tomou contato com aquilo mesmo que não fosse o objeto?

P2: Então, eu diria que foi indireta, é...

Marcus Prates: Você lembra se teve esse contato indireto?

P2: Foi um susto, não é? Porque quando a gente faz o vestibular a gente acha que vai fazer conta e foi um susto, quando eu tive que escrever. Eu já cheguei a usar em uma disciplina três cadernos, de tanta escrita que tinha que fazer. Então eu digo a gente escreve mais do que uma pessoa que faz letras, eu não tenho dúvida, porque a gente argumenta, tem que provar. E eu lembro que eu vim de escola pública, meu repertório é minúsculo, eu sempre botava “então... Então” aí minha professora sugeriu “use ‘logo’, ‘desta forma’, ‘assim’, ‘todavia’...” e ele foi sugerindo. Ele [disse] “você fala muito ‘então’”, aí eu falei “ai, meu Deus, eu tenho que estudar português, porque senão eu não vou saber argumentar, não vou fazer...”. Meu professor, ele me chamava de “burro de carga”, que se tinha... era Elementos Fundamentais da Matemática, não sei se no Rio é assim. A gente estudava geometria euclidiana com um livro amarelo de Morgado e tinha questão lá que tinha e tem A, B e C. Eu provava no A, eu provava a mesma coisa do A no B e provava B. Aí, para fazer a letra C eu provava o A de novo, provava o B de novo e depois provava o C. Ele disse “você é burro de carga, você simplesmente poderia dizer ‘como demonstramos no item A, infere-se que’, ou ‘segue que’...”, aí... Mas eu tinha tanto medo dele, eu suava frio quando eu fazia prova dele eu tinha muito medo, ele batia nos peitos e dizia assim... Uma realidade totalmente diferente, de uma criatura que saiu da escola pública e foi jogada assim na universidade.

Marcus Prates: Isso que eu ia falar. O que você está me falando me passa muita ideia daquela coisa de que a gente tem medo de...

P2: Do erro.

Marcus Prates: Não só do erro, mas de que não fique claro para pessoa o que você está querendo dizer. Então em vez de você [pensar] “será que eu posso só aproveitar o que eu fiz em cima?”, “Não o professor não vai gostar, eu tenho que fazer tudo”. É essa coisa que a gente carrega, não é? A gente leva isso, mesmo.

P2: Até o “CQD”, o quadradinho pintado... Foi depois que eu fui pegando esses traquejos, eu comprei um livro, “Redação Matemática”, e aí lá ele explica vários termos. Daniel alguma coisa...

Marcus Prates: É interessante, eu não sabia que tinha. Vou dar uma olhada depois.

P2: Depois eu te mando a foto, é muito bom. E aí você começa a entender, você pode substituir alguns termos da matemática por outros, então foi muito foi muito bacana. Eu cresci muito na matemática depois que eu comecei a ler mais. Não tem jeito, não é?

Marcus Prates: Tem que ir para leitura.

P2: Tem aquele mundinho muito restrito da escola pública. Quando você vai para Universidade ou você responde, ou você não.

Marcus Prates: Entendi. Então você foi como eu, não é? Você entrou para faculdade achando uma coisa e teve esse contato com argumentação sem saber direito que aquilo era argumentação...

P2: Sem saber o que era.

Marcus Prates: Mas hoje você reconhece que você teve esse contato mesmo sem saber o que que era.

P2: Sim, sim.

12:38 Marcus Prates: Entendi. E aí agora você como professora, professora do Fundamental 2... Você já até falou um pouquinho sobre isso, mas se você puder abrir mais, ou se tiver algum detalhe a mais, você traz: de que forma que você estimula os seus alunos a desenvolver os próprios argumentos deles, ou até provar alguma coisa?

P2: Minhas provas são abertas. Então isso é, para mim, é o fator preponderante. Porque ele vai poder fazer a resolução da forma que ele quiser. Quando eu dou aula eu ensino dois, três caminhos... Se eu tiver tempo, eu até deixo eles irem na sala, no quadro, eles pensarem junto comigo de eles proporem resoluções. Na prova, quando eu corrijo, também eu sempre digo “Fulano, eu pensei assim, mas eu gostei tanto da resolução de Fulano que eu dei ponto a mais para ele, porque eu nunca tinha pensado daquela forma”. e eu

Marcus Prates: E é bom que aquele aluno carrega...

P2: E eu trago essa resolução para o quadro, digo assim “olha, como foi inteligente, muito mais inteligente do que a prova”. E aí eu boto no quadro e às vezes eu falo “Verdade, que sacada!”. E eu sempre digo, que eu vivo e aprendo com erro, eu sempre boto errado e pergunto “por que está errado?”, “O que faltou para o colega conseguir fazer certo?”. E trago muito essa questão do argumento, “Mas por que você pensou dessa forma?”, “Explique por que você pensou dessa forma”, e aí eles vão e a gente vai destrinchando as aulas. Eu acho que eu não estudei dessa forma, eu gostaria muito de entrar na esfera pública para dar oportunidade a pessoas como eu, que vim escola pública, terem um ensino melhor. Hoje eu ensino em particular, então eu tento dar o meu melhor para os meus alunos e acredito que matemática só vai sair de uma disciplina de “é difícil”, “eu não sei”, “eu não gosto” se eles entenderem que todo mundo é capaz, que a matemática é para qualquer um. Eu tenho alunos que chegam dizendo “eu odeio matemática, eu não sei matemática” para notas muito altas, justamente porque eu valorizo o raciocínio. E aí ele consegue ter uma média melhor e eu saio daquele patamar de dizer assim “eu sei tudo”, a aula é construída junto com eles. Então eles percebem “poxa, eu posso contribuir para a aula”. Por maior besteira que eles falam eu faço um link com algum assunto da matemática e eu contextualizo muito. A matemática passa a ter uma aplicabilidade para eles, então a aula fica mais estimulante, então eles querem participar. Claro que tem turmas que eu consigo fazer isso com 100% dos meus alunos, tem turma que não, mas a gente vai mediando o processo.

Marcus Prates: Sim. No Ensino Fundamental I ou II, que seja, eu acho que esses alunos não tem esse letramento matemático tão alto a ponto de usar simbologia, aquela cadeia lógica muito rígida, não é? Vamos dizer assim. Mas você faz esse estímulo de pedir que sempre que eles explicam, que eles digam como é que eles fizeram, porque aí...

P2: Sim, tanto que eles sempre perguntam “prô, eu sei a resposta, mas eu não sei fazer a conta”, e eu digo “escreva seu raciocínio”, aí ele [disse] “pode escrever?” e eu falei “pode escrever”. Então eu não dou zero porque a pessoa não sabe fazer uma conta.

Marcus Prates: Sim, porque aí no caso ele está sendo forçado a pelo menos pensar num caminho, não é?

P2: A pensar no caminho, exatamente. E escrever com palavras.

Marcus Prates: Mas o que eu ia perguntar é o seguinte: você, em algum momento, pede que eles comecem a organizar mais esses pensamentos para, por exemplo, no Ensino Médio, ou alguém que vai seguir carreira na matemática, que seja, que eles já tenham esse hábito de formar uma estrutura mais organizada? Ou você só pede que... Assim, deixa eles livres para eles fazerem como eles quiserem sempre?

P2: Olha, se eu disser que faço com todo mundo, estou mentindo. Agora, tem um menino que ele quer fazer matemática, então com ele eu pego mais firme. Eu digo “não quero que ninguém seja matemático”, mas sempre tem um maluco que é incentivado por mim por fazer. Então com ele eu sou mais rigorosa: “Por quê? De onde veio isso?”, “Você precisa me convencer que você está certo”.

Marcus Prates: Eu estou perguntando não é nem como julgamento, porque eu sei que é difícil a gente levar – porque eu também dou aula para o mesmo segmento. E aí você fazer com que esses alunos que não têm essa base toda e que chegaram com uma certa defasagem e carregam essa defasagem, a gente exigir que eles tenham aquela...

P2: É mais difícil.

Marcus Prates: Aquela escrita muito formal, é mais difícil. Eu estou perguntando... Vai que você faz. Eu não consigo fazer.

P2: É mais difícil. Por exemplo, esse aluno é nono. Aí eu ensinei equação de segundo grau. Aí tem um método de completar quadrados, de Bháskara, obviamente, e tem mais um, meu Deus... Qual é o outro?

Marcus Prates: Tem a fatoração.

P2: E tem mais fatoração, pronto. Aí eu não digo “você vai fazer por esse método”, eu não me sinto no direito de fazer isso. Todo mundo faz Bháskara, aí eu digo “menos você. Você vai fazer pelo menos por dois métodos”, aí ele olha assim para mim: “tudo bem”, e ele faz. Aí eu falo “por quê? Porque na faculdade você vai precisar... Você vai precisar para Cálculo, então eu vou puxar um pouco mais de você, porque você contou seu sonho para mim”. tanto que em olimpíadas ele sempre está lá, por mais que ele não queira, ele sempre vai fazer, porque eu sei que isso é uma porta, que na universidade abre portas lá dentro.

Marcus Prates: Sim, com certeza.

P2: E aí ele sempre se estimula a fazer, a explicar. Por mais que eu nem peça, ele já se acostumou a fazer isso em revisão, em tudo, mas os outros é difícil. Aí eu posso te contar uma pequena experiência: eu sou apaixonada por Olimpíadas. E assim que entrei nessa escola que eu trabalho, não sei se eu posso falar o nome...

Marcus Prates: Inclusive, os nomes que você vai falar eu vou tirar todos tá? Eu vou substituir por...

P2: Então, acabou! Na “bolinha”, não é? Na escola que eu trabalho, assim que eu entrei eu implantei a Canguru, a Olimpíada Canguru. E aí depois a gente foi fazendo a OFMEBA, OMEBA, enfim, fazendo outras olimpíadas. Mas quando eu entro na escola, a escola passou a participar de olimpíadas. E aí eu não fiquei contente só com meu ciclo. E aí foi para o Ensino Médio, que não sou eu, aí desceu para Fundamental I. E aí as professoras não queriam fazer o treinamento olímpico, não queriam ensinar e eu falei “eu vou”. Eu não ganho um real, eu simplesmente vou. E é bacana, porque quando você vai para o chão de fábrica, terceiro, quarto, quinto anos, as mentes estão melhores do que as dos meus, que já estão cansadas, calejadas. Então você pensar numa resolução que use as ferramentas deles para explica-los coloca você na posição que você tem que pensar matemática de novo. E o bacana é que o que às vezes a gente não consegue fazer com os maiores a gente consegue fazer com os pequenos, porque eles argumentam melhor. Eles têm umas sacadas diferentes e eu gosto dessa vivência, do “gurizinho” lá, dos meus alunos. Eles gostam, eles participam. Eles dizem:

- Ai, prô, eu achei que era mais difícil

- Não, é fácil! Você já viu eu dizer que matemática é difícil?

- Meu pai disse que é difícil...

- Seu pai sabe de nada, quem sabe é a prô!

E aí começam a se desenvolver. E aí você percebe que terceiro, quarto ano são medalha de ouro, medalha de prata... E são alunos, assim, que quando chegam querem logo ser meus alunos, só que eu sou do sétimo ao nono. Querem “prô, quero ser seu aluno!”. E aí, quando eles começam a subir do Fundamental I para o Fundamental II, o gosto pela olimpíada já está lá implantado, porque eles já sabem argumentar melhor do que os meus, que alguns chegaram de outras escolas e não têm esse traquejo da olimpíada, da argumentação. E alguns realmente têm pouca habilidade porque sempre ouviram que matemática é difícil. Então eu acredito que a argumentação abre portas, porque ele entende “ó, o pouco que eu sei, ainda assim eu vou ser recompensado, eu não vou zerar”. Então, por isso que eu gosto muito da questão da argumentação.

Marcus Prates: E eu acho que desenvolve também algo que vai além da matemática, não é? Até a gente argumentar de forma lógica em...

P2: A estima...

Marcus Prates: Não, eu digo, assim, argumentar até em outras ocasiões, de a gente construir logicamente algo.

P2: Sim, redação, a eles do nono que estão querendo fazer ENEM. Já é um caminho...

Marcus Prates: Também, também. Até um diálogo, que seja. Embora sejam argumentações diferentes, mas eu digo assim... Acho que a ideia de você precisar criar uma cadeia de coisas para chegar em algum lugar, não é? E você falou aí deles, do pessoal até o quinto ano, eu acho que tem alguns fatores aí. O primeiro é que eles têm menos vícios, no sentido de que quando chega, por exemplo, a maioria do primeiro ao quinto ano é sempre uma pessoa só que dá aula de tudo. Então é aquela pessoa que se desdobra, que sabe um pouquinho de cada coisa, ou que sabe até bem de cada coisa, mas... E aí os alunos quando chegam ao sexto ano estão cheios de vícios. Não posso culpar, não posso botar na conta daquelas pessoas, porque quando sair da minha mão vai estar cheio de vícios também.

P2: E também os meus.

Marcus Prates: É um trabalho que a gente tende a fazer olhar para o outro lado, não é? E essa coisa que você falou de eles trazerem de casa também, apesar disso.

P2: Eu lembro quando, esse ano, que eu fui ensinar equação para o sétimo, aí eles “Meu Deus, letras!”. E eu falei “gente, vocês estão fazendo equação desde sempre”, eu falei, “mas sabe como era no livro de vocês?”, e eu peguei e botei “quatro mais ‘círculo’ igual a ‘tanto’. ‘Triangulinho’ mais...”. Eu falei “sabe por que eu sei? Porque minha filha está fazendo no segundo ano”, eu peguei um aqui eu falei “meu Deus, é equação! Nítida, claramente”. Aí ela falou “não, mamãe, a prô falou que é operação inversa” e eu falei “sim, mas a equação é operação inversa”. Aí eu peguei, eu tirei foto “eu vou mostrar para os meus alunos”. Porque eu digo para eles, eu falei “gente, vocês estão vendo equação desde o segundo, porque quando entra uma letra vocês têm tanta dificuldade...”, eu sempre conto o caso de uma amiga, eu acredito que ela tem antes que ela tenha discalculia, mas nunca foi diagnosticado, até porque é um termo mais novo. Mas quando tinha tipo X na equação, Y, ela fazia sem problema. Super fazia, mas quando tinha “a”, “b”, “c”, “w”, ela não sabia fazer. E eu falei “como é que ‘eu não sei’?”, eu falei “já sei o que eu vou fazer para você, para ensinar. Você vai escrever assim, ó: para ‘a’ igual a ‘x’, para ‘b’ igual a ‘y’”...

Marcus Prates: Para fazer a troca.

P2: E ela [perguntou] “eu posso?”, e eu falei “claro que você pode”. Aí ela começou a fazer assim e ela começou a fazer tudo certo, mas a cabeça dela só funcionava para X e para Y. É a questão do vício que você disse, que trouxe. Provavelmente algum professor em algum momento traumatizou ela com X e Y e ela só sabia fazer com isso, e tem a questão de que ela não conseguia raciocinar diferente disso. Então eu falo para os meus alunos, eu falo assim “minha amiga, para mim, é a expressão viva de que você sabe. Só que tem um caminho que funciona para você, que não é o mesmo caminho que funciona para mim. Então você tem que achar o seu caminho”. Por isso que eu digo: não tem só uma resolução, existem infinitas soluções. Qual é a que você vai conseguir fazer? Você vai seguir esse caminho e vai. Sistema de equação: método da adição e da substituição. Qual você sente mais confortável? Adição? Então faça adição. É substituição? Então faça a substituição, o importante é você seguir seu caminho. Aí eu sempre deixo muito à vontade.

Marcus Prates: Sim. E você está falando de equação... Os alunos conhecem desde sempre, eles conhecem o termo “equação” ... Conhecem. Eles não sabem o que que é, mas eles conhecem. Eu estou com um sétimo ano que ano passado eles já perguntavam “quando é que a gente vai aprender equação?” e eu falei “ano que vem” e começava aquela choradeira de não querer aprender. Aí esse ano a gente começou agora a estudar da álgebra, só que daquele jeitinho: “como é que eu posso expressar esse cálculo aqui se eu não sei o valor total?”. Então a gente monta a expressão algébrica e eu deixo eles livres, se eles quiserem botar um desenho no lugar da variável, eles põem, que seja. E aí tinha um exercício do livro que era para traduzir do português para linguagem matemática.

P2: Para matemática.

Marcus Prates: Só que todos eles eram uma igualdade e eles fizeram. Fizeram a tradução “duas vezes um valor mais ‘não sei que’ igual ‘tal’”. Quando a gente acabou de corrigir, eu falei assim “vocês conseguem me dizer que valor é esse que está faltando aqui?”, ou seja o que eu fiz sem eles saberem? Botei eles para resolver equação.

P2: É verdade

Marcus Prates: Eles resolveram todas. Todas! Aí no final eu falei assim, sabe? O que vocês acabaram de fazer o quê? Vocês resolveram cinco equações? Aí eu falei “o dia que eu botar equação no quadro e vocês errarem, vocês têm que lembrar desse dia que vocês resolveram cinco equações sem saber o que era.

Agora quando vocês souberem o que é, eu não quero ninguém sem saber como é que faz", porque é só falar o nome... Falou o nome, travou. É isso. Só para gente fechar aqui, para fechar as perguntas. Caso você queira pontuar algo mais, fica livre. Também você já falou sobre nas suas respostas anteriores, mas aí, de novo, se você quiser ser mais específica... A pergunta é: quais elementos que você considera válidos, ou que você valida, no desenvolvimento dos argumentos dos seus alunos, quando eles vão validar as respostas deles? Quando eu pergunto quais elementos é... Que tipo de coisa que eles escrevem, que eles fazem, ou que eles põem no exercício, numa avaliação, que você valida para aceitar essa resposta dele? Vou te dar um exemplo: o cara que só responde o número ou que só responde a coisa "seca", não tem o que avaliar ali. Não tem não tem elemento nenhum, certo? Ele só botou a resposta. A pergunta é no sentido de: quando o cara faz um caminho qualquer, o que que você considera como válido ali no meio?

P2: Falei para você que eu julgo o raciocínio, o raciocínio minimamente tem que estar certo. Às vezes até fala "ah, prô, mas a resposta está certa" e eu falo "mas o caminho está errado", então eu não valido. O caminho tem que estar certo, não importa qual caminho seria esse, mas o caminho, ainda assim, tem que dar certo. Um raciocínio tem que ser válido, dentro, matematicamente falando, para ser validado.

Marcus Prates: E aí no caso se eles usarem, por exemplo, fizeram com texto corrido, está valendo.

P2: Não, está valendo. Caminhos...

Marcus Prates: Desenho está valendo?

P2: Também, se... Teve um que fez palitinho. Fazer o quê? Palitinho. Eu disse "ô, amor, aqui é caminho...". Eu sempre uso muito minha filha. A "prô" ainda não tinha ensinado fazer subtração tomando emprestado... Mas a mãe é matemática, aí eu fiquei no dilema "ensino ou não ensino?". Aí eu peguei e falei "mamãe tem uma resolução 'burro de carga'", como meu professor me chamava. Aí ela "vamos fazer palitinho até chegar a um número terminado em zero e depois você vai de 10 em 10" aí ela "ah, assim eu sei" e foi fazendo na lousa dela. E foi, contou, conseguiu responder à questão. E eu falei “mas tem a resolução ‘mocinha’, de uma menina que sabe matemática. Você quer aprender ela?”, aí ela “mamãe, eu quero”. Aí eu fui e ensinei: “você vai tomar emprestado...”, expliquei por que tem que tomar emprestado e tal, e ela foi fazendo. E ela “só isso?” e eu falei “é, só isso”, e ela “assim é mais fácil, quero fazer só assim”. Então, se ele vier com palitinho, às vezes eu vou ter que aceitar, dependendo, se estiverem os palitinhos lá todos certos. Dependendo do desenho também, se for certo... Não pode fazer igual fizeram na prova do meu marido: botou meu marido explicando e o professor dando aula então, aí não rola. Mas se tiver dentro do contexto, eu aceito, sim, escrito.

Marcus Prates: Se tiver dentro do contexto, o raciocínio, não importa a forma que for feito, está certo...

P2: Eu consigo aceitar. Geralmente eles vão ganhando mais corpo. O oitavo, nono ano, eles já estão no nível mais, matematicamente falando, mais velhos, mais maduros. Eu já não tenho mais nenhuma resolução escrita, só escrita, eles tentam algum cálculo. No sétimo, às vezes eu ainda encontro muita questão das divisões em palitinho. Tem um aluno que tem TEA e as resoluções dele, às vezes, tem muito desenho, para ele fazer as contas. Ele não gosta muito de usar calculadora e aí ele faz a fórmula... De área, mesmo, ele não usa fórmula, zero fórmula. Para ele é tudo na mão.

Marcus Prates: Ele constrói.

P2: Ele constrói. Ele é um aluno de inclusão, um aluno que a gente precisa ter um carinho, um olhar diferenciado e ele dá conta do resultado, do recado. então eu aceito, sim.

Marcus Prates: Eu perguntei até para entender porque, por exemplo, quando eu te perguntei lá atrás se você cobrava, ou se você até ensinava alguma escrita mais formal, matemática mais formal, era por isso. Porque, por exemplo, você dá aula para o nono ano, não é? E aí se você vê da mesma forma um aluno fazer uma resolução por desenho no nono ano e no sexto.

P2: O Rigor...

Marcus Prates: Isso que eu queria saber se você cobra... O rigor é outro não é?

P2: O Rigor é outro. Mas comigo, quanto mais tempo eles vão ficando comigo, mais essa escrita matemática vai aparecendo porque eles vão entendendo.

Marcus Prates: Eles vão tendendo para o formalismo, no caso?

P2: Porque é mini teste, é teste, é prova, é tudo aberto. É revisão parte 1, parte 2, parte 3 – e eles ficam dizendo "parte infinita", é muita revisão. Então eles percebem que a escrita, que quanto mais cedo eles forem mais formais... Eu boto "aqui, a área do quadrado igual a L^2", eu vou fazendo. "Prô, eu preciso escrever assim na prova?" e eu falei "melhor, porque você está mostrando a professora que você sabe o que você tá fazendo". "Prô, tem que botar 'a área do triângulo igual a base vezes altura dividido por dois'?" e eu digo "melhor, porque eu entendo que você sabe qual é a fórmula, eu entendo que você sabe identificar o que é a base, eu entendo que você sabe identificar o que é a altura... Então a prô, ela vai pontuando todas essas partes". E aí eles percebem que quanto mais eles escrevem, com mais rigor eles fazem, mais pontos eles ganham. Por isso que eu digo que a escrita do oitavo e do nono, ela já tá mais encorpada. Ela já ganhou mais rigor matemático. Por quê? Porque como eles passam por esse processo do sexto e do sétimo – oitavo e nono foram meus também no sexto –, então do sexto e do sétimo, que eles já ganharam mais esse rigor matemático naturalmente no processo de teste prova abertos, mini teste aberto.... E minha turma do sétimo desse ano é só meu sétimo, não foi meu sexto, eles trazem algumas coisas da antiga professora, mas eles já estão entendendo que a minha prova é aberta. Então, eles têm que fazer todos os cálculos, tem que justificar todos os passos. Agora doeu, primeira unidade muitas notas baixas, segunda unidade, que a gente ainda tá fazendo também, eles estão se adaptando ao meu modelo, a primazia do argumento do que a resposta final sendo certa. Então eles já entenderam, não adianta pensar com a prô, porque a resposta final certa não pontua.

Marcus Prates: Sim, tem um processo de adaptação também.

P2: É o processo de adaptação.

Marcus Prates: Por mim fechamos. Tenho bastante coisa interessante aqui, tem tudo que eu preciso. Você quer pontuar mais alguma coisa?

P2: Não... Agradecer pela oportunidade e espero que dê certo.

Apêndice H – Transcrição da entrevista com o participante P3

Marcus Prates: Confirma para mim, por favor, que permite a gravação, para ficar gravado aqui no áudio.

P3: Permito. Espero que seja de bom êxito para o seu trabalho.

Marcus Prates: Ótimo, obrigado. Vamos lá... Qual foi o ano e qual foi a instituição que você se formou? Na faculdade, sua graduação.

P3: Eu tive duas formações, uma já há um bom tempo, isso.... Eu tenho 55 anos. Já faz uns 20, 25 anos, eu tinha feito uma primeira entrada na formação de matemática em uma universidade estadual no Ceará, aqui. Eu concluí, só que na época eu não tinha plenificado. Tinha um outro formato, esse curso, no passado, e eu não tinha plenificado para matemática. Eu tinha opção de plenificar para matemática, física, biologia e química, mas eu não fiz nenhuma dessas. Agora, em 2017, apareceu uma oportunidade para a mesma faculdade, coincidentemente, e eu fiz o vestibular já perto dos 50 anos. Voltei para sala de aula, foi uma experiência maravilhosa. E no curso é um curso semipresencial, estilo EAD, a gente acionava... Tinha o *Moodle* como plataforma de ensino, mas tinha aulas, encontros presenciais todo sábado, era manhã e tarde. Um curso de 4 anos, foi uma experiência maravilhosa e foi em matemática pura, mesmo. Eu fiz também dentro da mesma instituição. E eu concluí... O final do curso já não foi como a gente esperava porque foi dentro da pandemia. O último ano foi dentro da pandemia, aí aquela parte de estágio, que realmente era necessário, eu, pela idade, precisava ter uma vivência maior dentro de sala de aula, mas foi um pouco prejudicada. Mas a gente concluiu, mesmo com curso à distância e a gente fazendo o estágio que foi todo remoto. Os alunos ficaram em casa e aí a gente acompanhou aulas que a gente via que não eram perfeitas, que os alunos em casa não têm aquela mesma qualidade do ensino presencial.

Marcus Prates: É outro formato. Mas, no caso, você terminou em que ano, essa graduação?

P3: Terminei em 2021

Marcus Prates: E aí foi licenciatura mesmo, não é?

P3: Licenciatura plena em matemática.

Marcus Prates: Entendi, ótimo. E pelo que eu vi aqui, até agora não teve uma pós, ainda, não é?

P3: Não. A minha a minha formação profissional foi outra, eu sou técnico em telecomunicações. Matemática sempre foi um desejo, sempre gostei. Até que achava que tinha um bom acompanhamento desde o Ensino Fundamental, o Ensino Médio... Mas a minha formação profissional é... eu estudei aqui em uma escola técnica federal. Eu fiz a formação de telecomunicações e isso foi minha vida profissional quase completa. Só que um ano atrás eu saí da empresa, que tinha passado já 33 anos e aí eu fiquei desempregado, como estou até agora. E a ideia da segunda formação, em matemática, não era nem pensando em demissão, mas seria uma segunda opção para compor o meu tempo, trabalhar junto com a aposentadoria.

Marcus Prates: Sim, para você tem um leque.

P3: Isso. E unir o útil ao agradável, porque eu gosto de sala de aula, gosto de transmitir conhecimento e seria, também, uma composição do orçamento familiar, também, para poder continuar.

Marcus Prates: Agora uma pergunta mais direta, que a gente já passou por isso lá naquelas duas outras etapas que você participou, que foi aquele formulário, lembra? E uma correção que eu te mandei?

P3: Lembro

Marcus Prates: Uma pergunta mais direta sobre algo que a gente passou perto ali é: o que você entende, qual é a sua concepção, seu entendimento sobre argumentação e prova matemática?

P3: Argumentação do professor?

Marcus Prates: Não, argumentação matemática. Argumentação e prova matemáticas.

P3: Me dá uma luz melhor, qual é o “norte” de argumentação que você está me pedindo?

Marcus Prates: Não é argumentação dialética, de conversa... É argumentação matemática, mesmo, dentro da matemática, no caso.

P3: Eu ainda estou em dúvida [sobre] como é que eu te ajudaria nessa resposta. Argumentação no sentido de um ramo da matemática?

Marcus Prates: Eu não diria um “ramo”, pode ser visto como um recurso dentro da matemática, ou algo que acontece dentro da matemática. Por exemplo, se você pensar o contrário: te perguntei de argumentação e prova. E se você me responder o que que você pensa sobre prova matemática antes da argumentação?

P3: No sentido de avaliação?

Marcus Prates: Não de avaliação, no sentido de provar

P3: Certo, eu não sei se eu vou no “norte” da tua ideia das perguntas...

Marcus Prates: Tudo bem.

