



INSTITUTO DE MATEMÁTICA

Universidade Federal do Rio de Janeiro



UFRJ

RUAN VITÓRIO FERNANDES DA SILVA

**A MUSICALCOLORIDA: POSSIBILIDADES DA TECNOLOGIA PARA
O ENSINO DE RAZÃO E PROBABILIDADE**

Rio de Janeiro, Brasil

2024

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE MATEMÁTICA

Ruan Vitório Fernandes da Silva

**A MUSICALCOLORIDA: POSSIBILIDADES DA TECNOLOGIA PARA
O ENSINO DE RAZÃO E PROBABILIDADE**

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro em cumprimento às normas do Instituto de Matemática da UFRJ, como parte dos requisitos para a obtenção do título de Mestre em Ensino da Matemática.

Rio de Janeiro, Brasil

2024

CIP - Catalogação na Publicação

F363m Fernandes da Silva, Ruan Vitório
A MusicALcolorida: possibilidades da tecnologia
para o Ensino de Razão e Probabilidade / Ruan
Vitório Fernandes da Silva. -- Rio de Janeiro, 2024.
105 f.

Orientadora: Janete Bolite Frant.
Dissertação (mestrado) - Universidade Federal do
Rio de Janeiro, Instituto de Matemática, Programa
de Pós-Graduação em Ensino de Matemática, 2024.

1. MusicALcolorida. 2. Interação e Argumentação.
3. Números Reais. 4. Dízimas. 5. Educação Básica. I.
Bolite Frant, Janete, orient. II. Título.

Elaborado pelo Sistema de Geração Automática da UFRJ com os dados fornecidos
pelo(a) autor(a), sob a responsabilidade de Miguel Romeu Amorim Neto - CRB-7/6283.

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO

A MUSICALCOLORIDA: POSSIBILIDADES DA TECNOLOGIA PARA O ENSINO DE RAZÃO E PROBABILIDADE

RUAN VITÓRIO FERNANDES DA SILVA

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Ensino de Matemática.

Aprovada em: 17 de dezembro de 2024.

Banca da defesa:



Prof.^a Dr.^a Janete Bolite Frant (orientadora)

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO

Documento assinado digitalmente

 GISELA MARIA DA FONSECA PINTO
Data: 05/03/2025 13:13:45-0300
Verifique em <https://validar.itd.gov.br>

Prof.^a Dr.^a Gisela Maria da Fonseca Pinto

UNIVERSIDADE FEDERAL RUAL DO RIO DE JANEIRO

Documento assinado digitalmente

 MARCIO DE ALBUQUERQUE VIANNA
Data: 05/03/2025 13:25:12-0300
Verifique em <https://validar.itd.gov.br>

Prof. Dr. Márcio de Albuquerque Vianna

UNIVERSIDADE FEDERAL RUAL DO RIO DE JANEIRO

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus por tudo e mais um pouco do que mereço. Agradeço aos meus pais por sempre me apoiarem e darem todo o suporte para que eu continuasse os estudos.

Agradeço à minha querida orientadora Janete Bolite Frant por todo o empenho e a ajuda na construção deste trabalho. Sem ela, eu não teria conhecido a MusiCALcolorida, e sem toda a sua atenção comigo, este trabalho não teria ficado desta forma. Serei eternamente grato por tudo.

Agradeço também à Gisela Pinto e ao Márcio de Albuquerque que aceitaram fazer parte da banca e se debruçarem sobre o tema, trazendo valorosas colaborações para que o trabalho ficasse ainda mais rico. Deixo também aqui os meus agradecimentos para as colaboradoras que participaram dos encontros e dedicaram tempo de suas vidas para esta pesquisa.

Agradeço também aos meus fiéis amigos, Joaquim Gabriel, Mateus Garcia e Pablo Lima, por estarem sempre comigo. Não posso também deixar de expressar minha gratidão ao meu professor e amigo Marcelo Bastos, que sendo o meu então professor na Graduação, me apresentou o PEMAT, e por caminhos da vida se tornou colega de classe em algumas disciplinas do Mestrado.

Agradeço aos colégios Luiz Silva e Antônio Huback, nas pessoas de Elisabeth Silva e Marilene Huback, por acolherem um jovem professor de matemática e apresentarem a ele o que é a vida de um professor. Afinal, “*Não há ensino sem pesquisa e pesquisa sem ensino*”.

Agradeço, de forma geral, a todos aqueles que contribuíram de forma direta ou indireta para este trabalho.

DEDICATÓRIA

Dedico o presente trabalho aos meus pais, Ana Lúcia e Jorge Fernandes, e ao meu irmão, Jorge Fernandes Filho. Os primeiros por sempre me apoiarem e incentivarem a estudar, e ao segundo por me mostrar como a educação pode mudar vidas.

*“A música é o vínculo que une a vida do espírito à vida dos sentidos.
A melodia é a vida sensível da poesia.” (Ludwig van Beethoven)*

RESUMO

Nesta pesquisa, o objetivo foi investigar e analisar as potencialidades do uso da MusiCALcolorida para o ensino dos números reais, a partir das interações entre professores de matemática do Ensino Básico. Foram convidadas quatro colaboradoras, todas professoras de matemática que atuam na rede básica de ensino, para compor um grupo que interagiu de modo remoto. Das quatro, três tinham disponibilidade para participar da pesquisa. Este aplicativo, a MusiCALcolorida, representa os números de forma simbólica, sonora e imagética, trazendo a possibilidade de um novo olhar para a representação dos números reais. Foi elaborado por Lulu Healy e Guilherme Magalhães para que seu uso fosse inclusivo, permitindo que os alunos que necessitassem de algum tipo de abordagem sensória especial fossem contemplados com as diferentes representações, e pudessem assim interagir com os demais estudantes. Além disso, essa calculadora pode apresentar um número com 21.580 casas decimais enquanto as calculadoras tradicionais vão apenas até 8 casas decimais. A metodologia de pesquisa adotada de cunho qualitativo, focou na modalidade de Estudo de Caso. A pesquisa foi realizada com um grupo de três professoras, e o resultado das análises mostrou que, segundo elas, a MusiCALcolorida permite que os alunos, com ou sem alguma necessidade especial, possam interagir e observar características dos números, como, por exemplo o período mais longo de dízimas, que muitas vezes não são contemplados por calculadoras tradicionais. Deste modo, esse aplicativo pode contribuir para a aprendizagem dos números racionais e irracionais.

Palavras-chave: Números Reais, Dízimas, Interação e Argumentação, MusiCALcolorida, Educação Básica.

ABSTRACT

In this research, the objective was to investigate and analyze the potential of using MusiCALcolorida for teaching real numbers, based on interactions between mathematics teachers in Basic Education. Four collaborators were invited, all mathematics teachers who work in the basic education network, to form a group that interacted remotely, three of the four were available to participate in the research. This application, MusiCALcolorida, represents numbers symbolically, soundly and visually, bringing the possibility of a new look at the representation of real numbers. It was designed by Lulu Healy and Guilhere Magalhães so that its use was inclusive, allowing students who needed some type of special sensory approach to be contemplated with the different representations and could, therefore, interact with other students. Furthermore, this calculator can display a number with 21580 decimal places while traditional calculators only go up to 8 decimal places. The qualitative research methodology adopted focused on the Case Study modality. The research was carried out with a group of three teachers and the results of the analyzes showed that, according to them, MusiCALcolorida allows students with or without any special needs to interact and observe characteristics of numbers, such as the longer period of decimals which are often not covered by traditional calculators. In this way, this application can contribute to learning rational and irrational numbers.

KEYWORDS: Real Numbers, Numerical Decimals, Argumentation and Interaction, Musicalcolorida, Basic Education.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1: Representação do Monocórdio	21
Figura 2: Aplicativo Ritmática	22
Figura 3: Exemplificando Frações no Ritmática	23
Figura 4: Versão_ Sinclair, Liljedahl e Zazkis da Calculadora Colorida para 1/7	26
Figura 5: MusiCALcolorida V_6	27
Figura 6: Imagem do teclado da MusiCALcolorida	28
Na Figura 7 é possível verificar a tela de pintura na qual podemos ver a representação imagética do resultado de 1 dividido para 7. Cada algarismo possui uma cor determinada e a pintura é feita conforme as dízimas aparecem no resultado da operação. O número de casas decimais por cada linha na pintura (47 casas) pode ser modificado através da barra de rolagem na horizontal. Observe a diferença da imagem formada entre as duas próximas figuras, mesmo sendo realizada a mesma operação matemática, modificando apenas o número de casas decimais de 47 para 34	28
Figura 8: Quadro de pintura da MusiCALcolorida em 1 dividido por 7	29
Figura 9: Quadro de pintura da MusiCALcolorida em 1 dividido por 7	29
Tratarei agora dos controles para a representação sonora. Após efetuar uma operação que resulte em dízimas, é possível tocar/ouvir o resultado obtido. Basta clicar na clave de sol (§) que o som começa a ser emitido. Observe a Figura 10 que mostra a função sonora da MusiCALcolorida	29
Figura 11: Controles musicais da MusiCALcolorida	30
Figura 12: Funcionalidades extras da MusiCALcolorida	31
Figura 13: Botão Enviar na MusiCALcolorida	31
Figura 14: Galeria da MusiCALcolorida	32
Figura 15: 10 dividido por 5 resulta em número natural	32
Figura 16: 5 dividido por 10 resulta em racional	33
Figura 17: 2 dividido por 9 resulta dízima com 1 algarismo no período	34
Figura 18: 25 dividido por 12 resulta em dízima com 3 algarismos no período	35
Figura 19: 8 dividido por 99, organizado em 30 casas	35
Figura 20: 8 dividido por 99, com 31 casas	36
Figura 21: Resultado de 10/2	62
Figura 22: Resultado de 2/10	63

Figura 23: Resultado de 2/9.	63
Figura 24: Resultado de 2/9.	64
Figura 25: Resultado de 25/12.	65
Figura 26: Resultado de 24/18.	69
Figura 27: Resultado de 3/7.	69
Figura 28: 13 dividido por 23, com 47 casas.	71
Figura 29: 13 dividido por 13 numa calculadora tradicional (computador).	73
Figura 30: 13 dividido por 23, com 43 casas.	74
Figura 31: 13 dividido por 23, com 44 casas.	75
Figura 32: Bandeira da França.	104
Figura 33: Bandeira da Itália.	104
Figura 34: Bandeira da Romênia.	105

LISTA DE TABELAS

Tabela 1: Os dez passos do MEA	39
Tabela 2: Cronograma dos Encontros.....	44
Tabela 3: Resumo dos Temas.....	54

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

BNCC	Base Nacional Comum Curricular.
IBC	Instituto Benjamin Constant.
MMC	Menor Múltiplo Comum
MEA	Modelo de Estratégia Argumentativa
PEMAT	Programa de Pós-graduação em Ensino e História da Matemática
RUME	Rumo à Educação Matemática Inclusiva
TecMEM	Tecnologias e Meios de Expressão Matemática

Sumário

INTRODUÇÃO	15
Capítulo 1: REVISÃO BIBLIOGRÁFICA.....	19
Capítulo 2: CONHECENDO A MUSICALCOLORIDA	26
Capítulo 3: FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA.....	38
Capítulo 4: METODOLOGIA DE PESQUISA	42
Coleta de dados.....	44
Análise de dados	45
Atividades Programadas para os Encontros.....	45
Capítulo 5: DISCUSSÃO E ANÁLISE DE DADOS.....	53
Sobre Levantamento do Perfil.....	54
Apresentação dos Conjuntos Numéricos	58
Conhecendo a MusiCALcolorida.....	61
Razão e Probabilidade	67
Irracionalidade do pi.....	70
Potencialidades e aperfeiçoamentos na Calculadora.....	77
Capítulo 6: Considerações Finais.....	79
REFERÊNCIA	83
ANEXOS	85
TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO	85
Termo de Consentimento de Participação.....	88
Termo de consentimento para o uso de imagens	90
Diário de Campo	91
Atividade do Encontro 1.....	100
Atividade do Encontro 2.....	101
Atividade do Encontro 3.....	102
Atividade do Encontro 4.....	103

Bandeiras - Francisca 104

INTRODUÇÃO

Esta pesquisa teve como objetivo investigar e analisar as potencialidades do uso do aplicativo MusiCALcolorida para o ensino dos números reais, a partir das interações, de modo remoto síncrono, entre professores de matemática do Ensino Básico. Inicialmente seriam quatro participantes, mas somente três professores tiveram disponibilidade para o mesmo horário de encontro.

A escolha deste aplicativo se deu por possibilitar um novo olhar para representação da divisão entre números naturais. Isto é, esta calculadora pode representar o resultado de uma divisão em três formas: sonora, simbólica e imagética.

A MusiCALcolorida foi desenvolvida por Lulu Healy¹ e Guilherme Magalhães² no grupo de pesquisa Tecnologias e Meios de Expressão Matemática (TecMEM). Posteriormente, alguns integrantes do grupo Rumo à Educação Matemática Inclusiva (Rume) utilizaram esta tecnologia em suas pesquisas, das quais algumas resultaram em dissertações que se encontram no site do grupo³. Este aplicativo está disponível para download gratuito na aba aplicativos⁴ do site⁴.

Desenvolvida para representar os números de forma multissensorial, a MusiCALcolorida proporciona a valorização de divisões não exatas, característica esta que nem sempre são do domínio e nem do agrado dos alunos. Neste sentido, esta calculadora permite explorar com mais detalhes as dízimas periódicas. Nas representações destas dízimas, os alunos que são cegos ou com baixa visão podem se beneficiar com a parte sonora, que auxilia a escutar o número obtido como resultado. Os estudantes surdos podem focar nas representações simbólicas e imagéticas. E os alunos que são ouvintes e videntes podem fazer uso das três representações, desta forma interagem numa atividade que se preocupa com a inclusão. Sendo esta uma característica que proporciona a valorização de divisões não exatas, e que nem sempre são do agrado e domínio dos alunos.

¹ Lulu Healy, professora do King's College London.

² Guilherme, mestrando da Lulu Healy, possui habilidades de informática e tem interesse em pesquisa com alunos surdos.

³ <http://www.matematicainclusiva.net.br/>

⁴ <http://www.matematicainclusiva.net.br/aplicativo.php>

A pesquisa contou com três colaboradoras, que são professoras de matemática, sendo que uma delas não pôde participar de todos os encontros por motivos profissionais. Nenhuma delas possuía necessidades específicas, sendo assim, tiveram contato com as três representações no decorrer das atividades realizadas. As tarefas foram pensadas para que as professoras não se sentissem obrigadas a resolverem as questões, mas que discutissem as respostas de alunos, ficando mais à vontade, como veremos no capítulo. As tarefas focaram na operação de divisão entre números naturais justamente por esta operação proporcionar uma maior possibilidade da MusiCALcolorida gerar as representações simbólicas, imagéticas e sonoras, provenientes desta operação.

Para que o leitor conheça a MusiCALcolorida, haverá no capítulo 2 uma apresentação de sua interface e das funcionalidades desta calculadora. O objetivo desse capítulo é contextualizar o leitor de com é o aplicativo e facilitar a compreensão do capítulo 5, onde apresentaremos as tarefas.

A motivação inicial para esta pesquisa surgiu devido à música me ser um tema muito caro. Estudei Música durante 10 anos da minha vida, e isto me fez ter um relacionamento próximo à ela. Mesmo na época da Licenciatura em Matemática, eu já buscava uma forma de unir as duas matérias (música e matemática).

Com o meu ingresso e vivência no Programa de Pós-Graduação em Ensino e História da Matemática (PEMAT⁵), tomei ciência de que existem maneiras de unir música e matemática com a educação matemática; e uma destas maneiras foi através da MusiCALcolorida. Como esta calculadora proporciona abordagens multissensoriais para a representação numérica, percebi que poderia ser importante desenvolver uma pesquisa para investigar de que forma o seu uso poderia vir a contribuir para as aulas de matemática, sendo assim um dos motivos para o desenvolvimento desta pesquisa.

Unindo a motivação pessoal e o intuito de contribuir com a educação matemática, esta pesquisa passou a ter o interesse em investigar, a partir da interação entre professores de matemática, as características e as potencialidades elencadas por eles quanto ao uso da calculadora MusiCALcolorida para o ensino dos números reais, sobretudo ao que se relaciona aos números racionais e

⁵ <https://pemat.im.ufrj.br/index.php/pt/>

irracionais. Para que tal pesquisa acontecesse, foi necessária uma adaptação ao cenário vivido, tendo em vista o isolamento social em decorrência da pandemia da Covid-19. Neste contexto, a decisão tomada foi de convidar as professoras de matemática para participarem da pesquisa de forma on-line, de modo síncrono, cada uma utilizando a calculadora em seu próprio computador e interagindo por meio do Google Meet.

A dissertação está organizada da seguinte forma:

No primeiro capítulo foi feita uma revisão bibliográfica envolvendo música, matemática e educação matemática. Apresentei algumas abordagens já feitas nestes temas e sob quais óticas os pesquisadores desenvolveram os seus estudos, bem como as atividades e os objetivos propostos por eles em suas pesquisas.

No segundo capítulo informei brevemente os aspectos históricos e as funcionalidades desta MusiCALcolorida, bem como os links necessários para o download da calculadora e de outros aplicativos citados no capítulo.

No terceiro capítulo mostrei o embasamento teórico no qual relacionaram três eixos centrais: a importância da interação no processo de produção de conhecimento; o uso de tecnologias sendo capaz de gerar situações de aprendizagem; a elaboração das atividades que promovam a interação entre os colaboradores, e a análise destas interações.

Para estruturar a fundamentação teórica, iniciei definindo como entendemos conhecimento, uma vez que, dependendo da teoria escolhida, o conhecimento é olhado de maneira diferente. Para esta pesquisa, remeti-me ao Lev Vygotsky. Para o uso de tecnologia dei ênfase aos estudos sobre o Micromundo e de como promover experiências multissensoriais para a assimilação de saberes. Para pensar nas atividades que promovam a interação entre os voluntários e, posteriormente, para a análise destas interações, usei o Modelo de Estratégia Argumentativa (MEA).

Ainda no terceiro capítulo, foram tratados estudos que mostram a relevância de saberes adquiridos com a prática do professor em sala de aula. Monteiro (2001) chamou esses saberes adquiridos de “Saberes Escolares”, assim como, por exemplo, dos “Saberes Docentes” de Tardif, Lessard e Lahaye (1991). Esta parte

embasa e justifica a proposta desta pesquisa de trazer professores de matemática para discutir sobre as atividades.

O quarto capítulo é o de metodologia, onde apresentei características dessa pesquisa qualitativa e escolha pelo Estudo de Caso que norteou o desenvolvimento do trabalho que foi realizado, as atividades propostas e implementadas com as colaboradoras, bem como a justificativa dos temas centrais tratados em cada uma delas. Todas as atividades, excetuando-se a primeira, da qual é exibida a MusiCALcolorida, são formadas por cenários de sala de aula onde oferecemos respostas de alunos hipotéticos argumentando sobre números reais. Assim, as professoras ficaram mais à vontade para discutir tais argumentos ao invés de se sentirem pressionadas a resolverem exercícios. Elaboramos um ambiente de sala de aula onde a MusiCALcolorida pudesse ser utilizada, caso as colaboradoras sugerissem esse uso.

No quinto capítulo apresentei e discuti os dados coletados, com a atenção voltada para as interações entre as colaboradoras, com o pesquisador e com a MultiCalcolorida. Os encontros foram gravados em arquivos de vídeo para permitir que fossem revistos quantas vezes necessário para a análise.

No sexto capítulo trouxe a conclusão do trabalho. Nesta parte discuti, de forma geral, os resultados obtidos na pesquisa, fazendo referência à base teórica, bem como destacamos as limitações da mesma.

Os apêndices e os anexos complementaram este trabalho: no primeiro terá as atividades realizadas no decorrer desta pesquisa; no segundo estará presente um excerto do diário de campo, e por fim, encontrará as referências utilizadas na construção desta dissertação.

Capítulo 1: REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Nesta parte da revisão bibliográfica, foram usados como critério de organização os assuntos que mais se relacionam com esta pesquisa. Em primeiro momento, foram feitas leituras gerais sobre “música e matemática”, podendo aparecer relações entre esses assuntos, mas que não necessariamente estejam ligados à educação matemática. Em seguida, foram revisados os trabalhos que, como esta pesquisa, tiveram o foco em “música e educação matemática”.

O uso da música no ensino de matemática costuma ser analisado sob dois campos de pesquisa: o da matemática e o da educação matemática. No primeiro, a busca consiste em compreender os fenômenos do som, a explicação da consonância proveniente das ondas sonoras, e as relações métricas entre as notas musicais. No segundo campo de pesquisa, investigam-se os ganhos didáticos ao usar a música como ferramenta para o ensino de matemática. Apresentaremos abordagens feitas nestas temáticas e em quais óticas os pesquisadores desenvolveram seus estudos, bem como parte das atividades e os objetivos propostos por eles em suas pesquisas.

Partindo da matemática e da física em suas pesquisas, Grillo⁶ (2015) busca compreender a estrutura sonora através da interpretação numérica e do fenômeno físico percebido tanto pela audição humana, quanto pela captação computacional; ou seja, a partir de ferramentas tecnológicas que permitem que o computador capte o som para, posteriormente, desenvolver os seus estudos.

As publicações do Grupo de Pesquisa MusMat⁷, criada pelo Programa de Pós-Graduação em Música da UFRJ⁸, também fazem relações entre música e matemática. A Revista Brasileira de Música e Matemática⁹ conta com diversas publicações que abordam a união entre estes dois temas. Vale ressaltar que o grupo tem como objetivo principal a pesquisa entre música e matemática, não envolvendo necessariamente propostas educacionais para o ensino da matéria.

⁶ Site a física na Música:

<https://sites.google.com/site/afisicanamusica/a-f%C3%ADsica-na-m%C3%BAtica>

⁷ Site do Grupo de Pesquisa MusMat: <https://musmat.org/>

⁸ Site do Programa de Pós-Graduação em Música da própria UFRJ <https://ppgm.musica.ufrj.br/>

⁹ Site da Revista brasileira de Música e Matemática: <https://musmat.org/musmat-journal/>

Abdounur (2010, p.388) utiliza a História da Matemática como um recurso motivacional e pedagógico. Com o uso do experimento do monocórdio, feito por Pitágoras, ele mostra a relação entre os sons musicais e as subdivisões da corda. Abdounur trabalha com a história e traz, desta forma, um caráter humanista para a matemática e para o ensino de matemática, e ao abordar a música neste contexto, faz emergir “um caráter didático na medida em que as diferenças semânticas sutis entre *composição* e *multiplicação*, e ainda entre *proporção* e *igualdade* tornam-se mais visíveis quando se pensa em razões como intervalos musicais”.

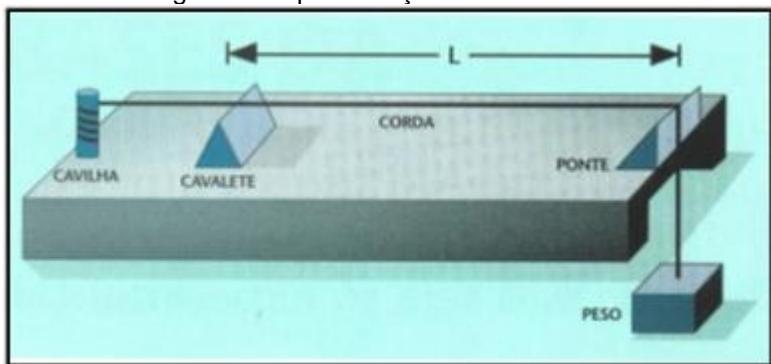
Abdounur (2010, p.390) ainda nos diz que a abordagem musical propicia uma “(re)construção de conceitos”, visto que utilizar a música no ensino de frações provoca o pensamento analógico em consequência dos possíveis diálogos entre os sons e as frações. Tal processo auxilia na produção de saberes, colaborando para a construção do conceito de fração devido a simetria existente entre elas e as propriedades sonoras percebidas nos diferentes sons gerados.

Ainda na perspectiva de trazer a música para o ensino de matemática, temos Cunha (2008, p.37) dizendo que a música é a representação da matemática no mundo físico, e que esta união “nos convida a conjecturar, criar e promover diferentes situações de aprendizagem, considerando, sobretudo, num âmbito mais amplo, a conexão de afeto e cognição”. Portanto, além de compreender a correlação entre música e matemática, ele propõe que usemos essas relações nas práticas educativas por elas trazerem ganhos para além do conteúdo.

Ainda segundo Cunha (2008), o ensino de fração é muito abstrato e, devido ao conteúdo ser trabalhado nos anos iniciais do Ensino Fundamental, os alunos ainda não estão no Estágio Operacional Formal de Piaget, e por isso, não compreendem de forma satisfatória o conteúdo. Diante disso, ele propõe que atividades envolvendo música tornariam o ensino mais concreto e, consequentemente, os alunos compreenderiam melhor o conteúdo de frações.

Cunha (2008 p.24) apresenta, assim como Abdonur, o experimento do monocórdio para relatar um dos primeiros vínculos que se tem registro sobre matemática e música, e exemplifica algum dos experimentos iniciais no qual “exercida a pressão a 2/3 do tamanho original da corda, ouvia-se uma quinta acima e a 1/2 obtinha-se a oitava do som original”.

Figura 1: Representação do Monocórdio.



Fonte: CUNHA, 2008

Estes autores defendem, portanto, a utilização de recursos musicais para fomentar experiências sobre o ensino da matemática, sobretudo para o ensino de razão e proporção. Eles possuem outras atividades para a sala de aula envolvendo música e matemática, que podem ser encontradas nos textos destes mesmos autores presentes nas referências bibliográficas desta pesquisa. Nossa proposta de pesquisa perpassa por partes destes assuntos matemáticos e segue para o campo dos números reais, englobando os números racionais e os números irracionais.

Foram revistos os materiais produzidos pela Matemática Humanista¹⁰, do professor Carlos Mathias, que estejam voltados para a música. Além do estudo algébrico sobre estruturas rítmicas musicais, bem como a aplicação de representações de ritmos através da geometria, ele também se dedica a pesquisar sobre as possíveis interpretações teóricas do modo de pensar “música e matemática”, e de como estes componentes podem estar inseridos na prática docente do professor de matemática.

Um dos trabalhos do Mathias (2004) nessa área de música e matemática é o DRUMMATH. Neste artigo, o autor mostra algumas formas de utilizar a música, sobretudo a percepção rítmica, e como ela pode ser um caminho para a construção de conceitos matemáticos. As atividades foram realizadas com alunos do Instituto Benjamin Constant (IBC) e versaram sobre a sincronização do reflexo psicomotor, números pares e ímpares, e a construção do conceito de menor múltiplo comum (MMC).

O uso da tecnologia também está presente em “música e educação matemática”. Nos trabalhos com o uso do aplicativo Ritmática (CARRILHO, 2013) e

¹⁰ Site da matemática humanista: <https://www.matematicahumanista.com.br/>

da MusiCALcolorida (MARTINS, 2010), que são baseados na ideia de micromundo (PAPERT, 1980), foi possível verificar que a utilização da tecnologia promoveu, nestas pesquisas, ambientes de aprendizagem diferentes dos comumente utilizados nas salas de aula tradicionais. Ambos os trabalhos se utilizam da tecnologia para o desenvolvimento de uma abordagem multissensorial para a construção de conceitos matemáticos. Veremos a seguir estas pesquisas de forma mais detalhada.

Carrilho (2013) propõe que o micromundo criado pelo aplicativo Ritmática desperta interações multissensoriais para o ensino de razão e proporção. Seu trabalho é pautado no design do ambiente computacional e consiste num aplicativo que expressa a divisão de forma simbólica, visual e sonora, como veremos na Figura 2: Aplicativo Ritmática a seguir.

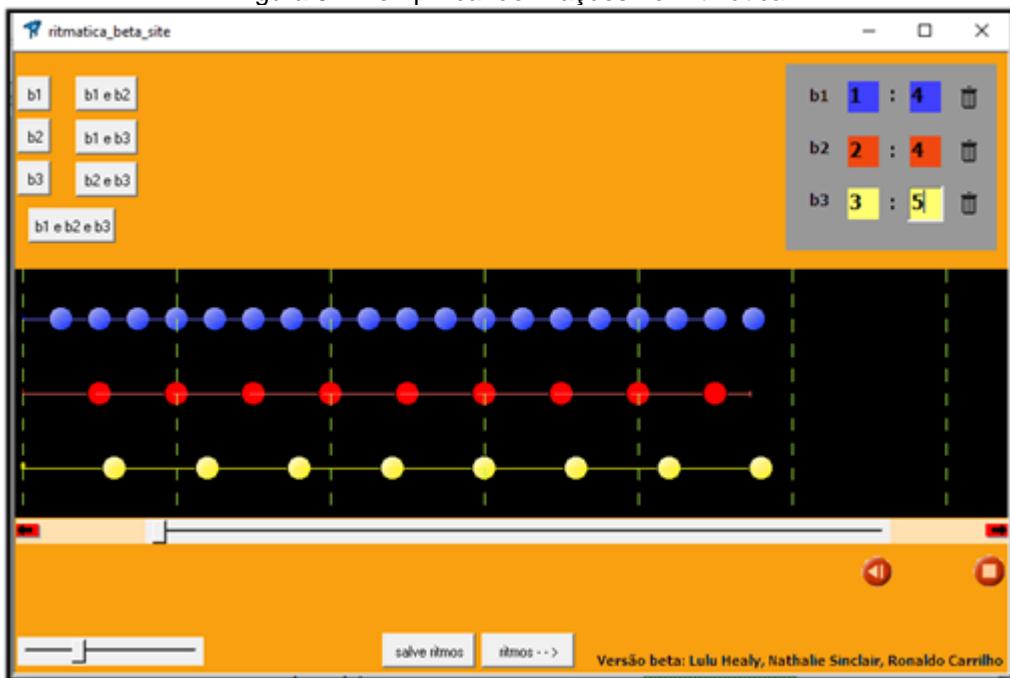
Figura 2: Aplicativo Ritmática.



Fonte: Elaborada pelo Autor, 2022.

Ainda segundo o mesmo autor e na mesma pesquisa, o aplicativo Ritmática permite mostrar o conceito de razão e proporção de uma forma multissensorial. O aplicativo funciona com três linhas de tempo, nos quais é possível escolher, para cada linha, uma fração: b1, b2 e b3. Após a escolha e escrita das frações, é possível “tocá-las” e verificar, de forma visual e sonora, as relações existentes entre elas. Veja a seguir um exemplo das frações 1/4, 2/4 e 3/5 na Figura 3: Exemplificando Frações no Ritmática.

Figura 3: Exemplificando Frações no Ritmática.



Fonte: Elaborada pelo Autor, 2022.

Este exemplo ilustrado pela figura acima mostra os ciclos de encontros entre as frações. É possível verificar visual e sonoramente que no quarto toque da fração azul (b1) ela coincide com o segundo toque da fração vermelha (b2). Este padrão se repete por toda a extensão, ou seja, haverá novamente um encontro entre o oitavo toque da fração azul e o quarto toque da fração vermelha. Portanto, visto dessa forma, através das representações multissensoriais, o aluno pode perceber que a fração vermelha vale o dobro da fração azul visto que é necessário o dobro de pontos da azul para encontrar a vermelha.

Ainda neste exemplo da Figura 3: Exemplificando Frações no Ritmática., pode-se observar que no primeiro momento a fração amarela destoa das frações anteriores. No entanto, o 12º toque da fração azul coincide não somente com a fração vermelha, mas também com a fração amarela, que a princípio destoava das demais. Esta situação permite que sejam investigadas certas características das operações matemáticas que, usando somente da simbologia, pode não criar um ambiente favorável à aprendizagem do aluno. Em outras palavras, o que aconteceu matematicamente foi que $3x(12x(1/4)) = 3x(5x(3/5)) \rightarrow 9 = 9$ nesta explicação, no entanto, a igualdade pode não ser tão compreendida quanto na figura deste aplicativo.

Esta breve explicação apresenta algumas características e funcionalidades do aplicativo Ritmática. A proposta de trazê-lo para esta pesquisa é de mencionar trabalhos realizados que tenham uma temática próxima desta pesquisa, bem como ressaltar que existem potencialidades inerentes a prática de abordar os conteúdos matemáticos de forma multissensorial.

Martins (2010) investiga “O papel da percepção sonora na atribuição de significados matemáticos para números racionais para pessoas cegas e com baixa visão”. Neste trabalho, ela investiga se existe relação entre atribuição de significados matemáticos e percepção sonora. Na pesquisa é utilizada a MusiCALcolorida e se discute quais propriedades dos racionais são destacadas nesta calculadora.

A tecnologia utilizada nesta pesquisa foi projetada pensando num conceito amplo que inclusão, visando que suas funções sejam destinadas a todos os alunos. Esta concepção de inclusão está de acordo com Rodrigues (2020, p.171), que nos diz que a educação inclusiva não é para certos grupos categorizados como pessoas com deficiências, mas sim para todos em geral, evidenciando as singularidades de cada indivíduo.

Nesta perspectiva, as diferentes representações geradas pela MusiCALcolorida não impactam somente os que fazem parte de grupos tidos como inclusivos, mas impactam todos os alunos, visto que para que ocorra a inclusão, deve se levar em consideração que “os ambientes educacionais devem ser transformados de modo que possam receber a todos, independentemente de sua particularidade, seja ela de caráter biológico, sensorial, intelectual, social, cultural, econômico, tecnológico e/ou político” (ROSA; RODRIGUES; MARCONE, 2018 p. 521).

Podemos verificar que existem diferentes perspectivas de abordagem e de variações no público-alvo do trabalho realizado: uns desenvolveram a pesquisa com alunos de escola básica regular, outros em escolas específicas de alunos cegos ou surdos. Sendo assim, esta revisão bibliográfica mostra diferentes possibilidades ao se pesquisar sobre abordagens sensoriais no ensino de matemática.

Após esta revisão bibliográfica, foi verificado que quando são utilizadas diferentes formas de abordagens dos conteúdos durante as aulas, é criada uma

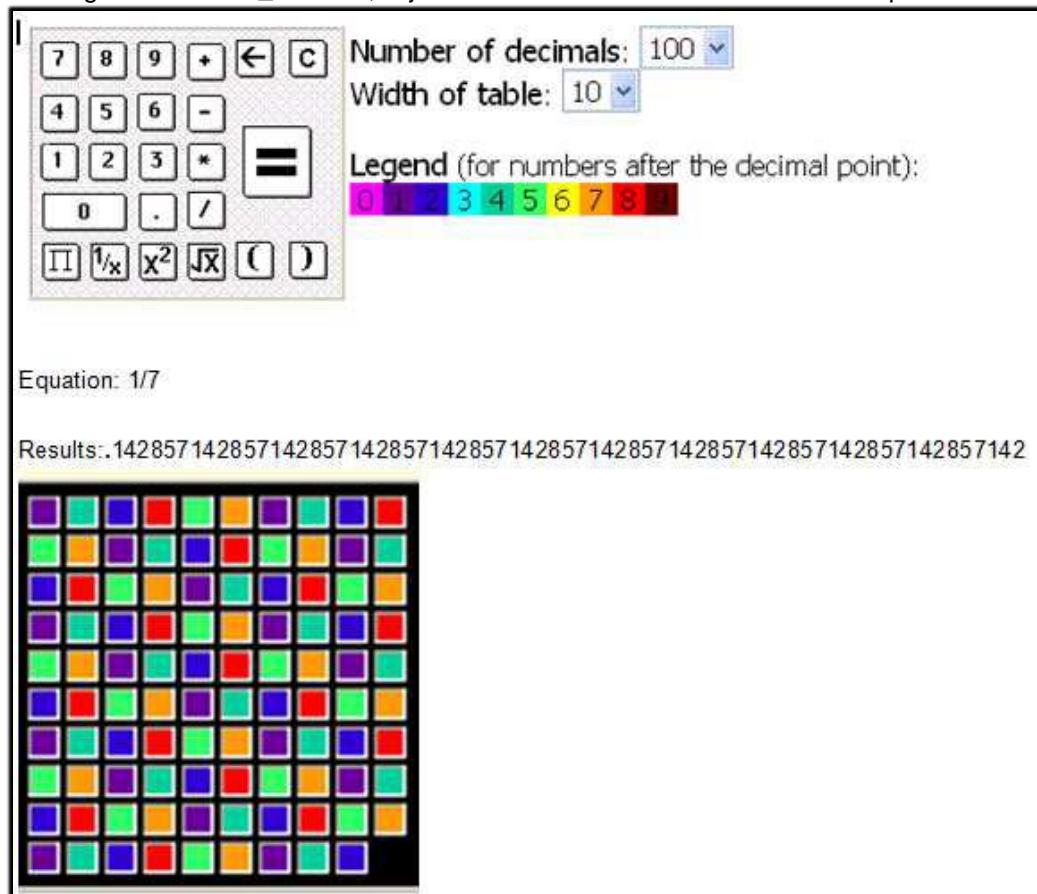
gama de experiências para o aluno, e que estas experiências podem vir a contribuir para a aprendizagem. Estas diferentes formas de abordagens podem ser feitas através do relato de fatos históricos, do uso de tecnologia, e até mesmo da prática de representar o mesmo objeto estudado em diferentes representações. Em decorrência desta revisão é possível constatar que existem apps que enfatizam a representação multissensorial durante a sua manipulação, e que, dentre eles, a MusiCALcolorida pode proporcionar uma abordagem multissensorial dos números reais através das representações musicais, simbólicas e imagéticas. No entanto, as potencialidades observadas por professores sobre esta calculadora ainda não foram investigadas. Partindo desses resultados como hipóteses, nesta pesquisa busca-se compreender, através das interações entre professores de matemática, as potencialidades da MusiCALcolorida para o ensino dos números reais, uma vez que as pesquisas mencionadas trabalharam com alunos, e depois dessas não houve outras encontradas pelo autor. É importante levantar as possibilidades de implementação desta calculadora pelos professores.

Capítulo 2: CONHECENDO A MUSICALCOLORIDA

Neste capítulo, apresento a MusiCALcolorida, suas características e suas funcionalidades. Esta apresentação tem por objetivo familiarizar o leitor com a calculadora, bem como introduzir aspectos que serão aprofundados nos próximos capítulos.

A Calculadora Colorida (Figura 1), de Sinclair, Liljedahl e Zazkis (2006), foi a precursora da MusiCALcolorida. A Calculadora Colorida tinha como objetivo representar os números racionais e irracionais apresentando as suas representações decimais num quadro de cores.

Figura 4: Versão_ Sinclair, Liljedahl e Zazkis da Calculadora Colorida para 1/7.



Fonte: RODRIGUES, 2009

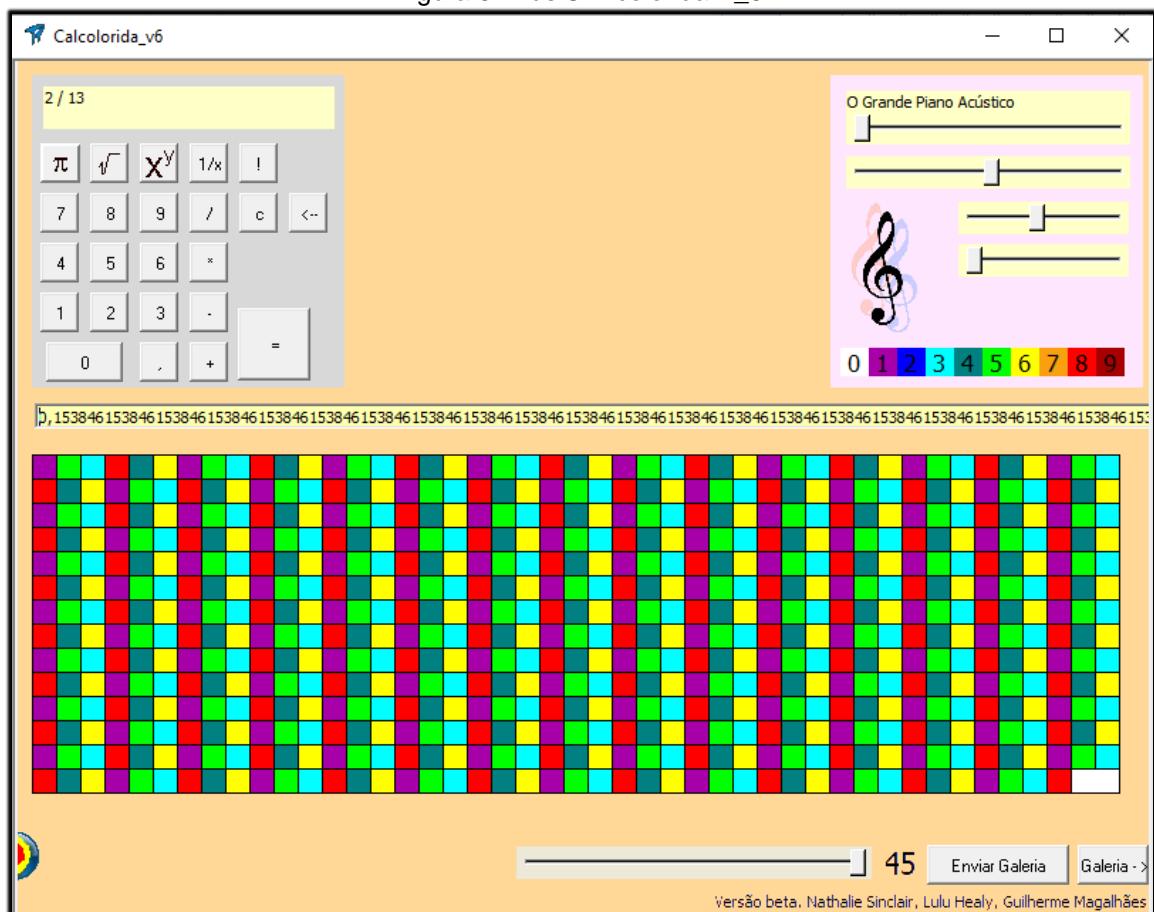
A MusiCALcolorida foi desenvolvida por Lulu Healy e Guilherme Magalhães, a partir dessa CalculadoraColorida, e está disponível no site grupo *Rumo à Educação Matemática Inclusiva*, onde é possível encontrar esse e outros aplicativos para computador cujo objetivo é promover a inclusão nas aulas de matemática. Estes

outros aplicativos fogem do escopo desta pesquisa. Depois dessa breve histórico da calculadora, iniciaremos a apresentação da MusiCALcolorida e mostraremos suas características.

A MusiCALcolorida é uma calculadora digital que permite representar os resultados de divisões de forma multissensorial. Ela expressa o resultado de operações por meio simbólico, imagético e sonoro; lembrando que o nosso objetivo privilegiou a operação de divisão. Seu desenvolvimento foi pensado sobretudo para pessoas com algum tipo de deficiência e que necessitam de estímulos sensoriais além da representação simbólica dos números, bem como na possibilidade de interações diversas com videntes e ouvintes.

A versão da calculadora que usamos está disponível no site do RUME e possui a interface da figura a seguir:

Figura 5: MusiCALcolorida V_6.

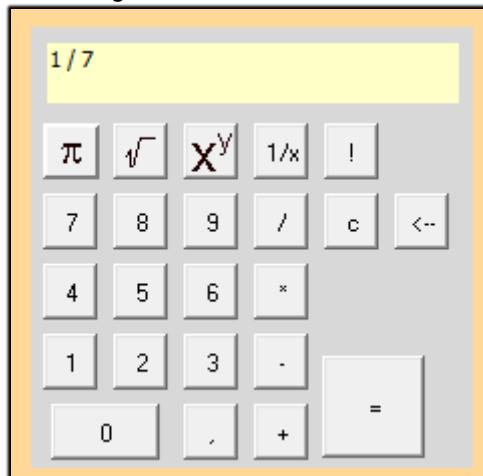


Fonte: Elaborada pelo Autor, 2022.

Note que foi efetuada a divisão 2:13, obtendo-se o resultado nas três representações. Se observarmos a tarja central, veremos o resultado 0,153846(...). Se olharmos para a tela de pintura criada, podemos observar que cada cor representa um algarismo, e cada algarismo possui uma representação simbólica na tarja, imagética no quadro de cores e nos sons condizentes com a legenda abaixo da clave de sol.

Para usá-lo, podemos utilizar o mouse e clicar nos elementos necessários ou podemos utilizar o próprio teclado do computador e suas respectivas teclas, como na figura a seguir:

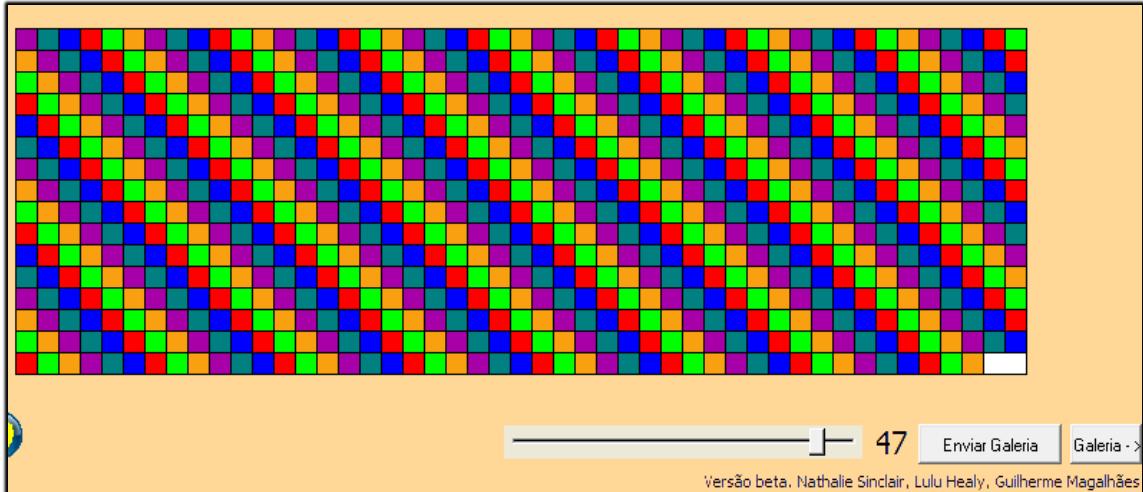
Figura 6: Imagem do teclado da MusiCALcolorida.



Fonte: Elaborada pelo Autor, 2022.

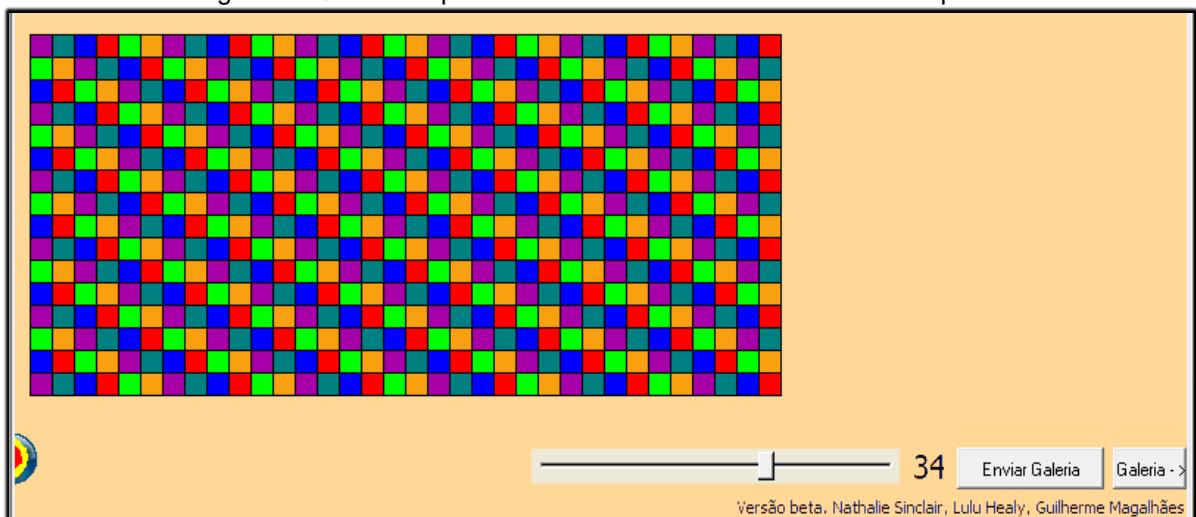
Na Figura 7 é possível verificar a tela de pintura na qual podemos ver a representação imagética do resultado de 1 dividido para 7. Cada algarismo possui uma cor determinada e a pintura é feita conforme as dízimas aparecem no resultado da operação. O número de casas decimais por cada linha na pintura (47 casas) pode ser modificado através da barra de rolagem na horizontal. Observe a diferença da imagem formada entre as duas próximas figuras, mesmo sendo realizada a mesma operação matemática, modificando apenas o número de casas decimais de 47 para 34.

Figura 8: Quadro de pintura da MusiCALcolorida em 1 dividido por 7.



Fonte: Elaborada pelo Autor, 2022.

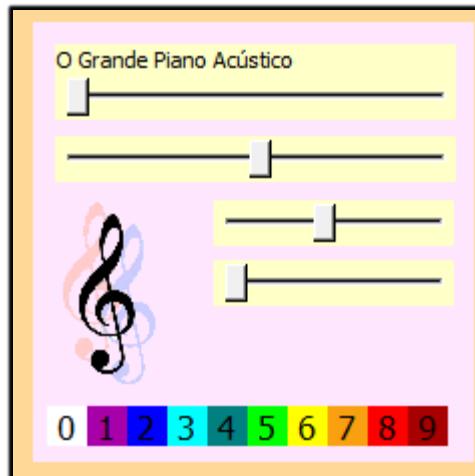
Figura 9: Quadro de pintura da MusiCALcolorida em 1 dividido por 7.



Fonte: Elaborada pelo Autor, 2022.

Tratarei agora dos controles para a representação sonora. Após efetuar uma operação que resulte em dízimas, é possível tocar/ouvir o resultado obtido. Basta clicar na clave de sol (♩) que o som começa a ser emitido. Observe a Figura 10 que mostra a função sonora da MusiCALcolorida.

Figura 11: Controles musicais da MusiCALcolorida.



Fonte: Elaborada pelo Autor, 2022.

Nesta figura acima, pode ser visto 4 barras de rolagem na horizontal. Explicarei cada uma, mas é favorável que o leitor acompanhe a explicação usando a MusiCALcolorida, pois é meramente textual e pode não ser suficiente para a compreensão.