P3: Pela minha pouca vivência como docente, eu sempre achei que, para o aluno ter maior segurança para o entendimento matemático, ele tem que entender os argumentos iniciais da explicação de algo matemático. Ele tem que ter a base para não ficar naquela situação de ficar só à base de exemplos. Eu vejo muito aluno que quer estudar matemática só em cima de exemplo. Mas eu acho que ele precisa entender, se tem alguma forma alguma fórmula matemática, eu sempre gostei de professores que faziam a explicação [de] qual é o início daquela fórmula. Para a gente entender, não só “mastigar” a fórmula, mas a gente entender como como foi criado, o porquê da coisa, para ele ter mais segurança na resolução de exercícios deles. A prova matemática, eu entendo que seja o maior embasamento do início de algum fundamento matemático. O aluno precisa entender que, por exemplo, o teorema de Pitágoras... Como é que ele nasceu? Ele precisa entender com aquelas fórmulas do triângulo retângulo para poder entender como é que ele chegou naquela situação de hipotenusa ao quadrado é a soma dos catetos ao quadrado. Ele não só se basear nessa fórmula já pronta, mas entender como essa fórmula chegou até ela, como é que os teoremas foram feitos. Aí eu acho que a prova matemática, eu entendo nesse sentido, que é importante quem está estudando não só consumir o que já foi feito, mas entender como é que foi feito. Eu acho que aí dá um maior entendimento para ele dar continuidade à resolução dos exercícios dele e entender. Até porque, agora o estilo de avaliação, tomando como base o Enem, ele é muito subjetivo, não é? Você tem que ter um entendimento de leitura para poder você desenvolver uma questão.

Marcus Prates: É interessante que, no começo da sua resposta, você fala de argumentar, do aluno argumentar, e é nesse sentido que eu estou te perguntando sobre argumentação. E eu volto a pergunta: você falou da prova. Mas, pensando por esse lado, que você citou sobre argumentar, sobre ter argumentos – argumentação –, o que você entende por essa argumentação? O que que você acha que é? O que você compreende que seja essa argumentação dentro da matemática?

P3: Eu vou na mesma linha, eu acho que que os dois têm o mesmo sentido. A argumentação precisa existir de forma entendível, [de forma que] quem está consumindo, quem tá recebendo um conhecimento pela primeira vez, ou uma consolidação de um conhecimento que ele já tinha e quer avançar – no sentido de dificuldade, de uma evolução... A gente, quando está estudando, a gente começa com aritmética, alguma coisa mais simples, e vai evoluindo... Chega no cálculo, chega uma coisa que precisa de um entendimento maior. Então, o argumento vem para ir consolidando o conhecimento de matemática, nesse sentido... Sempre com fundamento, porque o aluno precisa entender não só como exercício é feito, como o problema é resolvido, mas o argumento vem no sentido de ele entender as ferramentas que ele usará na matemática para chegar no resultado final que ele quer, que ele precisa encontrar deve ser exato, não é? Isso a construção de entendimento. Então o argumento vem para ajudar a consolidar o ensino exato na matemática.

Marcus Prates: Na sua formação, na sua graduação, você falou que tinha feito uma antes, que poderia ir para três áreas diferentes, não é? E encerrou, depois entrou em 2017 e fechou em 2021, a graduação em matemática/licenciatura, não é? Nessa sua formação, seja na de agora, ou na anterior, você lembra de ter tido, ou você sabe se teve nessa anterior, que tem muito mais tempo, algum contato direta ou indiretamente com esse tema da argumentação? Quando eu falo “direta ou indiretamente”: teve alguma disciplina voltada para argumentação, ou alguma coisa assim? Ou, de forma indireta, que eu digo, é se dentro de uma outra disciplina, por exemplo, Análise Real ou Álgebra Linear, alguma disciplina assim, alguém usou esse recurso da argumentação e você identificou que era argumentação... Você lembra se teve esse contato na faculdade?

P3: A primeira graduação, eu vou ser sincero que não [lembro]. Porque vão lá uns bons... perto de 30 anos. Mas a segunda formação, agora em 2021, tive excelente professores, muito bons professores, que que eles tinham uma dinâmica de aula que realmente eles gostavam de explicar o argumento matemático. Eles gostavam de provar como a gente chegou naquele entendimento. Eu me lembro de Análise Combinatória, que o professor... A gente chegava na fórmula, no pensamento que a gente precisaria usar para desenvolver os exercícios, e ele realmente tinha um desenvolvimento. O professor de Cálculo, também muito bom, fazia um preâmbulo, que a gente tinha um entendimento bacana, então a gente sentia bem mais seguro. Como o sistema era EAD, quando a gente acessava, tinha, se eu não me engano, três atividades obrigatórias, mais uma prova no sistema *Moodle* e outra prova presencial no sábado, e a gente se sentia bem mais seguro em alguns professores, que eles faziam esse desenvolvimento, esse início, essa explicação usando argumentos e provas matemáticas que dava bem mais segurança para a gente desenvolver. Eu, que já estava há um bom tempo parado, me encontrar com professores desse estilo foi bem legal. Nessa segunda formação, eu posso te dizer que eu tive bons professores e que usavam o argumento e a prova como base no desenvolvimento das aulas dele.

Marcus Prates: No caso, era como se as disciplinas... você falou de...

P3: Eu me lembrei aqui, Análise Combinatória e um professor de Cálculo.

Marcus Prates: No caso, eles usavam esse recurso para os teoremas?

P3: Isso, isso.

Marcus Prates: Aí, no caso, por exemplo, lá na sua avaliação que você comentou, em Cálculo, ele pedia para vocês provarem teoremas, alguma coisa assim? Era assim que funcionava?

P3: Isso, era... Mais ou menos. Na explicação dele... A gente só tinha um encontro, era um sábado completo. E aí, geralmente ele fazia um... Pelo tempo ser curto, eu me lembro dessas duas disciplinas que eles tinham um desenvolvimento muito bom de explicar os teoremas que a gente usaria na disciplina e eles faziam uma explicação bem bacana, no sentido de fazer... De provar por que o teorema seria daquele formato.

Marcus Prates: Entendi, perfeito. Você como, professor... Você botou aqui, naquele formulário, que você chegou a atuar um tempo em sala de aula, não é?

P3: Isso. Da primeira formação eu tive uns dois anos, eu peguei no ensino público. Eu tive dois anos no contrato de professor que a gente chama professor temporário, professor substituto. Trabalhava pela manhã na área de telecomunicações e passei uns dois anos dando... Era Ensino Fundamental, alunos de sétima e oitava... não tinha nona, não. Não tinha tido aquela ainda aquela mudança do ensino, não.

Marcus Prates: A mudança né?

P3: Aí trabalhei dois anos na área de ensino.

Marcus Prates: Entendi. E você como professor do Fundamental, que você falou, não é?

P3: Foi

Marcus Prates: Você como professor – claro que cada um trabalha de um jeito – mas você como professor, como é que você, em sala de aula, estimulava os seus alunos a desenvolver os próprios argumentos, ou talvez até aprovar alguma coisa em sala de aula?

P3: Eu tentava levar material concreto para sala de aula. Por exemplo, vou te dar um exemplo: Circunferência... Provar o comprimento da circunferência. Aí eu levava vários círculos de vários tamanhos diferentes, pedia para ele fazer a medida do raio... E do diâmetro do raio para comprovar porque é que o pi sempre dava aquele valor de 3,14. Aí, gostava de levar o material concreto para ficar até mais lúdico, o desenvolvimento da sala de aula, para depois eu levar a teoria para o quadro e eles entenderem o porquê o cumprimento da circunferência tem aquela forma e eles terem o entendimento. Tentava usar um argumento usando material concreto para comprovar a forma que eles iriam usar... Aí tentava nesse sentido, de levar um material concreto para poder deixar a aula mais dinâmica e o entendimento dele serem melhor.

Marcus Prates: No caso, para eles terem esse recurso da visualização, do visual, e, a partir disso...

P3: Sim

Marcus Prates: E aí, por exemplo, e se fosse algum caso... é que eu também, no primeiro momento, só penso em geometria. Você falou do comprimento da circunferência e aí eu penso na soma dos ângulos internos do triângulo... Mas, por exemplo, se fosse tentar mostrar que todo número par é divisível por dois, alguma coisa assim que não envolva a geometria... Eu não sei algum exemplo que você tenha trabalhado, porque você que estava em sala de aula. Mas nesses casos que não envolvem geometria, como é que você como é que você estimularia essa argumentação para tentar provar algo para os seus alunos?

P3: Já fazia um bom tempo. Especificamente desse tempo passado, eu nem lembro mais a minha dinâmica, mas, trazendo para os dia de hoje, é tentar fazer uma preparação de aula mais – vou até dizer uma palavra estranha – até mais humilde... a gente procurar estudar, mesmo, para a gente chegar em sala de aula e realmente... Toda a disciplina de matemática, ela, eu acho que, dentro do seu trabalho, precisa de uma argumentação e uma prova boa para poder... Hoje, a minha intenção...

Nessa minha segunda formação, eu ainda tive pequenos momentos de sala de aula. Além do estágio, ainda fiz umas ajudas dentro de um colégio particular sobre... Ajuda de aluno fora de sala de aula, assim, complemento para resolver atividade, tudo... Aí, como o tempo era muito curto, tinha que ser bem específico nos exercícios, eu não tinha muito espaço para fazer argumentação e provar nada.

Marcus Prates: Era mais uma complementação, não é? Uma complementação do que ele vinha em aula, não é?

P3: É... mas a ideia hoje, realmente, assim... Pelas experiências que eu tive com aluno, e vendo também outros professores, realmente [em] qualquer assunto matemático é importantíssimo fazer uma boa argumentação e uma boa prova para o entendimento do discente ser bem melhor, não é? Então, o pensamento hoje realmente, se por qualquer matemático, a gente fazer um estudo para poder, na apresentação da disciplina, a gente começar da base da base daquele assunto, a gente ter uma ideia do argumento, para poder... Aí cada professor tem a sua tem a sua didática, não é?

Marcus Prates: Vai para vai para um lado, é?

P3: É, mas a gente tem que fazer uma autocrítica, que a gente, não só a base de avaliação, mas até na vivência do dia a dia, na disposição do aluno de prestar atenção... Quando o professor usa argumentos bons a gente nota logo o aluno mais motivado. Então, assim, a importância de a gente estudar bem o início do assunto que a gente vai expor – o assunto matemático –, a gente tem que estudar bem, fazer uma didática boa, de a gente sempre usar um argumento e a prova para a gente explicar o início daquele assunto para o entendimento ser melhor e o desenvolvimento do aluno também.

Marcus Prates: Sim. No caso, fazer como se fosse um processo simultâneo, não é? Assim, enquanto você vai desenvolvendo um assunto, vai levando esses alunos a tentarem... Vai apresentando nessas essas provas ao mesmo tempo que eles vão tentando desenvolver os próprios métodos, não é?

P3: A ideia é essa. Eu acho que o entendimento matemático ele só se concretiza se o aluno tiver uma argumentação boa. E aí depende muito do professor, de desenvolver e mostrar ele. E aí quando ele estiver consumindo, quando ele estiver estudando de forma solitária, ele ter uma segurança do que ele está fazendo, dar sentido as coisas. Muita gente não gosta de matemática, às vezes porque a base não foi boa, aí vai desencadeando um bocado de desgosto e aí ele sempre bota na mente dele que não gosta de matemática, mas não vive sem matemática. Então, uma melhor convivência com a matemática vai ser bom para ele com certeza, no desenvolvimento dele.

Marcus Prates: Sim. E aí para a gente fechar – e é claro que a gente pode talvez entrar num outro assunto aqui –, mas dentro do previsto para a gente fechar: você como professor... Você recebe uma resposta de um aluno seu, seja num exercício, numa prova, numa avaliação qualquer... E aí pensando de forma muito ampla, muito geral, quais são os elementos, ou que tipo de resposta, ou o que tem numa resposta desse aluno o que você considera, o que você valida, no desenvolvimento dos argumentos dele para validar as respostas dele, ou alguma prova que ele venha tentar fazer? Em outras palavras, se um aluno te dá uma resposta, o que você considera válido no argumento dele para provar o que ele está querendo te mostrar?

P3: Eu tento, assim, até não no sentido de ajudar, porque a gente tem que ser justo, está avaliando, não é? A gente não pode, também, criar fantasia. Compondo o que eu espero de uma resposta dele, dentro do exercício, ou de um exercício cotidiano, ou então uma prova, eu tento aproveitar todo o desenvolvimento dele. Eu tento buscar como ele chegou àquela resposta. Muitas das vezes ele se engana em apenas em cálculos, apenas em aritmética. Aí eu tento um pontuar todo o desenvolvimento dele, o entendimento dele mais básico. Eu tento compor uma nota aproveitando, dentro do que ele tá me apresentando... Que o meu material de trabalho vai ser só o que eu estou vendo, não é? Não é uma prova oral, é uma prova escrita. Então, dentro do que ele... Eu tento aproveitar tudo que ele está me apresentando. Se ele começou a compor uma fórmula e o início da fórmula estava “semi-errada”, já tento não desprezar tudo. Geralmente eu procuro em cada resposta... A minha intenção é não zerar total, se ele me ajudar, [mas] se ele realmente apresentar uma coisa totalmente diferente, aí não tem como. Mas se eu entender que ele... O início do desenvolvimento dele tinha algum fundamento, aí eu entendo que ele não está sabendo por completo, mas também não vou zerar porque eu entendo que ele está sabendo algum princípio, alguma coisa, não é? Eu tento ser justo, nesse momento

Marcus Prates: Sim... A você tinha falado que você sempre tentava levar material concreto para sala de aula. Se fosse um caso, por exemplo, de um aluno apresentar um esboço de prova, ou dentro da prova dele apresentasse desenhos, alguma coisa assim, você consideraria válido como uma construção de prova, como uma argumentação que ele fizesse a utilização de desenho, por exemplo?

P3: Se ele apresentar com fundamento... Eu acho que eu já me deparei com situações dessa. Eu acho que, sim, voltando também para trigonometria também, sabe? Se ele me apresentar algo dentro do que está sendo questionado daquela questão, eu também levaria em consideração, sim.

Marcus Prates: Entendi. E, geralmente – você até falou disso na sua formação –, quando a gente pensa em prova, a gente, como pessoas que têm mais contato com a matemática, a gente pensa naquela coisa com textos muito formais, com textos matemáticos, que eu digo, muito formais... E aí sempre a gente introduz com argumento, e tem uma implicação e no final a gente prova, a gente tem a prova. Você espera que os seus alunos apresentem esse tipo de prova mais formal, que a gente geralmente aprende na graduação, ou não necessariamente? Porque você está falando assim “eu consideraria desde que tivesse um fundamento”, mas esse fundamento deles precisa ser muito formal, ou você não liga que seja informal, que seja uma coisa mais ingênua, desde que tenha um fundamento?

P3: Na simplicidade tem coisas geniais, não é? Se ele me provar, ele vai chegar à resposta, assim... Numa questão mais complexa, se ele vier só com resultado, não. Mas se ele me apresentar mesmo de forma simplória alguma coisa que o levou aquele resultado, com certeza a gente leva em consideração. Se ele fizer... Os bons alunos, que tem um esmero maior na apresentação do trabalho dele, geralmente, ele já... Por trabalhar em Ensino Fundamental, não tinha não tinha tanta complexidade. Mas tive bons alunos, que a gente tinha vivência em sala de aula, que a gente via aquela qualidade de prestar atenção, de se preocupar, de tirar dúvida, e realmente a qualidade das provas tinham não só o desenvolvimento, mas tinham argumentos e provas explicando o resultado final. E eu acho que é importante, que a gente avalia não com maior qualidade, que tem que ser justo com todos, mas a gente a gente dá um louvor, um retorno, um feedback para o aluno que o desenvolvimento correto é aquele, de ele usar bem o argumento dele e a prova para o desenvolvimento matemático dele.

Marcus Prates: Por mim, damos por encerrada, a conversa. Para mim já tem bastante material, já está ótimo, mas se você quiser acrescentar alguma coisa, fique à vontade. Se não, eu encerro a gravação.

P3: Eu agradeço aqui de forma que... Podia dar, assim, como professor que tivesse mais... Eu acho que até você pode usar o meu exemplo como professor inexperiente. Mas, assim, espero se você se deparar com professores com mais experiência, acho que que você vai ter respostas mais objetivas do que você está querendo. Mas eu acho que lhe fui útil no sentido de eu ser um exemplo de um professor que não está com tanta vivência em sala de aula. Eu acho que você pode até no seu material - espero que ele tenha ajudado

Marcus Prates: bastante

P3: No sentido de você fazer parâmetros em tipos de professores: professores que estão com mais experiência em sala de aula, os que não tem a formação mais antiga, ou mais presente... Então espero que tenha ajudado.

Marcus Prates: Aqui a ideia não é não é avaliar vocês, mas de fato a gente conversar para entender o seu o seu posicionamento a respeito do que eu te perguntei, entendeu? Então a ideia não é essa de comparar, nem nada disso, não. É a gente ter esse parâmetro mesmo. Mas já me ajuda muito!

Apêndice I – Transcrição da entrevista com o participante P4

Marcus Prates: Já pus para gravar. Só para efeitos de formalização: eu tinha pedido a sua autorização antes de começar, só confirma, por favor se está autorizada a gravação do áudio e a transcrição do diálogo.

P4: Está autorizado, sim. Está tudo autorizado.

Marcus Prates: Então vamos lá... Como eu tinha dito, eu vou te fazendo algumas perguntas aqui e aí, conforme for, pode ser que surja alguma coisa no meio do caminho e a gente vai conversando sobre isso, tá? Talvez, em algum momento, eu traga algumas respostas que você deu no formulário daquela segunda etapa, mais para complemento, mesmo, para complemento do que você disser, ou... Enfim é para você relembrar algumas coisas, mas só caso seja necessário.

P4: Tranquilo, sim

Marcus Prates: Então vamos lá. Fala para mim, por favor, qual foi o ano e qual foi a instituição que você concluiu o seu curso de graduação.

P4: Eu concluí o curso de graduação no ano de 2022, em uma instituição federal.

Marcus Prates: Ótimo. Eu ia perguntar onde você concluiu sua pós-graduação. Mas você cursa o mestrado ainda, não é isso?

P4: Exatamente. Eu estou cursando o mestrado em ensino de matemática em uma universidade federal também no Rio de Janeiro, nesse momento, desde 2022.

Marcus Prates: Beleza. E a linha de pesquisa em qual área?

P4: História da Matemática. Mais especificamente, a história da geometria no século XIX

Marcus Prates: Entendi. E a próxima pergunta é: o que você entende por argumentação e por prova matemática?

P4: Cara, por argumentação eu entendo [que é] aprender a sustentar alguma linha de raciocínio de maneira geral. Por exemplo, você quer convencer de que algo é verdade... É você sustentar uma cadeia de raciocínio lógico para mostrar que aquele raciocínio tem coerência. Então, tentar definir argumentação de maneira geral, eu acho que seria isso, você tentar defender uma linha de raciocínio que mostra que a sua ideia tem coerência, que leva à conclusão de que aquilo que você está falando é uma verdade. E, mais especificamente, prova em matemática seria você utilizar argumentação, você utilizar uma cadeia de raciocínio, de passos específicos para você chegar à conclusão de que algo é verdade. Eu quero provar uma afirmação em matemática... então vou fazer uma cadeia de raciocínios coerente, que levam à conclusão de que o isso que eu estou tentando provar é verdade, é verídico dentro do campo teórico no qual eu estou tentando argumentar.

Marcus Prates: Então, no caso, você viu como coisas distintas, não é? Um é o processo e o outro é o produto final, alguma coisa assim.

P4: Perfeitamente. É claro e, logicamente, pelo menos para mim, é óbvio que a gente tem que usar argumentação para que a gente possa concluir uma prova.

Marcus Prates: Entendi, beleza. Agora a pergunta que eu ia te fazer antes... Durante a sua graduação, ou no mestrado você teve algum contato, seja direto ou indireto, com esse tema da argumentação matemática? E aí, só para explicar o que que eu estou querendo dizer com direto e indireto: contato direto seria alguma disciplina voltada para isso, seja optativa ou não, ou mesmo durante alguma aula, se algum professor ou professora dizia claramente “isso aqui é argumentação, isso aqui é uma prova”; ou de forma indireta, que é você perceber que estava sendo usado esse recurso em sala de aula e aprender dessa forma, observando. Você teve esse contato em algum momento?

P4: Eu diria que sim, eu não tive uma disciplina especificamente com esse nome assim, com essa metodologia, esse objetivo muito claro, mas eu tive uma disciplina que se aproximava muito disso, que foi “Fundamentos da Matemática”. Nela, o foco da disciplina era aprender a provar coisas em matemática. Essa disciplina era mais voltada para álgebra de números inteiros e um pouco para conjuntos, mas ela apresentava a parte inicial de lógica, de proposições, etc, mas ela se voltava a tentar mostrar como se faz provas em matemática. Era uma disciplina do início da graduação, então a gente provava várias proposições, vários teoremas de aritmética, de números inteiros... Mas o foco da disciplina era aprender a fazer provas em matemática, provar que algo é verdade. Mesmo que as coisas, para a gente, fossem óbvias, mostrar que na matemática as coisas precisam ser demonstradas dentro de um campo teórico e às vezes usando os axiomas da teoria. E teve outra disciplina também, chamada “Álgebra I”, que o foco era álgebra, porque a disciplina era “Álgebra”, mas tinha um foco também no que é o método axiomático, o que são axiomas e como se prova as coisas dentro de matemática, dentro do método axiomático. Mas uma disciplina voltada especificamente para as reflexões de argumentação em prova, eu não tive.

Marcus Prates: Entendi. No caso, então, era então como se fosse assim: o conteúdo ele acabava sendo direcionado para esse lado, não é? Não que era uma disciplina de argumentação, mas ela era basicamente voltada para esse ponto. Na verdade, você tá falando muito de prova.

P4: Perfeito

Marcus Prates: Parece que ficou claro para você era que a vocês estavam tentando provar coisas, mas em algum momento isso foi diferenciado? O processo argumentativo foi diferenciado da prova, ou não? De forma clara, que eu quero dizer.

P4: Que eu me lembre, realmente não. O que você falou está correto, a gente estava aprendendo a fazer provas dentro de matemática. A disciplina “Fundamentos da Matemática” que mencionei, ela se voltava especificamente para esse fim, mas para aprender a fazer provas de teoremas do que com os próprios teoremas específicos que a gente estudava. Mas em nenhum momento teve uma diferença entre o que é argumentação, o que é prova, ou alguma reflexão mais profunda sobre o processo de argumentação e a diferença, o processo de prova. A gente aprendeu a fazer prova de teoremas dentro da do contexto da matemática.

Marcus Prates: No caso, dos teoremas que geram previstos fossem trabalhados, não é? Mas, por exemplo, dentro de alguma disciplina você tinha algo que não necessariamente fosse um teorema, mas que você precisava provar um caso geral, ou mostrar um caso geral... se lembra se teve algo similar a isso? Que você tinha que tentar... Tipo aquelas perguntas assim “prove que ou mostre que...”, e aí que não era necessariamente um teorema que você já foram ver em sala de aula, entendeu? Que era algo que você tinha que, de fato, começar do zero para tentar mostrar. Você lembra se teve isso? Esse estímulo, que eu quero dizer... Esse estímulo dentro da do teu curso.

P4: Olha, que eu me lembre, não muito. Não Muito... foram coisas mais específicas, mesmo. Na disciplina “Geometria Plana”, por exemplo, a gente teve muitas questões que eram mais voltadas em provar teoremas... Não teremos específicos da disciplina, mas provar algumas afirmações de geometria plana e não tanto em fazer contas, em fazer cálculos. Tipo “prove que isso é verdade”, “prove isso...”, “prove aquilo”, para a gente treinar essa habilidade de demonstrar coisas dentro da geometria plana, focar mais na parte de demonstrar coisas do que só em calcular ângulos, ou decorar formas e etc. Mas essa reflexão mais voltada para argumentação, para prova em si, do que para prova de teoremas específicos e dentro de um contexto específico, dentro de disciplinas específicas, nem tanto... Não.

Marcus Prates: Beleza. Agora... Isso eu estou te perguntando você como aluno, como aluno de graduação e de pós-graduação. Mas aí você como professor, agora: de que jeito, de que forma, quais são os caminhos que você toma – e se você toma esses caminhos –... De que forma os seus alunos são estimulados a desenvolver seus próprios argumentos e provas em sala de aula?

P4: Então... Primeiramente, sempre que eu vou iniciar um assunto, eu tento mostrar para os alunos que o mais importante naquele assunto não são as formas, ou saber fazer os cálculos, ou lembrar dos teoremas, e sim captar as ideias por trás desses teoremas, qual que é a ideia por trás dessa coisa, e mostrar com uma cadeia de raciocínio como que essa ideia vai se envolvendo até se chegar aos teoremas desejados. Então já tento fazer essa abordagem diferente, já tento deixar bastante claro o tempo todo que o mais importante do processo de aprender matemática é se conectar àquelas ideias, que aquelas ideias façam sentido, e a partir dela produzir novos raciocínios. E eu tento conduzir isso da forma mais coerente possível. Para mim, o mais importante é fazer sentido para o aluno, não ele lembrar das fórmulas. Tanto que no período que eu dei aula em escola, tive uma turma de oitavo ano que quando eu aplicava uma prova, uma avaliação, prova mesmo, eu colocava todas as formas que a gente viu no quadro... Eu não fazia questão que nenhum aluno decorasse a fórmula nenhuma. Eu admitia soluções que não fossem aquelas idênticas às fórmulas que eu coloquei durante a aula. Por exemplo, vamos supor que um aluno resolveu um exercício da prova de maneira completamente diferente do que eu ensinei em sala de aula, mas eu percebo que ele desenvolveu um raciocínio coerente, que o que ele escreveu faz sentido e tem uma lógica por trás disso, que leva à conclusão... Então sempre levava isso em consideração, mesmo que tivesse escrito de maneira desorganizada, ou mesmo que não fosse do jeito que eu coloquei em sala de aula. Mas eu confesso que eu não movi nenhum esforço específico para mostrar o processo de argumentação ou processo de prova dentro da sala de aula, não foi uma coisa específica que eu fiz.

Marcus Prates: No caso, era como se fosse um estímulo à independência, não é? Não importa de que forma eles trouxessem o argumento, desde que esse argumento fizesse sentido. Não precisava ser aquela coisa muito organizadinha, não é?

P4: Perfeito, exatamente. Mesmo que ele fizesse alguns cálculos ou alguns desenhos que tivessem bagunçados, se desse para captar que existia uma organização lógica ali que faz sentido, eu pontuava. Outra coisa que eu fazia, também, era deixar bem claro que o mais importante na hora não é chegar, necessariamente, na resposta correta. Que a resposta correta – claro que a gente espera que seja a resposta correta – mas que ela valia muito pouco, vale muito mais a pena um raciocínio que faça sentido do que chegar à resposta que eu estou esperando para aquele problema.

Marcus Prates: No caso, é como se... É até uma pergunta que estava naquele outro formulário, que eu perguntava se você admitia só a resposta final. E, no caso, você reafirma isso, que a resposta final não é o mais importante, o importante é esse processo que ele vai passar. Eu achei interessante você dizer que você botava a fórmula no quadro, mas o que você pedia era algo que não estava... Que estava meio fora daquilo, não é? Eles tinham que mostrar isso, é? Não sei se eu entendi certo.

P4: Não, eu tinha algumas questões específicas... No caso, as provas, a maioria que eu passei tinham 10 questões que os alunos tinham que responder e tinha, claro, a ver com os assuntos trabalhando na sala de aula, mas eu não exigia que eles decorassem as fórmulas. E mesmo que eles chegassem às conclusões sem, necessariamente, usar as fórmulas que eu passei, ou fazer do jeito que eu ensinei dentro da sala de aula, se o raciocínio dele, por mais tenha sido diferente do que foi visto em sala de aula, fizesse sentido, tivesse coerência, eu pontuava mesmo assim. E reforçando: mesmo que eles não chegassem necessariamente à resposta correta, eu descontava uma certa pontuação muito irrisória, mas eu considerava, por exemplo: "esse aluno não acertou a questão. Ele teve um erro de cálculo, mas a ideia foi sentido.", se ele começou fazendo certo, se a solução dele faz completamente sentido, mas ele errou uma conta, errou uma multiplicação, um sinal, eu descontava pouquíssimos pontos. Porque, para mim, o mais importante sempre foi o processo do raciocínio do aluno, e não chegar à resposta correta. Então era o que eu mais dava valor, no caso, na hora de fazer a correção da avaliação.

Marcus Prates: Entendi. Era como se fosse assim: o foco da tua avaliação... Por exemplo, você estava falando de polinômios. Aí, claro que o foco é polinômios, então coisas que eram além você desconsiderava alguns erros mais superficiais porque não estavam relacionados diretamente a aquele tema, não é? É como se fosse um foco, mesmo... Seu foco era avaliar outra coisa, não era avaliar esses errinhos, não é?

P4: Perfeitamente

Marcus Prates: E meio que você responde a última pergunta sem eu ter feito essa última pergunta. Que era isso: quais elementos, ou que tipo coisa você considera no desenvolvimento dos argumentos dos seus alunos? Eu sei que é uma pergunta um pouco aberta demais, mas o objetivo dela era justamente com o que você falou, sabe? Que tipo de elemento você considera como importantes numa argumentação de um aluno seu? E aí você meio que já deu essa resposta prévia, que está diretamente ligada à sua forma de estímulo. Sua forma de estímulo era deixar que eles argumentassem livremente, desde que fosse algo que fizesse sentido, não é?

P4: Sim, inclusive, dando um exemplo, vamos supor que o assunto da aula era equação do primeiro grau. Aí eu passava uma situação problema, o aluno tinha que resolver um problema contextualizado, que poderia ser resolvido por uma equação de segundo grau. A ideia era o aluno ler aquela situação problema, conseguir montar uma equação que representasse aquele problema e resolver essa equação. Mesmo que ele não montasse uma equação, mas que ele tivesse lido a situação problema e construído um raciocínio que condiz com aquela situação, que levasse à resposta, eu pontuava mesmo assim. E se ele tivesse algum erro de cálculo, por exemplo, eu descontava um pontinho muito irrisório, mas eu avaliava muito mais se ele teve um raciocínio que faz sentido para abordar aquele problema.

Marcus Prates: Que aí vai até da compreensão dele do que tá sendo pedido, não de algum desliza que ele possa ter cometido.

P4: Perfeitamente

Marcus Prates: Você falou de exemplo. A gente tem casos de alunos que vão tentar provar algo dando exemplos, como se fosse por recorrência. Só que eles não vão ter, talvez, dependendo do nível dos seus alunos, eles não vão ter essa maturidade de fazer uma prova por indução, ou começar por recorrência, analisar um padrão, enfim... Quando eles trazem exemplos, como é que funciona isso para você? Você considerar o válido? Vamos pegar um caso, o Teorema de Pitágoras. A gente pode pegar as relações métricas, falar de semelhança... E quando a gente fala de semelhança, a gente chega nas relações métricas e, por fim, no Teorema de Pitágoras, que é uma outra relação métrica. Se eles dessem exemplos para tentar "provar" o Teorema de Pitágoras, ou qualquer outra coisa que seja, como é que você lida com isso?

P4: No caso, exemplos numéricos que funcionem, alguns exemplos específicos... Nesse sentido?

Marcus Prates: Exemplos numéricos, é. E aí eu posso dar outros exemplos: na soma dos ângulos internos de um triângulo, eles poderiam construir um triângulo, medir os ângulos e somar e, assim, "olha, tá dando 180°". É um exemplo que eles estão usando para mostrar algo. Ou, em outro caso, a soma de números pares é sempre par. Eles poderiam trazer exemplos que dissessem "olha, tem dois números pares que a soma é par e tem outros dois números pares que a soma é par também". São exemplos que formalmente não provam nada, são só exemplos. Mas seus alunos sendo, por exemplo, do oitavo do sétimo ano, como é que você lida com isso? Você considera as respostas válidas como prova, ou você considera parcialmente? Como é que funcionaria?

P4: Certamente consideraria parcialmente. Eu não anularia o raciocínio do aluno, até porque se ele está fazendo isso, mostra que ele tá tentando fazer um processo investigativo para mostrar que aquilo ali vale. Então mostra que ele entendeu qual é a ideia, que ele está tentando investigar, está tentando arrumar argumentos para mostrar que aquilo, que aqueles argumentos conduzem ao fato de aquilo ali ser verdade. Então eu acharia... Consideraria válido, o raciocínio. Porém eu consideraria parcialmente, eu abordaria essa questão de explicitamente com os alunos. Por exemplo: "Olha, gente, é muito bom esse raciocínio, mas é importante lembrar que dentro da Matemática alguns casos específicos não mostram necessariamente que isso vai sempre ser verdade". E talvez trazer algum caso, por exemplo, que a gente pode verificar casos específicos, mas que no caso geral não seria verdade. Então eu tentaria... Consideraria parcialmente e faria essa... Aproveitaria para puxar essa conversa com os alunos, de que em matemática não é tão simples assim de mostrar algo de maneira geral. Claro que não necessariamente faria uma demonstração formal de algo. Somente se isso coubesse no nível e no contexto da turma.

Marcus Prates: Agora que você puxou essa sua última fala, uma última pergunta que não está dentro do formulário. Você falou assim “Eu sei que vai depender do nível que eles estão”. Partindo desse ponto, você dava aula para turma de oitavo ano, não é?

P4: Perfeito, a única turma que eu tive é em escola, no ambiente formal da escola, foi uma turma de oitavo ano.

Marcus Prates: Certo. Vamos supor que você tivesse uma turma de oitavo ano e uma de terceiro ano do ensino médio... Você consideraria o nível argumentativo dos seus alunos do sétimo ano em algum aluno do terceiro ano? Você consideraria válido?

P4: Olha, eu consideraria bem menos válido. Eu acho que eu não anularia totalmente, mas eu seria mais rigoroso, seria mais exigente na questão do nível de argumentação, eu penalizaria mais.

Marcus Prates: Mesmo que fosse uma turma que você não soubesse o histórico dela e, vamos supor... supondo que você trabalha em um colégio que vai do primeiro [ano] do Fundamental até o terceiro [ano] do Médio. E aí você conhece todo mundo que dá aula ali, você sabe como essas pessoas trabalham. E aí você espera que no terceiro ano os alunos cheguem bem, digamos assim. Mas se for um caso que você não conhece o histórico, você não sabe como é, você... Entendeu a ideia? Porque quando você não conhece o histórico, talvez você não saiba muito como aquela turma foi nos anos anteriores, nem se eles foram estimulados a isso. Então como funcionaria para você nesse caso?

P4: De qualquer forma, para uma turma de terceiro ano, eu exigiria uma abordagem um pouco mais rigorosa. Não no sentido de passar problemas mais difíceis, ou exigir que as provas sejam perfeitamente formais, mas eu exigiria um nível de maturidade um pouquinho mais formal. Por exemplo, com uma conversa com professor eles seriam capazes de entender que aquele tipo de argumento não é totalmente válido. Mas é claro que eu levaria, também, o contexto da turma... Analisaria a turma de forma geral, o nível da escola dentro da minha capacidade analítica, os alunos com as quais eu estou lidando... Porque às vezes, na mesma escola e para as mesmas turmas, por exemplo, duas turmas do terceiro ano vão ser formado por alunos diferentes, [então] as abordar serão ser diferentes. Claro que eu levaria todo esse contexto da turma, da escola, analisaria as habilidades dos alunos na hora de fazer uma avaliação e pontuar. Entretanto, de maneira geral, certamente teria um nível de exigência maior em relação às provas e argumentações.

Marcus Prates: Não necessariamente por conta de maturidade matemática, mas de maturidade pessoal, mesmo, de eles compreenderem de uma outra forma, de eles terem uma bagagem maior...

P4: Perfeitamente. Sim, uma maturidade da pessoa, mesmo. Não necessariamente em relação à aprendizagem matemática, mas um aluno terceiro ano já tem uma maturidade de maneira geral, uma maturidade pessoal maior que um aluno de sétimo ano. Então ele pode se expor a discussões mais profundas, tanto matematicamente falando, quanto até "filosoficamente", de maneira geral. Ele tem capacidade de se envolver nessas discussões de maneira mais profunda do que um aluno sétimo ano que, por exemplo, talvez não tivesse sensibilidade para se envolver em algumas discussões, mesmo que não de tema necessariamente matemático.

Marcus Prates: Tranquilo. Por mim, damos por encerrado aqui. Se quiser acrescentar mais alguma coisa, fique à vontade.

P4: Eu acho que eu não tenho nada acrescentar. Foram bem completas, as perguntas. Acho que a gente conseguiu conversar bastante.

Marcus Prates: Então vou encerrar aqui a gravação.

Apêndice J – Transcrição da entrevista com o participante P5

Marcus Prates: Gravando. E aí já está registrando, a transcrição. Só para confirmar: autoriza a gravação da conversa?

P5: Autorizo a gravação.

Marcus Prates: Primeira pergunta: em qual ano e qual instituição foi concluída sua graduação?

P5: Eu concluí a graduação em 1992 em uma universidade federal no Rio de Janeiro.

Marcus Prates: No seu caso tem o mestrado, não é? E está cursando doutorado agora.

P5: É. O mestrado eu fiz em matemática, que na época existia uma linha voltada para o ensino de matemática em uma universidade privada no Rio, que eu concluí em 2001, com uma pesquisa sobre concepções de um grupo de professores de uma escola da rede Municipal do Rio de Janeiro sobre a escolha e o uso do livro didático de matemática. E em 2021 eu ingressei no programa de doutorado em ensino e história da matemática e da Física, em uma universidade federal no Rio de Janeiro.

Marcus Prates: Entendi. Não sei se pode abrir, se está numa etapa em que pode abrir, mas a sua linha de pesquisa do doutorado segue a mesma do mestrado, ou é outra?

P5: Não, não. No doutorado eu estou investigando as narrativas que um grupo de licenciandos traz em relação à presença das discussões e de vivências sobre a educação de jovens e adultos no seu processo formativo.

Marcus Prates: Entendi. Dentro da EJA.

P5: Dentro da EJA. Porque eu atuo na rede federal... já há 12 anos eu sou professor nessa instituição, onde eu atuo no Ensino Médio técnico e no curso de graduação de licenciatura em matemática. E uma das minhas turmas do Ensino Médio técnico são alunos da Educação de Jovens e Adultos.

Marcus Prates: Beleza, então já tá atuando na área, e está fazendo doutorado na mesma área. E aí, com essa vivência extensa tanto profissionalmente, quanto em formação acadêmica – não sei se já teve o contato em algum momento –, a pergunta é justamente essa, se teve [inaudível]. Mas o que que você entende, por argumentação e prova matemáticas?

P5: Argumentação eu vejo, a partir do de algumas coisas que eu fui lendo, a respeito de como você justifica determinados resultados em matemática. E aí essa justificativa, ela pode acontecer por meio de um processo escrito – você escrevendo, explicando como você percebe aquele resultado –, ou, no caso, como eu atuo no Ensino Fundamental na prefeitura do Rio, eu já vi aluno tentando argumentar sobre uma determinada ideia usando desenhos para ele perceber um determinado padrão a partir dos desenhos que ele foi fazendo. Mas isso é algo que naquela etapa da escolaridade eu considero satisfatório, ele usar o desenho para tentar perceber qual é o padrão envolvido naquele conceito. Ele procurou argumentar utilizando esse recurso, diferente de uma demonstração formal que normalmente seria feito por um aluno da licenciatura, por exemplo, com familiaridade na questão da demonstração.

Marcus Prates: No caso, é como se a maturidade dele... [Como se] fosse o que a maturidade dele permite ele exteriorizar.

P5: Não só a maturidade, eu diria vivências. Porque eu já tive aluno no oitavo ano que percebeu a ideia envolvida numa determinada prova – mas isso tinha a ver com o livro didático que eu utilizava na época, que era o livro do Imenes, do Marcelo Lellis e do Luiz Márcio Imenes, em que ele tinha na apresentação do oitavo ano, por exemplo, de alguns conteúdos de geometria, por exemplo, atividades que estimulavam essa questão da argumentação e que levavam a um determinado tipo de prova. Não aquela prova formal de demonstração, como como se faz dentro de um curso de graduação em matemática, não nesse com esse rigor todo, mas um início. Ele trabalhando de uma forma... Começando de uma maneira mais intuitiva e depois ele começando a trabalhar com as letras, apresentando as relações conceituais a partir de determinados argumentos. Eu lembro que nessa turma tinha uma atividade para... Primeiro, eles trabalharam com... Fizeram uma atividade com material, usando palitos de picolé presos por uma tachinha para perceber a relação de ângulos opostos pelo vértice, quando você ia variando a abertura entre os ângulos – tem uma atividade nesse livro. E aí, depois tinha uma outra atividade, já com o desenho, para que eles fossem completando, percebendo algumas relações geométricas a partir da figura e iam completando até se chegar ao resultado, que é a relação que dá a característica, a propriedade dos ângulos opostos pelo vértice – a relação de congruência entre os ângulos. Então, eu sempre achei muito interessante a forma como ele propõe esse encaminhamento. Então, quando, nessa escola, houve a possibilidade [em que] o grupo concordou em adotar essa coleção foi bem interessante.

Marcus Prates: Entendi.

P5: Foi na minha primeira escola que eu trabalhei, do município, durante muitos anos. Eu ingressei na rede municipal em 95. Então acho que foi em 97, 98 – eu não lembro agora – e que houve essa possibilidade por meio do PNLD, acho que foi 98, 99, não lembro agora, a possibilidade de trabalharmos com o livro do Imenes. E aí, o grupo fez essa escolha, recebemos a coleção e conseguimos trabalhar.

Marcus Prates: Entendi. Então é como se o livro, no caso, ele estimulasse essa construção, não é? Ele tinha atividades que estimulavam a construção e aí os alunos iam praticando essa...

P5: Isso. E aí você, na verdade, já ia trabalhando, de certa forma, a ideia da prova, mas sem aquele todo aquele rigor. Mas seria uma um início, não é? Tanto que no Livro do sexto ano, eu lembro que tinha uma atividade de múltiplos, e ele perguntava – não lembro agora –, por exemplo, ele faz uma pergunta do tipo "todo número par é múltiplo de quatro?" – tinha uma atividade que acho que era essa, no sexto ano. E os alunos iam escrevendo, iam testando e percebendo que essa afirmação não é verdadeira, mas aí eles perceberam que essa afirmação não era verdadeira a partir de quê? De um conjunto de exemplos que eles iam escrevendo. Então no sexto ano ele já vinha, já ia estimulando em determinados momentos a argumentação dos alunos. Aí, no oitavo ano, é que ele, na parte de geometria, ele já começava, na parte de ângulos, ele já começava algumas coisas que caminhavam mais para a prova, mas sem esse formalismo. Mas era mais no estudo da geometria em que ele procurava focar mais nas atividades. Que eu lembro que ele trabalhava áreas. Aí, enquanto no sexto e no sétimo ano era muito na malha quadriculada, no oitavo ano ele já começava a apresentar as fórmulas de cálculos de áreas, mas os alunos já iam percebendo essas relações a partir das atividades que ele propunha.

Marcus Prates: Entendi. E aí, no caso, você está falando de argumentação como justificativa, como essa construção, não é? E aí está falando de chegar na prova. Mas a prova, como é que seria colocada ela? O que seria a prova, no seu ponto de vista? Se é que são coisas separadas,

P5: Olha, eu vejo as duas coisas muito ligadas, porém com formas diferentes. Essa prova, podendo acontecer de uma forma mais escrita, que acaba coincidindo com a argumentação, com a justificativa que ele encontra, usando recursos visuais ou não, até chegarem algo mais formal – numa demonstração mais formal. Mas, para o caso do Ensino Fundamental, eu acho que uma prova mais... Uma prévia do que seria uma demonstração seria o mais esperado para esse momento da escolaridade. Então eu vejo as duas coisas muito ligadas, a argumentação e a questão da prova. Embora a prova, eu sei que tem um momento que você vai começar a explorar nesse sentido de desenvolver esse aspecto da demonstração de diferentes maneiras. Mas eu acredito que comece com atividades que envolvam a argumentação.

Marcus Prates: Certo, entendi. Você já comentou que teve contato com argumentação sobre coisas que foram lidas e até a vivência... Mas falando especificamente da sua formação, seja na graduação, no mestrado, ou no doutorado agora, teve algum contato direto ou indireto com esse tema dentro da formação? E aí com “direto ou indireto” o que que eu estou querendo dizer? “Direto” no sentido de ter uma disciplina voltada para argumentação e para prova; ou “indireto”, tipo alguém, nas aulas ministradas, dava aula sob essa perspectiva argumentativa em alguns momentos e deixava transparecer o que que era, aí meio que foi pego “por tabela”.

P5: Não, durante a minha graduação era a prova formal, mesmo, demonstração. Do início nas disciplinas de Álgebra Linear, Estruturas Algébricas, Análise Real...

Era isso, que foi o meu primeiro contato na graduação, lá atrás. Eu comecei a ter a ter esse contato com a questão da argumentação e possibilidades de prova quando, na prefeitura do Rio, aconteciam algumas – na minha época, quando eu entrei, em determinados momentos – tinham algumas atividades de formação, por conta de uma parceria da Secretaria Municipal de Educação com o Projeto Fundão. Então, em alguns momentos nós fomos apresentados, ali naquelas atividades de formação continuada que acontecia. No mestrado não houve essa discussão, eu acho que até pela característica do programa. Nós estávamos – era um mestrado em ensino de matemática, não tinha essa linha dentro de um Departamento de Matemática – mas que estávamos ali meio que, digamos, por uma concessão de um determinado grupo, mas o departamento, em si, não nos via. Não éramos assim tão acolhidos pelo departamento na instituição em que eu fiz, naquela época.

Marcus Prates: Mas aí eu acredito que já tivesse tido esse contato com esses textos aí que você falou, com a literatura.

P5: Isso! Nas atividades de formação continuada, que aconteceu em eventos do Projeto Fundão que eu ia. E às vezes, naquela oficina, o tema eu queria saber do que que se tratava e eu comecei a ter alguns contatos.

Marcus Prates: Agora, por exemplo, na graduação tinha aquela coisa de... Dentro de Análise Real era mais demonstração de teorema e tal.

P5: Isso, isso.

Marcus Prates: E aí não era uma coisa que era claramente ou declaradamente voltada para a argumentação e para prova. Mas aí vocês, como alunos, tinham essa percepção de que existe um processo argumentativo, ou vocês viam só como “isso aqui eu vou provar algo” e acabou?

P5: Simplesmente vi que era um “olha, eu tenho que fazer esse processo aqui para chegar e verificar isso que está sendo pedido”.

Marcus Prates: Entendi. O foco era a prova, mesmo.

P5: Era a prova, entendeu? Então, quer dizer, na verdade, às vezes até algumas demonstrações nós fazíamos sem, às vezes, estar compreendendo o que estava envolvido ali naquela demonstração.

Marcus Prates: Entendi, entendi.

P5: Simplesmente seguia um determinado formato “eu tenho que fazer assim”.

Marcus Prates: Certo. E aí agora “virando a mesa”. A gente está falando como... Formação, como aluno. Agora na sua vida como professor, olhando o seu lado de professor, agora. Como os seus alunos são estimulados, em sala de aula, a desenvolver argumentos e provas? Eu sei que já foi falado, a gente... No começo você falou até do livro que os alunos tinham e que exigia essa sensibilidade, até dos alunos mais novos, [para] aceitar uns argumentos um pouco mais informais deles. E aí quando eu falei até de maturidade, não estou falando nem de maturidade só física, mesmo, mas maturidade matemática, de eles terem contato com essa coisa toda. Mas aí da sua parte, por exemplo, como é que esse estímulo acontece em sala de aula para que eles desenvolvam os próprios argumentos, os próprios meios, e aí possam provar algo em algum momento?

P5: Olha, hoje, falando hoje nas turmas de Ensino Fundamental que eu tenho... Eu tenho sentido mais dificuldade atualmente, por conta de primeiro, da realidade que eu vivo hoje dentro da secretaria de Municipal de Educação, em que nós temos que... Todo bimestre nós somos avaliados. Vem uma prova da Secretaria, que é aplicada para todas as turmas da escola, as escolas fazem daquele período. E nós temos que cumprir aquela lista de conteúdos até aquele período da prova. Se você não conseguir cumprir a escola tiver um mal desempenho, são feitas cobranças à direção da escola, que aí vem cobrar dos professores o porquê o desempenho foi ruim e etc. Então você acaba não conseguindo pensar as suas aulas de uma forma mais livre. Sem aquela correria de que “eu tenho até essa data para terminar esses conteúdos porque os alunos vão realizar essa prova que vai vir”.

Marcus Prates: Como se a gente tivesse num processo de... Meio que um retrocesso, não é? Está todo mundo sendo amarrado a seguir um conteúdo programático para fazer uma determinada prova e não dá tempo de abordar de outras formas, não é?

P5: Exatamente... Então sinto muita diferença do que era possível há uns anos atrás, que tínhamos mais liberdade em termos do trabalho. E aí eu conseguia, por exemplo, numa turma de nono ano, por exemplo, começar a trabalhar com eles algumas coisas envolvendo inicialmente um material concreto, para ele poder explorar aquela ideia e depois começar a trabalhar aquela prova a partir daquela atividade. E aí eu usava algumas atividades do material do Projeto Fundão. Eu usei algumas atividades, na minha época, de um livro que já nem tem mais, mas que foi organizado pela professora Estela Kaufmann. Então, tinham atividades que favoreceram isso, você começar a desenvolver essa questão da argumentação e da prova com os estudantes no Ensino Fundamental. Aí eu estou falando de... Voltando uns 15 anos atrás. Porque de, mais ou menos, de 2000/2004 para cá, mais ou menos isso, mudou muita coisa dentro da prefeitura – de 2004 a 2010... Mais ou menos entre 2004 2010. Mudou muita coisa porque passamos a ser a rede, como um todo, ser avaliado o desempenho das escolas por meio dessas avaliações produzidas pela Secretaria Municipal de Educação, por uma equipe da Secretaria Municipal de Educação. Então você acaba vivendo em função, todo bimestre, dessas provas que os alunos têm que fazer.

Marcus Prates: Engraçado que é o processo inverso do que a gente vê como avaliação, não é? Porque o ideal seria a avaliação ser em cima do que a gente trabalha em sala de aula e não a gente trabalhar em cima de uma avaliação que já tá pronta.

P5: Exatamente! Aí, você recebe a lista dos conteúdos, as habilidades que precisam ser desenvolvidas e às vezes você olha aquele conjunto de habilidades que tem que ser desenvolvidas, mas que você tem consciência de que naquele tempo, você não vai conseguir desenvolver tudo. Até por conta de que cada turma é uma turma. Então você acaba vivendo em função daquilo, daquela prova que virá numa determinada data e você às vezes nem conseguiu trabalhar bem tudo que você precisava fazer.

Marcus Prates: Porque tem um tempo para desenvolver...

P5: Porque tem um tempo para desenvolver. Então realmente fica muito difícil. Hoje eu sinto essa dificuldade, eu sinto essa dificuldade de conseguir trabalhar mais livre, de maneira a poder propor atividades que realmente caminhem nessa perspectiva. Até por conta, também, do próprio material que nós temos, que aí você tem que utilizar os cadernos pedagógicos, que tem uma outra visão, uma outra perspectiva. O livro didático, agora nós somos informados que é uma coleção para rede Inteira, então você não tem mais uma escolha do grupo da escola, foi escolhido um livro didático para ser utilizado pela rede Inteira. E aquele livro às vezes não contempla uma visão que o professor, de repente, tem em relação ao que seria o ensino de matemática que pudesse de fato contribuir para desenvolver as habilidades dos estudantes, etc.

Marcus Prates: Acaba tirando autonomia e talvez até a particularidade de cada um, não é?

P5: Exatamente.

Marcus Prates: Se eu quiser trabalhar algo a mais, que eu vi que a turma está... Ou então até uma discussão que surja em sala de aula, a gente não pode levar aquela discussão a fundo, porque tem que estar preocupado com a prova que vem por aí e eu não fui eu que fiz, não é?

P5: Isso, e a pressão é muito grande.

P5: A pressão é muito grande porque a escola é cobrada pelos resultados. Então eu digo que nesse momento os professores de matemática, principalmente, eles estão vivendo na berlinda. Estão vivendo na berlinda porque os alunos têm que estar prontos para dar conta de uma prova num determinado período de tempo todo bimestre.

Marcus Prates: Quase que uma prova de concurso.

P5: Então, por esse motivo, eu não tenho conseguido trabalhar da maneira que eu já tive possibilidade de fazer em anos anteriores, mas colocando aí muito lá para trás. Desde que foi incorporado à prática da Rede Municipal do Rio de Janeiro essa questão dessas avaliações todo bimestre.

Marcus Prates: Certo. Bom, para fechar – pelo menos é a última pergunta prevista que a gente tem aqui, mas talvez a gente vá entrando em outros assuntos – dentro de uma de uma resposta, ou de algo que seus alunos ponham em um texto, ou uma explicação... É uma pergunta bem ampla: quais elementos você considera no desenvolvimento de argumentos dos seus alunos para que eles validem suas provas ou suas respostas? Eu estou dizendo que eu sei que é uma pergunta ampla porque não dá para pensar muito de uma forma geral. Mas, por exemplo, naquele outro questionário que vocês tinham respondido antes, tinha uma pergunta assim “você considera como válida uma resposta em que seu aluno dá só a resposta final, mesmo que ela esteja correta? Considera ela 100% correta?” e a sua resposta foi que não. Então o que o que dá a entender é que só a resposta final, mesmo que correta, ela não basta, não é?

P5: Não.

Marcus Prates: E a minha pergunta é mais ou menos por aí. Uma resposta genérica, que seja, que se pede para ou explicar algo ou provar ou alguma coisa assim, que tipo de elementos são considerados válidos na sua avaliação, no seu no seu modo de avaliar, no desenvolvimento de seus argumentos para que seus alunos provem algo?

P5: Eu procuro... O que eu sempre peço a eles quando eles estão fazendo alguma determinada atividade? Que eles procurem mostrar como eles pensaram, como eles raciocinaram daquela questão. Então eu digo “olha, você pode escrever...”. Teve uma questão de, lá atrás – eu sempre lembro desse aluno – era uma questão de geometria que envolvia cálculo de área e ele falou assim “professor, fazer as contas usando a fórmula, eu não sei, mas eu sei como chegar ao resultado. Eu posso escrever?”, aí eu falei “pode”. Naquela época, eu nem eu nem pensava em fazer mestrado, estava logo no início, etc. Eu devia ter tirado uma foto e guardado essa avaliação. Mas eu achei fantástica a resposta dele, que ele foi escrevendo, foi argumentando como é que ele foi raciocinando para fazer a decomposição da figura, e ele chegou o resultado, ao cálculo da área daquela figura que estava ali naquela situação problema. Eu dei certo para ele. A maioria já lembrava da fórmula, foi usando a fórmula e chegou o resultado, mas a resposta dele estava, assim, tão bonita, a maneira como ele desenvolveu o raciocínio, como ele escreveu, que eu disse para ele “meu filho, está excelente o que você fez aqui”. Então eu considerei a resposta dele na íntegra porque não tinha o que dizer. Ele só, no lugar dele fazer os cálculos, escreveu, mas o que ele escreveu mostrava o que ele entendeu do que estava envolvido ali na questão, dos conceitos envolvidos naquela situação problema de cálculo de área. Então, eu digo para eles o seguinte “se você me escreve e me mostra como é que você está pensando, eu consigo perceber o que você compreendeu desse conceito e aquilo que, de repente, você ainda tem a dúvida, eu vou sinalizar para você.” – isso em qualquer conteúdo que eu esteja trabalhando – mas eu digo para eles “mas se você não me mostrar como você pensou, como você raciocinou, eu não tenho como saber exatamente... Se você colocar só o resultado”, eu digo para eles, “não vale. Você tem que me apresentar seu raciocínio, mesmo que você erre o resultado final, mas eu vou olhar como foi o seu desenvolvimento, que é o que você pensou. Então eu vou aproveitar tudo que você colocou na sua resposta. Mesmo que você não chegue... ‘Ah, eu não acertei a questão como um todo’, mas eu vou poder aproveitar o que você colocou para mim, o que você raciocinou, como você pensou as estratégias que você utilizou, etc”. Então eu procuro olhar essa forma de pensar, como ele coloca o pensamento dele no papel, o argumento que ele utiliza no desenvolvimento daquela questão.

Marcus Prates: E aí, mesmo que seja um argumento informal, ele é válido porque está transpassando a ideia...