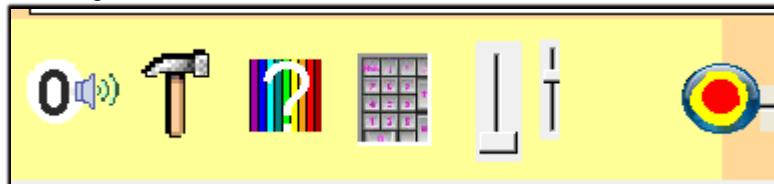
A primeira barra permite alterar o som do instrumento que toca os algarismos. Inicialmente já vem configurado como piano acústico, mas também possui instrumentos de corda, sopro, e até mesmo o timbre humano.

Na segunda barra tem o controle de velocidade de cada nota, ou seja, pode ser escolhido que as notas toquem de forma mais rápida ou mais lenta. Inicialmente, para o costume da calculadora, recomenda-se iniciar de forma lenta e aumentar conforme necessário.

Na terceira barra tem o controle da altura da nota na frequência. Numa linguagem popular, pode-se dizer que ali se controla se a nota é grave ou aguda. A quarta barra permite alterar o tempo dado para cada nota proporcionalmente igual ao seu algarismo. Desta forma, o tempo de duração da nota referente ao algarismo 2, por exemplo, será menor que o tempo de duração de uma nota de algarismo 8.

Nesta próxima figura, pode-se ver que esta calculadora permite algumas funcionalidades extras representadas pelos seguintes ícones:

Figura 12: Funcionalidades extras da MusiCALcolorida.



Fonte: Elaborada pelo Autor, 2022.

Caso os ícones não estejam aparecendo em primeiro momento, basta clicar no círculo azul, preenchida pelas cores amarela e vermelha no canto esquerdo, que ela se deslocará para o canto direito, abrindo as funcionalidades acima citadas.

O primeiro ícone representa a escolha de emitir som ou não quanto ao algarismo zero. O segundo ícone, o do martelo, permite “quebrar” algumas teclas da calculadora para que o aluno a execute por meio de outros caminhos nas quais as teclas estejam disponíveis; isto é, utilizando apenas as teclas que não estejam “quebradas”.

O terceiro ícone é o dos desafios. Ao clicar nele, abrirá uma aba mostrando 4 tipos de desafios, cada um envolvendo as representações simbólicas, imagéticas e sonoras da calculadora. O quarto ícone bloqueia e desbloqueia o teclado físico do computador, permitindo que se use apenas o teclado virtual na musiCALcolorida.

O quinto ícone permite que o usuário determine a precisão da raiz, ou seja, a quantidade das casas decimais que a calculadora vai efetuar. No sexto ícone é possível regular o tamanho do “pixel/quadrado” da tela de pintura.

Vale destacar que todas estas funcionalidades podem vir a ser utilizadas ou não, a depender do público que vai fazer uso da calculadora e dos objetivos pretendidos a serem alcançados.

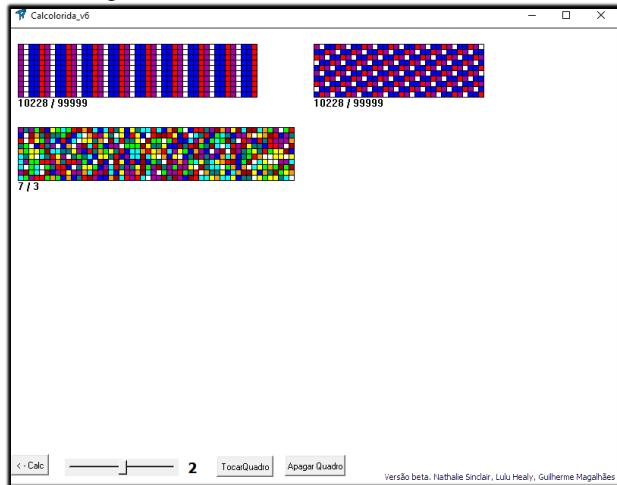
A musiCALcolorida permite que o usuário salve os seus resultados imagéticos clicando no botão “Enviar Galeria”, bem como importar resultados já gravados. As Figuras 11 e 12 a seguir mostram respectivamente as opções de uso da galeria:

Figura 13: Botão Enviar na MusiCALcolorida.



Fonte: Elaborada pelo Autor, 2022.

Figura 14: Galeria da MusiCALcolorida.



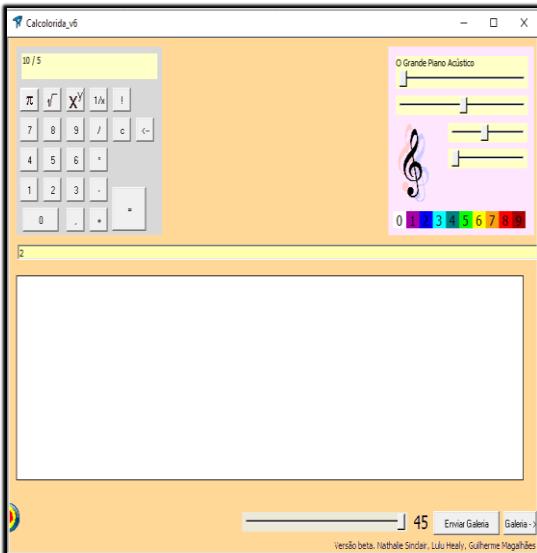
Fonte: Elaborada pelo Autor, 2022.

Nas figuras acima, vê-se que a função galeria permite salvar e a possibilidade de importar novamente os quadros para a interface para eventuais modificações que se queira fazer. Os quadros gravados na galeria podem ser tocados e também apagados da memória, ou seja, excluídos da calculadora. Vale destacar que atualmente é possível tirar um *print* da tela, mas ao enviar para a galeria, é possível acessar e modificar o quadro colorido salvo, bem como escutar o som e observar os algarismos.

Para continuar a familiarizar o leitor com a calculadora, verá agora alguns exemplos de operações efetuadas na calculadora. Estes exemplos são ilustrativos e tem por objetivo mostrar ao leitor em algumas representações da MusiCALcolorida.

- O resultado obtido em 10 dividido para 5.

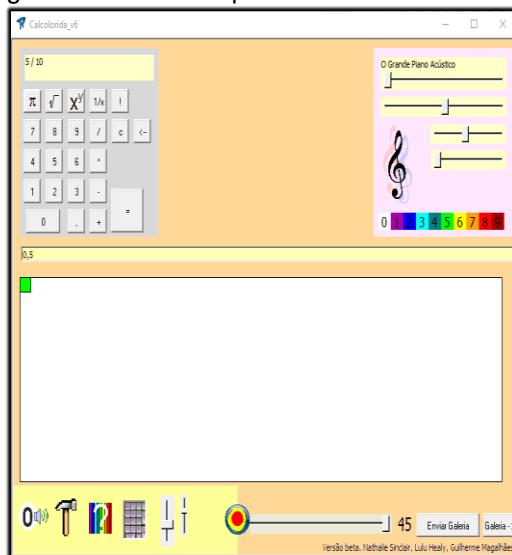
Figura 15: 10 dividido por 5 resulta em número natural.



Fonte: Elaborada pelo Autor, 2022.

a) O resultado obtido em 5 dividido por 10.

Figura 16: 5 dividido por 10 resulta em racional.



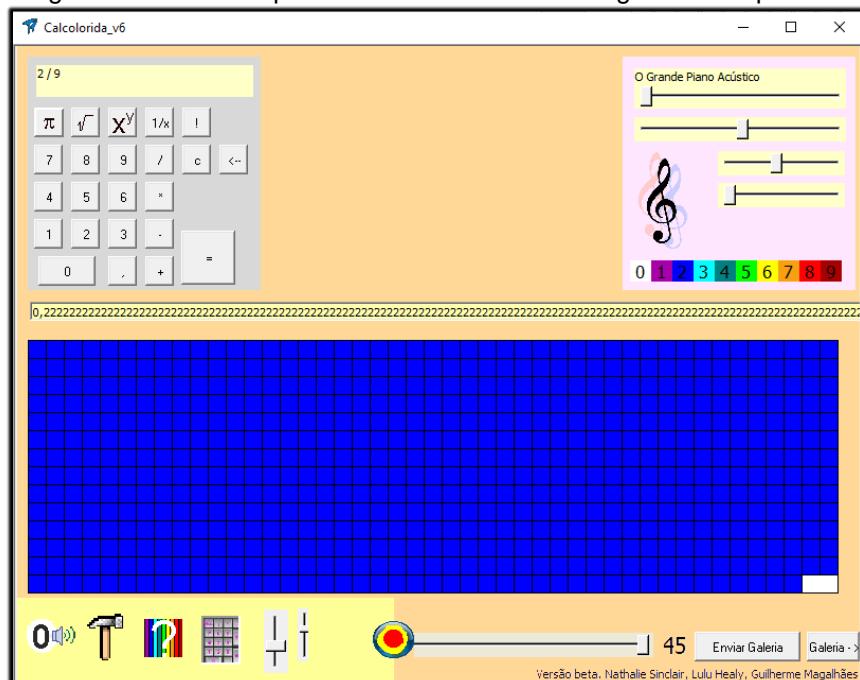
Fonte: Elaborada pelo Autor, 2022.

Ao efetuar a divisão de 10:5, como no item a, encontra-se como resultado simbólico o 2. No entanto, não há nenhuma representação imagética e nem sonora. Se dividir 5 para 10, como no item b, passará a ter uma representação com única cor, representada pelo pixel verde e um único som. Note que neste segundo caso, tem-se novidades perante as calculadoras tradicionais: surgem diferentes representações para um resultado obtido.

Durante a revisão bibliográfica foi encontrado um relato desta mesma divisão de 5 dividido para 10. Dentre a resposta entre os alunos Kelly e Victor, em dupla, ambos alegaram que “Não gostamos porque é muito sem graça” (MARTINS, 2010 p.66). Esta mesma dupla preferiu o resultado da divisão 1:11, que resulta em 0,09. Neste relato é possível observar a inversão da comum preferência dos alunos quanto às divisões. Costuma ser muito comum o aluno preferir os resultados ditos “exatos” e, nesta experiência envolvendo a MusiCALcolorida, os resultados preferidos foram 1:7 e 1:11.

b) Representações de 2 dividido por 9.

Figura 17: 2 dividido por 9 resulta dízima com 1 algarismo no período.

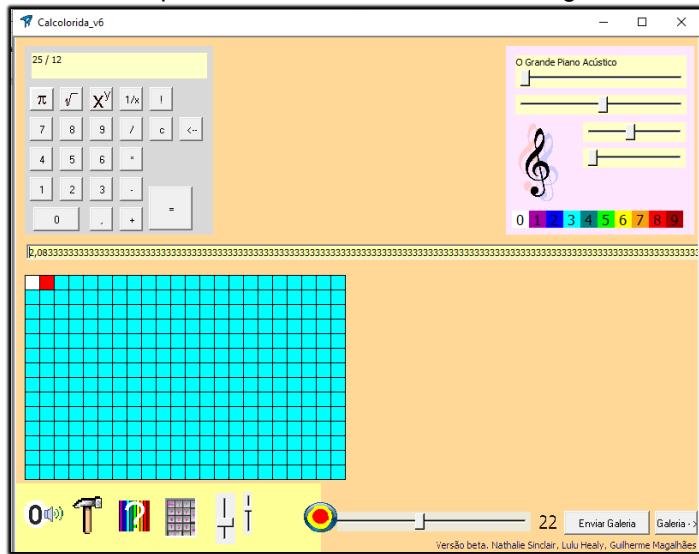


Fonte: Elaborada pelo Autor, 2022.

Ao efetuar 2 dividido por 9, encontra-se os resultados 0,22222... na parte simbólica; um quadro de pintura todo azul, que representa o algarismo 2, e uma única nota a ser tocada.

c) Efetuando a divisão 25 por 12.

Figura 18: 25 dividido por 12 resulta em dízima com 3 algarismos no período.

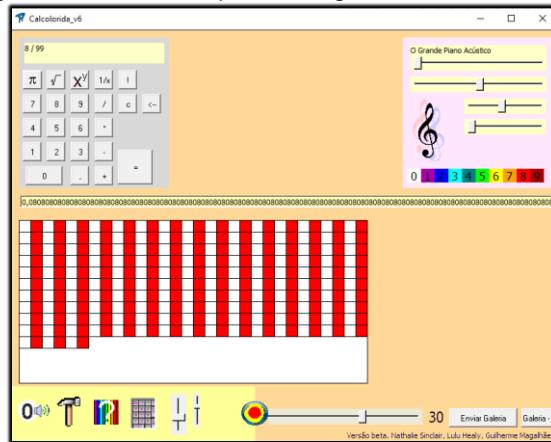


Fonte: Elaborada pelo Autor, 2022.

Neste caso, vê-se as representações mostrando uma variedade, referente ao resultado numérico da conta; na pintura, vê-se três cores: branco, vermelho e azul ciano, que representam, respectivamente, os algarismos zero, oito e três, e duas ou três notas a serem tocadas, a depender da escolha do zero possuir som ou ser em silêncio.

d) Efetuando a divisão de 8:99.

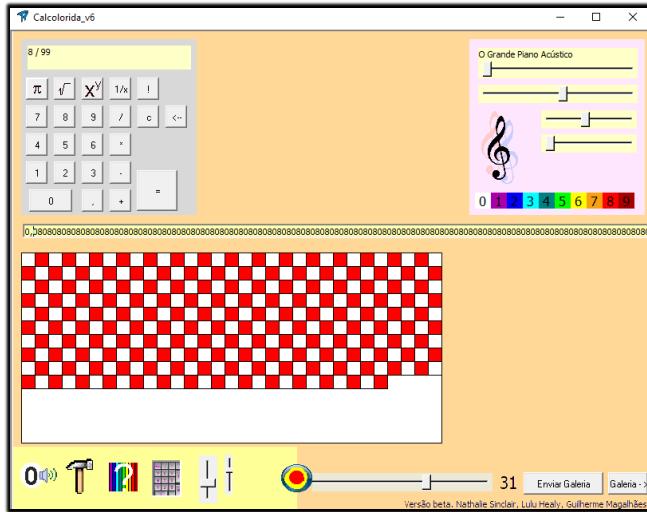
Figura 19: 8 dividido por 99, organizado em 30 casas



Fonte: Elaborada pelo Autor, 2022.

e) Efetuando a divisão de 8:99 e alterando o número de casas.

Figura 20: 8 dividido por 99, com 31 casas.



Fonte: Elaborada pelo Autor, 2022.

Neste exemplo, note que o resultado da divisão é o mesmo, porém o quadro pintado é diferente. O resultado simbólico é o mesmo em ambos os casos: 0,0808080808... porém, como foi alterado o controle deslizante de 30 por 31, surgiu uma imagem diferente da anterior. O som se manteve o mesmo.

Com os exemplos mostrados, fica evidente que a calculadora permite as três representações distintas e que não é possível exprimir todas estas representações nesta pesquisa. No entanto, ficam alguns exemplos do que pode ser feito com a MusiCALcolorida e de como ela pode ser trabalhada em sala de aula.

Neste capítulo foi apresentada a MusiCALcolorida, bem como funcionam as suas três representações: simbólica, sonora e imagética. Esta foi uma descrição das funcionalidades da calculadora, isto é, de suas características funcionais básicas. A pesquisa se propõe a dar um passo além e investigar, nas interações entre professores de matemática, as potencialidades do uso da MusiCALcolorida para o ensino dos números reais.

Capítulo 3: FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Nesta parte da pesquisa, foram estabelecidos fundamentos que permitiram definir como entende-se o conhecimento, a construção de conhecimento e a importância da interação no processo de construção de saberes. Sem se desconectar desses conceitos, trouxe de que forma o uso de tecnologias pode promover ambientes de aprendizagem. E, para pôr tudo isso em prática, como elaborar tarefas que promovam a interação dentro de um ambiente de aprendizagem, criando condições favoráveis para que a aprendizagem ocorra.

Para entender o que é conhecimento, remeti-me a Lev Vygotsky, de quem busquei as bases que deram fundamentos para a reflexão sobre como agregar fatores que corroboraram efetivamente na construção de saberes, passando pela interação e mediação.

Segundo Vygotsky, no livro “Pensamento e Linguagem”, a construção de saberes decorre da interação que ocorre entre diferentes pessoas e/ou entre pessoas e objetos. Sendo assim, a MusiCALcolorida pode ser, nesta perspectiva, a mediação.

No final da década do ano 1980, Papert, no livro “LOGO: Computadores e Educação”, já dizia que as escolas produzem ambientes de aprendizagem. Porém, tanto antes quanto agora, muitas vezes esses ambientes são artificiais e ineficazes. Com a chegada dos computadores no século passado, Papert (1980) dizia que este cenário poderia ser revertido devido ao computador permitir uma abordagem diferenciada das atividades, dando origem ao conceito de Micromundo.

Micromundo é um ambiente elaborado para a aprendizagem, onde o usuário/aprendiz pode testar hipóteses de investigação. As regras de funcionamento de um micromundo podem ter propriedades distintas do mundo real, criando uma “incubadora para o conhecimento”. Nas palavras do autor, um micromundo permite que a criança “aprenda a transferir hábitos de exploração de sua vida pessoal ao domínio formal da construção de teorias científicas” (PAPERT, 1980, p. 145).

Nesta perspectiva, as tarefas desenvolvidas a partir da MusiCALcolorida se destinaram a utilizar esta “incubadora de conhecimento”, isto é, usar o micromundo da calculadora para transformar o ambiente dos encontros em um local no qual os

professores pudessem manipular, interagir e explanar suas percepções sobre as potencialidades da mesma. Sendo assim, fez-se necessário um referencial teórico que desse suporte para a elaboração das tarefas que se enquadrem nesta perspectiva.

Para a construção das atividades e, posteriormente, a análise dos processos de interação, foi utilizado o Modelo de Estratégia Argumentativa (MEA), pois este modelo nos deu a base para pensar em atividades que promovessem argumentações férteis ao invés de respostas rápidas. Este modelo também fundamentou a análise desses processos argumentativos.

Para a elaboração dos encontros, foi levado em conta o micromundo MusiCALcolorida, e as tarefas provocativas. Segundo Bolite-Frant (2011, p.21), a tecnologia, ao ser pensada e utilizada como prótese, permite a construção de um texto semântico diferenciado. Neste sentido, as atividades propostas visavam criar condições para que essas potencialidades fossem exploradas pelas colaboradoras durante a realização das tarefas e provocasse as diferentes interações.

Para o processo de análise, o MEA apresenta dez passos que podem ser agrupados em três momentos: a organização de dados, o estudo comparativo dos dados e a apresentação do resultado. Comparei e confrontei os argumentos utilizados pelas colaboradoras, tratando os dados e gerando uma interpretação verossímil.

A tabela a seguir mostra os passos necessários para a utilização do MEA. Os passos estão categorizados em Bolite-Frant (2011, p.82) como etapas para “a organização dos dados, ao estudo comparativo e apresentação dos resultados”. Aqui os passos estão sintetizados com o objetivo de fazer o leitor se familiarizar com as etapas do processo.

Tabela 1: Os dez passos do MEA

Passos do MEA	Descrição dos Passos do MEA
1° – Leitura Exaustiva	A leitura exaustiva dos dados obtidos permite ao pesquisador se familiarizar com a fala dos participantes da pesquisa, bem como verificar.
2° - A constituição do	Seguir os objetivos da pesquisa, descrever a

corpus de análise	atividade que os colaboradores estão participando.
3° - A localização das controvérsias	Buscar momentos onde existem conflitos de posicionamentos, inconsistências ou controvérsias.
4° - A enunciação das teses do locutor	As teses dos participantes devem ser resumidas em enunciados claros e objetivos.
5 - A busca dos argumentos utilizados	Buscar os argumentos utilizados pelo colaborador que sustentam a sua argumentação
6° - Aplicação da tipologia de análise	Classificar o tipo de argumentos utilizados e classificá-los.
7° - A montagem de esquemas	Organizar os argumentos utilizados em uma forma resumida e clara.
8° - A interpretação	Verifica o sentido das afirmações feitas pelo colaborador, buscando convergência com o esquema.
9° - A busca pelas evidências da interpretação	Retornar à entrevista e procurar evidências que sustentem o esquema.
10° - Critérios de validação	Estabelecer critérios de validação para os resultados obtidos.

Fonte: autor

Tendo como objetivo principal desta pesquisa a investigação das potencialidades da MusiCALcolorida a partir das interações entre as colaboradoras, selecionamos as professoras convidadas com o critério de possuírem conhecimentos práticos da atuação em sala de aula. Isto é, o grupo de colaboradoras que participaram desta pesquisa são professoras de matemática que atuam diretamente na Educação Básica. Esta escolha é consonante com a proposta de Tardif (1991), que diz que saberes sociais são aqueles que dispõe uma sociedade e, sendo o magistério um grupo pertencente a sociedade, este grupo também possui saberes próprios.

Tardif (1991) afirma que o saber docente está dividido em: saberes da disciplina, saberes curriculares, saberes profissionais e saberes da experiência. O interesse maior desta pesquisa residiu nos saberes da experiência, proveniente da experiência em sala de aula das professoras colaboradoras.

Segundo Monteiro (2001), os saberes escolares são aqueles que os professores constroem com a prática docente, pois os mesmos somente são construídos na imersão local da escola. Desta maneira, as colaboradoras da pesquisa puderam contribuir de forma única.

Capítulo 4: METODOLOGIA DE PESQUISA

O objetivo dessa pesquisa qualitativa foi analisar, a partir das interações entre as professoras de matemática, as potencialidades do uso da MusiCALcolorida para o ensino dos números reais. Para esta investigação, foi realizado um Estudo de Caso, que é um dos modos de se fazer pesquisas sociais e é eficaz quando o pesquisador tem pouco controle sobre os eventos que vão ocorrer durante a pesquisa (YIN, 2001). Trujillo (1982, p.167) diz que “a pesquisa científica é uma investigação metódica acerca de um determinado assunto, cujo propósito é descobrir respostas para as indagações ou questões significativas que são as propostas”. D’Ambrósio (2017, p.79) afirma que “toda teorização se dá em condições ideais e somente na prática serão notados e colocados em evidências certos pressupostos que não podem ser identificados apenas teoricamente”. Isso nos instiga a desenvolver atividades que buscaram colocar os participantes diante da utilização da calculadora e registrando suas considerações.

Os dados foram obtidos a partir das interações oriundas de falas, debates e relatos das vivências pelas colaboradoras durante a pesquisa. Além de depoimentos de suas práticas docentes, a proposta da análise qualitativa dos dados pareceu ser a mais adequada para esta pesquisa. Os encontros foram gravados, transcritos, criando nosso banco de dados, e posteriormente assistido várias vezes para auxiliar na análise mais fidedigna e para levantar os códigos que utilizamos. Cabe ressaltar que as professoras tiveram acesso a MusiCALcolorida entre os encontros, uma vez que pode ser baixada gratuitamente.

Esta análise se baseou nas teorias adotadas e em alguns passos do MEA. Como visto no capítulo anterior, este modelo foi utilizado para a criação e a análise de contextos interativos de aprendizagem.

Reforçando a escolha do Estudo de Caso, nesta pesquisa o caso foi investigar e analisar as potencialidades da MusiCalcolorida a partir das interações ocorridas nesses encontros.

As participantes da pesquisa eram professoras de matemática que atuam na Educação Básica. Uma vez que esta pesquisa foi pensada no auge da pandemia da COVID-19, para que se atendessem as condições de biossegurança, bem como

facilitar o deslocamento dos professores neste momento pandêmico, foram programados 4 encontros virtuais, através de chamadas de vídeo no aplicativo Meet.

A escolha deste grupo de pessoas consistiu no fato delas serem professoras que lecionam em turmas nos quais o currículo prevê o ensino dos números reais. Ou seja, elas trouxeram suas experiências de sala de aula para a pesquisa. Essa exploração foi impulsionada pelas indagações feitas pelo pesquisador sobre o ensino de números reais, e pelo manuseio da MusiCALcolorida.

Todas as professoras convidadas eram pessoas conhecidas. Duas delas foram amigas de faculdade e as outras duas amigas de trabalho. O convite se deu por mensagem, dizendo que eu estaria convidando-as para a pesquisa, mas sem entrar em muitos detalhes. Vale destacar ainda que um outro professor de matemática, e músico, foi convidado, mas o mesmo não pôde aceitar o convite por incompatibilidade de horário.

O convite para pessoas conhecidas se deu por conta da pesquisa não contar com retribuição financeira para os participantes, isto é, todos os colaboradores não receberam nenhuma colaboração financeira para participar da pesquisa. Com isso em mente, foram selecionadas pessoas que apoiariam a pesquisa, separando horas para participar da mesma.

A fim de proporcionar um ambiente que permitisse o relato das vivências e percepções dos participantes, foi adotado o modelo de entrevista espontânea. Segundo Yin (2001, p.112), a entrevista espontânea permite que o entrevistado responda perguntas, exponha suas interpretações e/ou dê a opinião sobre um determinado assunto. Ou seja, com o modelo de entrevista espontânea é possível registrar informações que vão além da resposta da questão, permitindo que o entrevistado se torne um “informante”, e posteriormente seja possível fazer uma análise dessas proposições e compor o relatório do investigador.

Estas entrevistas também seguiram a proposta de Bauer e Gaskell (2002) para a entrevista focal. Deste modo, elaboraram-se tarefas que promovessem interações ao invés de respostas únicas. Bauer e Gaskell (2002) definem a entrevista focal como ideal para “explorar o espectro de atitudes, opiniões e

comportamentos”, bem como “observar os processos de consenso e divergência” (BAUER; GASKELL, p.78).

Esta foi a organização das tarefas. Elas estarão descritas detalhadamente na sequência deste capítulo, sendo assim, aqui é apenas um panorama geral dos temas que foram tratados nos encontros.

Tabela 2: Cronograma dos Encontros

Encontro	Título das Tarefas	Objetivo
1º Encontro	Conhecendo a MusiCALcolorida.	Levantamento de perfil dos participantes e apresentação das características da MusiCALcolorida.
2º Encontro	Razão.	Discutir o conceito de razão entre números.
3º Encontro	Racional e Irracional.	Discutir o conceito de rationalidade e irrationalidade através das representações da calculadora.
4º Encontro	O Uso de Diferentes Calculadoras.	Discutir as diferentes abordagens possíveis dependendo do meio utilizado.

Fonte: autor

Coleta de dados

Os dados foram separados em dois blocos, como sugere Yin (2001, p.123): “a) os dados (*banco de dados*), ou a base comprobatória e; b) o relatório do pesquisador”.

Esta separação permite que outros pesquisadores tenham acesso aos dados obtidos na pesquisa, então o leitor poderá revisar as evidências e não se limitará às interpretações dadas nesta pesquisa.

O diário de campo foi produzido a partir das gravações dos mesmos que ocorreram de modo remoto e síncrono. Estas gravações foram realizadas via aplicativo, disponível gratuitamente para desktops, chamado Open Broadcaster

Software (OBS¹¹) nas versões para Linux, MAC e Windows. As gravações captaram a tela e o áudio do pesquisador, bem como a imagem e o áudio proveniente do Meet, onde estavam as colaboradoras. Com estes dados coletados, foram anotados no diário de campo as dinâmicas de trabalho, as sugestões de atividades propostas, bem como as interações feitas entre as participantes. Em seguida, foram reduzidos e organizados por temas para análise. Os dados obtidos, o tratamento e a divulgação dos dados seguem o anonimato, condizente com o comitê de ética.

Análise de dados

A análise realizada se fundamentou nas teorias, a partir das transcrições e reduções. A proposta do MEA serviu de base para tal, e embora o modelo enfatize a não cronologia, os encontros tinham seus temas que foram analisados seguindo tal cronologia, e posteriormente uma análise geral, sem ficar preso a ordem em que os encontros ocorreram.

Atividades Programadas para os Encontros

As atividades objetivaram suscitar discussões sobre temas ligados aos números racionais e irracionais, e levar os professores a utilizarem a MusiCALcolorida como recurso para solucionar tais atividades. Para isto, foram elaboradas ao todo quatro atividades, uma para cada encontro.

Nos cenários propostos para as atividades, excetuando-se a primeira atividade no qual foi feito uma apresentação dos participantes e da calculadora, as demais contaram com uma situação hipotética de sala de aula em que alunos apresentavam alguma dúvida ou diferentes análises sobre o problema e demandavam a explicação da professora. Vale destacar que todos os encontros procuraram criar um ambiente agradável e convidativo para que elas se sentissem confortáveis em falar como abordariam as situações e como viriam a intervir nos cenários propostos.

¹¹ Disponível para download no site oficial: <https://obsproject.com/pt-br/download>

Atividade 1

1) Levantar o perfil dos colaboradores da pesquisa conversando com eles.

Dentre os assuntos, buscar as seguintes informações:

- a) Nome?
- b) Onde trabalha?
- c) Qual turma?
- d) Maiores dificuldades que os alunos costumam encontrar sobre os números reais?

2) Instalação da MusiCALcolorida:

- I. Entrar no site.
- II. Baixar a MusiCALcolorida.
- III. Abrir a MusiCALcolorida.

3) Como efetuar cálculos na MusiCALColorida:

- I. As operações.
- II. Mudanças no quadro de pintura.
- III. Mudança das características sonoras.

4) Como salvar operações na calculadora usando a biblioteca:

O primeiro encontro teve por objetivo levantar o perfil das colaboradoras e apresentar os participantes uns aos outros, além de apresentá-los à MusiCALcolorida. No primeiro momento, os participantes se apresentariam aos outros integrantes do grupo e contariam as suas experiências profissionais, bem como outras informações que julgarem relevantes.

Logo no início do encontro, demos início ao processo de download da MusiCALcolorida e foram apresentadas as primeiras possibilidades de uso. Depois de feitas algumas operações para que as participantes percebessem as diferentes representações que a calculadora faz, esperava-se que neste momento já iniciassem alguns comentários sobre possíveis potencialidades da calculadora.

Atividade 2:

[Ênio (2015), 7º ano, p. 151, questão adaptada]

Em uma classe de 28 alunos, 24 foram aprovados, e o restante ficou para recuperação. Determine a razão entre o número de alunos aprovados diretamente e o total de alunos da turma.

Maria inicia a discussão propondo uma resposta:

- Maria: *A razão foram eles terem estudado.*

Mateus sorri e diz:

- Mateus: *Ele quer saber a fração, Maria. A fração correta seria 24/28.*

A Maria retrucou e disse que a resposta correta era outra:

- Maria: *Eu acho que não. Se é assim, se é para ser fração, a resposta correta é 6/7, pois dá pra simplificar essa que você falou por dois, duas vezes.*

Marcos observou a resposta de Mateus e Maria, identificou um erro e propôs uma nova resposta:

- Marcos: *É, Mateus, dá pra simplificar a sua resposta. Mas a Maria errou também. Do numerador (24) para o denominador (28) faltam 4, então podemos dizer que 24/28 é igual a 3/7, pois mantém a diferença de 4 entre o numerador e o denominador, e não 6/7, como Maria disse.*

Usando a MusiCALcolorida, como vocês abordariam o debate entre os alunos?

Como explicar/rebater os argumentos utilizados pelos alunos usando a MusiCALcolorida?

A calculadora fornece algum tipo de recurso que favorece a explicação desta questão?

A atividade tinha por objetivo discutir o conceito e o ensino de razão. Neste sentido, a atividade propunha uma situação no qual três alunos divergem sobre o termo “razão” e o “como” deve ser a estrutura de uma fração que represente uma das interpretações de razão que os alunos julgam ser a esperada como resposta para o problema.

Atividade 3:

Certo dia, durante a aula de matemática, a professora resolveu dividir a turma em grupos para resolverem os exercícios da apostila utilizada na escola. Os alunos se depararam com a seguinte questão:

1) Marque a alternativa que apresenta apenas números irracionais:

- a) $13/23; 323/523; 55/125$.
- b) $325/525; 56/47; 26/78$.
- c) $325/525; 55/125; 26/78$.
- d) $13/23; 56/47; 323/523$.

A professora observou a seguinte discussão entre um dos grupos:

Marcos falou rapidamente:

- Marcos: *Nenhuma das opções! Como estão em forma de fração, todas são racionais.*

Maria escutou o que Marcos disse que concordava:

- Maria: *É, o Marcos está certo, não tem como responder a questão.*

Mateus disse que sim, era possível, e explicou:

- Mateus: *Claro que dá. O número Pi num é irracional? Não se lembram como ele foi encontrado? Dividiram o comprimento da circunferência pelo diâmetro.*

Então, os números irracionais podem ser escritos como uma fração.

Todos ficaram em dúvida e perguntaram a professora sobre o que fazer nesta questão.

Usando a MusiCALcolorida, como você explicaria a situação para os alunos? A calculadora ajuda na distinção entre racionais e irracionais? Levando em consideração a argumentação dos alunos, Pi (π) é racional ou irracional?

Esta tarefa consistia em duas afirmações de alunos sobre irracionalidade. A atividade buscou criar uma situação no qual as colaboradoras se colocariam na posição da professora desses alunos e tentassem explicar aos alunos se seria possível e “como” seria possível diferenciar um número racional de um número irracional.

Esta questão também foi projetada pensando nas várias operações matemáticas que poderiam surgir no decorrer da atividade, de modo que as professoras tivessem a oportunidade de manipular a calculadora e explorar suas potencialidades. Além disso, introduziria o π na discussão com o objetivo de instigar as professoras à argumentarem sobre como a calculadora poderia, ou não, contribuir para a construção deste conceito.

Atividade 4:

Durante uma aula no laboratório de computação, a professora sugeriu que os alunos utilizassem a calculadora que eles preferissem para a resolução da atividade proposta.

Em certo momento da resolução da atividade, Marcos chegou em:

$$x^2 = 5$$

Como de costume, “isolou o x”, “jogando o dois como raiz para o outro lado”.

$$x = \sqrt{5}$$

Não estando contente com o resultado, pegou uma calculadora comum e extraiu a raiz quadrada. Anotou o seguinte resultado:

$$x = 2.2360679775$$

Tendo resolvido a questão, Marcos disse:

- Marcos: *Pronto, esse é o valor de x [mostrou o resultado final].*

Maria, que era muito desconfiada, resolveu colocar o resultado encontrado por Marcos na MusiCALcolorida e elevou ao quadrado. Encontrando outro resultado, diferente de 5, disse:

- Maria: *Aqui, professora [mostrou a tela do computador], o resultado é outro. Se elevar esse número do Marcos ao quadrado, não dá 5.*

Eles ficaram confusos.

- Qual resultado Maria encontrou na MusiCALcolorida?
- O que vocês fariam para os alunos sobre o resultado encontrado?

- Se os mesmos passos que Marcos fez para $x = \sqrt{5}$ fossem feitos para $x = \sqrt{16}$, Maria teria encontrado o que na MusiCALcolorida?
- Existe alguma diferença? Se sim, qual?

Esta atividade propunha uma situação na qual seriam colocadas calculadoras diferentes numa mesma situação-problema. Aqui, o objetivo foi criar uma situação para possibilitar relacionar e/ou comparar as funcionalidades de cada um das calculadoras.

Capítulo 5: DISCUSSÃO E ANÁLISE DE DADOS

A análise dos dados foi realizada a partir da gravação e transcrição dos encontros e das anotações no diário de campo. Após assistir diversas vezes o vídeo e acompanhar a transcrição, elaborou-se uma tabela de redução dos dados, codificando por temas. Excertos da transcrição e da tabela de redução encontram-se nos anexos.

Esta análise não necessariamente seguiu uma ordem cronológica, atendendo ao proposto pelo modelo adotado, o MEA, visto que uma discussão realizada em um encontro anterior também fora retomada nas argumentações e interações entre elas em outros momentos. Cada encontro teve, prospectivamente, um tema central, e por ser um ambiente colaborativo, novos assuntos pertinentes à pesquisa sugeriram e foram analisados em bloco.

Utilizamos um sistema de localização e abreviação para a análise e redução para localizar quando uma determinada fala ocorreu durante os encontros. Por exemplo: a sigla “E1P5L20” representa que a fala apresentada na análise está presente na transcrição do Encontro 1 (E1), na Página 5 (P5) e na Linha 20 (L20).

O sistema de abreviação visou representar a fala de cada uma das participantes utilizando a primeira letra de seus respectivos nomes: P para mim, o pesquisador; F para Francisca; L para Lucia, e V para Viviane.

Para cada tema foram resgatadas as falas das participantes, e posteriormente, uma análise das mesmas. Para uma melhor descrição dos momentos analisados, certas vezes foram colocadas imagens que ajudaram na composição da cena. Os grifos em negrito destacam os pontos centrais dos diálogos.

A tabela a seguir foi elaborada para a redução e organiza os temas centrais que foram discutidos.

Tabela 3: Resumo dos Temas.

Perfil	<ul style="list-style-type: none"> • Nome, Formação e Experiência Profissional; • Preferências pelo Ensino Fundamental I; • Problemas de ordem Financeira; • Abordagens Metodológicas; • Dificuldades na apresentação dos conteúdos.
Número Racional, Porcentagem e Probabilidade.	<ul style="list-style-type: none"> • Propriedades dos Racionais e dos Irracionais; • Apresentação dos Conjuntos Numéricos; • Definições; • Simbologia; • Diferenciação.
Visão delas sobre a MusiCALcalculadora.	<ul style="list-style-type: none"> • Funcionalidade e uso da tecla pi; • Operações com Irracionais; • Galeria Interativa; • Fonte Dinâmica.

Vale trazer novamente que o modelo adotado, o Modelo de Estratégia Argumentativa, permite ao pesquisador realizar uma análise verossímil dentro dos dados obtidos, ao invés de verdade absoluta. Esta interpretação poderá variar de acordo com o olhar de outros pesquisadores que se apropriarem desses dados, ou até mesmo selecionarem novos temas que não foram elencados para esta pesquisa.

Sobre Levantamento do Perfil

Este tema foi necessário para conhecermos melhor as colaboradoras. Nele coletaram-se informações como nome, local de trabalho, rede de ensino, turmas, experiências profissionais e gostos pessoais pela profissão.

- F: **Prazer, meu nome é Francisca. Eu trabalho em duas escolas privadas.** As duas são do Município de São João de Meriti, uma no Novo Rio e a outra em Vilar dos Teles. **Trabalho com sexto e sétimo ano nas duas e com o oitavo** no [NOME DOS COLÉGIOS]

(E1P2L22)

- P: Tem um detalhe, Fran, que não ficou combinado, mas você já acabou até falando aqui só que como não tá registrado, **você também deu aula pro fundamental I, né?** (E1P2L32)

- F: Ah, sim. **Eu sou formada em formação de professores** [formação curso normal]. Dou aula desde os meus 18 anos, hoje eu tenho 31, então já são **13 anos né trabalhando com as séries iniciais.** (E1P3L01)

- L: Eu Sou professora **Lucia.** Professora do [NOME DO COLÉGIO], no momento só estou trabalhando nesta instituição. **Já sou professora há 33 anos, pouquinho né,** e trabalho com **sexto e sétimo ano.** (E1P2L28)

- L: Eu também **desses 33 anos, apenas 12 em matemática.** O restante **foi no fundo I,** né, onde eu também trabalhava com matemática no quarto e quinto ano mais 12 anos. E os anos anteriores **a gente começo lá na alfabetização,** passa pelo primeiro, o ano segundo ano, eu dei aula para todos os anos. Inclusive na educação infantil que eu trabalhei na creche do Anísio né, creche Júlia Abraão Davi lá em Nilópolis onde eu trabalhei alguns longos anos que agora também... Só se eu pegar essa carteira tantos anos de trabalho que a gente vai conciliando uma escola e outra então eu **sempre trabalhei em rede privada.** (E1P3L04)

V: É... beleza. **Eu sou Vivian.** Sou professora desde 2019, **esse ano eu vim para Parati,** então eu dou aulas para turmas **do Ensino Médio de uma escola aqui em Paraty** e dou aula também num **cursinho de pré-vestibular da prefeitura que é inclusive uma parceria com a UERJ,** um projeto de extensão da UERJ e aí a gente tem esse **pré-vestibular comunitário.** **E eu dou aula de matemática, lógico.** (E2P01L32)

P: Maravilha, perfeito. Bom você também começou **fazendo formação, eu sei porque eu te conheço, em Pedagogia, mas você não chegou a terminar.** (E2P02L05)

V: Sim, na verdade, isso, é... **eu fiz pedagogia e não terminei, só que depois eu fiz uma à distância e eu já me formei em pedagogia no ano passado e inclusive eu dou aula no Fundamental** lá tarde, mas aí **eu sou uma professora polivalente, né.** (E2P02L06)

Quando questionei sobre suas experiências profissionais, as professoras, logo de início, não mencionaram que ao lecionar no Ensino Fundamental I já exerciam o magistério antes mesmo de cursar a Licenciatura em Matemática. Analisando esta omissão, levantaram-se três hipóteses prováveis: a primeira hipótese era de que elas tiveram experiências ruins quanto às turmas dos anos iniciais; a segunda hipótese era a existência de inseguranças quanto a formação e a prática profissional neste nível escolar; e a terceira bem provável era relativa à imagem, muitas vezes pejorativa, sobre ser professoras do Ensino Fundamental I.

A primeira hipótese foi descartada, visto que posteriormente, no decorrer do encontro, as três colaboradoras afirmaram gostar do Fundamental I, como destacado nas falas seguintes:

L: Meu amor, eu amava trabalhar com quarto e quinto ano por isso que eu **acho que eu trabalho só até o sétimo porque ainda tem aquele negócio do lúdico que eu amo.** (E1P3L15)

F: **Eles [alunos do 8º ano] fazem, eles fazem, já reclamando, já não tenho o mesmo brilho nos olhos que tem até o sétimo ano.** (E1P3L23)

L: Até o sétimo ano eu faço paródia, Ruan, eu danço, eu canto, eu brinco com os alunos. Mas no oitavo ano em diante, parece que eles não precisam mais do professor, então eu perdi assim um pouco o desejo de lecionar com esses maiores, sabe. (E1P3L25)

Essas falas evidenciaram o gosto destas colaboradoras em lecionar para os anos iniciais. Essa informação foi relevante para a análise, visto que as colaboradoras dizem preferir os anos iniciais por conta da “lúdicode”, das diferentes atividades e das brincadeiras realizadas em sala, mas afirmam que depois do oitavo ano, a matemática fica muito abstrata, dificultando tais práticas.

Interpretando porque as professoras preferem lecionar para os anos iniciais e/ou para os anos iniciais do Ensino Fundamental II, levantaram-se outras duas hipóteses: a primeira hipótese era que a preferência delas lecionaram no Ensino Fundamental I era por trabalharem há mais tempo nestas turmas, fazendo com que elas estivessem mais familiarizadas com as mesmas; já a segunda hipótese era que elas preferiam os conteúdos de matemática a serem ensinados no Ensino Fundamental I.

Interessante observar que essa preferência pelos anos iniciais se contrapôs ao fato de que todas trabalhavam no Ensino Fundamental II. A seguir o motivo financeiro aparece como um forte motivo para suas escolhas:

L: Eu acho que **se eu pudesse eu até voltava lá para o fundo I, se o salário fosse igual**, né. (E1P3L28)
 L: **Financeiramente**, às vezes, a gente é obrigado a aceitar essas outras turmas e encontrar meios de fazer com que eles tenham pelo menos um pouquinho, assim, **de ver matemática não como uma ameaça, mas como algo que eles possam que eles conseguem aprender**. (E1P5L16)

Aqui novamente o motivo de um conteúdo matemático mais complexo se manteve implícito:

V: *Não, dá pra ficar até umas sete e quinze [19:15] ainda dá, Ruan, porque eu preciso sair daqui sete e meia pra poder estar chegando na escola dez para as oito, não tem estresse não.* (E2P08L20)

Olhando por outro ângulo, pode-se levantar a hipótese que a professora gosta de trabalhar com os anos iniciais.

L: Meu amor, **eu amava trabalhar com quarto e quinto ano** por isso que eu acho que **eu trabalho só até o sétimo** porque ainda tem aquele negócio do lúdico que eu amo. (E1P3L15)

F: Eles [alunos do 8º ano] fazem, eles fazem, já reclamando, **já não tenho o mesmo brilho nos olhos que tem até o sétimo ano**. (E1P3L23)

L: Até o sétimo ano eu faço paródia, Ruan, eu danço, eu canto, eu brinco com os alunos. Mas no oitavo ano em diante, parece que eles não precisam mais do professor, então eu perdi assim um pouco o desejo de lecionar com esses maiores, sabe. Eu acho que se eu pudesse eu até voltava lá para o fundo I, se o salário fosse igual, né. (E1P3L25)

Lucia reforça que optava por “fazer paródias, dançar, cantar e brincar”, e que esta proposta didática é mais bem aceita para as turmas de até o sétimo ano; Francisca afirma que também faz escolha dessa proposta didática em sala de aula. No entanto, deixam aberto que seria essa ludicidade e também não exemplificaram. No oitavo ano, os livros didáticos começam a desenvolver o pensamento algébrico, a manipulação de polinômios e a resolução de equações, mas interpretamos que estes conteúdos, segundo elas, não se relacionam com práticas lúdicas ou mais ativas.

O que mais uma vez afirmamos que pode ter origem na dificuldade delas com estes conteúdos, e é provável que não tenham tido experiências durante a formação inicial de como trabalhar estes assuntos de forma lúdica.

No decorrer da conversa, as colaboradoras expõem suas percepções sobre os anos finais do Ensino Fundamental II. Elas destacam dificuldades não somente na compreensão por parte dos alunos, mas, segundo elas, surgem uma mudança nas necessidades e nos anseios dos alunos.

L: Quando chega no oitavo, não eu acho que os alunos já se sentem tão adulto que fica tudo abstrato. E para mim eu gosto da Matemática lúdica, trabalhar com o concreto, trabalhar com cores, ver a interação dos alunos nos jogos. É a matemática para mim é uma matemágica. (E1P3L17)

F: Viu, o que que eu falei. Eu havia falado essa mesma coisa para ele antes da gente iniciar. Que eu trabalho com oitavo, né. Trabalho com atividades lúdicas e aí eles já começam a reclamar. Eles fazem, eles fazem, já reclamando, já não tenho o mesmo brilho nos olhos que tem até o sétimo ano. (E1P3L21)

L: Eu falo até para minha filha eu acho que eu não sou uma boa professora de matemática porque eu não encaro todas as turmas. (E1P5L14)

L: Mas o buraco tá tão grande, sabe? A dificuldade está tão grande, a cada ano vai aumentando mais a dificuldade do aluno eu acho que é por isso que eles não conseguem ter essa percepção. (E1P5L20)

Com essas falas, observa-se que as colaboradoras estavam atribuindo aos alunos o que elas sentem (E1P3L17). Enfatizo que os conteúdos não ficam abstratos somente para os alunos, mas para elas também. Ambas continuam a fortalecer o argumento que metodologicamente gostam de trabalhar com o concreto,

com cores e de ver a interação dos alunos com jogos. Lucia, ao dizer que não encara todas as turmas (*E1P5L14*), ela está trazendo que a matemática piora por ficar abstrata, o que é algo ruim. O que reforça a interpretar que ficou ruim para elas também.

Decorre, então, uma questão que merece pesquisa futura: o porquê da preferência deste nível escolar uma vez que a Licenciatura em Matemática habilita o professor para lecionar do 6º ano do Ensino Fundamental II ao 3º do Ensino Médio. As interações dessas professoras abriram, portanto, um questionamento sobre o alinhamento da formação inicial do licenciando com a sua futura prática docente. Assim é preciso que pesquisas futuras investiguem sobre o papel e os impactos da formação inicial na vida profissional do professor.

Apresentação dos Conjuntos Numéricos

Perguntei como as professoras introduziam os conjuntos numéricos para seus alunos e elas responderam que seguem o livro didático adotado por suas respectivas escolas. Os livros, por sua vez, seguem a organização dos conteúdos recomendada da BNCC. E Lucia então responde:

P: **Vocês veem alguma dificuldade nessa, nessa transição nessa apresentação de conjuntos ou é de boa? Os alunos entendem...** (*E1P3L07*)

L: Não, assim, Ruan, posso falar, Francisca? (*E1P3L08*)

F: Pode. (*E1P3L09*)

L: No **sexto ano**, quando eu começo a falar o nome conjunto eles acham que conjunto é aquele quantitativo, né. Um conjunto você fez ali um **diagrama de Venn**, colocou as bolinhas ali é um conjunto para eles. Até você explicar que aquilo que eles faziam de contagem naturalmente: um, dois, três, quatro forma o conjunto que a gente chama de conjunto dos naturais, apresenta a **letrinha n**, eles querem saber porque que **aquele n tem mais um tracinho**. (*E1P3L10*)

L: Então são muitas muitos questionamentos e eu gosto disso sabe, quando o aluno pergunta quando o aluno quer saber. Isso a gente só vê no sexto ano essas perguntas, o restante no sétimo, por exemplo, parece que eles recebem como se fosse um comprimido, aceitam. Parece aquele ditado “Aceita que dói menos”. (*E1P3L16*)

L: Aí quando você chega no sétimo e apresenta o conjunto dos inteiros, até vai de boa, mesmo sabendo que ali tem a complexidade de saber o que que é um número positivo, número negativo. (*E1P4L21*)

L: Mas quando chega no racional é de arrepiair os cabelos, gente. Mas a gente vai aí. A gente não pode desistir, né. **Vamos que vamos**. (*E1P4L23*)

P: E tu, Fran? (*E1P4L26*)F: Algumas dificuldades que eles têm é de entender quem tá dentro um do outro, né. (*E1P3L27*)

F: **Quem é o maior né, por um está dentro do outro**, o... quando se fala dos Racionais, que eles agora estão inseridos ali naquele meio, né... **Que ele já sempre estão vendendo esses números o tempo todo né**. (*E1P3L28*)

F: **Quando se fala de dinheiro tem várias interpretações**, mas aí quando a gente fala que agora, **na reta numérica**, por exemplo, eles estão incluídos

ali, é entre um número e o outro, **eles ficam um pouco confuso**. E aí a gente precisa, pelo menos eu uso, **bastante coisa concreta para que eles possam ver identificar**. **Mas essa geralmente é a confusão que eles fazem.** (E1P3L30)

L: Aí eu falo isso não tá um dentro do outro, assim então os números o número natural. **Ele pertence a todo esses conjuntos, vocês vão encontrar esse número a vida toda.** Então não adianta fugir a matemática. Você tem que aprender e não pode jogar nada fora, tem que aprender e acrescentar. Cada dia mais um pouquinho. É igual o fermento no bolo: vai crescendo a sua massa cerebral se você for é... vendo que a matemática é só praticar, é praticar. (E1P6L03)

P: Beleza. Bom, e aí né, a gente tá falando aqui de números naturais inteiros, a Lucia puxou s Racionais, né. E se a gente for parar para pensar, só falta os Irracionais. **Só que os Irracionais eles só vem no oitavo ano**, já começa a ver no oitavo. E aí a gente, né, eu não sei como a Lucia, já **disse que já deu aula para todas as turmas, quando a gente entra nos irracionais, facilita complica o que que acontece?** Ou pelo menos que **costuma acontecer**, né. (E1P334)

L: Ruan, **eu acho que fica melhor**. [sobre a apresentação dos números irracionais] Porque eu também trabalhei com oitavo e com o nono. **Só que depois eu vi que não era minha área, entendeu?** Assim, não era minha praia. (E1P4L05)

L: E eles **ainda têm medo só dos Racionais**, o medo maior dos alunos são os Racionais né. Quando chega nos Racionais, **que você vê ali número decimal, número fracionário pronto eles não.... parece que a gente tá falando de outra matemática.** (E1P4L14)

L: **Mas eu acho que quando a gente consegue apresentar todos os conjuntos e eles sabem que ali chegou no momento que ele percebe que temos o conjunto dos naturais, depois encontramos os inteiros e que a cada ano ou, durante o ano aprende-se mais do que um conjunto, eles estão vendo que eles estão evoluindo. Pelo menos deveriam estar evoluindo, né, no conhecimento dos conjuntos.** Aí eu começo a falar até da geografia, que eu nem gosto da Geografia, mas eu começo a falar da geografia. "Gente, pensa no mapa no mapa Mundi. Você vê a quantidade de continentes; Depois temos o que além daqueles continentes? Os países. Aí vou diminuindo, diminuindo até chegar no bairro". (E1P4L17)

Pode-se observar vários tópicos nesta fala da Lucia. Ela se contradiz na fala (E1P4L21). Primeiro argumenta que a apresentação dos inteiros “*vai de boa*”, mas que possui “*complexidade*”. Ela disse que o conjunto dos inteiros possui similaridade com os conjuntos dos naturais, o que permite aos alunos associarem um conjunto com o outro, mesmo ambos possuindo estruturas diferentes. Em sequência ela aponta que a maior dificuldade dos alunos é no conjunto dos racionais, mas não explicita o porquê.