P5: Isso. Teve uma questão, por exemplo, uma turma do médio técnico... Era uma questão de P.A., era um problema que envolvia ele tem entendido o que era uma progressão aritmética e soma dos termos de uma P.A.. Muita gente já conhecia a fórmula, entendeu o problema e usou a fórmula e resolveu. Esse aluno, em especial, ele falou assim “professor, olha, eu não sei direito usar essa relação aqui da soma dos termos de uma P.A., a fórmula, mas eu posso fazer desse jeito?”, aí ele me mostrou e eu falei “pode”. Então, ele foi, construiu a sequência, entendeu qual era a lógica envolvida e foi fazendo termo a termo, foi construindo e foi somando e chegou lá onde tinha que chegar. Ele levou mais tempo? Levou mais tempo, mas para mim não houve problema algum.

Marcus Prates: Mas talvez tenha mostrado até melhor do que os outros que foram mais diretos.

P5: Exatamente. Porque tinha uma figura, e aí ele tinha que perceber qual é o padrão naquelas figuras, para identificar que aquele padrão envolvido no desenho envolvia uma progressão aritmética, para ele construir essa sequência e chegar ao que estava sendo perguntado, que envolvia a soma dos termos de uma P.A.. E aí ele foi fazendo isso. E foi muito legal, esse aluno em especial... Ele é um aluno que ele fez uma avaliação adaptada – mas essa questão foi igual para todo mundo – porque ele tem TDAH, mas eu achei... Eu arrisquei, eu coloquei uma questão que era igual para todo mundo, até para saber como ele pensaria. E ele chegou e falou “professor, eu pensei assim, posso fazer assim?”. “Pode”, e ele fez a questão e foi ótimo, a maneira como ele desenvolveu, como ele raciocinou. Eu acho que se eu olhar aqui, porque eu lembro que teve uma que ficou comigo. Se você quiser, de repente, uma foto, eu vou procurar aqui nas coisas que eu guardei. Eu tenho certeza que eu guardei, mando uma foto para você. Eu não lembro se é essa de P.A. ou se é alguma de combinatória, mas ele foi escrevendo. E aí a maneira como ele pensou que me chamou atenção, então por isso que, para mim o resultado final é o que menos importa, eu quero olhar como ele raciocinou, como é que ele construiu essa ideia.

Marcus Prates: E aí, como você tinha dito antes assim, a pergunta de fato foi respondida, não é? O que é validado é a forma como aluno argumenta, independente do que ele está usando... Se ele usar um desenho, ou se ele usar não-sei-o-quê, vai ser válida a construção que ele está fazendo ali.

P5: Isso.

Marcus Prates: E agora, só juntando com uma das suas primeiras falas, isso vai variar um pouco, quer dizer, o nível de exigência, ele vai variar um pouco dependendo da idade ou da série que está sendo trabalhada, pelo que eu entendi. E aí, por exemplo, nas séries que forem mais avançadas, no final de ensino médio... Na sua visão, já é mais necessário que o aluno tenha uma linguagem matemática mais formal, um pouco desenvolvida, ou você considera válidas essas respostas mais informais, esses caminhos mais informais?

P5: Olha, eu considero válido pelo seguinte: porque eu tenho alunos que não tiveram essas vivências lá no Ensino Fundamental. Eu tenho alunos que, de repente, um outro colega do Ensino Médio era cobrado... Eu lembro que um aluno falou assim “professor, numa turma anterior o professor x dizia assim ‘se não chegou a resposta certa, não adianta’”, e eu dizia para eles “olha, eu não vou olhar por aí, por isso que você vai ter que escrever. Se você vai escrever, se você vai usar desenho, não importa. Eu quero ver como você pensou.”

Marcus Prates: É como se esse trabalho que tivesse no Ensino Médio fosse um trabalho que já “devesse” ter sido feito lá atrás, não é?

P5: Exatamente. E não é assim, não é assim... Eu recebo alunos do Ensino Fundamental de diferentes realidades que não tiveram essa vivência. Então não posso achar que pelo fato de estar no Ensino Médio ele já deveria ter condições de ter uma linguagem mais formal. Necessariamente isso não vai não vai acontecer, dependendo das vivências anteriores que ele teve. No meu caso, na minha realidade, no Instituto, em que nós recebemos alunos que vêm de escolas da rede Municipal, da rede Estadual, tanto do Rio quanto da Baixada Fluminense, e alunos que vieram de escolas particulares, que também não tiveram vivência nessa questão da argumentação da prova.

Marcus Prates: Certo.

P5: Tem um outro que, de repente, por questões muito particulares, até têm uma linguagem um pouco melhor, mas é algo muito específico dele, ou porque ele, não sei, teve uma vivência anterior... Mas eu não posso colocar isso de uma forma geral para turma.

Marcus Prates: Como se fosse a régua.

P5: Exatamente, cobrada a turma como um todo.

Marcus Prates: Eu acho que para mim é isso, já consegui bastante coisa aqui. A gente teve um papo até acima da média de tempo que eu esperava. E, além disso, saber se tem alguma colocação a respeito do que a gente conversou, a mais, que acha que pode ser interessante comentar e ficar registrado. Ou se podemos dar por encerrada a conversa.

P5: Vendo, assim... Olhando, pensando... Vou pensar no livro didático, que ainda é o material que o professor tem à disposição e a minha realidade hoje enquanto professor, tanto na rede Municipal, quanto na rede Federal... Eu acho que a questão da argumentação e da prova em alguns materiais, como o caso do livro didático, elas não estão ainda muito presentes em determinadas coleções. Eu vejo, por exemplo, no livro do Ensino Médio que os alunos receberam, a demonstração aparece como algo já pronto, sem que haja um estímulo a esse processo de construção desse raciocínio dedutivo, mas respeitando essas etapas. Eu tenho visto isso nesses livros didáticos mais atuais, entendeu? Pelo menos os que têm chegado para gente, no momento de fazer a escolha, tanto do Ensino Médio quanto do Ensino Fundamental. Diferente – como eu já tenho tempo de Municipal – diferente do que eu vivenciei lá atrás, quando eu comecei na prefeitura do Rio e com os materiais que eu tive à disposição. Então eu tenho percebido essa diferença, sinto saudade dos materiais anteriores que – alguns – possibilitavam você explorar melhor isso em sala de aula, tanto do Imenes, quanto, por exemplo, um que foi escrito pela equipe do Projeto Fundão e a escola, a minha primeira escola que eu trabalhei, utilizou também esse livro. Eu acho que era “Matemática na vida e na escola”, eu não lembro agora. Deixa eu ver se aparece aqui no computador. “Matemática na vida e na escola”, eu acho que era isso. Você está no computador? Vê se aparece. Eu acho que esse era o título porque foi escrito por... Esse mesmo! Matemática na vida e na escola. Foi um livro produzido por um grupo de professores do Projeto Fundão e a escola, essa escola que eu trabalhei, foi minha primeira escola quando eu entrei na rede Municipal, nós adotamos depois, no outro momento, esse livro e que também já vinha nessa perspectiva. Tanto no oitavo quanto no nono ano e no sexto, só que, na época, era quinta, sexta, sétima, oitava séries, era outra denominação.

Marcus Prates: Entendi então tem bastante tempo.

P5: Tem muito tempo. Para você ver como eu sou bem velho na rede municipal. Foi muito tempo, você nem conhece.

Marcus Prates: Não, o livro não, mas a denominação eu peguei na época que eu estudava. Eu achei ele para venda aqui. Não, está esgotado.

Apêndice K - Transcrição da entrevista com o participante P6

Marcus Prates: Pronto, a gente está gravando. Só confirma para mim, por favor, a autorização da gravação.

P6: Ok, tudo certo. Está autorizado a gravar, sem problema nenhum.

Marcus Prates: A gente começa. Eu vou te fazer um pedido que eu esqueci: essa transcrição, eu estou fazendo ela via aplicativo e ela é feita automaticamente. Eu sei que pode ser que a gente fale junto em algum momento, mas só para a gente evitar, se for o caso, evitar de falar junto.

P6: Então eu posso desligar meu microfone e quando eu for falar eu ligo novamente, pode ser?

Marcus Prates: Perfeitamente, pode ser

P6: Eu vou desligar

Marcus Prates: Ótimo, tudo bem. Vamos lá... A primeira pergunta, só para a gente se localizar e saber um pouquinho da sua da sua formação: em qual ano e qual foi a instituição em que você concluiu a sua graduação?

P6: Eu concluí minha graduação em 2018, em uma universidade estadual no Ceará.

Marcus Prates: Certo de acordo com aquele formulário que vocês tinham respondido antes, você não chegou a fazer uma pós ou ingressar no mestrado, não é?

P6: Não, por enquanto não. Porque foram acontecendo algumas situações no dia a dia, aí por enquanto está impossível, estou impossibilitado. Teve também a pandemia, atrapalhou um pouco... Um tempo antes da pandemia, eu iria iniciar a pós graduação, mas aí veio a pandemia, vieram outros problemas, outras situações, aí não teve tempo hábil ainda para iniciar uma pós-graduação.

Marcus Prates: Sim, é normal, às vezes a gente segura um pouquinho por coisas da vida. Entrando no assunto, no assunto central do que a gente quer falar que já vinha sendo... Talvez dando indícios naquelas etapas anteriores, mas sendo mais direto, agora, uma pergunta bem direta: O que você entende por argumentação e prova matemáticas? Qual é a sua concepção sobre esses conceitos?

P6: Na questão de argumentação, eu tenho que provar de uma forma, digamos assim, de uma forma mais simples para uma determinada pessoa, ou um determinado aluno ou até uma situação, que, se for o caso, uma maneira mais simples, tanto como simples para mim, como para pessoa que vai entender o que eu estou falando. E, se for preciso também, fazer através de uma caneta, de um lápis, através de palavras, ou através de situações, ou de exemplos. Pode ser da também da vida, um exemplo do cotidiano. Enfim, pode ser de várias maneiras, que eu posso fazer essa argumentação. E qual era a outra pergunta que você falou?

Marcus Prates: Era o seu entendimento acerca de argumentação e de prova matemática.

P6: Na questão da prova de matemática, matematicamente falando, é bem mais fácil porque você prova através de números. E a gente sabe que números não mentem. E se torna, para nós que somos da matemática, digamos assim, se torna mais fácil nós fazermos esse tipo de... Provar alguma coisa para alguém, matematicamente falando, através dos números. Isso é muito bacana, porque quando a gente começa a estudar matemática, a gente sabe que Matemática é uma coisa incrível e você não tem como burlar a matemática. A matemática, ela é exata... O bom da matemática, a magia da matemática, é bom por causa disso, você sabe que ela é exata, não tem como enganar ela. Então ela é simples e prática e exata, como a própria disciplina diz: ela é exata.

Marcus Prates: Seguindo o fio dessa pergunta: durante a sua graduação, você lembra de ter tido algum contato direto ou indireto com esse tema da argumentação matemática? Quando eu falo direto ou indireto é: direto, ter uma disciplina voltada para argumentação; ou indireto, dentro de uma outra disciplina, como, por exemplo, Análise Real ou Geometria Analítica, você ter identificado que quem estava ministrando a aula trazia a argumentação para sala de aula ou comentava sobre isso. Você teve esse contato durante a graduação?

P6: Teve, sim. Eu me lembro que o professor “X” falou muito bem sobre essa parte da argumentação. E como eu estava no segundo período ou terceiro período, eu acho, se eu não estou enganado... Você começa a perceber que é uma coisa bem tranquila de se falar. Porque tudo que ele (o professor) dizia, ele trazia para todos que estavam na sala de uma forma bem simples como tudo aquilo ali acontecia. A princípio você fica pensando: “Esse negócio aí é meio complicado, será que isso vai dar certo?”, mas ele mostrava de uma parte bem simbólica, bem simples, tudo aquilo que ele estava falando naquele dia, tudo aquilo que ele queria passar para gente, argumentando algo dentro da disciplina e através de números. Isso foi muito bacana, isso foi muito interessante na época. Eu me lembro que muitos alunos da turma ficaram “de boca aberta”, como diz o ditado, escutando toda aquela explicação do professor “X”, que ele explicou muito bem, argumentando. Foram poucas as chances porque, como a gente fazia a universidade (as aulas) uma vez por semana, e era o dia todo – era de 7:30 às 5 da tarde – e as outras aulas eram online, a gente não teve muito dessa experiência no decorrer dos dias, de vários meses, de vários períodos, de ter essa oportunidade. Se bem que teve a disciplina... Muitas disciplinas voltadas para esse tema, mas a gente não teve tantas oportunidades como tem uma universidade federal, que são todos os dias, que a gente acompanha diariamente aula de matemática. Mas foi muito bacana e a gente ficou muito surpreso, muito digamos assim maravilhado com a forma que ele explicou toda a situação.

Marcus Prates: Você quer dizer que ele tentava trazer – eu não sei se era o caso – ele tentava talvez justificar algum resultado, ou demonstrar algum teorema, você diz, de forma simples, usando argumentos simples, é isso? Coisas que dava para [você] entender com facilidade, mas que chegava ao objetivo de justificar algo.

P6: Isso mesmo, de forma bem simples e através de números mesmo. Eu lembro que uma vez ele tentou argumentar por que dois mais dois são quatro. A gente achou uma coisa tão fácil, no pensamento nosso, que a gente olhou assim: “é claro que dois nós dois são quatro”, mas aí ele pegou a caneta, foi ao quadro e [escreveu]: “Por que dois mais dois são quatro?”, aí começou a escrever. Começou a colocar em forma de fração, depois começou a fazer através da potenciação e sempre dava dois, sempre dava, no outro, dois. E quando somava, dava quatro. Então, de várias formas ele explicou, argumentando por que dois mais dois dava quatro.

Marcus Prates: Esse aí é um exemplo clássico! Vi isso. Na verdade, o que eu lembro de ter visto não era “dois mais dois são quatro”, mas “por que que um mais um são dois”. Eu tive um professor parando uma aula para provar que um mais um são dois e a gente ficou espantado, porque não era uma coisa fácil, é um caminho longo de se provar isso. Eu acho que era o mesmo caso do seu, mas, no seu caso, você diz que ele usou argumentos simples, argumentos mais – não sei se é correto dizer “ingênuos” ou “informais” – mas ele conseguiu fazer todo mundo entender, conseguiu chegar no objetivo dele. Fora a faculdade, você lembra de ter, por exemplo, lido algum artigo, ou tido contato com alguma coisa na literatura, ou participar de algum congresso, alguma coisa que envolvesse argumentação matemática ou prova matemática?

P6: Não, Marcus, não. A única forma que eu vi argumentação foi na universidade. Em congressos, revistas, ou algum tipo de informações/reportagem, alguma coisa nesse sentido, sobre argumentação, eu não tenho lembrança de ter visto esse tipo de assunto. É porque são assuntos tão... A gente só encontra esses tipos de assunto onde são [fontes] de coisas ligadas ao ensino da matemática, ou partindo um pouquinho para o lado da Física... Mas no dia a dia, no cotidiano, alguma coisa diferente, eu não tenho lembrança que participei nem observei e nem escutei coisas do tipo, da argumentação.

Marcus Prates: Esse contato com um estudo sobre a argumentação, a gente realmente tem em momentos mais específicos, geralmente quando a gente vai correr atrás – por isso perguntei sobre um congresso ou de algum trabalho que fale sobre. Tanto que você falou que na faculdade você teve acesso porque um professor de uma outra disciplina trazia isso para a sala de aula. A gente tem mais contato quando a gente corre atrás... Eu lembro que você colocou [no formulário] que você é professor da rede pública, não é isso?

P6: Isso mesmo, da rede pública.

Marcus Prates: Você, como professor, na sua posição de professor regente, como os seus alunos eles são estimulados – como você estimula –a desenvolver os próprios argumentos e provas em sala de aula?

P6: Quando a gente chega na sala de aula, no início do ano – vamos começar do início do ano –, quando os alunos entram, principalmente os alunos novatos, eles não conhecem os professores. Aí o que que acontece? Eles ficam querendo saber de que disciplina é determinado professor. Começam as perguntas: “professor, o senhor é professor de quê?”, e eu digo “de matemática” e parece que é um bicho papão. É incrível, é incrível! Não sei se é em todo lugar, eu sei que aqui, na região aqui onde eu moro, quando a gente fala na disciplina de matemática é como se fosse uma coisa ruim, que não serve, que não vai prestar para vida, não vai servir para o dia a dia, para o cotidiano – na cabeça dos alunos. Poucos são os alunos que se interessam por matemática. Tanto que quando a gente vai falar sobre um determinado assunto eles perguntam: “professor, isso vai interferir em quê? Isso vai servir para quê para minha vida? Eu aprendendo isso, o que eu vou fazer?”. Então, eles têm a matemática como uma coisa difícil, muito difícil, e eu tento passar para eles que a matemática é fundamental desde o início de tudo. Eu tento eu tento adiantar um pouco o tempo, mesmo... Eu digo a ele para não se aprofundar muito e não levar lá para trás, desde o início. Então chega para ele assim: “olha, você precisa da matemática para usar no seu dia a dia. Tudo que você faz na vida, tudo que você vai fazer no seu trabalho futuramente, em casa, quando chega em casa, no que você vai comer, vai se alimentar, tudo você vai usar números e se você usar números, você tá usando a matemática. Você tem horário para acordar, você tem horário para comer, você tem medidas para tomar um remédio, você tem números para identificar um tamanho de uma roupa, o tamanho de um calçado. Então tudo que você for fazer no seu dia a dia você vai usar números, tudo em que você usa números, você vai usar matemática. Então não adianta vocês fugirem disso, não é uma simples conta, não é uma simples teoria, uma fórmula. Tudo do seu dia a dia você vai usar matemática”. Eu tenho que conversar isso com eles no dia a dia para ver se eles conseguem ter mais vontade de aprender a matemática. Porque aqui, pelo menos aqui – eu acho que é em todo lugar, eu acho geral em todo lugar –, eles não gostam de matemática. [Há] uns que preferem história prefere Geografia, mas ele não gosta de matemática... Tanto que eu digo para eles: “se vocês forem para outra disciplina, vai envolver números. Se você for para a história, vai envolver números, anos, séculos... Se você for para geografia, é a mesma coisa: quilômetros, metros... Física... Então, não adianta você fugir, ir para outra disciplina, vai envolver matemática”. Mas aí muitos discordam... Discordam não, tentam fugir e se negam a dizer que a matemática é fundamental e essencial para o dia a dia deles.

Marcus Prates: Entendi. Eu entendi o que você está falando, que é um aspecto mais geral, não é? Você está trazendo a importância de aprender matemática. Mas eu digo em relação a, especificamente, criar esse hábito de desenvolver argumentos, o hábito de argumentar, essa habilidade de argumentar e de provar. Como acontece esse estímulo nas suas aulas? Ou se acontece esse estímulo. a pergunta é essa. Especificamente disso... Você foi muito geral e acabou não passando por aí.

P6: O estímulo é como eu falei para você: como eles são tão carentes na questão do aprender matemática, eles não conseguem argumentar alguma coisa que venha a usar a matemática, ou números, ou situações. Mas como eu tenho um alunado que tem um pouco de dificuldade aqui na minha região, porque são alunos... Muitos alunos de zona rural, então são poucos os que se sobressaem na matemática. Então, eu vejo um pouco de dificuldade de tentar arrancar deles essa situação de argumentar alguma coisa. Por quê? Porque eles são muito, digamos assim... Não é que eles não tenham acesso à mídia, à internet, a alguns meios de como extrair informações, tanto da matemática como outras disciplinas, mas eles têm, digamos, um pouco de preguiça, um pouco de receio, até, de não gostar. Então não tem como eu arrancar isso deles, essa parte de querer que eles possam desenvolver algo que venha a argumentar alguma coisa, matematicamente falando... Já nesse sentido dessa carência e de estar evitando a matemática.

Marcus Prates: No caso, eles têm uma defasagem, não é? Eles vêm com uma defasagem. E aí você tem que trabalhar com essa defasagem deles, não é?

P6: Isso mesmo, porque a gente teve três anos de pandemia e esses três anos atrasaram, e muito, o desenvolvimento dos alunos. Eu tenho uns alunos que vieram do nono ano, que quando começou a pandemia que [eles] chegaram lá no primeiro ano e no segundo ano, não sabiam uma simples continha de equação. Eles não entendiam como funcionam a equação, que tudo que está de um lado é igual ao outro. Eles não conseguiam assimilar a situação de uma equação. Se eu colocasse frutas de um lado e números de outro, eles não sabiam colocar, digamos assim, entender o valor daquelas frutas. Eu colocava fruta, colocava, letra colocava um carro, colocava um objeto qualquer de um único lado e colocava também de outro lado... Frutas dos dois lados. “Pessoal, fruta você vai somar com fruta, você vai fazer conta com fruta. Número você vai fazer conta com número.”. Eles não conseguiam entender essa questão da equação. “Mas como é isso, professor? Como é que eu vou juntar fruta com fruta?”. Então eu jogava letras, jogava fruta, jogava objetos, jogava uma série de coisas para diferenciar, para tentar mostrar para eles como funciona uma equação. Então a pandemia atrapalhou muito. Assuntos do fundamental, como a gente usa muito no ensino médio hoje, todos os assuntos em um único assunto... Equação vai mexer com potenciação, pode mexer com frações, pode mexer com números decimais e tudo isso ele teria que aprender no Ensino Fundamental. E ele não teve esse ensino completo no Ensino Fundamental devido à pandemia – e as aulas aqui eram online. Mas essas aulas que a gente tinha eram o quê? [Eram] 30 minutos... A gente não tinha um quadro, os alunos lá do outro lado ficavam dormindo e a gente não sabia que ele estava dormindo. A gente falava, falava, poucos respondiam... Então ficava difícil e essa é a realidade de hoje para as consequências da pandemia

Marcus Prates: Você levantou um ponto interessante. Eu acho que a gente – e isso eu falo até por mim mesmo – não está levando muito em conta, isso. São alunos que tiveram, e a gente teve também, mas eles, como pessoas em desenvolvimento cognitivo, ainda, tiveram esse período pesadíssimo em que viram muita gente ir embora e que teve uma defasagem na educação. A gente não estava preparado para isso, a gente não tinha mecanismo rápido, no caso, a gente ter um acesso rápido, uma resposta rápida a isso tudo. Então é algo que você falou e que a gente tem que levar em conta. Para encerrar – claro que pode ser aberto com outra pergunta aqui em cima... E essa é uma pergunta um pouco, ampla e se precisar eu tento esclarecer um pouco aqui. Quais são os elementos que você considera (no sentido de levar em conta), que você valida, que você acha válidos no desenvolvimento de argumentos dos seus alunos para eles provarem algo? Em outras palavras, quando você pede para um aluno tentar provar alguma coisa, ou tentar validar alguma resposta, o que você costuma considerar como válido nesse desenvolvimento dele, ou na resposta desse aluno?

P6: Como eu falei para você, eu não tenho muito, digamos assim, como extrair do aluno essa parte de argumentação. Mas eu tento passar para eles, eu tento entender eles e tento buscar dele informações que ele possa até buscar através de livros, ou através de leitura de informações sobre alguma reportagem, ou até de outro professor, ou, digamos assim, uma pesquisa que ele pudesse fazer, também. Qualquer forma que ele trouxesse que seja válida para tentar mostrar que aquilo ali, que aquela argumentação que eu poderia propor para ele, ou uma situação que viesse a aparecer, ele pudesse buscar isso através desses métodos. Mas é como eu falei para você: é muito difícil eu levar isso para sala de aula, pelo menos aqui nessa região, nessa parte aqui dessa região que eu ensino, já devido essa situação. Mas qualquer forma que ele trouxer uma argumentação que seja válida, seja ela mostrar, mesmo que ele venha copiar de uma outra forma, de um livro, ou de uma reportagem, ou seja ela de qualquer tipo de informação, eu poderia considerar... Poderia, não, eu posso considerar como uma argumentação válida. Não sei se eu me expressei corretamente, mas é muito complicado tanto para o aluno, como para, nos dias de hoje, a gente tentar “arrancar dele” – pelo menos são poucos os alunos que se interessam por esse tipo de assunto – uma informação concreta e eficaz a respeito de uma argumentação.

Marcus Prates: Entendi o que você está querendo dizer, perfeitamente. Mas, para tentar esclarecer um pouco mais o que eu estou tentando dizer – e aí não estou desconsiderando que você falou, o que você falou está dentro, sim, do que eu te perguntei. Eu que vou especificar um pouco mais agora para aumentar um pouco a resposta. Imagine uma situação hipotética, em que você tá numa avaliação, numa prova. Nessa prova, nessa avaliação, você pede para o aluno mostrar algo. Vamos supor, por exemplo: soma dos ângulos internos de um triângulo. Você fala: “como é que você pode mostrar que a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180°?”. Você já afirma que o resultado é esse, só que você pede para o aluno mostrar aquilo. Quando o aluno for responder isso, o que que você consideraria como válido – não digo nem correto, mas sim como válido –, como algo que você considera “ok” que um aluno te responda numa situação dessa? Porque ele não vai ter acesso a pesquisa..., mas numa situação que você pede uma explicação, pede para um aluno tentar justificar algum resultado, o que você consideraria como válido em uma resposta dele?

P6: Eu poderia até considerar se ele começasse até a falar como... Através do triângulo retângulo. Porque ele já saberia que um desses ângulos já daria um ângulo de 90°. E, considerando os outros ângulos, se ele tivesse algum valor entre eles... Então, se ele sabendo que um desses ângulos já valia 90°, então se ele viesse a fazer, digamos, me mostrar através de um segundo valor, ele tendo um ângulo de 90° e tendo um ângulo qualquer de um outro valor, ele poderia fazer essa conta bem simplesinha através de uma soma, procurando quanto é que faria... Vamos supor, se tivesse 90° em um determinado lado e tivesse mais, digamos, 30° do outro, daria o 120°. Para 180, ele poderia deduzir muito bem que o outro lado ia valer 60°. Então, ele poderia usar um triângulo retângulo, onde ele já saberia, mesmo não tendo valor no triângulo no ângulo de 90°, mas ele sabe que ali é 90°. Mesmo não tendo valor lá, ele sabe que ali é 90°. Então ele tendo valor em apenas um outro ângulo, ele me mostrando que o outro vale 30, se ele pegar os 30, com um outro ângulo que vale 90 então, ele, com certeza, vai me dizer quanto é que vale aquele outro ângulo. Poder poderia ser uma forma, não é isso?

Marcus Prates: Sim, mas o que você está falando é de encontrar um valor que falta, não é? A minha proposta foi do tipo, até você afirmar: “a soma dos ângulos internos é 180°. Como é que você pode mostrar que isso é verdade?”. Um aluno tentar explicar isso, entendeu?

P6: É, aí ficava difícil para ele explicar. Tanto da parte dele, como de outros alunos que tivessem na aula. Teria que fazer uma aula com ele bem específica sobre triângulos, inclusive triângulos retângulos e outros tipos de triângulo, explicando vértice, explicando o lado do triângulo, valores... Uma série de informações que tem nos triângulos, para ele conseguir formar, mostrar e provar por que os ângulos internos dão 180°. Realmente teria que fazer uma aula bem específica a respeito disso.

Marcus Prates: No caso, eles teriam que se basear por essa aula para explicar algo depois.

P6: É, com certeza. Teria que explicar bem, isso aí.

Marcus Prates: Entendi. Da minha parte, é isso, sem mais perguntas. Quer acrescentar alguma coisa, fazer algum comentário...?

P6: Não, tranquilo... Eu acho que hoje em dia a matemática está muito defasada por causa, eu diria... Alguns professores têm culpa, sabe? Alguns professores têm culpa, porque quando eles botam na cabeça que o aluno não quer nada com nada – eu vou dizer até no geral, não é só matemática, mas nos estudos em geral –, alguns professores, não vou dizer todos, não vou generalizar... Mas alguns professores “pegam carona” nos alunos. De que forma? “Se o aluno não quer nada com nada, então eu também não vou ensinar nada com nada. O problema é dele, a vida é dele e o futuro é dele”. Eu acho que não é por aí. Eu acho que a educação tem que partir primeiro dos professores, em tentar provar ao aluno que aquilo é importante. Não só na matemática, mas como história, em geografia, em inglês, seja lá que disciplina for. Então, cabe ao professor incentivar o aluno a aprender algo, porque lá na frente... A gente sabe que o jovem não tem uma cabeça formada hoje, um adolescente de 10, 12, 13 anos, ele não tem uma base, uma formação mental formada. A gente tira pela pelas casas deles, são casa simples. Os pais deles não estudaram. Então os pais não incentivam, então quem tem que incentivar são os professores. Então isso tem que partir dos professores, tem que partir da gente para que os alunos cheguem lá na frente, quando eles estiverem adolescentes e entrarem em uma universidade, ele olhar lá para trás e dizer: “Bem que o professor Marcus Prates falou que eu deveria fazer assim, desse jeito, desse jeito e desse jeito...”. E hoje ele, nesse caso, ele iria estar formado e iria reconhecer o seu empenho, ou o nosso empenho, de incentivá-lo e dizer que o estudo é muito importante na vida do ser humano.