O conjunto dos racionais é apresentado no livro didático que elas usam de forma fragmentada, visto que a parte negativa aparece apenas após a apresentação dos inteiros negativos, que é feita no 7º ano. Sendo assim, a parte positiva do conjunto dos racionais é ensinada no 6º ano, antes do conjunto dos números Inteiros; no 7º ano são apresentados aos alunos os números negativos, e brevemente são retomados os números racionais positivos.

A afirmação de que um conjunto está contido em outro é elencada por Francisca como uma barreira para a aprendizagem, sobretudo quando analisado sob a ótica da reta numérica. No entanto, segundo ela, ao recorrer a uma aplicação mais cotidiana, como na representação do dinheiro, a compreensão se torna mais palpável. Porém, ao utilizar o sistema monetário, não se trabalha o conjunto dos racionais em sua amplitude, visto que utilizamos apenas duas casas decimais (centavos) e as dízimas periódicas não são utilizadas nos cálculos monetários.

Observamos em seus argumentos que o ensino dos conjuntos numéricos se reduziu a uma apresentação, nomeação e separação dos números. A representação simbólica dos mesmos também deixa os alunos em dúvida, visto que eles se sentem preocupados com a representação dos Naturais com um traço duplo no N (\mathbb{N}). E segue o desconforto já que o símbolo dos Inteiros não é a letra inicial de Inteiros e sim um Z(\mathbb{Z}) e tampouco a letra dos Racionais que é um Q em vez de R.

Vale destacar que ao observar as interações delas vemos que o uso da língua portuguesa pode dar a entender que quando um conjunto está “dentro” do outro, dando o sentido de que um tem o tamanho maior que o outro. Sobretudo vale enfatizar que existem diferenças entre a matemática da “rua” e a matemática escolar, no clássico livro “Na Vida Dez, na Escola Zero”.

Conhecendo a MusiCALcolorida

Esta conversa se iniciou com a Francisca afirmando que já conhecia a calculadora. Francisca relatou que já tinha ouvido falar da MusiCALcolorida numa palestra mas sem manipulação da mesma e mostrava algumas atividades que poderiam ser feitas em sala de aula com esta calculadora.

F: Eu acho que essa aqui é a calculadora do curso que eu falei. (E1P7L22)

P: Ah, é... (E1P7L23)

F: Só que assim, eu não me recordo, talvez tenha sido até sua própria orientadora que fez o curso. Foram muitos palestras que eu ouvi, Ruan. (E1P7L26)

F: E aí ela mostrava acho que era Pi, ela mostrou o Pi, a sonoridade do pi, e algumas dízimas periódica, é... com aqueles períodos de computador. (E1P7L28)

F: Resolveu e uma outra assim toda desorganizada sim mas que o som era bem agradável foi essa só, foi só uma sugestão parece na palestra não focou nela. Era só alguns sugestões como a gente estava em pandemia eram sugestões de aplicativos, jogos que a gente podia utilizar. (E1P7L30)

F: Mas eu não lembro como é que usa não. (E1P8L11)

Vale destacar que ela lembrava da “sonoridade do pi”, o que provavelmente foi um dos pontos marcantes da palestra. Em (E1P7L30), a fala dela reforça a ideia de que a calculadora foi apresentada como uma sugestão para as aulas, uma ferramenta para o ensino. Na última fala desse bloco (E1P9L31), porém, ela nos traz que não lembrava como usa a calculadora, o que enfatiza que apenas a visualização não é suficiente para a apropriação dessa calculadora, que deve ser usada como um micromundo.

P: Isso essa calculadora aí mesmo. Já conhecia, Lucia, ou não? (E1P8L03)

L: Não, estou conhecendo hoje. (E1P8L05)

P: Beleza, olha só, então a Fran já tem uma ideia. A gente já entrou no site, né. Já baixamos e abrimos aí a calculadora. Já que ela não conhece, vamos pedir para ela fazer a divisão, assim, por exemplo: (E1P8L07)

F: Mas eu não lembro como é que usa não. (E1P8L11)

P: Tá, então vamos lá. Bota aí, faz aí a divisão... Tá vendo desse lado, assim, superior esquerdo? Ela é uma calculadora normal, né? Ela tem ali os números, algarismos, os sinais de operação e algumas coisinhas, como pi, raiz né, potência. Faz a conta para mim Lucia de $10 / 2$. (E1P8L13)

L: Ah... tá, o resultado vai lá pra baixo. É isso. (E1P8L18)

P: Fez aí, Lucia? (E1P8L19)

L: Eu tô tentando enxergar ainda o símbolo da divisão. (E1P8L20)

P: É uma barrinha. Tá do lado do 9. (E1P8L21)

L: Achei. (E1P8L22)

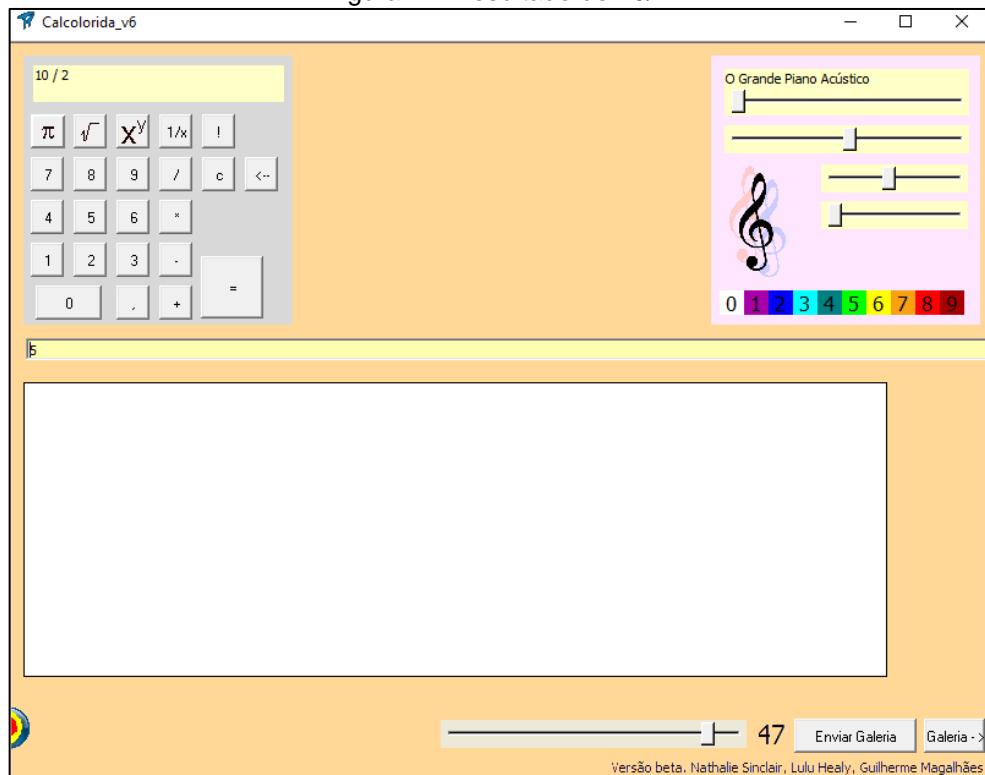
P: Isso. (E1P8L23)

L: Ah, e o que que tem? (E1P8L24)

P: Deu o quê? Que aconteceu? (E1P8L25)

L: Deu 5, né, que é o resultado. (E1P8L26)
 P: Isso, mais alguma coisa? (E1P8L26)
 L: Não sei. Aconteceu mais alguma coisa? (E1P8L28)
 P: E aí, Lucia, nada né? Apareceu o 5 como resposta. (E1P8L33)
 L: Isso. (E1P8L34)

Figura 21: Resultado de 10/2.



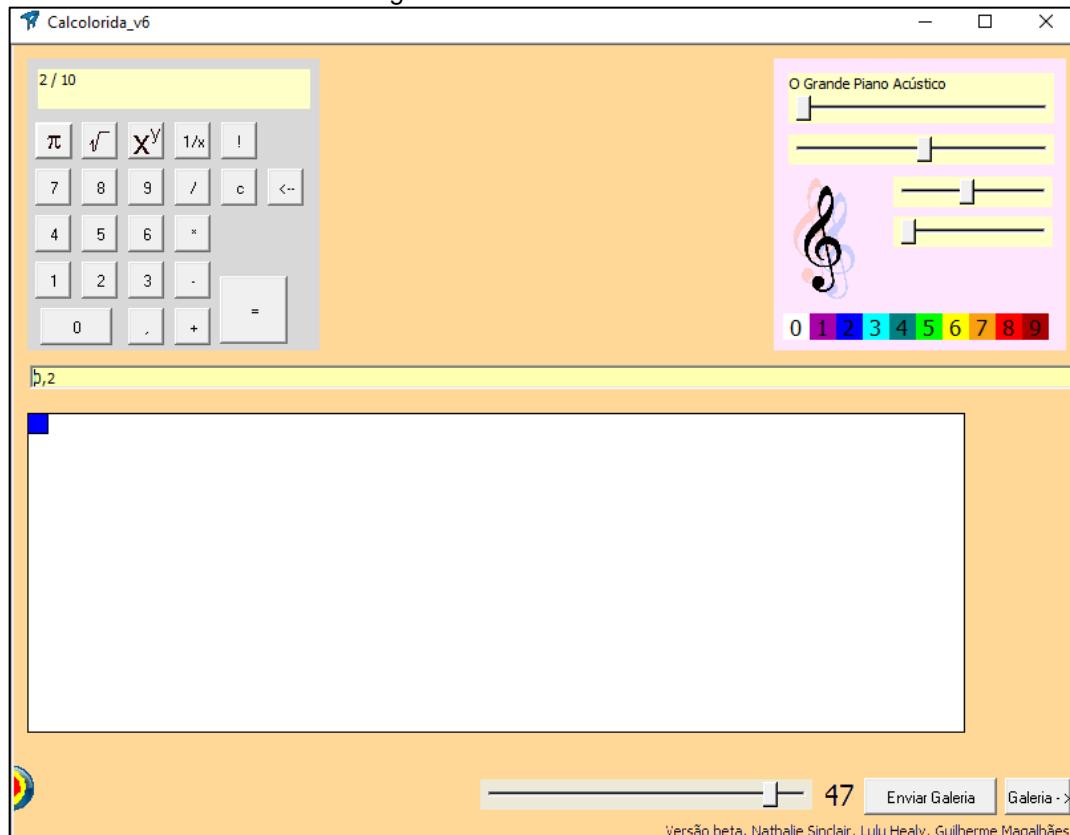
Fonte: Elaborada pelo autor, 2022.

A conversa acima entre o pesquisador e Lucia foi trazida para mostrar que a representação numérica é a mais comum, se não a única utilizada quando se trabalha com os números racionais. Neste sentido, ela não imaginava que a MusiCALcolorida poderia representar o resultado da divisão por meio de imagem e sons.

P: Agora vou pedir para você fazer a conta. Aí você pode apertar Esc se quiser e bota 5 dividido para 10. (E1P9L01)
 L: Ok. Apareceu um quadradinho verde lá embaixo e mais o 0,5. (E1P9L03)
 P: Isso, beleza então ele deu a resposta que você imaginava, certo? Mas apareceu um quadradinho ali que até então a gente não sabe muito bem o que que é isso, né? (E1P9L06)
 L: É... (E1P9L07)
 P: Vamos fazer uma outra conta então? (E1P9L08)
 L: Vamos... (E1P9L09)
 P: Faz um 2 dividido para 9 para gente. Tu também, Fran, que é bom que tu se lembra como é que é. (E1P9L10)
 L: Gente muito legal isso. Olha! (E1P9L12)
 F: Tudo azul. (E1P9L13)
 L: Tudo azul. (E1P9L14)
 P: Tudo azul. Porque que isso pode ter ficado azul de repente? alguém tem alguma sugestão? (E1P9L15)

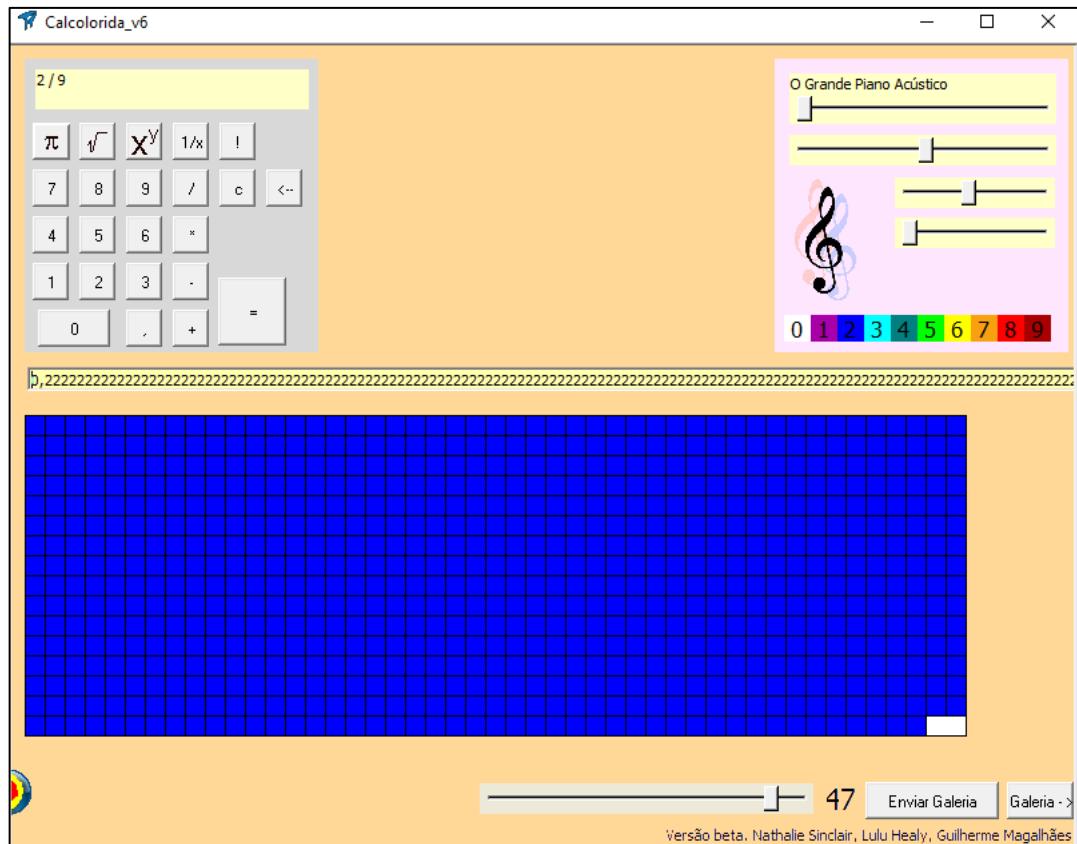
F: Então, na tabela o dois ali é azul. Como são infinitos 2.... (E1P9L17)
 P: Faz sentido. Você tá olhando para a tabela ali do lado né? Ali no canto direito, onde a gente tem uma clavinha de sol né? E logo embaixo a gente tem dos algarismos de 0 a 9 né? e cada uma corzinha. Como nosso resultado da conta foi 0,2222, né, e o 2 é azul ficou azul certo? (E1P9L19)

Figura 22: Resultado de 2/10.



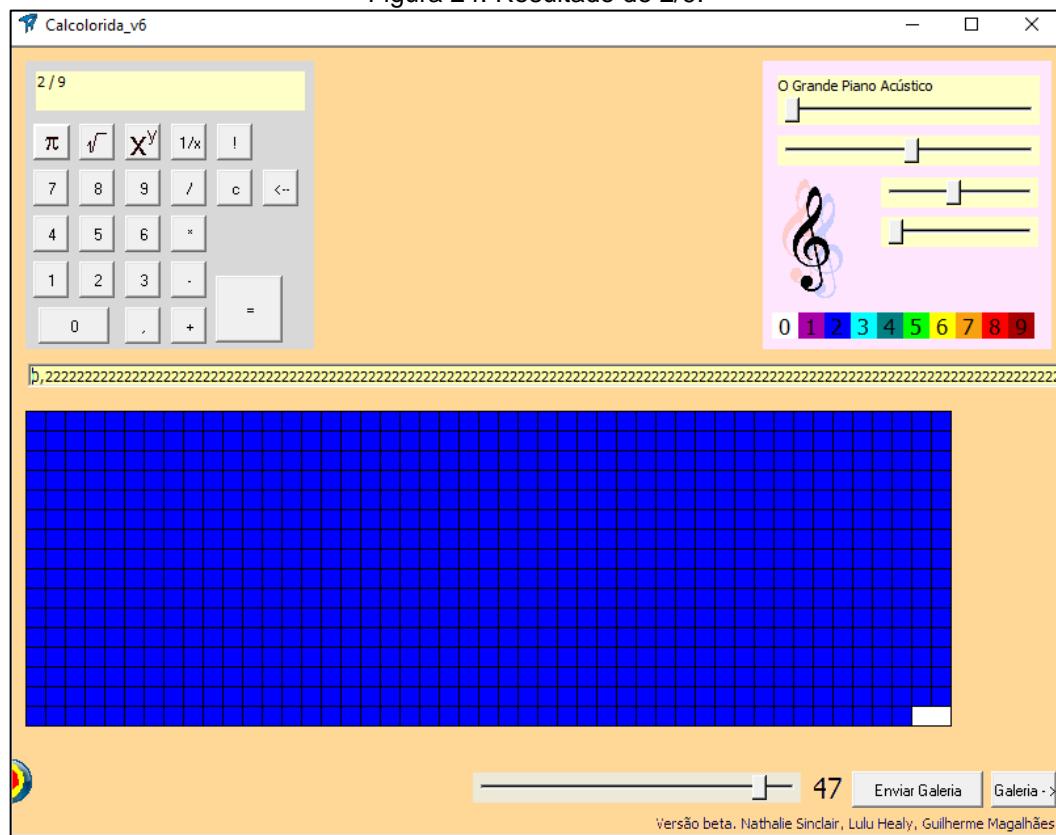
Fonte: Elaborada pelo autor, 2022.

Figura 23: Resultado de 2/9.



Fonte: Elaborada pelo autor, 2022.

Figura 24: Resultado de 2/9.

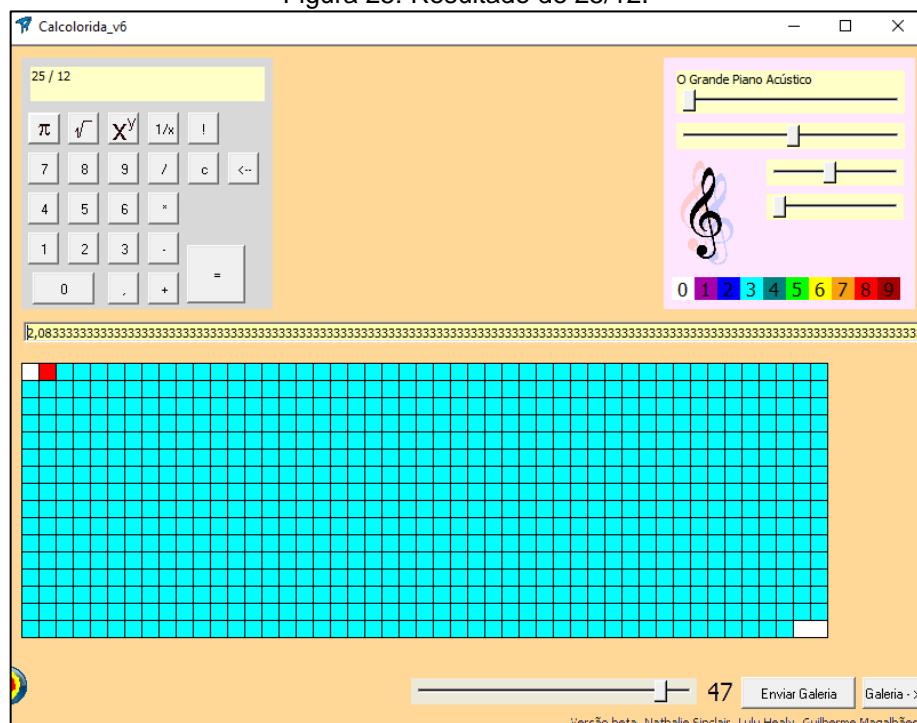


Fonte: Elaborada pelo autor, 2022.

Neste momento as colaboradoras encontram duas representações: a numérica e a imagética. A Lucia se mostra surpresa com o resultado obtido (E1P9L12) e exclama achar muito legal. A Francisca não tem a mesma surpresa, visto que já havia visto a MusiCALcolorida. Ao serem questionadas pelo pesquisador, elas iniciam a associação entre a representação das cores e os algarismos do resultado da divisão.

P: Vamos tentar uma outra conta? (E1P9L22)
 F: Sim... (E1P9L23)
 P: Vamos lá... Sei lá 25 dividido para 12. (E1P9L24)
 L: Muito interessante. Estou gostando muito disso. (E1P9L25)
 P: E agora? (E1P9L26)
 L: Ficou um quadradinho branco, um quadradinho vermelho e um monte de quadradinho verde claro, azul claro, não sei. Eu acho que eu sou daltônica. (E1P9L27)
 P: Então, segue aquele mesmo padrão lá que a Fran falou? (E1P9L29)
 F: Na tabela o vermelho é o 8 e o azul claro é o 3. (E1P9L30)
 P: Beleza. Agora, Lucia, você conhece o símbolo da clave, de sol né?
 Que aquele szinho musical. Acho que foi onde a Fran tocou sem querer naquela hora. Clica nele para a gente fazendo um favor. (E1P9L31)
 [Música] (E1P9L35)
 F: Foi mal, apertei um botão errado aqui. (E1P10L01)
 L: Que lindo! (E1P10L02)
 P: Qual foi mais ou menos assim o som que ele fez? Ele tocou algumas notas, não foi? (E1P10L03)
 L: Sim. (E1P10L04)
 P: Você conseguiu enxergar algum padrão, alguma coisa? ou não? (E1P10L05)
 L: Só que ele fez um som ele tá tocando a mesma nota porque eu mesmo número né? O mesmo algarismo 3 ali né. (E1P10L07)

Figura 25: Resultado de 25/12.



Fonte: Elaborada pelo autor, 2022.

Nesse ponto Lucia já está mais inteirada com a MusiCALcolorida e expressões como “que lindo” e “muito interessante, estou gostando muito disso” mostram a surpresa e o prazer com os resultados obtidos na calculadora. Ainda não foi abordada a representação sonora e, a princípio, Lucia estava mais animada com as cores do que Francisca. As sensações de Lucia corroboram com a hipótese que ela queria uma explicação diferente das que teve até hoje

Razão e Probabilidade

Neste tema a proposta inicial era uma discussão sobre razão e proporcionalidade, mas foi onde surgiu a probabilidade. Como de costume a discussão foi iniciada com a leitura de uma atividade programada que trazia, em síntese, a posição de três alunos sobre o enunciado. Logo de início, a colaboradora não sabia como reagir, vide comentários a seguir.

F: Não concordo com alguns [alunos]. Mas como assim comentaria? (E2P03L30)

P: Olha só, é... os três ali falaram, certo? A Maria começa propondo que os alunos passaram porque estudaram. E o Marcos vai trazer uma representação numérica da coisa que está acontecendo e depois o Marcos chega e dá uma contra resposta. Ele vai dizer que a resposta da Maria está certa, mas a simplificação, segundo ele, está equivocada. Então a ideia vocês entenderam? Se a gente tem uma situação dessas, como que vocês agiriam? Quem começa? (E2P03L31)

V: Tá, deixa eu falar. É... comenta a fala da Maria também, falando que os alunos foram aprovados...? (E2P04L04)

Cabe observar que o primeiro encontro foi dedicado ao levantamento de perfil e apresentação da MusiCALcolorida, mas neste encontro era importante que comentassem as respostas de alunos na atividade 2, e esta tarefa não tinha uma resposta única, tipo certo errado ou um exercício explicitamente para ser resolvido. Note que Francisca não sabia como agir num caso assim. A Viviane se vê numa sensação parecida e pergunta sobre quais falas teriam que ser comentadas (E2P04L04). Tal posicionamento era esperado, visto que em geral nós professores estamos acostumados com o tom dos livros didáticos onde temos apenas que dar uma resposta única e direta.

V: Tá, então... a pergunta é a razão entre o número de aprovados e o total da turma. Ela brinca e fala que a razão foi porque eles estudaram. (E2P04L07)

V: Eu entendi que ela falou que a razão seria o motivo, mas aí sendo questão de interpretação de texto. A razão entre uma coisa e outra não é necessariamente um motivo que aquilo aconteceu, então pra mim ela já errou na interpretação. Tipo, qual foi a razão deles terem sido aprovados? Aí a razão teria sido essa. É só uma coisa que eu pontuaria o aluno quando falasse assim, eu tentaria pontuar ele quanto à interpretação. Porque quando falou entre não é a razão do porque aconteceu. (E2P04L08)

V: Aí quando a gente ensina razão, a gente fala razão é a divisão, né? É uma coisa sobre a outra. Foi assim que eu aprendi sempre e se você for pegar os livros é isso que ele fala: razão é o quociente entre, sei lá, um número e outro. Né? Então remete à ideia de fração, porque ela vem representar [uma razão]. (E2P04L15)

V: Aí ele diz que se é uma razão tem que simplificar e aí vem pro 6/7. Né? 6 sobre 7. Mas aí é uma experiência minha, da pós da UERJ, que a gente estudava probabilidade, a probabilidade disso acontecer, tipo, de sair um

número par num dado, né, num dado de seis faces, a probabilidade é de 3 em 6, né? E a gente “Ah, é um meio” e ela “Não. É de três em seis”. Embora que a gente entenda que é de 3 em 6, que são seis opções e, dessas seis opções, somente 3 me interessam. Então se a gente colocasse 1/2 ou 0,5 ou 50% ela não considerava. Então eu já trago minha experiência pessoal. E a questão do outro por 3/4 não, 3/7, né? (E2P04L19)

Viviane trás percebe um sentido cotidiano da palavra “motivo” para o contexto escolar. Ela interpreta que o aluno usa a palavra motivo no sentido de razão, não sendo também este no sentido matemático, estando mais para a explicação do porquê das reprovações.

Ainda nestas falas, Viviane relata que quando ensina razão, se remete a divisão. Ela termina dizendo que é o quociente entre um número e outro, mas não explicita que números podem ser estes, naturais, inteiros, racionais, irracionais ou mesmo reais. No entanto, por definição de números racionais, o numerador e o denominador devem ser números inteiros, com denominador diferente de zero. Isto é, nem toda divisão entre dois números forma um número racional.

V: Isso, eu acho que eu representaria uma representação mais geométrica para ele entender o que que estava acontecendo, né? Eu acho que é isso. Se eu tivesse nessa situação eu agiria assim. (E2P04L29)

P: Beleza, só uma pergunta desse caso dessa experiência aí que você trouxe, que a probabilidade seria 3/6, se você pegasse a prova de um aluno que tivesse 1/2 lá, que que você faria? (E2P04L29)

V: Então, eu como professora, depende...num sei... (E2P04L35)

F: Eu daria certo. (E2P04L36)

V: Não sei, eu ia dar um meio certo, sabe? Porque é de três em seis. Se ele escrevesse pra mim “de três em seis”... porque não é a mesma coisa. Eu entendo que você simplifica, a gente sempre quer simplificar tudo, mas eu entendo que conceitualmente não é a mesma coisa, três em seis e um em dois. Embora as chances são de 50% no final das contas. Aí depende, eu estou a onde? No ensino Médio, sabe? Eu estou no[Ensino] Fundamental II, No I? (E2P04L37)

F: Então, depende... eu daria certo. Independente. Né... eu daria certo. Independente do meu aluno, porque está certo. (E2P05L05)

V: Meio, embora 3/6 seja a resposta mais correta, meio também é uma resposta que também está correta. Depende de como eu coloquei a minha questão, por exemplo, já tive casos nesse ano, trabalhando com alunos com probabilidade, no sexto ano, e aí eu fazia essa mesma pergunta. Só que tinha aluno que ainda estava fazendo a quantidade certinha, são 3 chances em 6. Já tinha outros alunos que ele já estava pensando na probabilidade e já estava simplificando pra achar a porcentagem. Então ele já conseguia me responder, ele era tão rápido que já me respondia “na lata” meio ou 50%. Desesperado, 6º ano. Aí eu falava: “não, eu quero a quantidade, coloca a quantidade pra mim. Quando eu pedir a porcentagem aí você coloca a porcentagem”. Então meio que eu dava uma trava nele, não fazia ele não escrever, coloca as duas pra eu não te dar zero. Né? Mas se ele só colocasse a resposta ½ eu daria certo também. (E2P05L06)

V: Mas eu entendi, mas como eu estava ali na sala de aula eu entendi o processo dele. Que ele entendeu muito rápido passar de uma fração pra

representação de porcentagem **e até entender que algumas frações são porcentagens muito notórias**, porque ainda tem isso, **alguns veem “de cara” que meio é 50%, 1/4 é 25, 3/4 é 75%**. Tem uns que veem com muita facilidade, tem outros que demoram mais. Entendeu? (E2P05L18).

F: Então, a mesma coisa que a Vivian falou. Eu pontuaria, no caso, explicaria que na língua portuguesa a razão tem esse sentido de motivo, mas que na matemática algumas palavras elas tem outros significados e trabalharia ali a razão como a divisão e tal, como a gente trabalha em sala de aula mesmo.

Observando as diferentes representações da MusiCALcolorida, neste exemplo citado pelas colaboradoras, as representações seriam as mesmas, tanto nos algarismos que compõem a dízima, quanto as cores das imagens, e também os sons. Neste sentido, a musiCALcolorida não diferencia $1/2$ e $3/6$.

V: Você quer o $24/28$? (E2P06L07)

F: Vou jogar a da Maria. Deu o mesmo resultado. (E2P06L21)

F: Os mesmos números decimais e o mesmo padrão de cores. (E2P06L23)

F: Ainda não. Aí eu colocaria o do Marcos para fazer a comparação e aí não dá o mesmo. (E2P06L23)

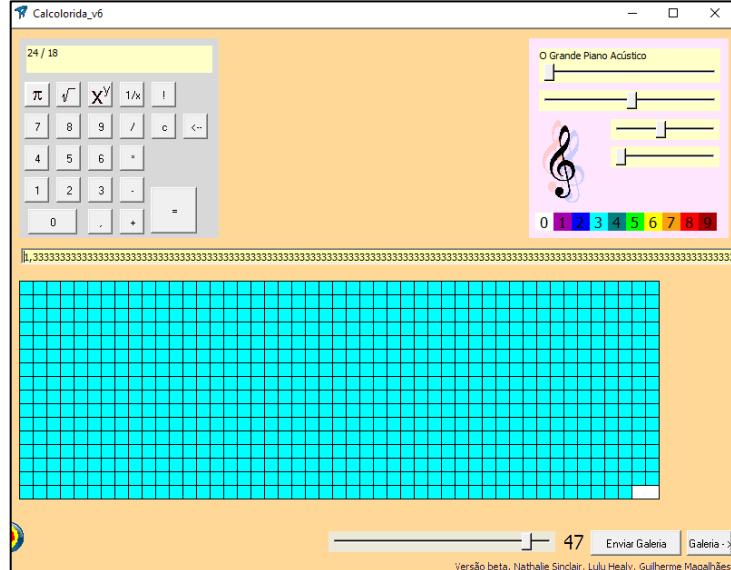
V: É, o desenho, além do resultado numérico o desenho fica diferente, as cores, tudo. E as notas lá também, né? (E2P06L29)

V: Eu acho que visualmente o Marcos entenderia que não é o mesmo resultado, né? Não dá pra simplificar o $24/28$ e chegar no $3/7$ porque teria que ser o mesmo desenho. (E2P07L01)

F: A calculadora por si só, assim, uma calculadora simples, já traria a resposta igual, no visor, então já teria isso como argumento. Só que a Calculadora colorida, ainda trás a parte de cores, visual, o padrão do desenho, muda. Então assim, mesmo que a gente não vá conferir número por número ali, a gente já tem o impacto da cor que mudou. (E2P07L16)

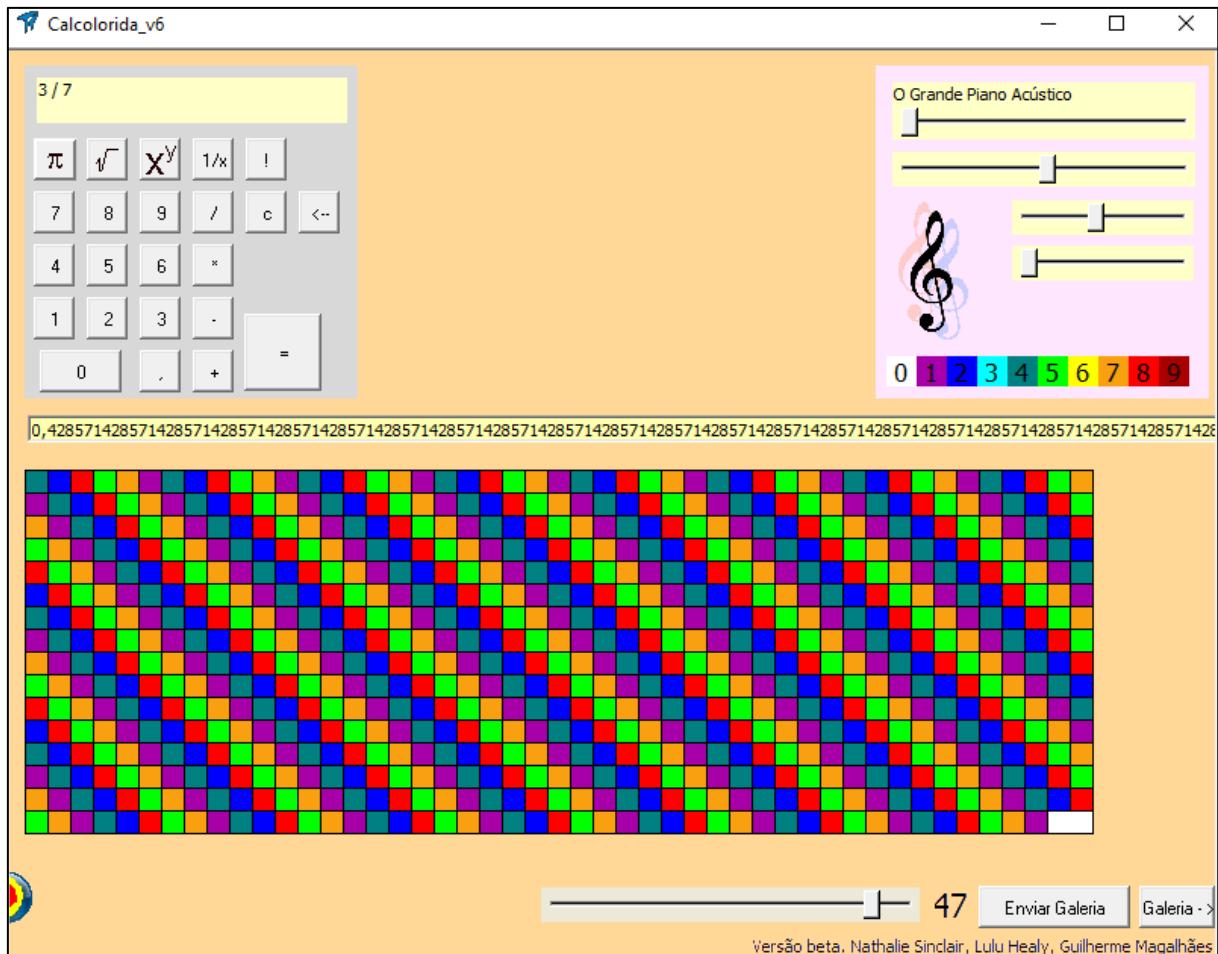
V: A mesma coisa, também acho isso. (E2P07L22)

Figura 26: Resultado de $24/18$.



Fonte: Elaborada pelo autor, 2022.

Figura 27: Resultado de $3/7$.



Fonte: Elaborada pelo autor, 2022.

Na fala da Viviane ela apresenta uma potencialidade da MusiCALcolorida que faria com que o aluno Marcos percebesse a diferença entre as simplificações, reforçando que a representação imagética pode ser uma prótese mediadora da percepção de dízimas. Lembrando que utilizar o quadro com cores permite uma comparação imediata entre resultados.

Irracionalidade do pi

A atividade sobre a irrationalidade de π traz uma situação didaticamente similar, onde alunos comentam certo questionamento e as professoras deviam comentar as respostas dos alunos. Um dos alunos lembra de uma atividade em que encontravam o valor de π dividindo o comprimento da circunferência pelo diâmetro. Como este valor de π era encontrado a partir de uma divisão explicitada por fração, para os alunos, havia o π vem da razão e, portanto, seria um número racional. A transcrição a seguir traz o contexto das interações entre as colaboradoras e o pesquisador. Este, por sua vez, sempre fazendo o papel do provocador,

incentivando a conversa, questionando buscando deixar livre e ao mesmo tempo direcionando para o tema da tarefa. Observe que o início de sua fala tem um “beleza”, “perfeito”, ou algo incentivador.

P: **Beleza.** Então, se vocês fossem essa professora, o que vocês falariam? Qual posição vocês tomariam? E aí temos duas possibilidades: vocês começam a falar agora ou a gente abrir a MusiCALcolorida e tentar jogar aquelas divisões pra ver se tem alguma coisa lá que nos dê uma ideia. **O que vocês preferem fazer?** (E3P4L02)

F: Ir pra calculadora. (E3P4L06)

L: Ir pra calculadora. (E3P4L07)

Cabe observar que como a MusiCALColorida foi baixada gratuitamente e as professoras podiam explorar a mesma em casa, elas pareciam mais familiarizadas com a calculadora e optaram em usá-la para buscar formas de esclarecer as dúvidas e diferenciar os números racionais dos irracionais.

P: **Beleza**, então vamos lá. Você tem aí a imagem e a calculadora. **Você querem testar algumas dessas alternativas?** (E3P4L08)

F: Ah, pode começar do início, não? De pouquinho em pouquinho. (E3P4L10)

P: Então vamos lá na A. (E3P4L11)

L: Fala aí pra mim, Ruan, **o primeiro número.** (E3P4L12)

P: Ó... 13 dividido para 23. Olhando para isso é um número racional... irracional... (E3P4L13)

[Silêncio enquanto são feitas manipulações com a calculadora] (E3P4L14)

F: **Vamos lá... 13 dividido por 23.** (E3P4L15)

L: **Ele é irracional.** (E3P4L16)

F: **Parece que sim.** (E3P4L17)

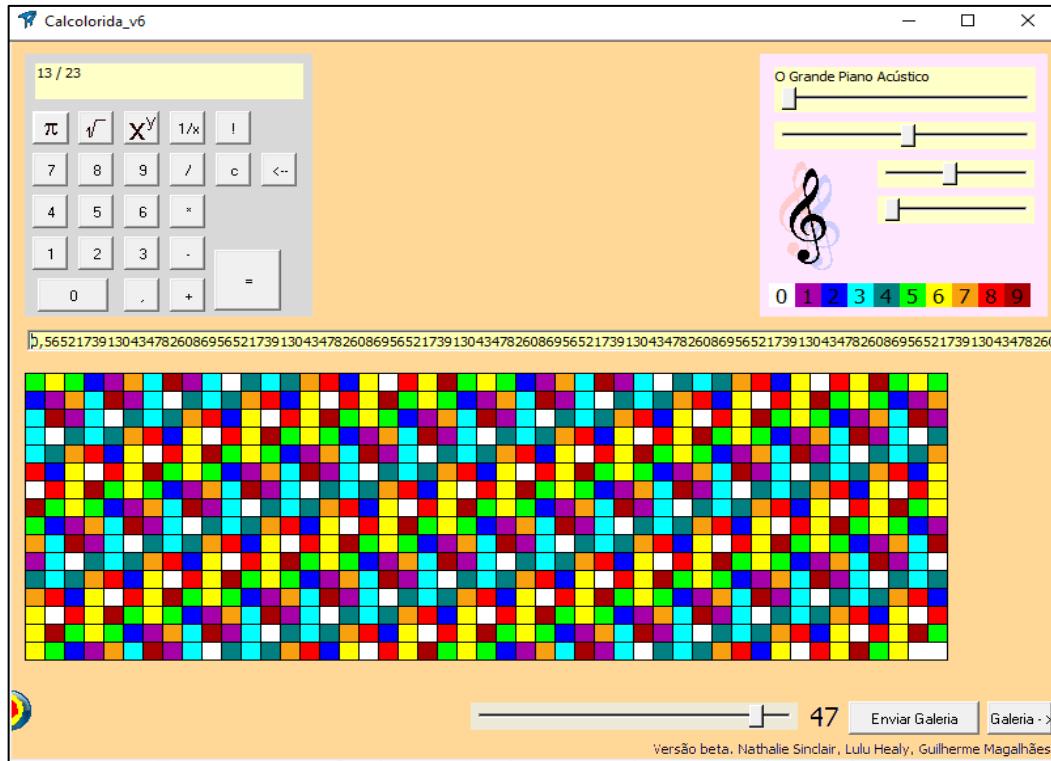
P: **O 13 dividido por 23?** (E3P4L18)

L: Professor, está sem voz. (E3P4L19)

P: Ah, **valeu, valeu.** É... o 13 sobre 23. (E3P4L20)

L: **Professor, você pode me explicar aí o que é um número irracional?** [brinca fazendo um sinal de não com o dedo]. (E3P4L21)

Figura 28: 13 dividido por 23, com 47 casas.



Fonte: Elaborada pelo Autor, 2022.

Iniciando os testes (E3P4L07), de “pouquinho em pouquinho” (E3P4L010), ambas olharam para o resultado encontrado na calculadora e afirmaram que é um número irracional (E3P4L17 e E3P4L18), Francisca ainda está relutante, enquanto Lucia garante que o resultado é um número é irracional. No entanto, segundos depois, mesmo depois de ter afirmado que ele o resultado é irracional (E3P4L16) Lucia revela que tem dúvida e pergunta o que é um número irracional (E3P4L21).

Uma interpretação que decorre observando o sinal com a mão que ela faz ao pedir uma explicação do que é um número irracional é que na verdade ela quer uma explicação diferente daquela que ela teve a vida inteira; uma explicação que a ajudasse, de fato, entender a diferença entre um número irracional e um número racional.

Como o interesse era levantar os argumentos das professoras, resolvi não responder à pergunta diretamente para não influenciar nas respostas. Reli uma das argumentações trazidas no enunciado do problema motivador da discussão. Neste ponto retomamos a discussão sobre o experimento onde usa-se uma bolinha de isopor, mede-se o tamanho da circunferência e seu diâmetro e calcula-se o resultado, encontrando o número π (E3P4L25).

P: Vamos ver aqui... É... a argumentação que o primeiro, o Marcos traz... (E3P4L23)

L: Que era só dividir. (E3P4L24)

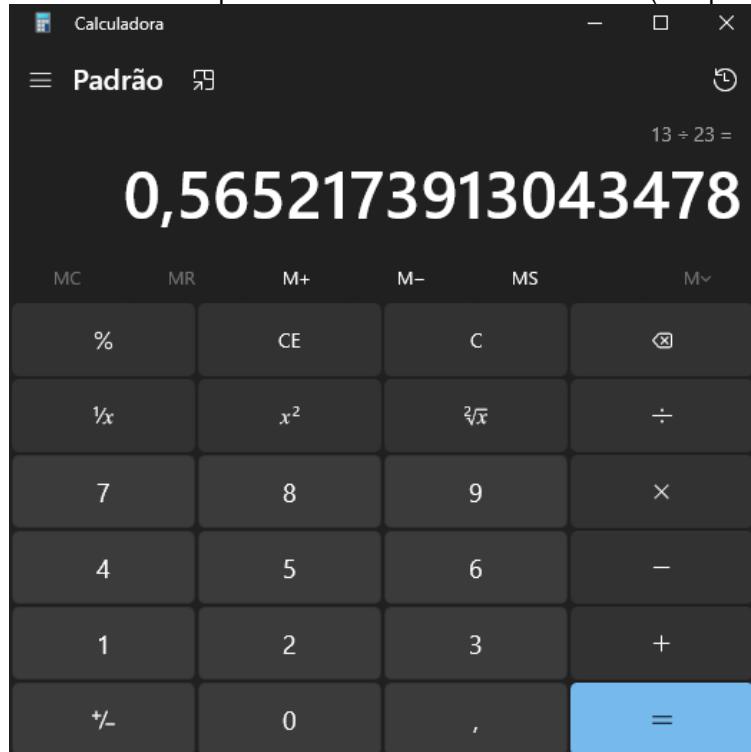
P: Que o Mateus, perdão. Eu não sei se vocês já fizeram essa atividade alguma vez ou pelo menos vocês já ouviram falar, se vocês pegarem uma bolinha de isopor e aí você mede o diâmetro... o tamanho da circunferência com uma fitinha aí você vai lá e divide pelo diâmetro e aí você encontra ali, mais ou menos, o valor do pi. Né? Ele vai trazer isso pra gente. E ele vai afirmar que se o número é irracional ele também pode ser escrito como uma... como uma... uma fração. Certo? (E3P4L25)

F: Uhum. (E3P5L01)

P: E aí a gente dando aula como a gente aborda essa situação? Vocês fizeram qual continha aí primeiro? (E3P5L02)

L: 13 dividido por 23. (E3P5L04)

Figura 29: 13 dividido por 13 numa calculadora tradicional (computador).



Fonte: Elaborada pelo Autor, 2022.

Somente depois que ambas manipularam a MusiCALcolorida e se apropriaram dos períodos das dízimas representadas na tela é que elas pareceram compreender a distinção entre racional e irracional e modificar a resposta dada anteriormente. Dado que as calculadoras comuns possuem, em geral, apenas 8 casas decimais enquanto na MusiCALcolorida temos a oportunidade de observar o resultado com mais casas decimais. As falas a seguir trazem como ocorreu a discussão.

P: Aí vocês encontraram...? (E3P5L05)

L: 0,5652 e um monte de números. (E3P5L06)

F: Mas ela é uma dízima periódica. (E3P5L09)

P: Tem período? (E3P5L10)

F: **Longa. Longa pra caramba, mas ela é.** Porque chega em um momento que ela começa a repetir. (E3P5L11)
 P: É mesmo? (E3P5L13)
 F: É... ó... Tem um momento que repete o 5 e o 6. (E3P5L14)
 L: **Depois do 69, né?** (E3P5L15)
 F: **Começa lá “56521739” tudo de novo.** (E3P5L16)
 L: **Depois do 69, verdade.** (E3P5L18)

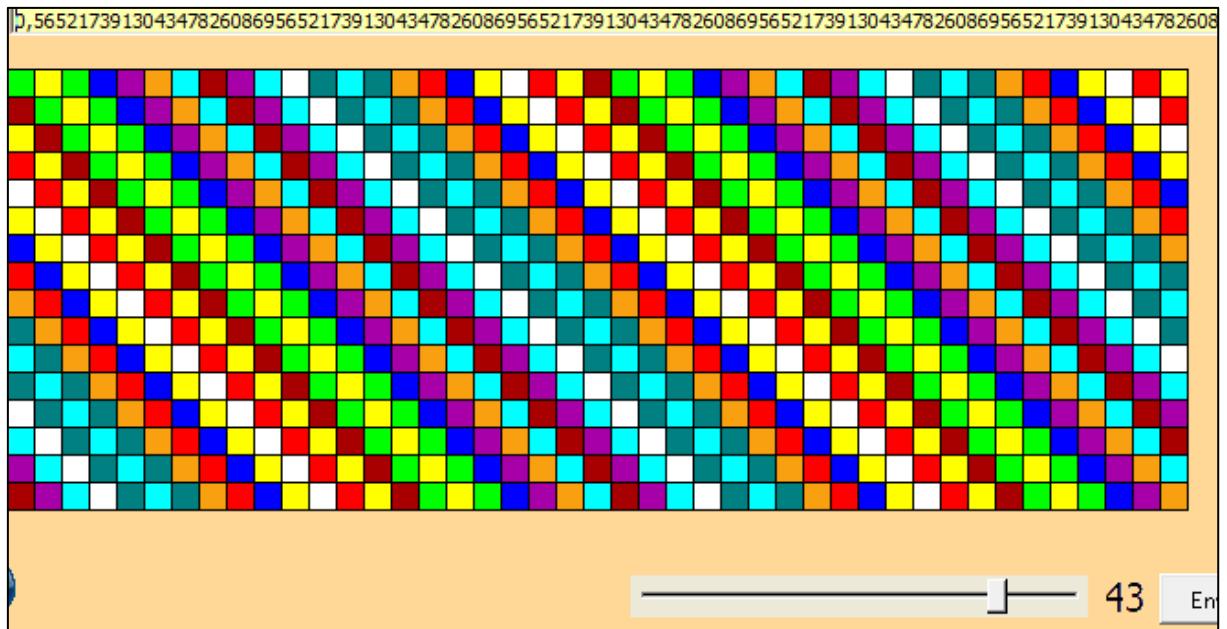
O meu papel aqui foi o de orientar que olhassem com mais atenção para o resultado encontrado, e elas verificam este resultado, agora com mais casas decimais na tela, (E3P5L06). Neste ponto, observam que tem “0,5652 e um monte de números.” percebendo que a resposta que inicialmente haviam dito que era um número racional não é mais, pois “Mas ela é uma dízima periódica” (E3P5L09). Ao ser questionada sobre o período responde: “Longa. Longa pra caramba, mas ela é, porque chega em um momento que ela começa a repetir.” (E3P5L11). Lucia diz “É... ó... Tem um momento que repete o 5 e o 6.” (E3P5L14) e a outra completa “Depois do 69, né?” (E3P5L15). Em sinal de confirmação a primeira “Começa lá “56521739” tudo de novo. (E3P5L16).