Marcus Prates: Um dos nossos papéis é esse, de ser esse guia, independente do que ele traz de casa ou não.

P6: E exatamente.

Marcus Prates: A gente tem esse trabalho e muita gente não consegue entender isso. É o que você falou, tem gente que acha que “se em casa ele não recebe, não é aqui que eu vou ter esse trabalho”. Eu já penso o contrário. Eu já acho que se em casa não recebe, aí meu trabalho é dobrado e não “não é o meu trabalho”, meu trabalho é dobrado. E tudo bem, a gente tá ali para isso, não é?

P6: É desse jeito.

Marcus Prates: Eu vou encerrar a gravação.

Apêndice L - Transcrição da entrevista com a participante P7

Marcus Prates: Bom, está gravando, já, tá? Podemos começar?

P7: Pode, sim.

Marcus Prates: Então vamos lá... Diz para mim, por favor, qual foi o ano e qual foi a instituição que você concluiu a sua graduação.

P7: Eu ainda estou concluindo o oitavo período. E eu estou fazendo em uma instituição federal na Paraíba.

Marcus Prates: Sim, sim. Então, [se] você está concluindo a graduação, não tem ainda uma pós, alguma coisa assim, mas já sabe se pretende seguir, alguma coisa assim?

P7: Sim, sim, eu quero fazer uma pós, um mestrado...

Marcus Prates: E... Mas a área, você sabe, já ou não? Só para ter uma ideia.

P7: Não, não, mas eu quero alguma coisa na área da Educação também. Meu TCC está sendo sobre isso, aí...

Marcus Prates: Ah, sim...

P7: Aí eu acho melhor.

Marcus Prates: Ótimo, ótimo. Então, vamos lá... Essa etapa aqui, como eu falei, essa entrevista, ela vai ser para respostas mais diretas. E a ideia de fazer uma entrevista é que você possa se expressar mais, falar, caso você queira... Porque aquelas etapas anteriores eram uma coisa um pouco travada, era uma correção e depois um formulário. Naquele formulário você não conseguir se expressar tanto e a ideia que é para você, se quiser falar algo a mais, você poder falar. E também eu ir mais direto ao ponto, que a minha pesquisa é sobre a argumentação... Então eu vou mais direto ao ponto do que eu fui naquele formulário e a pergunta mais direta que eu posso te fazer é: o que você entende por argumentação e prova matemáticas? Por esses conceitos do que que é argumentação e prova matemática.

P7: Argumentação é de argumentar, não é? De argumentar algum conceito. Eu também vi essa matéria na minha graduação, de argumentação, e nela a gente aprendia como escrever de forma correta, a matemática, de como trabalhar e de como provar também algumas coisas através da argumentação. E prova matemática... A prova em si, eu entendo que é uma forma de a gente validar aquilo que a gente está falando, um conceito, um teorema, uma fórmula... Então é uma forma de a gente provar que aquilo ali, ela faz sentido. Às vezes é bem óbvio, mas mesmo sendo óbvio tem que ter uma prova.

Marcus Prates: Isso, beleza. E aí, assim, você vê esses conceitos como coisa separadas, não é? No caso, a argumentação é você construir algo e a prova é um instrumento que você vai validar alguma coisa, não é?

P7: A gente usa a argumentação para validar a prova. Eu...

Marcus Prates: Isso, isso que eu ia perguntar. Isso vai perguntar, se você vê relação entre as duas coisas. Beleza, ótimo. Bom, eu acho que você já respondeu... A próxima pergunta seria se você teve contato direto ou indireto com esse tema da argumentação na sua formação. E aí, no caso, você teve uma matéria de argumentação, não foi isso?

P7: Sim, argumentação matemática, lá no período 1.

Marcus Prates: No primeiro período mesmo?

P7: Sim, já era para ajudar.

Marcus Prates: Isso. Eu estou lembrando aqui que teve um outro professor aqui que disse a mesma coisa, também da Paraíba. Então, quer dizer...

P7: Deve ser do mesmo campus, provavelmente.

Marcus Prates: Sim, sim... Eu acho que foi, eu não tenho certeza, não. Mas ele contou que é porque viram que tinha uma defasagem muito grande, aí resolveram se reunir para alterar a grade. Eu achei muito legal porque aqui a gente não tem isso.

P7: É muito bom. Eu gosto muito da grade de onde estudo, porque lá, nos primeiros períodos, é só para trabalhar isso, para você... Já não entra assim com

Cálculo I, essas coisas, é só para você trabalhar o básico para poder ir para essas matérias de graduação.

Marcus Prates: Isso. E se você parar para pensar, pelo menos na minha opinião, você ter argumentação no primeiro momento, já te ajuda, por exemplo, quando você for ver uma disciplina de Álgebra I – não sei se você tem Álgebra I e II ou se é junto...

P7: Com certeza

Marcus Prates: Enfim... Análise e por aí vai, não é? Eu já caí direto nelas, eu não tive um “pré”, não tive esse “pré”, não.

P7: É, aí complica...

Marcus Prates: E deixa eu te perguntar, você está terminando a sua graduação agora. E eu sei que em muitos casos – e Acredito que você conheça também – muitas casos a gente, antes da graduação, já atua em sala de aula. Você já atua ou já atuou, alguma coisa assim?

P7: Eu atuo, sim. Desde o período 6 eu dou aula, já.

Marcus Prates: Ótimo, então essa pergunta lhe cabe. Você, como professora, na sala de aula, como os seus alunos são estimulados a desenvolver os próprios argumentos, ou, talvez, provas Matemáticas? Como você trabalha isso, como é feito esse estímulo para os seus alunos terem esse desenvolvimento?

P7: No caso, eles poderiam usar o argumento que eles acham válido?

Marcus Prates: Eles desenvolverem a habilidade de argumentar. Porque, só para te localizar... Você, como teve a disciplina de argumentação, eu acredito que você teve um pouco menos essa dificuldade. Mas aqui no Rio, por exemplo, eu não conheço nenhuma faculdade que tenha esse preparo. Então a gente, quando vai lidar, por exemplo, com prova, a gente já dá de cara com elas em matérias mais avançadas. E em muitos casos a gente já recebe isso pronto. Então, assim, se alguém pedir para a gente provar um teorema “tal”, é muito comum aqui que a gente não tenha essa prática de desenvolver o argumento, mas só de replicar o argumento do outro. A gente decora a estrutura da prova e acabou. E aí a minha pergunta é o contrário, você como professora, você estimula os seus alunos a criarem os próprios argumentos, a desenvolverem essa prática deles, de eles terem um argumento em vez de copiar o seu? Em vez de] copiar o seu desenvolvimento, ou alguma coisa assim, eles criaram um deles. Isso é desenvolvido neles? Se é, como como você costuma fazer?

P7: Eu não vou falar com toda certeza, assim, que eu faço isso porque... Eu acho que eu faço, porque eu não gosto de trabalhar só com “calcule”, “resolva”. Tem prova, assim, de professor de matemática que é só “calcule” e “resolva”, “faça isso” e eu gosto muito de trabalhar com etnomamatemática, com o cotidiano. Então nas minhas provas eu pergunto muito para ele sobre alguma coisa e eu vejo como eles respondem. Eu já... Mesmo, assim sala, em de aula, eu já falo “gente eu não... Eu estou usando essa forma de trabalhar, mas eu valido qualquer forma que vocês façam que chegue no mesmo resultado”. Mas, assim, vou te falar, é muito difícil porque o aluno, em si, ele não quer saber disso, muitos... A maioria não quer saber de ter um argumento. Eles não querem trabalhar com isso, é muito difícil eu conseguir incluir uma prova que tenha bastante etnomatemática, cotidiano porque eles... Eles se embolam, eles têm muita dificuldade em leitura, interpretação, em usar as próprios palavras na hora de trabalhar na matemática. Para eles seria melhor se eu só passasse questões de... Questões básicas de “calcule” e “resolva”, que eles só vão lá, decoram a fórmula antes e trabalham com isso. E eu já deixei bem claro que eu não trabalho assim em sala de aula, jamais pegaria uma prova de 10 questões e faria as 10 questões só com conta, não só assim.

Marcus Prates: Só com conta porque isso aí não chega a lugar nenhum, é você pegar a ferramenta e rodar o parafuso, você não está desenvolvendo nada, não é?

P7: E o próprio aluno vai se questionar “para que eu estou fazendo isso? Para que eu estou aprendendo essa matéria se é só conta?”

Marcus Prates: Exatamente. Aí, assim, vou te dar um exemplo só para saber se é mais ou menos por aí que você vai. Por exemplo, a gente sabe que os dois ângulos da base de um triângulo isósceles, eles são congruentes, não é? Então tem um triângulo isósceles, os dois lados congruentes aqui, “esse” ângulo é concorrente a “esse” (gesticulando com as mãos). E aí tem como a gente demonstrar isso, tem como a gente provar isso. Então, por exemplo, uma questão do tipo, assim, “por que...” – você joga afirmação lá, que os dois ângulos da base de um triângulo isósceles são congruentes – “por que eu posso afirmar isso?”. Então esse é o tipo de questão que o aluno pode não ter um argumento pronto, mas ele pode lembrar de coisas que ele viu em sala de aula, para poder construir a resposta dele, para justificar aquela resposta, que seja. Esse tipo de coisa você costuma trabalhar?

P7: Sim, inclusive, eu estou vendo esse assunto no oitavo ano agora não é? Triângulos.

Marcus Prates: Isso... Oitavo ano [é que] que a gente pega essa ideia de construir, de aprofundar mais essas propriedades.

P7: Aí eles perguntam “mas por que vai valer isso aí?” e eu falo “gente, a gente fez a prova, não é? Porque um triângulo tem 180° os três lados” e eles acharam muito interessante, porque eles não tinham visto isso aí de prova, assim, de um professor chegar e provar, mostrar uma prova de um argumento. É bem interessante trabalhar com isso, eu acho que a argumentação, trabalhar com os alunos argumentação abre muito a mente deles.

Marcus Prates: E não só para matemática, não é?

P7: É, não só para matemática.

Marcus Prates: Para outras áreas também, para outras áreas também. E aí a última pergunta que está aqui prevista para eu te fazer – mas eu vou te fazer outra depois – a última pergunta que está prevista para eu te fazer também tem relação com essa parte da sala de aula. Que quando você... Você já falou de como você estimula, de como é que é o seu estímulo. Mas aí, no caso, ao contrário, quando você recebe dos seus alunos alguma coisa respondida, alguma questão dessa que eles desenvolvem argumentos, ou que eles têm que provar algo ou justificar alguma coisa... Quais são os elementos que você considera ou que você valida no desenvolvimento dos argumentos dos seus alunos? Ou seja, o que você costuma levar em conta quando os seus alunos te devolvem um exercício, ou um problema, ou uma questão com desenvolvimento argumentativo, o que o que você considera válido?

P7: Eu considero válido, eu diria que a essência, não é? Se ele estava no caminho certo. Não falo nem a resposta porque às vezes acaba errando até o cálculo, mas quando eu percebo que ele trabalhou na mesma linha de pensamento eu considero. Aí também tem casos que não trabalham na mesma linha de pensamento, mas está com a resposta correta e eu vejo se aquela resposta faz sentido, e se faz sentido eu também considero. Muitas vezes é muito legal, quando eu estou trabalhando algum assunto e – muito raro, mas pode acontecer de – um aluno falar assim: “ah, se eu fizer dessa forma também é válido?”. Aí eu digo “claro, com certeza”. É bem interessante, apesar de não acontecer muito.

Marcus Prates: Sim. Então, no caso, o que você está dizendo – e aí você confirma se é ou não – você está dizendo que, assim, você... Ele precisa ter uma coerência no que ele está falando, não é? E precisa ter, falando de argumentos, argumentos consistentes. Agora, se, de fato, ele vai chegar no resultado final, você vai considerar parte da resposta dele porque teve um desenvolvimento correto, é isso?

P7: Isso, isso.

Marcus Prates: Entendi. E aí, no caso dos alunos que... No caso dessas questões que a gente pede para provar, para mostrar alguma coisa, não tem uma resposta “crua”, não tem como responder de forma muito direta. Mas, no caso de questões, assim, que você tem que ter o desenvolvimento para chegar num valor, num resultado, você costuma considerar aquele cara que só bota a resposta final?

P7: Não.

Marcus Prates: Tem que ter o desenvolvimento, não é?

P7: Com certeza! Tanto para evitar cola, para evitar... Para eu saber também, eu falo “olha, por favor, não botem só resposta, não. Botem os cálculos de vocês para eu saber se vocês realmente... como vocês fizeram isso”, não é?

Marcus Prates: Beleza... E até para estimular, porque a gente acaba avaliando melhor, não é? A gente acaba devolvendo melhor para eles.

P7: Com certeza

Marcus Prates: ele. E aí a pergunta que eu falei que eu ia fazer depois porque eu lembrei agora que eu deveria ter feito antes... Quando você falou da sua disciplina lá de argumentação, eu queria saber mais ou menos, assim, só para eu ter uma ideia e para ficar até registrado aqui, como que funcionava essa disciplina na sua graduação e se você lembra, por exemplo, se vocês estudavam algum referencial, tipo alguém que tem um nome forte dentro da argumentação... Como é que funcionava essa disciplina? Só para eu ter uma ideia.

P7: Olha, faz, tipo, 4 anos e meio, então não lembro muita coisa, não....

Marcus Prates: Se você se você lembra, não é?

P7: É... O que eu lembro de a gente ter visto muito foi como usar os... Eu vou esquecer a palavra agora. Os símbolos, no caso... Os símbolos. “E se”, de “mais ou menos”, todos os símbolos assim que a gente trabalha em argumentação na hora de provar algum teorema a gente usou ali. Também lembro do Professor trabalhar muito com prova. Era um professor excelente, não sei se você conhece, mas era um professor muito bom. Foi muito legal ter esse contato porque ele era ótimo. Aí nessa matéria de trabalhava isso, a gente trabalhava essas provas e eu também lembro de ter apresentado um seminário para provar a tabela verdade.

Marcus Prates: Tabela verdade... Então você trabalhava... Trabalhava até com questão de lógica, não é?

P7: Nossa, muito. Verdade, muita lógica.

Marcus Prates: Bom, para mim fechou. Você fez menos de 20 minutos e está ótimo, já tem bastante coisa aqui. Você quer acrescentar mais alguma coisa, tem mais algum comentário a fazer?

P7: Não, não. Só isso, mesmo.

Marcus Prates: Ótimo, então. Te agradeço muito, pelo seu tempo nesse sábado. Vou fechar aqui a gravação.

Apêndice M - Transcrição da entrevista com o participante P8

Marcus Prates: Pus para gravar. Só confirma – eu sei que você já mandou o documento –, mas só confirma para mim que se autoriza a gravação.

P8: Não, pode gravar, tranquilo.

Marcus Prates: Está ótimo, então. Vamos lá, fala para mim qual foi o ano e qual foi a instituição em que você terminou a sua graduação.

P8: Olha, eu fiz a minha licenciatura, eu sou licenciado em matemática por uma instituição privada. Eu me formei em 2006.

Marcus Prates: 2006. E você está fazendo a tese agora... Quer dizer, você já tem um mestrado, não é? Vai para o doutorado, agora.

P8: Sim, é, o meu mestrado...

Marcus Prates: E o seu mestrado, ou alguma outra pós que você tenha feito quando foi?

P8: Assim que eu terminei a minha licenciatura, em 2006 mesmo eu colei grau e já fui fazer minha primeira especialização. Na própria instituição em que me formei tinha uma especialização em Educação Matemática, muito boa. Então, ali foi o meu primeiro contato com a Educação Matemática, com Etnomatemática, Resolução de Problemas, as TIC, jogos, História da Matemática... você entendeu? Porque a maioria dos professores que lecionava nesse curso era egresso do PPG de Rio Claro, da Unesp, que é o primeiro PPG de Educação Matemática do Brasil. E me formei, trabalhei... A minha pesquisa foi sobre resoluções de problemas, na época. E em 2013 eu ingresso no mestrado em Educação Matemática, que era em uma instituição privada. Então nesse PPG a maioria dos Professores, 99% dos professores eram todos da PUC. Então, assim, vem com uma grande coordenadora, que era a Professora “X”, esse povo trabalha muito com a didática francesa, mas a minha orientadora foi a “Y” e a “Y” trabalha com uma teoria de um matemático britânico, que é o David Tall, que é “Os Três Mundos da matemática”. E aí eu ia... Até então eu estava para fazer uma pesquisa sobre provas e demonstrações sobre as identidades trigonométricas. Mas, como mestrando, eu me perdi, e aí a minha orientadora falou que eu não ia conseguir, no prazo, fazer essa pesquisa... E aí fez eu mudar de projeto. E eu acabei fazendo um estudo bibliográfico sobre argumentação, provas e demonstrações de pesquisas desenvolvidas em PPG em um período de tempo [omitido]. Em 2016 e em 2020 agora eu volto para o doutorado, minha orientadora é a professora “Z” e eu continuo trabalhando com argumentação, prova e demonstrações, só que agora eu estou utilizando a metodologia de ensino e aprendizagem em avaliação de matemática através da resolução e proposição de problemas. E o conteúdo matemático em que eu estou trabalhando é sobre as cônicas.

Marcus Prates: Entendi. Então a gente está na mesma área, não é? Só Me tira uma dúvida, você entrou fechou o mestrado em 2016, não foi isso? E essa outra tua pós que você fez terminou quando?

P8: Eu terminei... Eu comecei em 2006 e defendi em 2007, a minha primeira especialização, eu finalizei ela... Eu comecei no início de 2006 e finalizei no final de 2007.

Marcus Prates: Foi um ano, não é?

P8: É, um sucesso.

Marcus Prates: Entendi, entendi. Bom, e aí eu vou te fazer uma pergunta que é o centro da minha pesquisa, mas eu acho que essa você tira de letra, que é: o que você entende por argumentação e provas de matemáticas – por esses conceitos?

P8: Rapaz, olha... Isso daí eu vou tentar falar de uma maneira, assim... Bem, eu não vou ser sucinto, eu vou tentar ser bem específico, mas falando de uma maneira que eu consiga te ajudar, do que eu compreendo. Olha, por que eu fui para essa linha de pesquisa? Porque quando eu comecei a lecionar aqui em São Paulo, aqui a gente... Agora eu não sei mais, porque eu não estou mais na rede pública estadual, eu sou da rede pública Federal, mas quando eu ingressei, quando eu comecei a lecionar, em 2006, a gente praticamente era jogado dentro da sala de aula, porque a gente era professor eventual. Porque ainda não tem professor aqui, só que a burocracia agora é maior, para você ingressar. Na minha época, não. O que a gente fazia? A inscrição na diretoria de ensino, daqui da onde eu moro, e depois eu tinha que ou ir para atribuição para conseguir aula livre, ou aula de substituição, ou então o que que você fazia? Você ligava na escola e falava assim:

- Está precisando de professor eventual?

- Qual é a sua área?

- Matemática.

- Estou, sim!

Então foi assim que eu fui. E quando eu cheguei nessa escola, rapaz, é uma escola aqui numa comunidade, começaram a vir os questionamentos. Por exemplo, “por que a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180°?” e eu falei “e agora, como explicar isso?”. E o estudante fala “professor, por que é ‘mais’ eu vou passar o número para o outro lado da igualdade e é ‘menos’?”, “por que ‘menos’ vezes ‘menos’ é ‘mais’, professor?”. E aí começou a vir isso bem forte e isso me preocupou muito, que eu falei “mas que raio de professor que eu sou, que eu não sei isso?”. E aí eu fui estudar e eu percebi o quê? Que a minha licenciatura... Eu tive excelentes professores, eu não reclamo dos professores, tive excelentes professores, que as aulas eram muito boas, nos ensinaram. Eu acho que o modelo das licenciaturas ainda é muito engessado e não trabalha com esses aspectos que... Você preparar o professor para ele desenvolver atividades para fazer o aluno trabalhar com argumentação, prova e demonstração. E aí o que acontece? Eu fui estudando... Pega livro daqui, pega ali, mas sempre fica um ponto de interrogação, principalmente, assim, “como que eu vou trabalhar isso na Educação Básica?”. Porque lá na Educação Superior a gente tem aula de Análise [Real], de Álgebra Linear, Cálculo, Álgebra mesmo... Tem muita demonstração, mas até lá eu entendia. Mas tem coisa ainda que eu não entendo, ou você que você [inaudível], também, essa dificuldade. Você entendeu?

Marcus Prates: Só abrir um parêntese, aqui, que você falou duas coisas que me chamaram atenção. A primeira é: teus alunos que trouxeram a pergunta de por que acontece. Porque geralmente, pelo menos o que eu vejo, que eu converso, é que os alunos costumam só aceitar porque eles são acostumados a isso. Aceita e acabou.

P8: Aceita e acabou. E “para que demonstrar se já é isso?”. Então é isso, não precisa demonstrar. E não fica claro para o estudante qual é o sentido da demonstração na vida dele e isso tem que ficar bem claro.

Marcus Prates: Exatamente

P8: Meu amigo, esse conceito, olha só... Eu, ultimamente, ando falando assim, Marcus: “qual é a definição do substantivo?”, ou “qual é a definição de célula?”. O aluno vai lá “professor, é isso...”. Qual é a definição, agora, que a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180°? Aí ele já “é, professor, tem isso?”, “tem”. Tem que provar... Opa! Tem que provar. Então se tem que provar, a gente tem que entender essa lógica. Precisamos entender essa lógica! Então, primeiro: não é passado para o estudante, que eu percebo, a importância de ele aprender a trabalhar com argumentação, prova e demonstração. Segundo: ele também não é orientado que esse conhecimento vai auxiliá-lo nas outras áreas do Saber. Porque você vai ter um raciocínio lógico, um raciocínio estruturado. Você vai refletir, você precisa pensar, você precisa desenvolver esse raciocínio matemático.

Marcus Prates: Não é só sobre as aulas matemática, você leva isso para outras áreas.

P8: Você precisa desenvolver esse raciocínio matemático e ele é útil para o resto da sua vida. E aí vem assim... Tem uma entrevista que você pega no YouTube, o professor Ubiratan D’Ambrósio e a professora Maria do Carmo entrevistando Paulo Freire. E o Paulo Freire deixa bem claro, isso, que ele ia morrer e ele não foi um bom matemático. Se ele tivesse sido um bom matemático, a matemática teria ajudado muito ele na vida. Então eu vejo isso, foi essa necessidade, na prática, que eu comecei a ir. E quando eu comecei a lecionar no Ensino Médio, aí eu fui para uma escola tradicional aqui, uma escola católica, de uma ordem religiosa, uma ordem beneditina, que eu fiquei lá por quase 10 anos. E eu tive lá, os caras eram bons para caramba, amigo. Os caras eram bons... Molecada esperta, molecada que gostava. E a professora, a minha predecessora, quando os alunos questionavam ela, ela respondia assim “vê no *Google*”. E aí tinha um aluno, que ele é fisioterapeuta, hoje, se formou pela USP. Ele era aquele aluno que não copiava, ele prestava atenção. E quando ele prestava atenção, você podia ter certeza que as perguntas dele eram umas perguntas conceituadas, ele pegava todo o conteúdo e o conceito e fazia uma pergunta difícil. Nessa turma eu tive que fazer várias demonstrações, várias! Foi assim que eu ganhei a confiança deles. E aí, quando eu fui para o mestrado, essa necessidade de querer mais, para justamente melhorar minha prática. Eu falei assim "e agora, como que eu vou fazer, trabalhar mais com... Eu quero trabalhar com provas Matemáticas". Eu, nessa época que eu ingressei no mestrado, eu trabalhava numa Escola Técnica Estadual aqui, que é uma autarquia do Governo Estadual. As ETECs e as FATECs têm um ensino gratuito de boa qualidade. Então eu era funcionário público lá, só que em regime CLT, entendeu? E o meu diretor, da unidade que eu estava aqui, ele tinha feito o mestrado dele na PUC. O orientador dele é uma autoridade aí na academia. Pode perguntar para sua orientadora que ela vai te falar. E esse professor, ele trabalhou, Marcus, num projeto que a PUC desenvolveu de 2005 até 2009/2010. Esse projeto da PUC se chama "AProvaME - Argumentação e Provas na Matemática Escolar. Então, assim, foram seis professores do PPG da PUC, 27 mestrandos e uma doutoranda que participaram como voluntários para justamente trabalhar com isso. Então, a primeira fase era aplicar... A primeira parte do projeto era aplicar os testes nas escolas. Então participaram 2 mil alunos na região de São Paulo e na região metropolitana – não me lembro a quantidade de escolas agora – mas foram dois mil alunos de escolas públicas estaduais, pública Municipal e privada. E aí, para saber como que o aluno entende... Então, de dois mil alunos, 3% só tem uma noção básica sobre fazer um argumento matemático, o resto utiliza mais uma resposta empírica. Então, a maioria desses textos utilizaram muito Balacheff, as concepções de prova de Balacheff, que ele fala sobre as provas empíricas e as provas de experiência crucial. Então eles usaram muito isso. Isso me chama muita atenção, porque eu pude encontrar uma literatura que me ajudasse a compreender melhor esse contexto de argumentação, prova e demonstração no contexto escolar. Então foi lá que eu também tive contato com o livro da sua orientadora do Projeto Fundão, não é? Eu tenho ele aqui na biblioteca, aqui, e eu uso ele.

Marcus Prates: Aquele que ela tem com a Lúcia Tinoco, não é?

P8: É, com a Tinoco. Isso me ajudou, me mostrou... Só que, assim, amigo, cada vez que eu vou “cavucando”, eu vou me aprofundando um pouco sobre essa temática, você vai descobrindo coisa nova. Só que, assim, no âmbito nacional não tem quase ninguém, Marcus, que escreve sobre isso, que teoriza sobre argumentação, prova e demonstração. Então, a professora Lilian Nasser fala, mas você não tem muita produção dela teorizando – que eu entendo assim, agora, uma certa idade... Mas você não tem. Tem, aí você encontra artigos e tal, mas você encontrar uma literatura forte que escreve, onde você vai encontrar? Um grupo da Itália, que é do Paulo Boero, professora Alessandra Mariutti escreve bastante sobre isso... O mais citado é o Balacheff, o Balacheff vem também... E aí eu encontrei um texto agora, no meu doutorado, muito bom, muito bom, que é da italiana Betina Bedemonte, também a tese dela foi sobre isso e ela fez lá na França – inclusive o Balacheff foi banca, foi membro avaliador. O inglês, o britânico, são dois irmãos, Gabriel e Andreas Stylianides... Os caras também teorizam bem sobre isso e até ele traz, olha, uma definição, que eu vou pegar aqui para você, que eu achei ela super interessante, eu coloquei... Ele traz uma definição para prova matemática no contexto escolar, olha só o que o cara fala, ele fala isso daqui – eu coloquei assim nesse trabalho que eu estou fazendo – , ele define o conceito de prova matemática em um contexto escolar como um “argumento matemático, uma sequência conectada de afirmações a favor ou contra uma reivindicação matemática, com as seguintes características: primeiro, utiliza declarações aceitas pela comunidade em sala de aula, conjunto declarações aceitas que são verdadeiras disponíveis sem necessidade de justificativa adicional; dois, emprega as formas de raciocínio, modo de argumentação que são válidos e conhecidas pela comunidade de sala de aula, ou dentro do seu ou dentro do seu alcance conceitual; e três, é comunicada com formas de expressão, modo de representação de argumento que são apropriadas e conhecidas pela comunidade de sala de aula, ou dentro do seu alcance conceitual.”. Então, quando eu li isso eu fiquei feliz pelo seguinte, o cara, eu acho que no contexto... Porque essa é a maior discussão que eu encontro na literatura nacional e internacional. Porque existe a discussão muito forte, você não tem um consenso do que é uma argumentação, o que é uma prova e demonstração. O Duval mesmo não aceita que um argumento, ele se torne uma prova. Eu aí já falo, eu já aceito. Por que eu já aceito? Porque, assim, nessa minha construção dos dados que eu desenvolvi na minha pesquisa, eu sabia dessa... Eu já tinha previsto com a minha orientadora essa limitação dos estudantes. Você aprender um conceito matemático sobre cônicas e ainda tentar demonstrar as equações de cada uma das cônicas: circunferência, parábola... Porque eu comecei assim, vou começar pela circunferência porque o estudante já viu isso, ele sabe o que é uma circunferência. Depois eu vou para parábola, porque a parábola ele também já viu quando ele trabalha com funções quadráticas; depois eu vou para a elipse. Por quê? Porque se ele já viu alguma coisa em Física sobre o a órbita dos planetas, ele já viu uma coisa lá da lei de Kepler, ele vai falar que é uma elipse, então ele também... E, por último, eu deixo a hipérbole. Eu falei “a hipérbole ele não vai acertar, ele não vai acertar, ele vai falar que é parábola, ‘tem duas parábolas aí, professor’”.

E o que eu previa, amigo, aconteceu, você entendeu? Só que o problema, como a resolução de problemas, segundo a professora Norma e Dona Lurdes, a ideia dela é isso mesmo, é você iniciar um novo conteúdo matemático com um problema. E aí eu saí também, tentei encontrar na literatura alguns trabalhos que fizessem essa junção, a resolução de problemas com a prova – e eu encontrei. Então eu falava assim para professora: “professora, na minha cabeça é bem nítido como a resolução de problemas ela contribui para que o estudante consiga desenvolver um argumento. Que esse argumento ele vai ser um argumento indutivo.”. Ele vai usar a língua natural, você entendeu? Ele vai usar e ele deve. Porém, o professor precisa ter aí, nesse contexto, uma sensibilidade para conduzir esse estudante a sair desse raciocínio indutivo e ele ir migrar aos poucos para o raciocínio dedutivo. E a Pedemonte fala isso, rapaz, no texto dela. Então, assim, busquei e encontrei... Porque, assim, o Alan Schoenfield, ele trabalhou muito sobre resoluções de problemas e depois sobre meta cognição, então ele fala sobre isso, que na resolução de um problema os estudantes conseguiram deduzir, conseguiram demonstrar. Então o raciocínio empírico, que aí ele cita Polya, que o Polya fala assim “gente, os próprios matemáticos profissionais, eles utilizam essa parte da intuição para chegar na dedução”.

Marcus Prates: Para iniciar alguma coisa.

P8: É, é Inicial. Eu falei... Aí para mim eu assumo o seguinte, Marcus: para se trabalhar com demonstração matemática na sala de aula tem que ter essa discussão social que o Balacheff coloca, porque precisa comunidade ali, a sala de aula decidir o que é uma argumentação, o que é uma prova e uma demonstração. E depois, eu acho que o estudante, ele deve começar pela intuição. Ele deve, você entendeu? Porque eu acho que, assim, é o pensar, é o raciocinar. O estudante aqui não gosta de raciocinar, então percebi isso na hora que eu estava aplicando as atividades e eu...

Marcus Prates: Mas, assim, você está...

P8: Pode falar.

Marcus Prates: Falando vários pontos aí que eu estou pensando, assim... Essa questão de não querer raciocinar, eu acho que tem um estímulo a isso, não é? Eu sou muito crítico a essas escolas que botam cara de estudante em outdoor para dizer que passou... “Passei”, “passei”, “passei”. E, assim, são estudantes que passam em provas, mas o que eles sabem fazer? Se você perguntar um “por quê?” eles não sabem dizer. E aí parece que esse modelo está crescendo muito, não é? Está crescendo e todo mundo gosta, todo mundo quer ir para lá porque passa, porque passa na no concurso tal. Só que, assim, qual o estímulo que tem ao raciocínio? Nenhum, não tem. Agora, essa questão do empirismo e da resolução de problema, que eu achei – para mim também é óbvio que tem uma ligação entre a necessidade de se argumentar e provar com resolução de problema. Só que, pelo que eu entendi, você está de fato estudando essa área, está estudando esse encontro, não é?

P8: Sim, porque assim, Marcus, a maioria dos trabalhos que eu encontrei, eles falam assim... Que a relação entre argumentação, prova e demonstração com a resolução de problemas é assim... O aluno, quando você pede para ele demonstrar alguma coisa, provar alguma coisa, ele tem um problema.

Marcus Prates: Já tem um problema em mão.

P8: Eu começo ao contrário, eu começo um novo conteúdo matemático com um problema. E esse problema, ele vai sendo desenvolvido de uma maneira que lá no final o aluno consegue chegar no raciocínio dedutivo, ele vai ter que me provar alguma coisa.

Marcus Prates: Então quer dizer [que] no desenrolar do problema ele já é instigado argumentar.

P8: Porque, assim, esse é o forte da resolução de problemas, é onde você fala para o estudante: "Por que essa resposta deu isso? Por que que essa resposta deu isso?". Ele tem que justificar! Como que ele vai justificar? Ele vai fazer uma representação de uma figura, ele vai usar a língua materna, ele pode fazer… Eu mesmo tinha uma aluna que ela descrevia toda a resolução dela. Estava perfeito, era um algoritmo, era uma resolução, mas ela gostava de escrever, ela descrevia. Ele pode usar os números, armar, fazer as contas, entendeu? Então ele precisa justificar. Então aí eu falo de novo, é nesse momento que o professor tem que ter a sensibilidade de ir orientando os estudantes a ele entender... Mas, por exemplo, essa minha orientadora bateu muito nisso: "qual é a relação para se generalizar a equação da circunferência? Qual é a relação?"... O estudante tem que saber isso. Qual é a relação? É a distância do centro da circunferência, um ponto dela é igual a medida do raio. Então, se ele não entender isso ele não vai conseguir iniciar dedução. Então, assim, as minhas atividades procuraram seguir esse padrão, para que o estudante conseguisse construir... E eu já sabia, Marcus, por exemplo, que no primeiro problema ele ia ter muita dificuldade porque nunca trabalhou com isso, nunca trabalhou nesse formato. Nunca!

E aí eu falei para minha professora assim "professora, vai ser o problema que vai dar mais trabalho". Por que, Marcus? Porque o primeiro eles nunca trabalharam com isso. Dito e feito! Foi um mês, amigo, um mês para fazer um problema com sete itens, entendeu? Só que quando eles foram, que eles entenderam, eu falei "agora, o próximo vai ser fácil". O que eu achava, Marcus, que eles não conseguiriam fazer foi o que eles fizeram mais rápido, que foi o último problema, que foi sobre a elipse, sabe? E a dedução foi a coisa mais linda. E aí vem, assim, eu só vou só comentar uma coisa, sem querer sair fora da sua pergunta. Usando essa metodologia, o processo avaliativo, Marcus, é automático, você vê toda a evolução do estudante. Toda, por exemplo, assim, tinha um grupo de meninas, que eu brincava com elas e chamava elas de "Meninas de Beverly

Hills". O primeiro problema... Mas essas meninas, principalmente a... Meu Deus, esqueci o nome dela... "*N*". A *N* ficou indignada, ela falou assim para as colegas "o professor está aqui fazendo uma [inaudível] bonita para a gente. Não, vamos tentar resolver...". Quando, porque, assim, no final eu faço a formalização, eu corrijo todo o problema. Quando eu corrigi o problema, a menina ficou indignada porque ela não acertou nada. Aí eu falei "eu estou aqui, não estou preocupado com quem acertou e quem errou. Você entendeu?" e ela falou "professor, eu entendi, mas não gostei porque... Eu não gostei de mim". Então mexeu com o "eu" dela. Amigo, no próximo problema esse grupo, ó "PAU"! Fizeram, discutiram, só não conseguiram deduzir mais a equação da parábola, sabe por quê? – Que isso foi evidenciado também na maioria dos grupos dos estudantes que participaram – por causa das manipulações algébricas! Então você veja que o problema é lá de trás.

Marcus Prates: Exatamente, mas o problema argumentativo estava resolvido.

P8: Acarreta isso. Você entendeu? E aí eu falava assim "filha, qual o problema?" [e ela] "professor, eu sei como começar, eu entendi que para deduzir a equação da parábola, professor, a distância do ponto de foco até um ponto na parábola é igual a distância do ponto da parábola até a reta diretriz.". Ela entendeu a relação, ela soube como começar. Mas na hora de manipular algebricamente... É manipulação, gente. Não sabe... Então eu falei pela "filha, isso daí é um conceito lá de trás, mas você entendeu o conceito, você entendeu o conteúdo.". Então, eu vou falar para você assim... isso me move a trabalhar com esse tipo de pesquisa porque se você pegar o PCN fala "forte" sobre trabalhar com esse processo de argumentação: começar com argumentação e quando o aluno estiver no final, nos anos finais do Ensino Fundamental, ele já começou a fazer lá umas demonstraçõezinhas. E no Ensino Médio ele só funda. Isso daí é precisa do "fundar". Para quê? Para desenvolver. E se você pegar o documento americano, os *standards*, bate forte nisso. Portugal bate forte nisso e Portugal fala muito de você desenvolver o raciocínio matemático no estudante. Se você pegar o currículo francês, bate também nisso daí, forte. O currículo canadense, o currículo inglês... Então, assim, a maioria dos – dá para perceber que – currículos, Brasil e no Mundo, está batendo nessa tecla, que precisa se desenvolver o raciocínio no estudante, o raciocínio matemático, e é fundamental trabalhar com raciocínio intuitivo e com raciocínio dedutivo.

Marcus Prates: Resta saber se isso está sendo feito.

P8: Então, o que a gente pressupõe? O documento mostra tudo..., Mas eu vou falar, assim, o que eu vejo aqui... o que eu vejo aqui o professor [diz] “não vamos trabalhar com isso, não, meu amigo”. Então é triste porque o estudante deixa de ter, de aprender a desenvolver, a atingir um elevado grau cognitivo se ele tivesse aprendido a argumentar, a provar e a demonstrar.

Marcus Prates: O princípio argumentativo. E aí, você faz umas relações de resolução de problema, de avaliação, que eu acho também que tem. E até que, se você for parar para ver, você falou assim “às vezes o aluno viu, lá em física, a parábola e vai fazer uma ligação”, não sei se foi da parábola que você falou... Foi da elipse. E aí, se você parar para pensar, tem outro problema muito sério, que é: professores de Física e de Matemática raramente conversam para tentar ligar os assuntos. Porque tudo ali é ligado. Então, assim, eu passei por isso, você talvez tenha passado, de ter uma aula de Física em que você não entende nada porque você, aluno, você não faz a ligação com Matemática.

P8: Não faz.

Marcus Prates: Com função... Você sozinho, adolescente, você não faz a ligação com função, com nada disso. Só que os professores também não falam, não é? Eles não fazem a ligação. Então, assim, é uma coisa que é muito problemática. Eu acho que a gente tem que parar para pensar nisso porque isso entra também na argumentação, isso ajuda a argumentar. Porque é um problema prático. Você tem um problema prático em mãos, que você pode fazer uma troca ali.

P8: Concordo com você.

Marcus Prates: E aí, com essa sua fala na primeira pergunta, você responde a quase todas as outras, mas vamos chegar lá. Só que a primeira pergunta você não respondeu, que é “o que você... Qual é o seu entendimento sobre argumentação e prova?”. Porque você até comentou, assim, que tem várias definições...

P8: O meu entendimento sobre argumentação e prova: são aspectos importantes, tanto na formação inicial do professor, continuada, como na formação de qualquer estudante, de qualquer ser humano. A argumentação, a argumentação, ela pode... Eu entendo ela como um processo no qual eu venha a justificar, eu venha a justificar o meu pensamento e quando eu quero convencer alguém que eu estou certo, eu estou querendo provar alguma coisa. Então a minha concepção de argumentação e prova é essa, eu vejo uma continuidade entre elas, quando eu argumento e quando eu quero provar que eu estou certo. Então, para mim, isso é muito forte.

Marcus Prates: Entendi, então tem uma ligação, embora sejam, no seu ponto de vista, coisas diferentes, você ainda vê uma ligação entre eles.

P8: Eu vejo uma ligação entre eles.

Marcus Prates: Sim, perfeito, perfeito. E aí, assim, estou seguindo só as perguntas que estão aqui, mas você já falou isso, tá?

P8: Não, tranquilo.

Marcus Prates: A próxima série se você já teve algum contato com esse tema. Como você tem, no caso, seu mestrado em cima da argumentação e o seu doutorado também, então vou direcionar minha pergunta para sua graduação. Lá na sua graduação, você lembra de ter tido algum contato com isso? Contato eu sei que a gente teve, mas eu digo, assim, de alguém explicitamente te dizer que você estava lidando com a argumentação, ou até uma matéria voltada para isso. Você teve isso, ou não?

P8: Negativo. Como você, eu era bom em resolver exercício e fazer lá, mas na maioria das vezes não tinha significado para mim, era só fazer isso e está certo. Por exemplo, você utilizar o princípio da indução finita... “P_k , P_{k+1}”, só isso, mas por que “P_k, P_{k+1}”? Para que serve isso? Onde que eu vou usar isso quando eu estiver trabalhando lá na educação básica?

Marcus Prates: Se tornava um processo mecânico, não é?

P8: Era um processo totalmente mecânico. É assim, entendeu? E eu saía fazendo... Associava e ia.

Marcus Prates: Então, no caso, contato, como eu também, você até teve, mas não identificava que era esse processo aqui porque ninguém falava sobre isso, não é?

P8: Não, não tinha como, porque... Eu acho que falta justamente você falar para o futuro professor de matemática – no meu caso, que está direcionando para mim na minha graduação – ele saber disso, onde é que ele pode usar esse princípio da indução finita. Então, ele pode usar lá no quinto ano, no sexto, no sétimo, mas com um dialeto mais acessível para aquela faixa etária. Para eles não abominarem, que nem aconteceu no movimento da Matemática Moderna, que foi um desastre, entendeu?

Marcus Prates: sim

P8: Então eu vejo que deveria isso acontecer lá na graduação.

Marcus Prates: Lá atrás, lá atrás. E aí, você tinha comentado também lá no começo, que era outra coisa que eu ia falar. Você disse que no ensino básico não se tem esse estímulo. Eu acho que não teve quando você estudou, quando eu estudei não tinha, e hoje eu vejo que não tem também. E aí você fala assim "na graduação, eu entendi", mas veja: quem estava na graduação não era quem antes estava lá no ensino básico? Então é meio que um ciclo, não é? Você não tem contato, entra na graduação e não tem também.

P8: Eu tive um professor de matemática muito bom, rapaz, eu acho que já falecido. Professor "*L"*... Antiga 5ª série e atual sexto ano. E os outros professores também foram bons, mas é que nem eu estou falando para você, muita coisa foi passada de uma forma muito mecânica e a gente sabe que as pesquisas já evidenciaram que o método mecânico nem sempre consegue atingir o objetivo de que o aluno consiga compreender aquilo que ele está fazendo. Ele tem que compreender, então a gente acaba repetindo.

Marcus Prates: Tira completamente o sentido do negócio.

P8: Então fica sem sentido. E aí quando você passa para o outro lado e você se torna um professor, um estudante fala "professor, por que a soma dos ângulos internos de qualquer triângulo é 180°?" você vai lembrar "eu fiz essa pergunta lá para os meus professores e não teve um filho de Deus que me respondeu isso". Aí eu falo "mas vou deixar meu estudante com esse ponto de interrogação?"... Aí foi onde eu fui atrás, como que eu posso... Então, no sexto ano, uma experiência que eu fiz com os estudantes: "pega uma folha de caderno, faz um..." e falei "vai dobrando...". E aí eles marcaram e na hora que ele faz a junção faz um ângulo raso. Eu falei

- E o ângulo raso tem quantos graus?

- 180°!

- Então aí, ó...

- Oh, professor, são os três ângulos.

- Ah, está vendo?

Então eu acho que uma maneira de você começar a estimular...

Marcus Prates: Estimular, é...

P8: Estimular as crianças.

Marcus Prates: Eu fiz eu fiz um parecido com isso, mas foi assim... Porque, assim, tem níveis, não é? Isso não prova. Para a gente não prova, mas para eles prova, para eles é prova. E aí o jeito que eu consegui pensar de fazer eles aceitarem isso como uma validação... Vai terminar, a chamada

P8: Depois a gente abre outra.

Marcus Prates: Depois a gente volta... Isso como validação, eu pedi para eles fazerem um triângulo sem medir. Não fui eu que fiz, foram eles que fizeram. Eu falei assim "olha, um triângulo aleatório a gente consegue fazer isso", para quê? Para mostrar que eu não manipulei nada. E aí eles viram aquilo funcionar e falaram "é, realmente. Então serve para todos?" [eu respondi] "não, vê você se serve. Então manda Fulano fazer outro...". Aí eu mandava os alunos, um fazer e eles dobrarem para ver se funcionava – e funcionava. Aí, claro, no sétimo [ano] a gente muda, não é? A gente tem outro argumento, tem outro nível e muda o... Muda a forma que a gente prova porque a aceitação deles muda, não é? O nível de aceitação deles, a gente espera que mude também. Bom... E aí, na graduação você não teve... E os seus alunos você também já falou que você estimula eles via resolução de problema, não é? Quer dizer, você estimula eles a desenvolver os argumentos e as provas via resolução de argumento, via resolução de problema de forma até gradual, não é isso?

P8: Sim. Aí, assim, chega um momento, Marcus, na metodologia, tem um momento de, assim, o aluno tem que expor a sua resolução na lousa e aí tem a plenária. Então, tem aquele debate público entre eles e ali o nosso papel de professor é estimular mesmo a discussão, “o pau tem que comer”, entendeu? E é muito interessante que você vê muito aluno às vezes que você acha, assim, que ele é limitado e tudo, ele resgata vários conceitos ali. Além desse resgate entre eles, quem não aprendeu o conteúdo passa aprender, quem não se lembrava passa a relembrar... É um momento, também, no qual cada grupo aprende uma resolução nova porque numa sala de aula dificilmente todos os grupos resolvem da mesma maneira.

Marcus Prates: Exatamente.

P8: E os próprios estudantes vão analisando as respostas e eles buscam conhecimentos prévios para refutar aquilo que eles acham que está errado. E vai atrás de conceito, ao conceito matemático, e fala assim “é muito interessante”. Então, aí vem... por isso que eu falo para você, uma argumentação surge, basta um momento – eu, pelo menos, vou direcionando um estudante a ele fazer, ele pensar assim, “mas será que a matemática...”, eu falava assim nessa pesquisa e sempre falei “mas será que a matemática, para justificar suas respostas, ela sempre vai ser através da língua natural? O que ela usa?”. Eles pensavam “será que é só isso?”. E em grupo sempre surge “ei, professor, eles usam um monte de letra aí" e “opa, saiu letra!”. Então essa letra é a escrita matemática, a simbologia que a gente fala que você precisa se apropriar. Por isso que ela é difícil, se você não sabe escrever, se não domina norma culta da língua portuguesa, você não vai saber interpretar um texto. Então eu saio fazendo esses paralelos. Na matemática é a mesma coisa. E aí, por exemplo, daquele primeiro trabalho, que a gente pega os triângulos e vai dobrando os vértices para formar um ângulo raso, você fala “então, agora você tem que procurar. Como é que a gente representa um ângulo?”, “ah, professor, letra maiúscula, ou então o alfabeto grego”. Então agora a gente vai começar a escrever isso – você está usando dialeto matemático. Então é um processo que eu sei que é difícil, Marcus, complexo, porém isso daí precisa ser feito. Então aí eu falo de novo: a sensibilidade do professor de conduzir no estudante a adquirir...

Marcus Prates: Eu acho que é por isso que ninguém faz, porque é difícil, é difícil. Aí ninguém faz, é mais fácil você repetir, é mais fácil você resolver questão, não é?

P8: Mas aí é que tá, eu acho que, assim, infelizmente a gente tem uma sociedade também que não contribui para isso, não é? Não contribui.

Marcus Prates: Exatamente, exatamente E, para a gente fechar aqui, porque eu achei, assim, que está muito completo isso aqui, eu acho que esse tópico a gente não tocou, ainda... A gente só passou por ele, que é o seguinte: quando você pega – e aí falando até um pouco sobre avaliação, um pouco. Não é avaliação, mas... – que tipo de elemento você considera válido, você valida na argumentação dos seus alunos, para validar as respostas deles? Vamos supor que você passa um problema e eles têm que argumentar... Que tipo de elemento ele está apresentam que você considera como válido para dizer "'pô', um argumento válido", ou "uma prova válida", algo assim?

P8: Olha, então, se tratando, como a gente trabalha com resoluções de problema, se o aluno fizer se estiver dentro do contexto ou não, a gente considera. Você entendeu? Por exemplo, ele fez tudo errado, aí não sou eu que falo isso para ele, porque ele vai vendo, Marcus, a resoluções dos outros colegas. E aí ele se convence com uma resolução que ele vai falar assim "professor, essa resolução faz sentido agora para mim, a minha não faz...". E o que ele escreveu? Você está falando assim "o que eu vou considerar na avaliação?". Olha, eu acho que o aluno... Por isso que eu falo, assim, que eu acho que avaliação, ela precisa ser uma avaliação construtiva, uma avaliação formativa. Eu não posso fazer uma avaliação somativa no qual eu vou classificar "ah, você não usou essa matemática, fez isso... ZERO! Eu vou cancelar!". Não, eu preciso olhar. Mesmo se o estudante usou a língua natural, mesmo se ele fez uma representação pictórica, se ele fez um gráfico, ele argumentou. E se essa argumentação dele estiver dentro do contexto da pergunta que foi solicitada, o aluno acertou e eu considero.

Marcus Prates: sim

P8: Considero e dou os parabéns. Mostra sua resolução porque é mais uma resolução. Olha eu sei que essa argumentação, ela se afasta da argumentação matemática, de uma prova matemática. Porém, eu acho que ela é muito valiosa, porque aí é que está: o estudante está desenvolvendo a intuição, o estudante está desenvolvendo o pensar, o raciocínio. Porque eu vejo assim, o raciocínio, eu concordo com texto de Ponte, Mata-Pereira e Henrique: o raciocínio é uma região, é um subconjunto do pensamento. Porque ele é específico da Matemática, por isso que ele é raciocínio matemático. Enquanto o pensar, ele é bem amplo. Então eu acho que quando o professor começa a aceitar esses aspectos do estudante, você está valorizando a resposta dele, ele vai ficar feliz, ele vai ganhar autonomia – porque se ele se achava incapaz para matemática, ele vai falar “não, eu entendo matemática”.

Marcus Prates: Aí vem o estímulo.

P8: O estímulo! E aí, eu acho que é um processo assim, você fazer com que ele saia da intuição e ele vai migrando pelos méritos dele para a dedução. A gente, de vez em quando, dá uns empurrões, Marcus. Eu vejo isso, então, assim, na avaliação eu considero, eu acho que está certo. Coitado do aluno que o professor não considera, porque ele se sente frustrado, ele vai falar “não vou fazer mais nada porque o tudo que eu faço está errado, esse professor não considera nada...”, entendeu?

Marcus Prates: Sim. E aí, é aquela questão de depois ir lapidando, como você falou, para linguagem formal matemática. Mas o importante é ele ter/desenvolver o raciocínio para depois ser letrado, vamos dizer assim. Primeiro ele raciocina e depois a gente leva ele para formar... para o formalismo, não é?

P8: É porque, assim... É ele que vai construir, Marcus, a compreensão dele. Ele constrói a compreensão dele, ele não precisa me imitar, ele não precisa me copiar, é um mérito dele. Então ele vai ver que ele vai ficar feliz, ele vai falar “eu sei matemática”. E aí vai.

Marcus Prates: E aí um... Não tem a ver muito com prova – pelo menos eu não vejo como prova, talvez com a utilização de argumentos –, mas eu já tive caso de lá no sétimo ano, introduzindo equação do primeiro grau, eu passar um problema que, na minha cabeça, a resolução do problema era montar uma equação. E eu tive alunos que montaram vários cálculos separados, primeiro dividiu, depois... Aí eu olhei e falei “o cara entendeu o problema, ele desmembrou tudo e montou”. Quer dizer, eu não vou... Como é que eu vou dar errado para isso? Ele entendeu tanto o negócio, que ele nem montou a educação. Ele só desmembrou o problema todo.

P8: Mas aí é que está: é isso que é difícil para muito professor aceitar, porque ele quer que o estudante faça o que ele faz. Gente, se os documentos oficiais e as pesquisas estão falando que o estudante tem que ser o protagonista, aceita a resposta, mesmo que seja toda errada. E aí você vai mos... Ele vai vendo isso. O que o raciocínio dele “opa, eu estou um pouco deslocado, eu preciso voltar para a linha”, então isso leva um tempo. Essa confiança precisa retomar. Por quê? Porque nesse processo formativo dele ao longo dos anos é complicado, fica muito... Fica muito buraco. E se a gente “meter o pé na jaca”, a gente perde o aluno.

Marcus Prates: É verdade, é verdade. As minhas perguntas acabaram, você já respondeu todas elas, como eu falei até antes de eu perguntar.

P8: Que beleza.

Marcus Prates: Você quer acrescentar mais algo, ou para você já deu por encerrado também?

P8: Não, olha, eu desejo a você que você faça uma boa pesquisa, que a sua pesquisa contribua muito. Que você vem para esse mundo da argumentação, prova e demonstração que ninguém quer porque dá trabalho... Porém a gente tem que pensar nos nossos estudantes. Eu não formo robô, meu irmão, eu quero formar um cidadão intelectual, eu quero formar um cidadão pensante, reflexivo e que mesmo que ele não atue na matemática, ele vai lembrar “aquele raciocínio que o professor me ensinou está me ajudando aqui agora porque eu sei pensar, eu sei analisar, eu sei como abordar um problema”. Eu acho que é muita coisa que vem, então a gente não pode deixar isso escapar, a gente tem que tentar fazer o melhor para eles. Eu desejo isso para você, que você faça uma boa pesquisa.

Marcus Prates: E eu desejo o mesmo para você que está no doutorado agora e que já está nessa área.

Apêndice N - Transcrição da entrevista com o participante P9

Marcus Prates: Começamos aqui. Só confirma para mim, por favor, que está autorizado fazer a gravação do áudio e a transcrição dele também.

P9: Pronto, autorizado, sim, Marcus.

Marcus Prates: Está ótimo. Então, vamos lá... Como a gente conversou, é um bate-papo, tem algumas perguntas aqui dentro desse bate-papo, mas pode ser que a gente vá para outros caminhos, que a gente caia em outras conversas que não estão previstas aqui e está tudo bem. Então pode ser que dure uns 20, 25 minutos, em média. Eu estou, também, com aquele seu outro formulário aberto, só para me dar uma ajuda com as suas informações, beleza?

P9: Está ok.

Marcus Prates: E aí eu vou tentando me guiar por lá também. Bom, primeira coisa... Qual foi o ano e qual foi a instituição em que você se formou como professor de matemática?

P9: Eu me formei no ano de 2017, aqui em uma universidade federal, na Paraíba mesmo.

Marcus Prates: Sim, e aqui, por esse formulário, você não deu... Pelo menos por enquanto, você não deu continuidade numa pós, ou num mestrado, não, né?

P9: Não, não... Durante a graduação é que sempre era oferecido um curso a cada seis meses para professores de matemática do Ensino Médio. Que é um curso oferecido pelo IMPA, né? Pelo IMPA... Começou com o nome CAPEM, aí depois passou para PAPMEM, mas eu nem cheguei a concluir os oito módulos. Porque eram oito módulos e, se eu não estou enganado, ele compunha um total de 360 horas, mas eu não cheguei a fazer os oito. Eu fiz sete módulos e não fiz o último.

Marcus Prates: Entendi, tranquilo. Entrando já no assunto que a gente quer entrar, que é o ponto central da nossa conversa: O que você entende, o que você compreende quando a gente fala sobre argumentação e prova Matemáticas? Qual é a sua concepção sobre esses conceitos?

P9: Ao meu ver, a argumentação é quando a gente se utiliza de coisas, de definições que nos foram apresentadas, ou deduções que a gente faça dentro de um de um campo lógico, com veracidade. Com comprovações que a gente ou faça ou considere uma comprovação já válida, como um teorema, que a gente não vai precisar demonstrar novamente dentro de uma perspectiva daquilo que a gente se propõe em um problema. Não é? E eu acho que eu me perdi... Repete o final da pergunta para eu me reencontrar?

Marcus Prates: Pelo que eu entendi, você falou sobre a argumentação agora. Eu tinha perguntado o que que você entende sobre argumentação e provas matemáticas. Eu não sei se você viu os dois separados...

P9: Sim, sim.

Marcus Prates: Ou se viu como uma coisa só.