Além da tabela numérica, as professoras utilizaram a representação imagética, mexendo na mesma e colocando uma outra forma de ver a dízima. Argumentando, agora, sobre o padrão da imagem e não mais dos símbolos numéricos.

P: Agora **como é que você encontrou essa dízima**, Fran? (E3P5L19)
 F: Ah, **eu fui vendo se tinha algum padrão lá no resultado.** (E3P5L20)
 P: Nos números que aparecem? (E3P5L21)
 F: **Nos números que aparecem. Quando eu também fui mexendo na barra eu senti que foi ficando uma padronagem bem legal.** (E3P5L22)
 P: **Beleza, valeu.** Lucia, você conseguiu encontrar esse padrão? (E3P5L23)
 L: **Sim, quando eu coloquei lá no 43.** (E3P5L27)

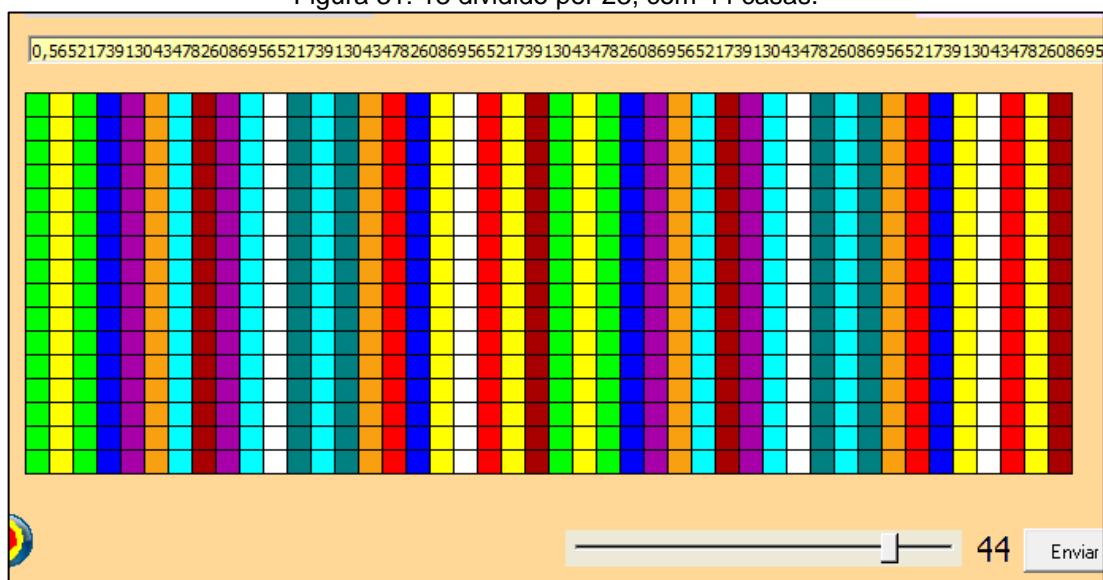
A seguir apresento como ficaram os símbolos numéricos e as respectivas imagens, representados pelas figuras a seguir.

Figura 30: 13 dividido por 23, com 43 casas.



Fonte: Elaborada pelo Autor, 2022.

Figura 31: 13 dividido por 23, com 44 casas.



Fonte: Elaborada pelo Autor, 2022.

Ambas observaram que se tratava de um ciclo mais longo para a dízima. É utilizado o termo “vendo” (*E3P5L20*). A palavra “vendo” em outro contexto poderia ser compreendida de como sinônimo de “entendendo”, mas como a *MusiCALcolorida* possui o quadro da representação imagética a palavra vendo foi utilizada no sentido literal.

L: Sim, quando **eu coloquei lá no 43**(E3P5L27).

L: Aquela lá de baixo. Aí eu coloquei e consegui enxergar o padrão.
(E3P6L02)

Quando a Francisca diz que encontrou uma “padronagem bem legal” (E3P5L22), ela evidencia o uso das duas representações da MusiCALcolorida e do prazer de utilizar este aplicativo. Seguida por Lucia que valoriza as duas representações, simbólica e imagética, dizendo que a ajudaram a encontrar o ciclo da dízima.

Para Lucia, o padrão das cores foi muito importante, visto que a percepção de um padrão nas cores a incentivou a buscar o período nos símbolos numéricos.

P: Ah.. é mesmo. Ficou um negócio parecendo **um monte de escadinha**, foi alguma coisa assim? (E3P6L03)
 L: Isso. (E3P6L05)
 F: **E no 44 fica melhor ainda. Porque são 22 casas.** [Fran sorri como se tivesse descoberto alguma novidade]. (E3P6L06)
 L: Tá, **vou ver** no 44 então. (E3P6L07)
 F: No 44 fica reto. **Fica linear.** (E3P6L08)
 P: E aí, **esse linear, você fecharia então esse ciclo das dízimas?** (E3P6L10)
 P: **Isso, você colocou em qual número?** (E3P6L13)
 L: **44.** (E3P6L14)

Neste ponto há uma diferença quanto ao número a colocar na barra. Enquanto uma prefere que fique no número 43 e forme uma “escadinha” (E3P6L03), a outra percebe que “E no 44 fica melhor ainda. Porque são 22 casas. [Fran sorri como se tivesse descoberto alguma novidade].” (E3P6L06) . A outra colaboradora vai verificar esta nova proposta de organização “L: Tá, vou ver no 44 então.” (E3P6L07)

F: **No 44 fica reto. Fica linear.** (E3P6L08)
 P: **44. Tem outro número que dá certo também?** (E3P6L15)
 L: **Provavelmente o 22, né?** (E3P6L16)
 P: Ah, é? **Por quê?** (E3P6L17)
 F: **Porque está indo de 22 em 22 casas, o período.** (E3P6L18)

Nesta discussão observamos que cada uma teve sua maneira de se apropriar da MusiCALcolorida. O que reforça que o conhecimento é do âmbito social, mas com grande parcela do individual.

Este recurso de poder “organizar” o quadro imagético foi essencial para elas, pois uma via melhor em um quadro e a outra via melhor em outro quadro. Nessa exploração afirmaram que “No 44 fica reto. Fica linear” (E3P6L08). Para continuar disparando a conversa e no intuito de incentivar novas buscas perguntei “44. Tem outro número que dá certo também?” (E3P6L15), de imediato é respondido que sim, “Provavelmente o 22, né?” (E3P6L16). Continuei instigando perguntando o porquê “Ah, é? Por quê?” (E3P6L17) e Lucia respondeu “Porque está indo de 22 em 22

casas, o período." (E3P6L18) o que ratifica a concepção da relação entre o número de casas decimais e o valor escolhido na barra da calculadora.

Potencialidades e aperfeiçoamentos na Calculadora

Buscando potencialidades e possibilidades do uso da MusiCALcolorida que eventualmente não foram ditas durante a realização das atividades perguntei diretamente que modificações trariam, na opinião delas, aperfeiçoamentos na calculadora.

P: Pensando em todos os encontros que a gente teve, **eu queria que vocês comentassem um pouquinho sobre a calculadora. Não só que seja bom ou que seja ruim, mas de repente é bom nisso ou é ruim nisso.** Só para a gente ter um fechamento geral. E aí, quem quer começar? (E4P16L29)

L: Pode começar, Fran. (E4P16L32)

F: Ah, então **eu achei muito legal as discussões que tiveram nos encontros.** A gente trabalhou vários conteúdos. Não ficou preso, assim por exemplo, só número decimal e dízima periódica. A gente trabalhou a subtração, a gente fez testes, né. Agora com raiz. Várias possibilidades! (E4P16L33)

F: E, por exemplo, no primeiro **encontro, acho que foi o primeiro, eu já fiquei com padrão ali... eu já fiquei toda emocionada lá com a criação de bandeiras.** Então, por exemplo, se eu fosse utilizar lá com os meus alunos, né. (E4P16L36)

F: **Enchi ele de bandeiras** e se deixasse, eu ia fazer mais. Mas também gostei também de outras, não só dos padrões, não só de bandeiras, dá para criar outras figuras. Dá para criar outros padrões, não precisa ser só o linear. **Juntar o padrão os padrões com a música.** Explicar que matemática não é só ela por si só, a gente pode Interdisciplinarizar, no caso, com a arte. A gente tem ali as cores, a gente tem a música. A gente pode aprender de diversas formas. (E4P17L04)

A fala da Francisca deixa implícito que somente agora ela entendeu a proposta da MusiCALcolorida, de representar números de forma multissensorial. No primeiro encontro ela mostrou que tinha entendido que a calculadora gerava as imagens, mas não tinha entendido o porquê das imagens terem sido geradas. Foi somente com a manipulação que ela comprehendeu que a imagem seria uma resultante da operação realizada.

F: No caso, o professor pode usar esse... tipo assim, além deles irem testando, **o professor pode utilizar as figuras pra que eles possam visualizar, tipo assim, comparar?** Por exemplo, na galeria dá pra **gravar as fotos.** Eles podem ir lá pra galeria e ficar visualizando ali pra eles terem mais clareza? (E2P10L28)

P: Tá, o que você está propondo é **que seria interessante, de alguma forma, arranjar algum jeito ou abrir três calculadoras, de repente em três computadores diferentes, ou no mesmo computador, ou até mesmo usar o recurso da galeria como um lugar que eles pudessem**

comparar. Porque ver assim, separadamente, pode não ficar claro. É isso que você... (E2P10L32)

F: É... (E2P11L01)

P: Não sei se a Viviane pegou, mas é que tem um **botãozinho chamado galeria que você consegue salvar...** (E2P10L28)

V: Eu vi. (E2P10L02)

P: **Isso, você consegue salvar lá num banco de informações.** Então pra Fran seria interessante, **essas três representações num mesmo momento pra que eles pudessem ver possíveis diferenças e igualdades, certo Fran?** (E2P10L05)

F: Uhum. (E2P10L08).

Uma outra possibilidade de modificação na MusiCalcolorida surgiu com Lucia que diz “*Eu tô tentando enxergar ainda o símbolo da divisão. (E1P8L20)*”. Poderia ter uma botão para o controle do tamanho para a fonte. Outra sugestão aparece porque o botão do pi não funcionou adequadamente, Francisca lembrou desse detalhe ao perguntar “O botão está funcionando, o do Pi?” (E4P18L06).

As sugestões de modificação para melhorar a utilização da MusiCalcolorida oferecidas pelas professoras seriam: controlar o tamanho da fonte; verificar as teclas do pi e da raiz quadrada.

Capítulo 6: Considerações Finais

O objetivo dessa pesquisa foi investigar e analisar as potencialidades do uso da MusiCALcolorida para o ensino dos números reais, a partir das interações entre professoras de matemática da Educação Básica. Foram realizados 4 encontros e neles ficou evidenciado que a MusiCALcolorida permitiu um olhar diferente do habitual sobre os números reais com três representações distintas, a numérica, a imagética e a sonora. Segundo as participantes este aplicativo permitiu investigar características das dízimas, sua periodicidade e explicitar diferenças entre os números racionais e os números irracionais. É importante observar que o aplicativo sozinho não faz milagres, é crucial observar as intervenções do professor/pesquisador na direção de provocar investigações e disparar as interações.

A proposta das tarefas e a atuação do pesquisador geraram discussões que avançaram em outros temas pertinentes tais como: a prática docente, a fragmentação da apresentação dos conjuntos numéricos durante a educação básica nos livros didáticos, pontos estes que são importantes e que impactam na sala de aula.

Segundo nossa pesquisa, as três colaboradoras trabalham com as turmas da educação básica por questões salariais, apesar de preferirem os primeiros anos do Ensino Fundamental e não gostarem de trabalhar com as turmas do oitavo ano, por acharem o conteúdo mais abstrato. Tais relatos só foram possíveis devido a postura do professor/pesquisador que deixou as colaboradoras bem à vontade durante a pesquisa. Sendo assim, podemos considerar que a proposta de entrevistar professoras com experiência em sala de aula e elaborar atividades investigativas e que promoviam debates foi exitosa.

O uso da MusiCALcolorida permitiu que as professoras se envolvessem com as atividades propostas. O que nos mostrou que esta calculadora foi apropriada por elas e que as representações simbólica, imagética e sonora contribuíram para encontrar a solução de problemas, bem como para a investigação acerca dos números reais. Vale ressaltar que a representação imagética foi a que mais saltou

aos olhos das colaboradoras. Esta representação foi a mais utilizada durante a pesquisa e foi a que mais gerou discussões e análises por parte das colaboradoras.

A percepção sobre dízimas foi ampliada durante a realização dos encontros. As três colaboradoras, ao manipular a barra que altera o número de casas das dízimas, perceberam que podiam alinhar ou desalinhadas as cores e sentiram o quanto grande pode ser uma dízima. Isto é, durante o uso da MusiCALcolorida elas perceberam, graças a representação imagética, que o período da dízima pode ser bem longo. Em teoria, todas provavelmente sabiam, mas como rotineiramente não são trabalhadas dízimas com períodos acima de 7 casas devido a falta de suporte das calculadoras, foi uma surpresa para elas verem e ouviram dízimas com períodos mais longos.

Os números racionais, assim como trazido pelas colaboradoras, estão sendo apresentados. pelos livros didáticos, aos alunos desde o 6º ano até o 9º ano do Ensino Fundamental II. Porém estes números são apresentados de forma fragmentada, no 6º ano são apresentados os racionais positivos, muita das vezes sem a distinção da fração, estudada pelos alunos no Ensino Fundamental I. Dessa forma, as metades podem ser diferentes: bombom é diferente de meia barra de chocolate, mesmo ambos sendo escritos no formato $\frac{1}{2}$. Porém o número racional 0,5 é inalterável.

Já no 7º ano aparece a parte negativa dos números racionais, completando o conjunto, mas ainda de forma fragmentada. No 8º ano os números racionais costumam se tornar os coeficientes das expressões algébricas e somente no 9º ano a definição formal de número racional é apresentada aos alunos.

Os irracionais costumam aparecer somente no 9º ano, quando é mostrado o não fechamento da operação de radiciação no conjunto dos racionais, criando assim a necessidade de dois novos conjuntos: os irracionais para resolver a parte positiva na operação de radiciação e um novo conjunto que englobe os dois anteriores, isto é, a criação dos números reais.

Sobre a questão das dízimas, mesmo quando se trabalha o π , tende-se a arredondá-lo para 3,14. Esta aproximação costuma ser feita para aumentar a praticidade dos cálculos, mas também tem em vista a limitação das calculadoras

convencionais. Com a MusiCALcolorida, esta limitação ainda existe, visto que nenhuma calculadora mostra infinitas casas decimais.

Sendo assim, a MusiCALcolorida evidenciou para as professoras que, por mais que se tente encontrar, não existe uma dízima periódica representando o número π . Neste sentido, a MusiCALcolorida pode perpassar todos os anos do Ensino Fundamental II, bem como seus conteúdos sobre conjuntos numéricos, servindo como uma aliada na construção plena e de forma ampla do conceito dos números reais.

A realização desta pesquisa também cumpriu o desejo inicial de unir música à educação matemática. Mesmo que a representação imagética tenha tomado um destaque maior pelas colaboradoras, o desejo inicial do pesquisador de buscar unir estas duas áreas foi contemplado.

As atualizações propostas pelas colaboradoras e descritas a seguir visam popularizar o uso da MusiCALcolorida ao facilitar o manejo da mesma, tornando o seu uso mais disponível sempre que for necessária. Em vista disso, o celular em sala de aula serviria como forte aliado na implementação de tarefas com esta calculadora.

Por meio desta pesquisa, as colaboradoras levantaram possíveis melhorias para a MusiCALcolorida. O primeiro ponto foi na diagramação, podendo trazer um recurso de ajuste no tamanho da fonte da calculadora. Esta proposta vem da observação que alguns símbolos desta calculadora não ficam de fácil compreensão, sobretudo se ela for utilizada por alguém com baixa capacidade visual.

Ainda no que tange a contribuições para a MusiCALcolorida, também foram sugeridas pelas colaboradoras ajustes na diagramação da calculadora, bem como na possibilidade de ajuste na fonte e negritude das teclas. Ajustes na programação das prioridades das operações são pertinentes, bem como melhorias nas operações com números negativos. Além dessas, as colaboradoras ainda sugeriram a possibilidade de pareamento de imagens da biblioteca, isto é, caso duas operações tenham sido salvas, seria conveniente a comparação entre os quadros gerados.

Ajustes na programação também surgiram. O primeiro seria na reprogramação de algumas teclas, como a do pi (π) e a da raiz quadrada ($\sqrt{}$).

Estas teclas trouxeram um *delay* ou travamento na calculadora, necessitando o fechamento e a reabertura do aplicativo. A segunda alteração sugerida na parte da programação foi o incremento de abas para a comparação entre os resultados obtidos. Neste caso, a proposta seria tornar possível a visualização em tempo real da biblioteca ou, pelo menos, de alguns resultados obtidos anteriormente. Estas sugestões podem sugerir atualizações futuras em versões da MusiCALcolorida para torná-la ainda mais inclusiva e funcional.

Os objetivos desta pesquisa foram alcançados, mas vale ressaltar que esta mesma pesquisa realizada com outros grupos de professores certamente trariam outros olhares e outras potencialidades da MusiCALcolorida, tendo em vista que cada profissional possui experiências próprias e traria novas perspectivas para o uso da calculadora. Encontrar pesquisas que abordam este aspecto foi uma das dificuldades, visto que há um carecimento de pesquisas abordam a MusiCALcolorida em sala de aula, não havendo número considerável de pesquisas na área.

Esta pesquisa pode servir como base para outras publicações e novas pesquisas. Um desdobramento possível é sejam realizadas atividades em sala de aula para que os alunos manipulem a MusiCALcolorida. Oficinas e palestras sobre esta calculadora também podem ser realizados no âmbito da formação de professores.

Uma questão a ser explorada pode ser a realização de pesquisas utilizando a MusiCALcolorida para buscar as relações entre um número racional e suas representações fracionárias. De que forma os conhecimentos prévios de fração, aprendidos no Fundamental I, podem influenciar na construção do conceito de número racional. Neste cenário, como o uso da MusiCALcolorida pode vir a contribuir, visto que ela possui a representação fracionária e a representação decimal o número decimal de forma concomitante. Neste sentido caberá ao leitor e a quem usar a MusiCALcolorida buscar novos usos, tecer novas hipóteses e levantar novas potencialidades para a MusiCALcolorida.

REFERÊNCIA

BRASIL. **Base Nacional Curricular Comum.** 3^a versão revista. Ministério da Educação, Brasília, 2017.

_____. Ministério da Educação. Base Nacional Comum Curricular. Brasília, 2018.

BAUER, W.M; GASKELL, G. **Pesquisa qualitativa em texto, Imagem e Som:** um manual prático. Rio de Janeiro. 7^o Edição. Vozes, 2002.

BOLITE-FRANT, Janete; DE CASTRO, Monica Rabello. **MODELO DA ESTRATÉGIA ARGUMENTATIVA:** análise da fala e de outros registros em contextos interativos de aprendizagem. Editora UFPR, 1^o Edição, 2011.

CARRILHO, Ronaldo. **O MICROMUNDO RITMÁTICA:** uma abordagem multissensorial para os conceitos de razão e proporção. Dissertação de Mestrado em Educação Matemática 2013 UNIVERSIDADE BANDEIRANTE ANHANGUERA

CUNHA, N. P. **Matemática e Música:** Diálogo Interdisciplinar. Recife. Editora UFPE, 1^o Edição, 2008.

GEWANDSZNAJDER, Fernando; ALVES-MAZZOTTI, Alda Judith. **O método nas Ciências Naturais e Sociais.** São Paulo. 2^o Edição. Pioneira, 1998.

HEALY, Lulu et al. **VER E OUVIR A MATEMÁTICA COM UMA CALCULADORA COLORIDA E MUSICAL:** estratégias para incluir aprendizes surdos e aprendizes cegos nas salas de aulas. **Educação Especial e Inclusão Escolar:** reflexões sobre o fazer pedagógico, p.63-77.

MARTINS, Elen Graciele. **O PAPEL DA PERCEPÇÃO SONORA NA ATRIBUIÇÃO DE SIGNIFICADOS MATEMÁTICOS PARA NÚMEROS RACIONAIS POR PESSOAS CEGAS E PESSOAS COM BAIXA VISÃO.** Dissertação de Mestrado em Educação Matemática 2010 Universidade Bandeirante de São Paulo

MONTEIRO, Ana; DA COSTA, MARIA FERREIRA. **PROFESSORES:** entre saberes e práticas. Educação & Sociedade, v. 22, p. 121-142, 2001.

PAPERT, Seymour; VALENTE, Jose Armando; BITELMAN, Beatriz. **Logo: computadores e educação.** São Paulo Brasiliense, 1980.

ROSA, FMC; Rodrigues, T.D; Marconi, R. pluralidade de concepções relacionadas à inclusão-exclusão e seus reflexos na Educação Matemática. **Perspectivas da Educação Matemática**, v.11, p.518, 2018

RODRIGUES, Maisa Aparecida Siqueira. **EXPLORANDO NÚMEROS REAIS ATRAVÉS DE UMA REPRESENTAÇÃO VISUAL E SONORA:** um estudo das interações dos alunos do Ensino Médio com a ferramenta MusiCALcolorida. Dissertação de Mestrado em Educação Matemática 2009 Universidade Bandeirante de São Paulo, Universidade Bandeirante de São Paulo

RODRIGUES, Thiago Donda et al **Compreensões sobre Educação no Campo no âmbito da Educação Inclusiva e da Educação Matemática**: o contexto de duas pesquisas. BOLETIM GEPEM (ONLINE), v. 76, p. 170-183, 2020.

SOUZA, Franklin Rodrigues. **EXPLORAÇÕES DE FRAÇÕES EQUIVALENTES POR ALUNOS SURDOS**: uma investigação das contribuições da MusiCALColorida. Dissertação de Mestrado em Educação Matemática Universidade Bandeirante de São Paulo

TARDIF, Maurice; LESSARD, Claude; LAHAYE, Louise. **Os professores face ao saber**: esboço de uma problemática do saber docente. **Teoria e educação**, v. 4, p. 215-233, 1991.

VYGOTSKY, Lev Semenovich et al. **Pensamento e linguagem**. São Paulo: Martins fontes, 2001.

Yin, Robert K. **Estudo de Caso: Planejamento e métodos**. Porto Alegre: Bookman editora, 2001.

ANEXOS

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO



Universidade Federal do Rio de Janeiro - PEMAT

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

Título da Pesquisa: **Educação Matemática, Música e Números Reais: Investigando Interações de Professores com a MusiCALcolorida.**

Nome do Pesquisador: **Ruan Vitório Fernandes da Silva**

Nome da Orientadora: **Prof. Dra. Janete Bolite Frant.**

Instituição a que pertence os pesquisadores: **Universidade Federal do Rio de Janeiro**

A (o) Sra. (Sr.) está sendo convidada (o) a participar desta pesquisa que tem como finalidade entender melhor as potencialidades e possibilidades de uso de um aplicativo tecnológico visando o ensino de números reais.

Ao participar deste estudo a Sra (Sr.) permitirá que o pesquisador, Prof. Ruan V. F. da Silva faça a coleta de dados para sua pesquisa. O material coletado serão as atividades realizadas, as gravações de vídeo, as transcrições, os registros escritos.

A coleta de dados será feita, a partir dos encontros virtuais, por meio de gravações de áudio e de vídeo, de relatórios gerados a partir do ambiente

colaborativo utilizado. As atividades serão realizadas em cinco encontros com duração aproximada de uma hora.