P9: A prova seria provar, demonstrar, seria isso?

Marcus Prates: Isso, não é não é avaliação.

P9: Pronto... E, sobre provar algo, é algo que, para nós, enquanto alunos de graduação, é algo bem corriqueiro quando a gente pega a disciplinas, principalmente nesse âmbito teórico, a gente tem essa... Tem muito de “prove isso”, “prove aquilo” ... Muitas disciplinas na universidade, a gente fez..., mas acaba que, no nosso trabalho do dia a dia, para aulas no nível secundário, Ensino Fundamental ou médio, a gente acaba deixando isso meio de mão. Mas é importante [ter] algumas demonstrações, algumas comprovações que a gente venha fazendo para instigar os nossos alunos a ter essa curiosidade, ter essa maneira formal de apresentar a matemática, né? E saber de onde as coisas vêm. É muito ruim a gente pegar algo e simplesmente aceitar e usar a vida inteira sem saber de onde veio, sem saber de onde vem a verdade sobre ela.

Marcus Prates: Entendi. No caso, você até comentou que a prova, para quem é estudante de graduação, é uma coisa muito corriqueira que a gente vê o tempo inteiro e aí, em contrapartida, a gente, enquanto professor de Ensino Fundamental, infelizmente não tem como cobrar tanto, isso, né? Por “n” razões que sejam. Mas, se você fosse tentar dizer o que que é a prova matemática, o que ela seria? Porque você falou sobre a argumentação...

P9: Isso

Marcus Prates: Se for tentar explicar o que que é uma prova matemática, dentro do seu conhecimento, o que é uma prova matemática?

P9: Uma prova matemática seria eu validar todos os levantamentos que eu fiz a cerca de alguma coisa, cerca de uma teoria, utilizando lá mecanismo lógicos, usando dedução, para que eu possa chegar no resultado que não possa mais ser refutado, que não possa ser contrariado. Seria isso.

Marcus Prates: E aí, você enquanto estudante de graduação, ou nesses cursos que você chegou a fazer por fora, você teve algum contato dentro de uma disciplina, ou alguém... uma disciplina voltada para isso? Ou alguém falando sobre esse tema de argumentação? Ou não?

P9: Sim. Na graduação a gente teve a disciplina “Argumentação em Matemática”, que eu fiz com o professor Doutor “X”, muito bom, por sinal, onde a gente viu lá comprovação por absurdo, prova por indução - indução matemática. Então teve uma disciplina que foi direcionada para isso e teve uma parte, na metade dela, que a gente trabalhou principalmente em cima dessa desse tipo de conteúdo. Eu devo ter “pago” ela em 2014 ou 2015... Já faz um tempinho. Além dessa daí, a gente também teve a disciplina de introdução à Análise [Real], que tinha muita prova e “demonstre”, “prove e demonstre”. Introdução à álgebra... Também tinha umas que, particularmente eu não me identifiquei com álgebra, mas a gente tinha muito “prove sobre conjuntos cíclicos”, espaço e subespaço vetorial. Era bem abstrato. Essa parte abstrata eu não gosto muito, confesso que meu campo de matemática que eu gostaria de fazer uma pós-graduação, se eu fosse, seria Geometria. Muito provavelmente eu seria geômetra, embora também tenha demonstrações, mas não com o mesmo teor der que [os campos de] Álgebra e que Análise exigem.

Marcus Prates: É, não sei se a palavra certa seria rigor, mas eu acho que a gente, quando estuda álgebra, trabalha muito com teoremas que tem a ver com... Que envolvem cálculo, que envolve um monte de coisa, e em geometria parece, pelo menos se a gente não for entrar muito [no assunto], que é mais uma questão de lógica, né? Parece, a princípio... Que você vai "só", entre aspas também, montando peças, diferente desses outros. E, no caso, essa sua disciplina de argumentação é como se fosse assim... No primeiro momento teve aquela ideia do teste lógico, começou desse ponto? Explicando mais ou menos como é que funciona a lógica matemática e negação, afirmação...

P9: Sim, sim, sim.

Marcus Prates: E aí depois foi desenvolvendo um pouco mais.

P9: Exatamente! Exatamente... Em argumentação, a gente viu tudo como se fosse um início de... Não sei nem se seria, porque, na verdade, eu não conheço o curso de lógica, então a gente teve um básico de lógica matemática falando sobre axiomas, falando sobre, inclusive, os símbolos lógicos utilizados. Porque eu não sei como funciona aí no Sudeste, mas aqui no Nordeste a carência em matemática nas escolas é muito grande. E os professores identificaram isso na graduação. Então os primeiros períodos, principalmente, eles colocam muito essas disciplinas de nivelamento... Matemática básica, para gente rever um pouco sobre funções, inclusive. Porque só com a bagagem que a gente saiu no ensino médio, a gente sai com tudo muito precário. Então eu não vou lembrar realmente do curso inteiro, mas a gente começou vendo coisa básica, mesmo, coisa simples.

Marcus Prates: Sim, não precisa lembrar a ementa, não, já tem tempo, já passou... Mas legal que tem essa preocupação, não é? A gente geralmente conversa muito sobre isso, que, por mais que universidade pública teoricamente tenha que ser para todo mundo, parece não ter muito essa preocupação de ajustar para quem está entrando. Aqui, por exemplo...

P9: Não.

Marcus Prates: Aqui é muito variado, mas a gente... Geralmente as faculdades aqui começam com “Pré Cálculo”, por exemplo. E aí, em “Pré Cálculo”, a gente vê vários tipos de função, mas já entra em limite. E aí tem gente que não vai lembrar disso tudo, então existe uma certa luta em algumas universidades para ter uma matéria antes do “Pré Cálculo”, para as pessoas se habituarem com conceito de função, lembrar... Que é o que você está falando, não é? Tem essa preocupação em estruturar uma base um pouco mais do que a gente teria no colégio.

P9: Eu acabei, na verdade, sofrendo um pouco, no começo do curso, reprovações períodos após períodos, até me habituar com tudo isso. Então até “Cálculo I”, hoje, para mim, sendo algo bem básico, simples – função, limite, derivada –, isso tudo, para mim, hoje faz sentido, é prático, é didático. Mas assim que eu entrei, não entrava na minha cabeça fazer algum tipo de fatoração, um artifício mirabolante para conseguir calcular um limite de uma função que dava zero sobre zero, por exemplo. E agora, para mim, isso aí não é dificuldade nenhuma, fazer. Mas, assim que a gente entrou... E ainda há muita divergência entre os professores na universidade – até quando eu saí, até 2017, quando eu concluí – sobre o aluno que não tinha condição de acompanhar sequer o conteúdo de funções continuar fazendo o curso de matemática. Então a evasão era muito grande. No período que eu entrei, foram 65 ingressantes e se formaram, no máximo, 10 e eu fui um dos últimos a terminar, inclusive.

Marcus Prates: É, na minha turma, se eu não me engano, foi isso aí. Não, entraram 40 se formaram 5, até o momento que eu saí. Então não é tão diferente. E depois eu estive lá na faculdade algumas vezes e eu encontrei pessoas que entraram comigo, ou dois, três anos depois que eu tinha me formado, ainda cursando. E aí são outras razões. Às vezes a pessoa tem um trabalho que não permite ela acompanhar, enfim, tem um monte de coisa.

Agora, você como como professor, você está atuando como professor de escola pública, não é?

P9: Escola pública. Duas escolas públicas!

Marcus Prates: Ótimo. E agora o seu trabalho é fazer com que essas crianças tenham essa base que você não teve, hein?! Vamos cobrar isso aí!

P9: É, a missão é árdua.

Marcus Prates: É isso aí, a missão é essa aí, mesmo.

P9: Tentar fazer diferente.

Marcus Prates: Isso aí! Agora você, no lugar que você tá de professor, você trocando: você era aluno universitário e agora você como professor Regente. De que forma... E aí, já que você teve essa disciplina de argumentação na sua faculdade e você identificou que você trabalhava com argumentação e com provas em outras disciplinas, como é que você estimula os seus alunos, ou se é que é possível – você até falou que não é muito possível –, mas como é que você estimula os seus alunos a que eles desenvolvam os próprios argumentos e provas em sala de aula? Dentro do possível claro. Como é que esse estímulo acontece?

P9: A minha a minha realidade na nas escolas é bem difícil, não é? Porque é escola pública em localidade carente, é uma comunidade pobre de verdade. Tem aluno que vai pelo lanche, não tá interessado na aula. Mas, na medida do possível, a gente tenta problematizar as situações, para que ele possa estar interpretando o problema de uma forma palpável, de uma forma tangível para não ser algo, também, tão além da realidade, que eles entenderiam. Então não adianta eu botar lá um problema que fale estritamente sobre a órbita dos planetas, se é um problema que ele não vai sequer ter a dimensão do que vem a ser aquilo. Então a gente tenta colocar lá problemas que envolvam um experimento prático que eu possa fazer, por exemplo, em sala de aula, o arremesso do objeto de forma oblíqua, que vai fazer lá um movimento parabólico. Então eu tento, na maioria das vezes, exemplificar as situações onde a gente vai conseguir estar fazendo esse levantamento de dados e os argumentos todos por escrito. Porque quanto mais detalhes, quanto mais eles descrevem a situação, melhor eu vejo que fica a compreensão daqueles que vão com o intuito de estudar. Porque infelizmente a gente também sofre com essa questão de sala lotada. E com sala lotada vêm inúmeros problemas, vem barulho, vem falta de interesse, vem a disputa com os aparelhos celulares, que é um câncer, a gente não consegue lidar com isso de maneira mais ostensiva de recolher, não pode recolher. Então essa parte onde a gente Mostra eles como fazer o argumento, como fazer suas comprovações, desde o ataque na questão, a extração de dados e até chegar na conclusão da questão, a gente tenta fazer o possível para exemplificar onde ele possa imaginar-se dentro do problema. Então seria basicamente isso. Eu tento fazer com que eles se coloquem dentro do problema, para que eles consigam enxergar as possíveis formas de chegar na solução e descrevam o passo a passo e argumentem aquilo que foi utilizado em cada etapa para chegar no resultado final que a gente pretende.

Marcus Prates: Isso que eu ia perguntar: no caso, você tem uma estratégia, [que] não sei se eu posso chamar assim, mas ela é descritiva, não é? Você apresenta uma coisa e pede que eles sempre descrevam tudo, para eles enxergarem o que que eles estão falando ali, não é? O que eles estão trazendo, para ver até se faz sentido. E se fizer sentido, é o argumento deles para finalizar o que está sendo solicitado.

P9: É bem complexo, isso, porque a gente acaba sofrendo muito a resistência. O MEC em si e as escolas, elas exigem muito que a gente coloque provas de múltipla escolha, apenas, onde o aluno não vai expressar a opinião dele. Muitas vezes ele vai apenas ver as questões, vai marcar uma alternativa que ele acha que pode ser, ou simplesmente para não deixar em branco. E se perde essa parte de colocarmos questões abertas, onde eles vão escrever, vão argumentar, vão dar um parecer dele sobre o que eles entendem aquilo ali. Então eu tento conciliar porque é exigido da gente que a gente passa questões de múltipla escolha. Mas eu não abordo uma prova inteira de múltipla escolha porque eu quero ver também aquilo que eles podem produzir de maneira mais independente, sem ser apenas assinalar uma alternativa. Então, dentro do possível, eu tento colocar essas questões com algum tipo de argumentação, onde ele possa dar o parecer do que ele entende daquilo que foi perguntado, ou colocado como problema para eles nas avaliações.

Marcus Prates: Isso tudo dentro dessas dificuldades que você apontou, essa defasagem educacional deles, as dificuldades de chegar no colégio... Enfim, você está lutando contra um monte de coisas e... Quer dizer, na cabeça do aluno, ele ainda tem que passar por um processo argumentativo ali, não é?

P9: Exatamente, aí os que têm mais maturidade sempre questionam o fato de que "eu vou usar isso em que na minha vida?" e isso é complicado demais. Aí, na maioria das vezes, bom... "Você sabe o que você vai fazer da sua vida? Não? Então enquanto você não souber o que vai fazer da sua vida isso é importante porque isso poderá fazer parte do seu futuro escolar, acadêmico e profissional". Então são questões de cunho mais do que apenas educacional. Entendeu?

Marcus Prates: Agora, assim, eu entendi o que você disse, mas eu vou eu vou pegar uma questão para tomar como exemplo, tá? Que série você pega agora, que você dá aula?

P9: Eu tenho minhas turmas de EJA. Tenho minhas turma de EJA e tem umas turmas de fundamental, de 6º ao 9º [anos], e tenho uma turma de primeiro e uma de segundo [anos do Ensino Médio], só. Esse ano não tenho o terceiro [ano].

Marcus Prates: Ótimo. Então, tomando como exemplo... Você me trouxe casos em que, por exemplo, você estimula a argumentação por meio de descrição. O aluno, ele vai ter que descrever ali o que ele está vendo, ele vai ter que interpretar um problema, entender o que que ele está fazendo para poder contra argumentar com aquilo e resolver aquilo, não é?

P9: isso

Marcus Prates: Mas aí, falando, assim... Pensando em, de fato, provar algo, algo genérico, um caso geral. Se eu te apresentar um exemplo qualquer, não precisa ser esse, tá? Mas aquela questão, por exemplo, da soma dos ângulos internos de um polígono convexo... A gente tem uma fórmula para calcular isso, certo? Vamos dizer que você vai apresentar esse assunto na sua sala de aula. Como é que eles são estimulados, talvez, a provar que aquela fórmula funciona? Como é que eles são estimulados a mostrar que aquela relação ali de fato existe, ou como é que chega naquela relação, naquela fórmula? Você chega a ter esse tipo de caso, ou não chega perto disso?

P9: Essa cobertura teórica, digamos assim, a gente mostra para eles. Se realmente eles conseguem fixar na cabeça, isso aí é um “X” gigantesco. Mas qual é a minha estratégia? Minha estratégia com relação a esse conteúdo, que, inclusive, se eu não estou enganado, é do 8º ano... Aqui nos livros didáticos ele cai no oitavo ano...

Marcus Prates: É oitavo.

P9: Soma dos ângulos internos de um polígono... A gente constrói, a gente... Eu, particularmente, que eu sou criativo nessas coisas, a gente constrói com material físico, não é? Eu pego lá uma cartolina, faço os recortes de uma forma que eu consiga ir construindo o primeiro lá, um triângulo, primeiro polígono possível de fazer, o triângulo... Aí pega outro triângulo que encaixa nele perfeitamente, aí ele se torna um quadrilátero. Aí um terceiro triângulo que juntando com um quadrilátero vai formar um pentágono... E eu vou nessa construção dos polígonos aumentando o número de lados. Aí eu mostro para eles que a cada triângulo novo acrescentado na figura só aumenta um lado na figura geral. E esse lado que acrescentou vai aumentar o que...? 180°, não é isso? Em cada um, que é justamente a soma dos ângulos internos de um triângulo desse. Então, eles aceitam que com um triângulo funciona, até porque a gente tem aquela brincadeirinha de recortar o triângulo e juntar os vértices... Então também vai funcionar para dois triângulos, funciona para três, aí, para não... que é impossível você fazer para n triângulos, a gente coloca lá aquela formulazinha, quase que levando eles a justificativa por indução e, assim, alguns aceitam, outros simplesmente reclamam que não entenderam nada, mas é o que dá para a gente fazer aqui. Porque, de fato, o cara chega, às vezes, no terceiro ano, como eu acredito que eu tenha chegado também, sem ter muito essa noção de lógica e de como um argumento, pode ser utilizado para chegar numa comprovação de algo. É um negócio que, na cabeça de uma criança e de um adolescente, é muito abstrato, é muito surreal.

Marcus Prates: Sim... No caso, então, essas demonstrações mais sofisticadas, digamos assim, você apresenta, mas você faz todo o processo para apresentar. E aí a parte que cabe a eles são problemas um pouco mais simples, que aí eles já tem contato com esse processo, com esse processo argumentativo, e é onde eles vão colocar em prática essas questões um pouco mais simples, assim. Entendi.

P9: E, assim, até por uma questão de demanda, de não desmotivar a turma, a gente tenta botar os problemas com esses contextos onde ele possa de fato, imaginar-se no problema. A gente não a gente não coloca problemas que sejam tão além da realidade deles porque [eles] não vão responder. Aí a gente vai ter um quantitativo de nota muito ruim, então a gente trabalha em sala de aula, resolve exercício, mas nas avaliações infelizmente não dá para a gente cobrar com teor tão alto...

Marcus Prates: Não tem como fugir disso.

P9: Até como vem no ENEM às vezes, aqueles problemas lá com... Que não são argumentativos, são problemas de encontrar um resultado final. Mas problemas como questões de exponenciais logaritmos, questões de trigonometria, elas são bem puxadas e eles não vão eles não vão argumentar. Por exemplo, uma questão que eu use potencial elástico, que tanto cai em Física como cai em matemática, e vai estar utilizando de uma função exponencial... Então eles não conseguem, assim, infelizmente utilizar os dados utilizar um valor já fixado lá para montar, moldar e utilizar aquele dado em algum momento na questão. Mas essas outras, onde eles conseguem se colocar como protagonista, talvez, na questão, eles conseguem. Esses problemas de argumentação, eu acho que é onde eles se saem melhor, são os problemas de conjunto, não é? A gente coloca lá um problema de conjunto, onde valores totais de União, interseção e quantidades isoladas de conjunto... Se eles se colocam como algum elemento desse conjunto, eles até que conseguem argumentar, faz sentido as coisas que eles colocam.

Marcus Prates: Sim, sim... Às vezes até de função, não é? Talvez entre aí nesse... Função do primeiro grau, a ideia de função, que vai entrar em conjunto também, não é? Talvez eles possam se colocar nessa nessas questões. E aí, pensando nisso, no estímulo que os seus alunos têm, quando você recebe essa devolutiva, [quando] você recebe as respostas deles, seja num exercício, você falou que prova dificilmente você tem como colocar isso, não é? Mas seja num exercício, ou em alguma avaliação que você tenha como controlar essa avaliação, que tipo de elemento numa resposta você considera como válido, como argumento válido dos seus alunos? Por exemplo, se o aluno desenhar é um argumento válido? Se ele escrever de um jeito informal, você considera como como um argumento válido, que valide a resposta do seu aluno? O que que você considera como argumento válido numa resposta de um aluno seu?

P9: Eu considero desenhos... Eu considero. Até porque eu tive uma disciplina na universidade... Fundamentos da Geometria Euclidiana. Eu não sei se tu já ouviu falar dessa disciplina com esse nome, porque na verdade, quando mudou a grade curricular, essa disciplina também mudou de nome. Eu não sei nem como é que ficou com o nome novo. Mas a gente tinha comprovações que... Rascunhavam faziam algum tipo de esboço, mas que vinha depois com algo formalizado. Mas a gente tinha maturidade, a gente tinha propriedade para fazer essas outras comprovações por escrito. Eu lembro de um problema que o professor “Y”, que é cearense... Cearense, diga-se, por sinal, é uma das melhores graduações de Matemática do Brasil. Não sei se tu sabe disso.

Marcus Prates: Não...

P9: A graduação e a pós-graduação no Ceará, no curso de Matemática, é uma das melhores do Brasil. Eles dão muito valor a... Desculpa até o parênteses que eu estou colocando aqui.

Marcus Prates: Não, tranquilo!

P9: Eles valorizam muito o profissional de educação, principalmente em Matemática, lá, cara, é absurdo. O professor do Estado lá recebe, no começo da carreira, melhor do que um professor do IFPB, para você ter ideia... Final da carreira é que o professor Doutor no IF vai ter o salário superior de um professor do Estado lá no Ceará. É um negócio incrível! Então voltando...

Marcus Prates: É realmente fora da curva, não é? E você só de você ter comentado que existe a preocupação – e aí eu estou pensando nisso até agora, e aí quem tá abrindo parênteses sou eu, agora – eu, quando me formei, não tinha [na graduação] nem um pouco essa preocupação de pensar em carregar o pessoal que estava defasado. Tinha preocupação de passar o conteúdo, e aí se a pessoa acompanhasse, ótimo; se ela não acompanhasse, o problema é dela. E eu vejo que não é só uma questão de onde eu me formei, várias universidades infelizmente são assim. E só de você falar que existiu essa preocupação de alterar a grade para poder contemplar essas pessoas que tiveram essa defasagem... Só daí a gente vê a diferença, não é? Aqui a gente não tem isso. Pelo menos não que eu saiba.

P9: Para tu ter ideia, a preocupação do Ceará é tão grande, que há alguns anos, já... tu lembra do evento particular científico que teve na abertura da Copa do Mundo quando foi aqui no Brasil?

Marcus Prates: Não.

P9: Não? Na copa do mundo que foi aqui no Brasil, eu acho que foi que ano...? Dois mil e...

Marcus Prates: 14

P9: 2014, não é? Pronto... Em 2014 é um cientista brasileiro produziu um exoesqueleto, que foi testado e foi construído com todo o trabalho do mundo para que um tetraplégico pudesse dar o pontapé inicial da Copa do Mundo. E foi o que menos enfatizaram. Na abertura da Copa do Mundo, o jogo inicial da Copa do Mundo, foi um tetraplégico dando pontapé inicial, todo vestido dentro do robozinho. Mas foi o cara. E esse Android, ele era... Android não, esse exoesqueleto, ele era comandado pelo quê? Eletrodos colocados na cabeça do cara. Então era o cérebro do cara que estava controlando, não era um controle remoto que alguém estava controlando, não, entendeste?

Marcus Prates: Era ele mesmo que fazia o movimento.

P9: Sim, foi um cientista brasileiro e o cara construiu um Centro de Tecnologia onde? No Ceará. É uma cidade cearense, eu não lembro o nome da cidade, mas o nome do cientista tu pode procurar depois, é Nicolelis. O nome do cara é Nicolelis

Marcus Prates: Vou dar uma olhada.

P9: Então... ele mudou a realidade de crianças e adolescentes lá. Porque a escola foi toda moldada como Escola Modelo. Entendeu? Então se não... Se os governos novos que entraram e [se] ele não saiu do Brasil, se ninguém modificou, essa escola lá deve ser uma escola de ponta hoje em dia e é uma escola pública.

Marcus Prates: Que bom saber disso. Bom, mas vamos lá... E aí a resposta, que a gente acabou entrando em outros assuntos aqui. A pergunta era: quais elementos você considera válidos, você valida no desenvolvimento de argumentos dos seus alunos?

P9: É, independente de ser desenho, independente de ser um fragmento de texto da forma que ele possa escrever, informal, eu me coloco no lugar dele e tento ter uma visão a partir do que ele disse, se eu posso considerar aquilo como vale ou não. Porque se ele conseguiu transmitir daquela forma e eu entendo que daquela forma ele pode reproduzir situações onde aquilo vai ser usado e pode ser usado, e é válido, não vai ter problema aonde aquilo não funciona, onde aquilo deixa de ser válido, então eu considero como verdadeiro, sim. Eu considero.

Marcus Prates: Ótimo. E aí, no caso, agora só para fechar, mesmo, no caso em que, por exemplo, o aluno apresenta só uma resposta final, Alguma coisa assim... Como é que você enxerga isso, aquela resposta seca? Sabe? Ele só dá a resposta final mesmo, sem nada.

P9: Bom, aí vem a questão do “dois pesos e duas medidas”. Como a gente tem um contato diário com os alunos, eu entro em praticamente todas as salas os quatro dias que eu dou expediente na escola. Então eu dou... Na do Estado São 24 horas aula, na do Município são 20 horas aula. Então, como eu já tenho, a partir do segundo, terceiro mês do ano, o perfil de todos os alunos, inclusive os novatos... Quando é um aluno que realmente é disperso, é um aluno que não me apresenta desenvolvimento no dia a dia, no caderno e etc., essa resposta eu acabo que não considerando em sua totalidade, eu não vou dar uma pontuação máxima nessa questão, sendo a questão aberta. Mas quando é um aluno que ele sabe pelo menos argumentar e talvez, por algum motivo, ele não soube lá escrever naquele momento, eu chamo ele mesmo com a prova quase corrigida e pergunto: “E aí, cara, por que que tu me deu essa resposta aqui? Me diz aí. O que foi que levou você a chegar nesse resultado?” então se ele oralmente conseguir me dar algum parecer, eu ainda assim vou considerar a questão.

Marcus Prates: Vai considerar, entendi. Era isso. Eu vou encerrar a gravação, tá? Te agradeço já, de antemão pela ajuda que você me deu, foi um papo muito bom e também saber como é que funciona aí, eu não sabia como é que funciona eu fiquei impressionado. vou encerrar a gravação.

Apêndice O - Transcrição da entrevista com o participante P10

Marcus Prates: Está gravando. Então é isso. É autorizada a gravação e transcrição do áudio?

P10: Sim, sim, está autorizado.

Marcus Prates: Tudo certo, então. Bom, vamos começar. Como eu tinha te falado, eu tenho aqui umas perguntas. Essas perguntas, elas são padrão, mas pode ser que a gente acabe indo para outros assuntos e comentando outras coisas que a gente julgar necessário. Ok?

P10: Perfeito.

Marcus Prates: Para a gente começar, só fala para mim aqui, por favor, qual foi o ano e qual foi a instituição que você conclui a sua graduação.

P10: Então, Marcus, eu comecei estudando em uma instituição federal, então eu fiz o Bacharel lá. E, posteriormente, a licenciatura eu fiz em um estabelecimento, uma instituição privada. E aí, como já havia muita coisa da pública, eu eliminei grande parte e eu concluí, assim, sei lá, acho que um ano e meio. Então, bacharel 3 [anos] e licenciatura 1 [ano] e meio.

Marcus Prates: Lembra o ano que foi a conclusão da licenciatura?

P10: Licenciatura, deixa eu lembrar aqui... Salvo engano foi 2019. 2019, isso.

Marcus Prates: Eu estou abrindo aqui aquele formulário que vocês responderam naquela outra etapa... Mas só para me lembrar que nele tem essa resposta, mas eu não cheguei a abrir ainda. Você chegou a fazer alguma pós [graduação], mestrado, alguma coisa assim?

P10: Eu fiz pós, fiz pós. Fiz em Metodologia do Ensino da Matemática, fiz na mesma instituição em que me formei, mesmo.

Marcus Prates: Legal. Aí você já emendou direto, no caso, não é?

P10: Isso, isso. Foi direto.

Marcus Prates: Entendi. Então está na área do ensino de matemática.

P10: Estou na área do ensino de matemática.

Marcus Prates: Tranquilo. Uma pergunta bem mais direta.... Como a gente já tinha conversado também sobre o tema do trabalho – e naquelas outras etapas isso não foi perguntado diretamente, a gente tentou pegar dentro de como você corrigia, dentro de como você falava naquele formulário. Mas perguntando de forma mais direta: O que você entende, qual é a sua concepção sobre argumentação e prova matemáticas?

P10: O que eu entendo?

Marcus Prates: Isso, sobre a argumentação e prova Matemáticas

P10: É extremamente necessário argumentar...

Marcus Prates: Sobre esses conceitos, que eu estou querendo dizer.

P10: Sim, mas só para ficar claro: quando você diz “argumentação e prova matemática”, você diz para mim, no sentido geral, ou você está dizendo isso dentro do ensino que a gente faz no ensino fundamental? Ou não? Isso tem alguma relação com as aulas em si?

Marcus Prates: Vai ter em outras perguntas que eu vou fazer aqui, eu vou te perguntar sobre isso, sobre como você enxerga isso nas aulas.

P10: Mas isso então essa pergunta é pessoal, tipo como eu...

Marcus Prates: A pergunta é para você, isso aí, pessoal. É o que você entende sobre esse conceito de argumentação matemática, o que que você entende sobre ele, e o que que você entende sobre o conceito de prova matemática. E como você entende eles também, e aí fica livre, a sua resposta.

P10: Sim... Bom, argumentação matemática, para mim, como eu enxergo, são as sequências de raciocínios utilizando axiomas e postulados e todos esses, digamos, tijolos, que, por fim, desencadeiam em uma prova matemática. Então acho que a prova matemática, ela é consequência da argumentação. É como eu enxergo, eu enxergo a prova matemática como resultado de um encadeamento de raciocínios, postulados e axiomas – que, no meu caso, enxergo como argumentos e como entendo – que, no final, desencadeia em uma prova, ou seja, a prova é consequência de todos esses blocos lógicos, digamos assim.

Marcus Prates: Sim. E aí, então, usando a sua analogia de tijolo, é como se a prova fosse a casa, essa construção pronta, e os argumentos são os tijolinhos que você vai usando para construir.

P10: Sim, eu enxergo dessa forma.

Marcus Prates: E aí, no caso, quando você fala que os argumentos são o processo – o argumento é o processo e a prova é o produto final – eu entendo o que você quer dizer com isso, mas, para esclarecer: no seu no seu ponto de vista – e a palavra já diz, também –, o objetivo da prova dentro da Matemática é, ou, quais são os objetivos de uma prova dentro da Matemática, no seu ponto de vista?

P10: Conduzir a um raciocínio que, no futuro, não possa se contradizer. Por exemplo, se nós formos pensar, sei lá, em Física... Geralmente, experimentos físicos você testa um, dois, três, então aquilo vale para *n* experimentos. Na matemática eu entendo que não funciona assim... A gente tem infinitos números, conjuntos variados de números e a gente não tem como provar para cada número. Então a gente utiliza um raciocínio – e um deles, por exemplo, indução finita e coisas desse tipo – que, através de uma série de blocos, como eu disse, lógicos vão encadear em um raciocínio que não permite uma contraprova. Ou seja, aquilo ali vai ser verdadeiro sempre para n, $n + 1$, $n + 2$... Ou seja, aquilo sempre vai funcionar. Então eu entendo que a ideia principal da prova matemática é não permitir uma contra prova, ou algo que desminta um raciocínio matemático no futuro. Ou seja, possa ser que se passe milhares de anos e aquilo, através de um encadeamento de raciocínio, vai continuar válido.

Marcus Prates: Você diz como se fosse para... Você falou aí que, por exemplo, na Física existe um processo empírico, de fazer teste. E na Matemática a gente tenta pegar o caso geral, ou seja, a gente usa a prova, na verdade, para generalizar algo, não é?

P10: Exatamente. A gente não tem como provar para cada número, ou para cada condição, já que são... Geralmente a gente trabalha com uma quantidade muito grande, ou até mesmo infinita de possibilidades, é impossível a gente trabalhar com cada resultado individualmente. Então a ideia é generalizar, mesmo.

Marcus Prates: Beleza. E aí, falando na sua formação, agora. Você lembra se teve algum contato direto ou indireto – eu já vou te explicar o que eu estou querendo dizer por “direto ou indireto” – com esse tema de argumentação na sua formação, seja na graduação ou na pós? O que eu digo por “direto ou indireto”? Contato direto é ter uma disciplina voltada para isso, voltada para argumentação, ou algum estudo que você tenha feito na sua pós, por exemplo, de ler um artigo, de ler um trabalho cujo objetivo era estudar a argumentação. Indireto é você identificar dentro de uma disciplina qualquer – por exemplo, Álgebra Linear, Análise Real –, que ali dentro existia um processo argumentativo e você entendia isso com um processo argumentativo, mesmo que ninguém falasse sobre isso. Quero saber se você identifica que teve esse contato, se você teve esse contato.

P10: Sim, tive, como você disse, em Análise, em Álgebra. Não sei como está agora, o currículo da instituição em que me formei (bacharelado), mas nos três primeiros períodos a gente tem Álgebra 1, 2 e 3 e aí eu... Na verdade, o primeiro contato que a gente tem com provas, é nosso primeiro contato, naquela universidade, com provas, o início. E aí algo mais rigoroso acontece em Análise, em Análise Real, Análise no R^n. É quando as provas, em si, começam a ser mais elaboradas. Mas no início é mais algo voltado para indução matemática utilizando números inteiros, mas uma matéria, assim, diretamente sobre prova matemática, não. Então eu enxergo como uma maneira indireta, eu enxergo de um modo indireto, porque a análise, na verdade, ela tem por intuito estudar as funções. As funções reais, ou no R^n, então é uma consequência, as provas, não é? Eu acho que deveria ter uma matéria específica que tratasse sobre as provas, a questão de provas Matemáticas. Respondi?

Marcus Prates: Sim! No caso, e aí é uma dúvida que, por exemplo, eu, enquanto estudava, também não tive uma disciplina voltada para argumentação... Do jeito que você falou, se eu entender argumentação como um processo, portanto uma disciplina voltada também para prova, não é?

P10: Sim

Marcus Prates: Mas eu, enquanto graduando, eu não identificava claramente um processo argumentativo porque eu não tinha ideia do que era isso. Hoje eu tenho porque eu passei por isso, porque eu fui exposto a isso. Você, na época da sua graduação, isso ficava claro para você que era um processo argumentativo, ou só depois que você foi perceber, você foi enxergar dessa forma?

P10: Então... Dentro das optativas, que a gente começa a encadear a nossa formação para uma área ou outra, eu senti muito essa necessidade. E aí eu fui fazer – na minha ignorância, aquela cabeça de calouro, de “bixo” –, eu fui fazer uma optativa chamada “Lógica”, só que era uma matéria de Filosofia. E aí, assim, me ajudou bastante, mas só que não era uma lógica tão voltada para matemática, era uma lógica diferente, mais para a galera de filosofia. Por fim, eu terminei concluindo a matéria. Mas essa questão da argumentação mais profunda, que a gente enxerga como, por exemplo, as tautologias, ou as implicações, os “se e somente se”, e coisas desse tipo, eu não tive. Assim, foi... Posteriormente, depois de formado que eu fui me aprofundar, a teoria dos conjuntos e tudo mais, aí eu falei “caramba”... Mas, assim, esses bloquinhos que a gente tá falando, que no final desencadeiam numa prova, eu não tive.

Marcus Prates: Você só foi ver dentro das disciplinas de Análise de Álgebra...

P10: Isso, isso. De uma maneira, para ser sincero, bem corrida. Você não tem tempo de... É tudo muito corrido, não é? Você não está só com aquela disciplina, você tem outras disciplinas... Então você vê aquilo ali e às vezes aquilo passa por você de uma maneira tão automática, que só depois você vai entender o que você está fazendo. E que é uma pena, na verdade.

Marcus Prates: É, no caso, aquele processo que muita gente fala quando a gente estuda ensino de matemática e talvez caia um pouco até naquele conceito de Educação Bancária, que você só recebe...

P10: É verdade

Marcus Prates: Então você só recebe aquilo e aí a gente está muito acostumado a, na graduação, ver o professor ou a professora só botando a prova lá. Existe pouco essa coisa de jogar para a gente, tipo assim “tenta construir essa prova”, não tem isso. A gente só vê a prova e se acostuma com a cara dela. É isso que você está querendo dizer, não é? Assim, você só vê aquilo pronto e acabou.

P10: Sim, sim. E por vezes, também, o professor, eu não sei se acha que aquilo é tão – um termo que eles usam muito é trivial – não sei se na cabeça dele aquilo ali é tão trivial – que, na verdade, não é trivial – que ele acha que aquilo é muito fácil de ser percebido, ou aquilo “nossa, isso faz todo sentido”, mas na cabeça dele, que está todo semestre dando a mesma matéria... Então, para o aluno, isso passa batido. Você está fazendo várias coisas ao mesmo tempo, coisas importantes também, claro... E aquilo ali, às vezes, tem uma relevância absurda – e quando eu falo isso, eu não me limito só à federal, não, porque a parte de licenciatura, eu acho que isso ainda é menos cobrado. Eles voltam muito para a questão do que você vai ter no dia a dia – e isso, claro, vai passar longe, não é? A realidade é que, embora alguns livros tenham prova de alguma coisa e outra, a realidade do professor em sala de aula, não é essa. Às vezes você dando o assunto mastigado para o aluno já fica difícil dele aplicar, quem dirá falar de prova com aluno, ou até mesmo cobrar isso dele... Não rola, cara, não rola. Então isso passa distante da nossa realidade.

Marcus Prates: Sim, também. Aproveitando que você tocou nesse assunto tem a tal pergunta que a gente comentou, que é sobre a sua atuação: de que forma você estimula seus alunos a desenvolver os próprios argumentos, ou talvez até provas, em sala de aula?

P10: Algo que é até falado entre as reuniões que a gente tem como o pessoal de matemática é que uma das partes que talvez seja mais lúdicas e ainda ocupam os capítulos finais dos livros é parte de geometria, que é onde a gente consegue visualmente mostrar alguma coisa, aplicar em alguma relação de área e tudo mais. Até produtos notáveis, mesmo, a gente tenta ilustrar com alguma coisa. Mas na parte de álgebra isso é bem complicado, é bem complicado. A gente tenta fazer uma coisa ali, mas é bem complicado. A verdade é que a galera está cada vez menos interessada e as reformas que a gente tem aí, você deve saber, no ensino tornam isso ainda menos interessante para eles. Então onde eu consigo fazer algum trabalho e mostrar alguma coisa é quando eu começo a trabalhar com geometria. Com geometria, a coisa se torna um pouco mais aplicável, a gente não entra tanto em termos, assim, mas eu consigo visualmente, ali com o Geogebra e coisas do tipo... Mostrar alguma aplicação e alguma demonstração, mas fora isso, nas outras áreas é mais complicado.

Marcus Prates: No caso, você diz que álgebra é como se fosse muito mais abstrato, não é? Então para o aluno chegar naquilo...

P10: Sim. Eu estou trabalhando produtos notáveis com eles e, assim, para tentar fazer funcionar ali eu tento mostrar aquilo num quadrado, como se aquilo fosse o lado de um quadrado, o lado de um quadrado (a + b), então... Aí que começam a perceber, porque se você for “o quadrado do primeiro mais duas vezes o primeiro vezes segundo mais o quadrado do segundo”, isso aí não entra na cabeça deles. Então tem que tentar tornar a coisa mais lúdica possível. E aqui vai um reclame: isso é muito complicado para o professor fazer. Isso daí já... Você vai pegar livros antigos, e vai ver os professores reclamando disso há anos. Primeiro, que a gente tem um currículo a ser cumprido e um cronograma a ser cumprido. Então, para você trabalhar com essas coisas, não dá para ser corrido... Não dá, cara. Você precisa de tempo, você precisa que a instituição te ofereça espaço. Quando eu falo para você do Geogebra e tudo mais, são com meios próprios, eu não tenho um laboratório de informática disponível. Então tenho que ficar nessa, arrumando meios de você tentar fazer uma aula bacana. Então, às vezes o professor até quer fazer, cara, alguma coisa bacana, mas você precisa de meios. Por exemplo, como que eu vou trabalhar Geogebra? Geogebra, eu operando e o aluno vendo, o que não se não é o ideal. É bacana eles explorarem verem as aplicações, “olha o que que a gente está fazendo... Quando muda um termo, o que acontece com a figura?”, coisas desse tipo. Então é muito complicado, mas onde eu consigo fazer alguma coisa – respondendo a sua pergunta – demonstrando, ainda, alguma coisa porque chega, se aproxima um pouco mais da realidade deles, do dia a dia, é em geometria.

Marcus Prates: Entendi. Mas você está trazendo uma coisa que é interessante, que é sobre dar sentido, dar significado ao que você está trabalhando, para que aquilo atinja a sua turma. E aí, pessoalmente, eu vejo isso como – claro, cada um enxerga de uma forma porque cada um interpreta de uma forma – mas eu entendo isso mais como – se eu fosse fazer isso – aulas em que eu apresento conceitos. No caso, se eu estou apresentando conceitos, eu acho que eu tenho que fazer aquele conceito ter algum sentido para aquela criança que está aprendendo ali. Mas eu digo assim... Falando especificamente do cara desenvolver um argumento – e aí eu vou te dar um exemplo um pouco mais concreto, só para você pensar numa situação concreta e ver se te dá uma luz. Você fala de geometria... Então, por exemplo, quando a gente fala da soma dos ângulos internos de um triângulo, é sempre 180°. Como é que a gente pode provar isso? Tem várias maneiras de a gente poder tentar levar isso para o aluno, para que ele possa entender aquilo, então uma aula sua, supondo que você precise trabalhar isso, e você fala assim “olha, será que a soma dos ângulos internos do triângulo é 180°? Vamos ver aqui”, e como é que parte, como é que você faz o estímulo para, numa situação como essa, os seus alunos tentarem provar que isso vale para qualquer triângulo? Se é que eles vão conseguir chegar lá porque a gente também não sabe se vai, não é?

P10: Sim, sim. É, então... Para a gente chegar nesse ponto específico, de trabalhar os ângulos e tudo mais, a gente precisa de alguns conceitos antes. Por exemplo, paralelismo, retas transversais... E aí, a gente vai chegar nos triângulos. Por quê? A gente pode entender a base de um triângulo e o vértice oposto a essa base, a gente traçando uma paralela por essa por esse vértice, a gente consegue entender alguns conceitos, como ângulos alternos internos... Isso tudo é necessário para que a gente chegue até essa definição de que os ângulos internos de um triângulo, na geometria plana euclidiana, é igual a 180°. Então eu preciso de alguns elementos antes para a gente poder chegar nisso. Inclusive, eu fiz um trabalho sobre isso com eles, trabalhando... E foi lúdico também. Pegou um papelão traçamos paralelas. O que acontece quando eu mudo o meu vértice de lugar? Depois, se você quiser, eu tiro foto depois para você, se for agregar. A gente mudando o vértice do triângulo de lugar, de modo que a altura do triângulo permanecesse o mesmo, mas o perímetro alterando, o que acontecia... Se os ângulos mudavam e se mudavam a área mudava em consequência disso ou não. Então é dessa maneira, cara, que eu trabalho essas coisas, entendeu?

Marcus Prates: Então, no caso, é como se – vamos ver se eu peguei certo – você apresenta alguns conceitos para eles que eles necessitam para alguma coisa...

Você falou do paralelismo, que aí é onde eu ia chegar, essa é uma prova mais concreta, de fato, quando você trabalha com paralelismo e as retas transversais.

P10: Sim

Marcus Prates: Você apresenta esses conceitos, eles trabalham isso, e na hora de provar tal coisa vocês entram numa atividade exploratória, no caso, não é? Vocês vão investigar.

P10: Isso, são feitas perguntas, assim, perguntas que até então eu não ofereço a resposta de imediato. São perguntas que vai rolar na sala um “sim”, “não”, “sempre”, “eu não sei”, então fica naquela, fica no ar. E aí, a gente vai explorando quando é possível, Por meios lúdicos. Eu sempre levo alguma coisa e tudo mais e, por fim, a gente tenta chegar ali numa conclusão. Alguns ainda ficam com uma interrogação, você vê claramente que o cara não entendeu. E a gente tenta reforçar aquela ideia, mas sempre eu tento buscar o lúdico, isso aí... acho que é uma maneira de tornar a aula mais atrativa, entendeu?

Marcus Prates: Entendi. Não, tranquilo, era só para eu pegar a ideia, aqui. Mas sim, eu gosto de trabalhar com essa ideia, também, de explorar... E você fala da turma como um trabalho em equipe, não é? Acaba que um ajuda o outro e eles fazem uma construção juntos. Porque se botar um só para resolver, pode ser que não chegue a lugar nenhum, mas se tem mais gente ali, eles acabam se ajudando a fazer alguma coisa, um trabalho em equipe.

P10: Claro, sim.

Marcus Prates: E, para fechar, a última pergunta prevista aqui – prevista, vamos ver se ela vai ser a última – também é sobre isso, mas sobre uma avaliação sua. Vamos supor que você recebe uma questão respondida em que o aluno tem que tentar provar um resultado. Pode ser esse caso da soma dos ângulos internos, pode ser, por exemplo, a relação entre diagonais e lados do polígono, enfim, qualquer coisa que seja. Quando você recebe uma resposta de uma pergunta como essa, numa atividade de casa, ou numa avaliação formal, que tipo de elemento que o seu aluno traz que você considera como válido para validar essas respostas deles? Eu estou te perguntando isso porque, por exemplo, tem gente que vai responder as coisas de um jeito muito sucinto e “seco”, a resposta, acabou. Tem gente que vai desenvolver algo de um jeito, e a outra pessoa de outro... E aí eu queria saber que tipo de elemento, que tipo de coisa você considera válido quando um aluno te responde. Não sei se essa pergunta te parece um pouco vaga, mas é porque ela é ampla.

P10: Vou tentar responder... Eu vou tentar responder, vou ver se eu entendi. Eu, Marcus, eu entendo o seguinte, cara... Eu não cobro um rigor matemático dos meus alunos. Como “tem que responder exatamente como como eu ensinei”, ou como está no livro. Às vezes aquele aluno, aquela aluna, ele oferece uma resposta dentro da realidade dele, dentro do que ele entende, e nem sempre aquilo está errado, entendeu? Nem sempre aquilo está errado. Então, assim, eu tento olhar a resposta dele e ver se ela possui um mínimo de elementos ali com relação a, por exemplo, você citou um exemplo dos ângulos internos do triângulo... Às vezes, esse cara não vai citar ângulos complementares, ele não vai dizer nada disso, ângulos suplementares, ele não vai dizer, sei lá, ofereço lá um triângulo retângulo e eu pergunto quanto valem os outros ângulos agudos. Então, às vezes, o cara não vai saber o que é ângulo agudo, mas, de alguma maneira, ele lembra que é um ângulo menor do que 90°, ele sabe que a soma daqueles dois ângulos ali vai dando 90° graus e, de repente, ele não sabe argumentar, ele não sabe escrever muito bem, mas ele sabe desenhar e ele desenha. E com desenho dele eu consigo entender o que ele quis dizer. Ou, se eu fico na dúvida, eu pergunto “cara, beleza, tu desenhou aqui, mas isso aqui é o quê?”. E se apresenta o mínimo que tenha relação com o que eu expliquei, eu considero, eu valido a resposta desse cara ou dessa menina.

Marcus Prates: É, na verdade a minha pergunta era sobre isso mesmo, sobre se você entende que, por exemplo, se um aluno apresentar... E aí, já que você já respondeu, vou te dar um exemplo um pouco mais específico. Eu posso chegar para um aluno e tentar “provar” para esse aluno isso falando assim “olha, faz você um triângulo no seu caderno, sem medir, e recorta ele para mim” e aí o aluno recorta, eu faço aquela brincadeira de pegar o triângulo despedaçar ele juntar os ângulos. E aí, por ser um triângulo completamente aleatório, isso, para ele, pode servir como uma prova de “caramba, é aleatório e o cara me mostrou que funciona”. Então, assim, se o aluno te apresentasse, talvez, um argumento desse, você consideraria válido porque faz sentido dentro de uma construção dele, não é? Porque é um triângulo aleatório, ele não mediu, e aí ele não está buscando um caso específico, ele sabe que vai funcionar. Ele fez um teste funcionou.

P10: Sim

Marcus Prates: Entendi.

P10: Sim, eu considero válida até baseado no seguinte: a gente vai pegar as leis que regem a educação, a LDB, a gente vai pegar a BNCC e a gente vai ter como fundamento, como argumento de que uma das propostas, se não a principal, é fazer com que esse indivíduo seja autônomo e construtor de argumentos não só matemáticos, mas que esse cara seja capaz de formular respostas... então, às vezes, dentro da realidade dele, aquilo ali é o máximo que ele consegue alcançar, entendeu? Ele formulou, de alguma maneira, uma resposta, então considero, sim. Eu acho que não dá para a gente cobrar um rigor, não é, cara? Para um aluno, sabe...? Alguns conseguem, a gente está... Eu, pelo menos, quando eu falo isso com você, eu estou, talvez até erradamente, mas eu estou imaginando a minha realidade com os meus alunos de escola pública... Então essa realidade deles, eu acho que deve ser levada em consideração. E dentro da realidade ali que eu percebo desses alunos, eu não consigo cobrar um rigor matemático profundo. Talvez em outra realidade fosse possível, mas dentro dessa realidade não tem como. Os próprios livros que a gente recebe mostram claramente que a intenção não é essa, entendeu?

Marcus Prates: Sim, sim. Na verdade, você está dizendo é que você leva em conta o contexto do cara, não é? Se o aluno está no contexto que permite ele desenvolver aquilo de certa forma, você vai aumentar um pouco mais a tua cobrança.

P10: É claro.

Marcus Prates: Mas se você está vendo que ele vem de um contexto que você tem que voltar – voltar, que eu digo, entre aspas - tem que voltar um pouco atrás e levantar esse aluno, você vai considerar ele... O que ele trouxer como válido dentro (...)

[queda da chamada, sem áudio]

Marcus Prates: Caiu, já ia ver o que que aconteceu aqui. Não, caiu...Parece que você saiu [da chamada], que disse que...

P10: Foi para mim, foi para mim, não é?

Marcus Prates: Foi. Então é isso, não deu...

P10: Não, mas está gravando ainda?

Marcus Prates: Caiu a chamada, que eu estou falando. Está gravando.

P10: Beleza. Então é isso, entendeu? Acho que muita coisa tem que ser levado em consideração... A realidade desse discente, eu tenho que levar em consideração a bagagem, em termos de possibilidades que essa unidade me oferece, o material que é a realidade desse aluno... Tudo isso tem que ser considerado, cara. Qual é a realidade social, tudo isso, no final, quando a gente vai elaborar uma aula uma prova, tudo isso eu acho que deve ser considerado, não é? Dentro de uma realidade social carente e tudo mais, acho que influencia demais. Então, dependendo da resposta desse aluno, sim, se ela tem esses elementos mínimos ali necessários, eu valido a resposta desse aluno.

Marcus Prates: Bom, para mim está ótimo. Consegui tudo que eu queria aqui, foi uma conversa ótima.

Apêndice P – Quadro com resumo dos dados produzidos durante a entrevista da etapa 5

Prof	O que é argumentar/argumentação?	O que é prova?	Como estimula os estudantes	Viabilidade da metodologia	O que valida	Estudou argumentação?	Correção da etapa 3
P1	Expor opiniões e o que se aprende em Matemática	É algo necessário para esclarecer conceitos e (a origem de) teoremas. Devem ser contextualizadas para melhor compreensão	Utiliza materiais concretos para auxiliar na visualização e exploração.	**Viável.** Possui tempo suficiente e estrutura para trabalhar	Quaisquer tipos de argumentos, desde que sejam coerentes com o proposto e corretos. Respostas sem desenvolvimento são aceitas	Não	Prioriza a resposta final correta (sob sua perspectiva) e parece deixar as construções em segundo plano
P2	Um processo realizado para provar logicamente algo - uma construção	Parte do processo argumentativo, seu produto final. O que é considerado válido como prova deve ser acordado entre as partes	Orienta a justificar as respostas a construir argumentos que trilhem os caminhos da resolução.	**Parcialmente viável.** Considera não ter tempo suficiente em sala de aula para trabalhar	Quaisquer tipos de argumentos, desde que sejam coerentes com o proposto e corretos. Respostas sem desenvolvimento não são aceitas	Não	Analisa os argumentos apresentados e pontua tecendo comentários. Não apresenta preferência a argumentos formais.
P3	É a utilização de meios para justificar resoluções de problemas, para explicitar a origem de relações/fórmulas e para provar teoremas	Parte do processo argumentativo, seu produto final (ideia apresentada indiretamente)	Utilização de materiais concretos para auxiliar na visualização e exploração. Após isso, os alunos eram apresentados ao processo de prova (meios não descritos)	**Parcialmente viável.** Considera não ter tempo suficiente em sala de aula para trabalhar	Quaisquer tipos de argumentos, desde que sejam coerentes com o proposto e corretos. Respostas sem desenvolvimento não são aceitas	Não	Analisa os argumentos apresentados e pontua tecendo comentários. Não apresenta preferência a argumentos formais. Em alguns casos, parece confundir os conceitos abrdados nas questões

P4	Sustentar uma cadeia de raciocínios logicos para defender e validar uma ideia ou ponto de vista	Parte do processo argumentativo, seu produto final, objeto matemático construído pela argumentação	Orienta a justificar as respostas a construir argumentos que trilhem os caminhos da resolução. Apresenta a construção dos conceitos, para que os alunos se habituem ao processo argumentativo, mesmo que por observação	**Inviável.** Considera não ter tempo suficiente em sala de aula para trabalhar	Quaisquer tipos de argumentos, desde que sejam consistentes, coerentes com o proposto e corretos. Exemplos não são suficientes para provar, mas para auxiliar no processo. Respostas sem desenvolvimento são parcialmente aceitas	Não	Analisa os argumentos apresentados e pontua tecendo comentários em formato de *feedbacks* . Não apresenta preferência a argumentos formais, sente falta de argumentações textuais/escritas em algumas respostas
P5	Processo em que se justifica determinados resultados em matemática, podendo ser de forma escrita ou gráfica	Construção formal e sistemática, que pode vir de processos escritos ou gráficos (a argumentação) e que conduz à demonstração	Propõe atividades investigativas, que auxiliam na observação e compreensão dos processos e, consequentemente, das justificativas. Estímulo às justificativas de resultados obtidos	**Inviável (atualmente).** Considera não ter tempo suficiente e autonomia em sala de aula para trabalhar	Quaisquer tipos de argumentos, desde que sejam coerentes com o proposto e corretos. Respostas sem desenvolvimento não são aceitas	Não	Analisa os argumentos apresentados e pontua tecendo comentários. É mais rigoroso em relação a esses argumentos apresentados. Em alguns casos, diz sentir falta de uma "demonstração"
P6	Meio de facilitar a compreensão de conceitos matemáticos. É provar algo de forma simples, incluindo exemplos numéricos	É o resultado de algo, que pode ser feito através de números/exemplos numéricos	Expõe a importância de se aprender Matemática	**Parcialmente viável.**	Qualquer resposta com desenvolvimento é válida, desde que esteja correta. Isso inclui respostas copiadas de fontes diversas	Não	Avalia todas as respostas com nota máxima, apenas as confirmando como corretas

P7	Processo para a construção da prova, que visa a validação	Produto final da argumentação, é o que valida	Expõe processos argumentativos e de prova em sala de aula. Trabalha com elementos comuns do dia a dia dos estudantes, para gerar interesse geral. Propõe atividades em que os estudantes precisem justificar resultados obtidos e verificar se e por quê uma determinada afirmação é verdadeira.	**Inviável.** Considera não ter tempo suficiente em sala de aula para trabalhar	Quaisquer tipos de argumentos, desde que sejam coerentes com o proposto e corretos. Respostas sem desenvolvimento não são aceitas	Sim	Analisa os argumentos apresentados como um todo e pontua tecendo comentários. Não apresenta preferência a argumentos formais.
P8	Processo em que se tenta justificar algo para que o outro seja convencido de seu ponto de vista	Continuidade do processo argumentativo, seu produto final. O que é considerado válido como prova deve ser acordado entre as partes	Orienta a justificar as respostas a construir argumentos que trilhem os caminhos da resolução. Apresenta a construção dos conceitos, para que os alunos se habituem ao processo argumentativo, mesmo que por observação	**Viável.** Possui tempo suficiente e estrutura para trabalhar	Quaisquer tipos de argumentos, desde que sejam coerentes com o proposto e corretos. Respostas sem desenvolvimento não são aceitas. Em sala de aula os estudantes trocam experiências e conversem sobre suas repsostas, desenvolvendo sua habilidade de argumentar e chegar a um consenso sobre o que é válido em grupo	Sim	Analisa os argumentos apresentados e pontua tecendo comentários. Não apresenta preferência a argumentos formais.

P9	Utilizar conhecimentos já adquiridos, dados e deduções feitas em um campo lógico (processo dedutivo) com veracidade para a resolução de um problema	Validação algo de forma lógica e/ou utilizando o processo dedutivo, de modo que essa validação não seja refutada	Trabalha com resolução de problemas, buscando anordar elementos cotidianos de seus alunos e solicitando que as respostas sejam justificadas	**Parcialmente viável.** Considera ter tempo suficiente em sala de aula para trabalhar, mas possui defasagem nos recursos. Também entende que questões sociais e econônicas de seus estudantes são um empecilho no proceso de ensino-aprendizagem	Quaisquer tipos de argumentos, desde que sejam coerentes com o proposto e corretos. Respostas sem desenvolvimento são parcialmente aceitas	Sim	Analisa os argumentos apresentados e pontua tecendo comentários. Não apresenta preferência a argumentos formais.
P10	Sequência de raciocínios utilizando axiomas e postulados, que desencadeiam em uma prova matemática	Parte do processo argumentativo, seu produto final.	Utiliza materiais concretos para auxiliar na visualização e exploração.	**Inviável.** Considera não ter tempo suficiente em sala de aula para trabalhar	Quaisquer tipos de argumentos, desde que sejam coerentes com o proposto e corretos. Respostas sem desenvolvimento são aceitas	Não	Analisa os argumentos apresentados como um todo e pontua tecendo comentários. Apesar de não apresentar preferência a argumentos formais, eles aparecem em suas correções