O material coletado durante o projeto será de uso exclusivo do grupo de pesquisa e esperamos que revele informações importantes sobre o uso da MusiCALcolorida nas aulas de matemática e que os resultados possam provocar modificações significantes nesse ensino. Esperamos também que revele informações importantes sobre como o uso desse ambiente tecnológico colaborativos podem contribuir para a produção de significados de conteúdos matemáticos. Dessa forma, esperamos que sua participação resulte em avanços pertinentes para os conhecimentos no campo da educação matemática.

Todas as informações coletadas neste estudo são estritamente confidenciais. Os resultados dessa pesquisa poderão ser utilizados pelos pesquisadores em publicações em periódicos, livros, eventos científicos, cursos e outras divulgações acadêmico-científicas. Nessas divulgações seu nome será trocado por um pseudônimo para garantir sua integridade como participante. A veiculação de sua imagem em divulgações científicas só será realizada com seu consentimento.

A Sra. (Sr.) tem liberdade de se recusar a participar e ainda se recusar a continuar participando em qualquer fase da pesquisa, sem qualquer prejuízo pessoal. Não há despesas pessoais em qualquer fase do estudo, assim como não há compensação financeira relacionada à sua participação e sempre que quiser poderá pedir mais informações sobre a pesquisa através do e-mail do pesquisador do projeto, e, se necessário, através do telefone do Comitê de Ética em Pesquisa.

Gostaríamos de enfatizar que sua participação é totalmente voluntária e você tem a liberdade de se recusar a participar de qualquer etapa da pesquisa sem qualquer tipo de ônus. Se você tiver alguma consideração ou dúvida sobre a ética da pesquisa, entre em contato com o Comitê de Ética em Pesquisa (CEP) do Hospital Universitário Clementino Fraga Filho/HUCFF/UFRJ – R. Prof. Rodolpho Paulo Rocco, n.º33 sala 255 – Cidade Universitária/Ilha do Fundão – 7º andar, Ala E - pelo telefone (21) 3938-2480, de segunda a sexta- feira, das 8 às 16 horas, ou por meio do e-mail: cep@hucff.ufrj.br.

A participação nesta pesquisa não traz complicações legais. Os procedimentos adotados nesta pesquisa obedecem aos Critérios da Ética em Pesquisa com Seres Humanos conforme Resolução no. 196/96 do Conselho Nacional de Saúde. Nenhum dos procedimentos usados oferece riscos à sua dignidade.

Após estes esclarecimentos, solicitamos o seu consentimento de forma livre para participar desta pesquisa. Portanto preencha, por favor, os itens que se seguem: Confiro que recebi cópia deste termo de consentimento, e autorizo a execução do trabalho de pesquisa e a divulgação dos dados obtidos neste estudo.

Nome e Assinatura do Participante da Pesquisa.

Nome, RG e Assinatura do Pesquisador.

Nome e Assinatura do Orientador.

Termo de Consentimento de Participação

Eu, _____, _____, RG _____ CPF _____, declaro estar suficientemente informado a respeito do que li acima, ou que foram lidas para mim, a respeito do projeto “**Educação Matemática, Música e Números Reais: Investigando Interações de Professores com a MusiCALcolorida**”.

Ficaram claros para mim quais são os propósitos do estudo, os procedimentos, as garantias de confidencialidade e autorizo a veiculação dos resultados para os usos mencionados. Está claro também que minha participação é isenta de qualquer tipo de despesas. Assim sendo, concordo em participar deste estudo e poderei retirar o meu consentimento a qualquer momento, antes ou durante o mesmo, sem penalidades ou prejuízo para mim e sem prejuízo para a continuidade da pesquisa em andamento.

Rio de Janeiro, _____ de _____ de _____.

Assinatura do Participante de Pesquisa.

Eu, Ruan Vitório Fernandes da Silva, pesquisador associado ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática (PEMAT-UFRJ), declaro que este Termo de Consentimento Livre e Esclarecido não exerce qualquer forma de coerção sobre o(a) voluntário(a).

Rio de Janeiro, _____ / _____ / _____.

Assinatura do Pesquisador Responsável

Ruan Vitório Fernandes da Silva
E-mail: ruan_vitorio29@hotmail.com

Termo de consentimento para o uso de imagens

Declaro meu consentimento na veiculação de minha imagem para fins de divulgação científica, nas condições do TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO, que li acima, ou que foram lidas para mim, a respeito do projeto.

Rio de Janeiro, _____ de _____ de _____.

Assinatura do Participante da Pesquisa

Assinatura do Pesquisador Responsável

Diário de Campo

Trecho da Transcrição do 1º Encontro.

Transcrição do Primeiro Encontro -

[link da gravação postada de forma restrita no youtube]

Data: 01/11/2022

Duração: 1:41:15 h

Participantes: Eu, Francisca, Lucia.

Objetivo: O principal era ter o perfil dos participantes e apresentar o app MusiCALcolorida.

Resumo:

O primeiro encontro construi os dados do perfil das participantes; informações como o nome, local de trabalho, tempo de experiência no magistério, quais turmas lecionam e quais as maiores dificuldades encontradas ao falar sobre conjuntos numéricos, em especial, o conjunto dos reais. As três professoras lecionam em redes privadas de ensino no Estado do Rio de Janeiro para turmas de Ensino Fundamental II, e duas destas professoras possuem formação e experiência em lecionar no Ensino Fundamental I. O encontro foi gravado e com permissão está disponível no Youtube através do link: [link da gravação postada de forma restrita no Youtube]

Para representar a fala de cada um dos participantes do encontro foi utilizada a primeira letra de seus respectivos nomes e P para mim, o pesquisador. Desta forma, temos: F para Francisca; L para Lucia; J para Jussara.

Início da Transcrição

P: Iniciei a gravação.

P: Então, proformes, eu tenho que dizer: gente, hoje é dia primeiro de novembro, né. É o nosso primeiro encontro, dos encontros do Pemat, da minha dissertação.

E aí eu vou projetar aqui na tela, tem que sair aqui do WhatsApp, ficar aparecendo aqui.

No início é mais proformes mesmo porque tem que ter tá então esse é o primeiro encontro: do meu tema de pesquisa da minha pesquisa intitulado “educação matemática música e números reais tá investigando as interações de professores de matemática utilizando a MusiCALcolorida”.

Tá vai ficar mais claro para vocês que estão participando o que que seria, né, a musical colorida que é a calculadora que a gente vai utilizar para pesquisa para investigar pesquisa para investigar essa calculadora.

Eu faço parte do programa de pós-graduação de ensino de matemática lá da UFRJ do Instituto de matemática do PMAT.

Eu sou o Ruan Vitório Fernandes da Silva e me orientadora é a professora doutora Janete Bolite Frant.

Tá pro encontro de hoje a gente vai inicialmente só conhecer os participantes.

Então vou me apresentar aqui, né. Seis se representam também só pra gente manter um certo padrãozinho, tá.

P: Não que seja necessário responder tudo isso mas, eu tenho aqui o nome, tá, meu nome é Ruan Vitório Fernandes da Silva, eu trabalho em dois colégios na rede privada de Nova Iguaçu. Um é o Antonio Huback, que é o lugar também onde a Lucia trabalha, né, e o outro é o Colégio Luís Silva, que é até perto do Antonio Huback que, eu não sei se a Lucia conhece, mas eu dou aula nesses dois colégios, tá?

Eu leciono para as turmas de sexto ano, nos dois colégios, no sétimo ano lá no Luiz Silva e no Antonio Huback no nono e primeiro ano do ensino médio. Então esses são minhas turmas todas, né.

Esses outros dois termos aqui que é esse eu vou perguntar a vocês, *seriam se os seus alunos encontram alguma dificuldade, ou não, quando vocês estão estudando o conjunto numéricos, Tá.*

Mas antes eu gostaria de vocês se apresentarem tá novamente dizendo pelo menos o nome onde trabalha, tá, se é público ou privado e as turmas que vocês lecionam.

Quem chegou primeiro, né, Francisca.

F: Prazer, meu nome é Francisca Rocha Freitas. Eu trabalho em duas escolas privadas. As duas são do Município de São João de Meriti, uma no Novo Rio e a outra em Vilar dos Teles. Trabalho com sexto e sétimo ano nas duas e com

o oitavo no Centro Educacional Nair Dutra e a outra escola é o Montovani Sabatine.

P: Perfeito.

L: Eu Sou professora Lucia da Silva. Professora do Colégio Antonio Huback, no momento só estou trabalhando nesta instituição. Já sou professora há 33 anos, pouquinho né, e trabalho com sexto e sétimo ano.

P: Perfeito.

O encontro e a transcrição continua.

Trecho da Redução do Segundo Encontro (E2)

Encontro Página Linha	Falas	Imagem	Comentário
E2P01L32	<p>V: É... beleza. Eu sou Viviane. Sou professora desde 2019, esse ano eu vim para Parati, então eu dou aulas para turmas do Ensino Médio de uma escola aqui em Paraty e dou aula também num cursinho de pré-vestibular da prefeitura que é inclusive uma parceria com a UERJ, um projeto de extensão da UERJ e aí a gente tem esse pré-vestibular comunitário. E eu dou aula de matemática, lógico.</p>		<p>1. Apresentação Viviane.</p>
E2P02L06	<p>V: Sim, na verdade, isso, é... eu fiz pedagogia e não terminei, só que depois eu fiz uma à distância e eu já me formei em pedagogia no ano passado e inclusive eu dou aula no Fundamental I à tarde, mas aí eu sou uma professora polivalente, né.</p>		<p>1. Apresentação Viviane.</p>
E2P02L26	<p>F: Vou tentar abrir aqui no computador pra ver melhor.</p>		<p>2. Tecnologia.</p>
E2P03L22	<p>F: Sem dúvidas.</p>		<p>3. Reflexão sobre o conteúdo.</p>

E2P03L23	V:Uhum		3. Reflexão sobre o conteúdo.
E2P03L30	F: Não concordo com alguns. Mas como assim comentaria?		3. Reflexão sobre o conteúdo.
E2P04L04	V: Tá, deixa eu falar. É... comenta a fala da Maria também, falando que os alunos foram aprovados...?		4. Posicionamento profissional.
E2P04L07	V: Tá, então... a pergunta é a razão entre o número de aprovados e o total da turma. Ela brinca e fala que a razão foi porque eles estudaram.		4. Posicionamento profissional.
E2P04L08	V: Eu entendi que ela falou que a razão seria o motivo, mas aí sendo questão de interpretação de texto, a razão entre uma coisa e outra não é necessariamente um motivo que aquilo aconteceu, então pra mim ela já errou na interpretação. Tipo, qual foi a razão deles terem sido aprovados? Aí a razão teria sido essa. É só uma coisa que eu pontuaria o aluno quando falasse assim, eu tentaria pontuar ele quanto à interpretação. Porque quando falou entre não é a razão do porque aconteceu.		4. Posicionamento profissional.

E2P04L15	<p>V: Aí quando a gente ensina razão, a gente fala razão é a divisão, né? É uma coisa sobre a outra. Foi assim que eu aprendi sempre e se você for pegar os livros é isso que ele fala: razão é o cociente entre, sei lá, um número e outro. Né? Então remete à ideia de fração, porque ela vem representar [uma razão].</p>		5. Definição de razão.
E2P04L19	<p>V: Aí ele diz que se é uma razão tem que simplificar e aí vem pro $6/7$. Né? 6 sobre 7. Mas aí é uma experiência minha, da pós da UERJ, que a gente estudava probabilidade, a probabilidade disso acontecer, tipo, de sair um número par num dado, né, num dado de seis faces, a probabilidade é de 3 em 6, né? E a gente “Ah, é um meio” e ela “Não. É de três em seis”. Embora que a gente entenda que é de 3 em 6, que são seis opções e, dessas seis opções, somente 3 me interessam. Então se a gente colocasse $1/2$ ou 0,5 ou 50% ela não considerava. Então eu já trago minha experiência pessoal. E a questão do outro</p>		6. Probabilidade e simplificação.

	por 3/4 não, 3/7, né?		
O encontro continua			

Trecho da Análise do 3º Encontro (E3).

Análise do Terceiro Encontro

Introdução:

O terceiro encontro teve por objetivo começar a investigar a MusiCALColorida. Para este encontro foi preparada Atividade 3, atividade esta que propõe uma situação onde os professores colaboradores se veem na posição de uma professora que deve responder ao questionamento dos alunos sobre os números racionais na representação decimal.

Atividade Proposta:

Na atividade proposta um dos alunos questiona a irracionalidade do π ao lembrar de uma atividade onde dividiam o comprimento da circunferência pelo diâmetro da mesma. Neste caso, o π era encontrado mediante uma razão e, portanto, seria um número racional.

Início da Análise do E3:

As colaboradoras se debruçaram sobre a MusiCALcolorida para buscar formas de esclarecer as dúvidas e diferenciar os números racionais dos irracionais.

Logo após os primeiros ajustes técnicos feitos, tais como o aumento da tela e o envio das imagens via aplicativo de mensagem, para que as colaboradoras pudessem enxergar com clareza a atividade pôde se perceber um interesse ao uso da MusiCALcolorida para se raciocinar sobre o problema. Tal afirmação se pauta na rápida resposta que deram ao serem indagadas (E3P4L02) sobre como iniciarmos a discussão e ambas, de pronto, responderam que preferiam sacar mão antes da MusiCALcolorida para a análise dos números (E3P4L06 e E3P4L07).

Iniciando os testes (E3P4L07) de “pouquinho em pouquinho” (E3P4L010), logo no item a das alternativas do problema motivador da discussão, surge a operação de 13 dividido para 23 (E3P4L13). Após breve momento de reflexão ambas olharam para o resultado encontrado e afirmaram que era um número irracional (E3P4L17 e E3P4L18). No entanto, essa resposta aparentemente equivocada pode ser proveniente de uma falta de experiência com dízimas

longas, maiores de 8 casas decimais de uma calculadora usual.

Logo em seguida, uma das colaboradoras pergunta diretamente “*Professor, você pode me explicar aí o que é um número irracional?*”(E3P4L21). Tal pergunta foi feito em tom de brincadeira, mas mostra um sinal de alerta entre os conhecimentos prévios sobre números racionais e a surpresa do resultado “irracional” encontrado (E3P4L17).

O pesquisador não querendo responder a pergunta diretamente para não influenciar as respostas, resolve reler uma das argumentações trazidas no enunciado do problema motivador da discussão (E3P4L23). Neste ponto é retomada a discussão sobre o experimento onde é pega uma bolinha de isopor, mede-se o tamanho da circunferência e seu diâmetro e calcula-se a razão entre estas partes, encontrando o número π (E3P4L25).

Retomando o cálculo do item a, o pesquisador induz que as colaboradoras olhem com mais atenção para o resultado encontrado, verificando a resposta encontrada “0,5652 e um monte de números.” (E3P5L06). Neste ponto uma delas percebe que a resposta que inicialmente haviam dito que era um número racional não é mais, pois “Mas ela é uma dízima periódica” (E3P5L09). Ao ser questionada sobre o período responde: “Longa. Longa pra caramba, mas ela é. Porque chega em um momento que ela começa a repetir.”(E3P5L11). Uma das colaboradoras diz “É... ó... Tem um momento que repete o 5 e o 6.” (E3P5L14) e a outra completa “Depois do 69, né?”(E3P5L15). Em sinal de confirmação a primeira “Começa lá “56521739” tudo de novo.”(E3P5L16).

A análise continua.

Atividade do Encontro 1.

1) Levantar o perfil dos colaboradores da pesquisa conversando com eles.

Dentre os assuntos, buscar as seguintes informações:

- e) Nome
- f) Onde trabalha
- g) Qual turma
- h) Maiores dificuldades que os alunos costumam encontrar sobre os números reais

2) Instalação da MusiCALcolorida

- IV. Entrar no site
- V. Baixar a MusiCALcolorida
- VI. Abrir a MusiCALcolorida

3) Como efetuar cálculos na MusiCALColorida

- IV. As operações
- V. Mudanças no quadro de pintura
- VI. Mudança das características sonoras

4) Como salvar operações na calculadora usando a biblioteca.

Atividade do Encontro 2.

[Ênio (2015), 7^a ano, p.151, questão adaptada]

Em uma classe de 28 alunos, 24 foram aprovados e o restante ficou para recuperação. Determine a razão entre o número de alunos aprovados diretamente e o total de alunos da turma.

Maria Inicia a discussão propondo uma resposta:

- Maria: *A razão foram eles terem estudado*

Mateus sorri e diz:

- Mateus: *Ele quer saber a fração, Maria. A fração correta seria 24/28*

A Maria retrucou e disse que a resposta correta era outra:

- Maria: *Eu acho que não, se é assim, se é para ser fração, a resposta correta é 6/7, pois dá pra simplificar essa que você falou por dois, duas vezes.*

Marcos observou a resposta de Mateus e Maria, identificou um erro e propôs uma nova resposta:

- Marcos: *É, Mateus, da pra simplificar a sua resposta. Mas a Maria errou também. Do numerador (24) para o denominador (28) faltam 4, então podemos dizer que 24/28 é igual a 3/7, pois mantém a diferença de 4 entre o numerador e o denominador e, não, 6/7 como Maria disse.*

Usando a MusiCALcoloria, como vocês abordariam o debate entre os alunos?

Como explicar/rebater os argumentos utilizados pelos alunos usando a MusiCALcolorida?

A calculadora fornece algum tipo de recurso que favorece a explicação desta questão?

Atividade do Encontro 3.

Certo dia, durante a aula de matemática, a professora resolveu dividir a turma em grupos para resolverem os exercícios da apostila utilizada na escola. Os alunos se depararam com a seguinte questão:

1) Marque a alternativa que apresenta apenas números irracionais :

- a) $13/23; 323/523; 55/125$
- b) $325/525; 56/47; 26/78$
- c) $325/525; 55/125; 26/78$
- d) $13/23; 56/47; 323/523$

A professora observou a seguinte discussão entre um dos grupos:

Marcos falou rapidamente:

- Marcos: *Nenhuma das opções! Como estão em forma de fração, todas são racionais.*

Maria escutou o que Marcos disse que concordava.

- Maria: *É, o Marcos está certo, não tem como responder a questão.*

Mateus disse que sim, era possível, e explicou:

- Mateus: *Claro que dá. O número Pi num é irracional? Não se lembram como ele foi encontrado? Dividiram o comprimento da circunferência pelo diâmetro. Então os números irracionais podem ser escritos como uma fração.*

Todos ficaram em dúvida e perguntaram a professora sobre o que fazer nesta questão.

Usando a MusiCALcolorida, como você explicaria a situação para os alunos? A calculadora ajuda na distinção entre racionais e irracionais? Levando em consideração a argumentação dos alunos Pi (π) é racional ou irracional?

Atividade do Encontro 4.

Durante uma aula no laboratório de computação, a professora sugeriu que os alunos utilizassem a calculadora que eles preferissem para a resolução da atividade proposta.

Em certo momento da resolução da atividade, Marcos chegou em:

$$x^2 = 5$$

Como de costume, “isolou o x”, “jogando o dois como raiz para o outro lado”.

$$x = \sqrt{5}$$

Não estando contente com o resultado, pegou uma calculadora comum e extraiu a raiz quadrada. Anotou o seguinte resultado:

$$x = 2.2360679775$$

Tendo resolvido a questão, Marcos disse:

- Marcos: *Pronto, esse é o valor de x [mostrando o resultado final]*

Maria, que era muito desconfiada, resolveu colocar o resultado encontrado por Marcos na MusiCALcolorida e elevou ao quadrado. Encontrando outro resultado, diferente de 5, disse:

- Maria: *Aqui, professora [mostrando a tela do computador], o resultado é outro. Se elevar esse número do Marcos ao quadrado não dá 5.*

Eles ficaram confusos.

Qual resultado Maria encontrou na MusiCALcolorida?

O que vocês falariam para os alunos sobre o resultado encontrado?

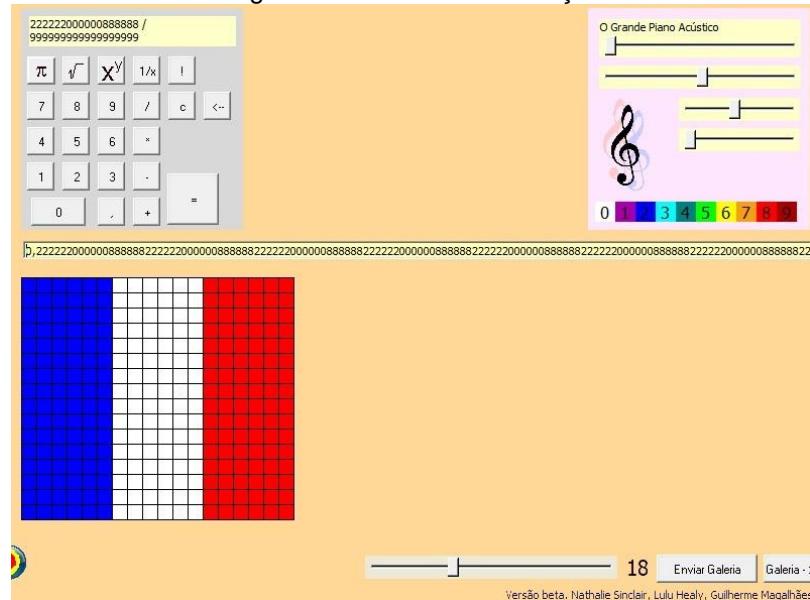
Se os mesmos passos que Marcos fez para $x = \sqrt{5}$ fossem feitos para $x = \sqrt{16}$, Maria teria encontrado o que na MusiCALcolorida?

Existe alguma diferença? Se sim, qual?

Bandeiras - Francisca.

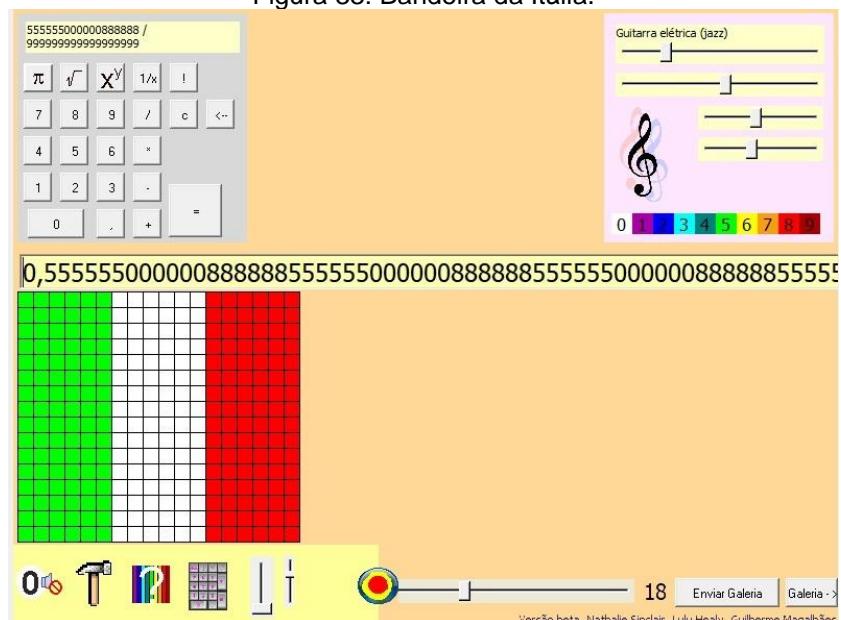
Durante os encontros a Francisca “desenhou” algumas bandeiras com a MusiCALcolorida. Seguem anexadas algumas destas bandeiras.

Figura 32: Bandeira da França.



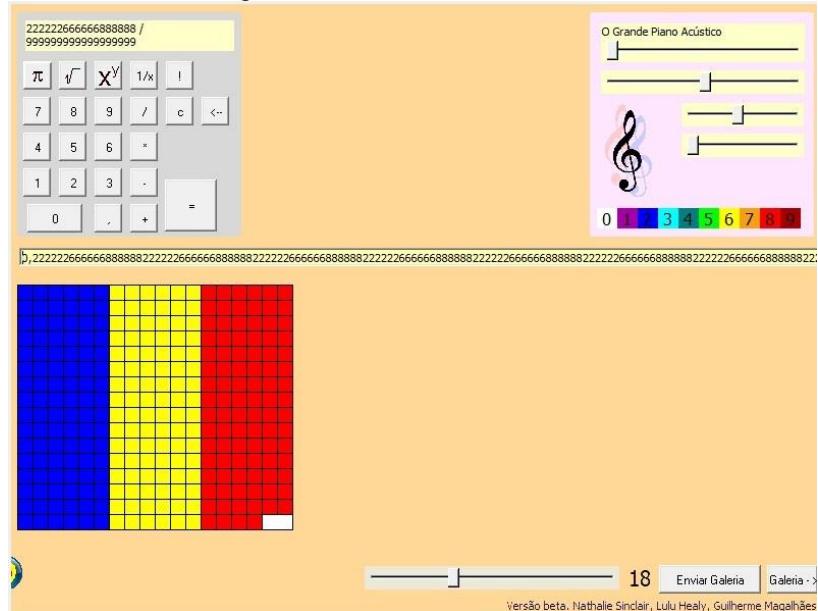
Fonte: Francisca, 2022.

Figura 33: Bandeira da Itália.



Fonte: Francisca, 2022.

Figura 34: Bandeira da Romênia.



Fonte: Francisca, 2022.