UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO
CENTRO DE CIÊNCIAS MATEMÁTICAS E DA NATUREZA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE MATEMÁTICA

O PROBLEMA DA PRECESSÃO E DA NUTAÇÃO NA PRIMEIRA METADE DO SÉCULO XVIII

LUCAS VINICIUS ANTUNES

Rio de Janeiro
2024

LUCAS VINICIUS ANTUNES

O PROBLEMA DA PRECESSÃO E DA NUTAÇÃO NA PRIMEIRA METADE DO SÉCULO XVIII

Dissertação de mestrado apresentado ao Colegiado do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro (PEMat/IM-UFRJ)

Orientador: Prof. Dr. Gérard Émile Grimberg

Rio de Janeiro
2024

CIP - Catalogação na Publicação

A636p

Antunes, Lucas Vinicius
O problema da precessão e da nutação na primeira metade do século XVIII / Lucas Vinicius Antunes. -- Rio de Janeiro, 2024.
67 f.

Orientador: Gerard Émile Grimberg.
Dissertação (mestrado) - Universidade Federal do Rio de Janeiro, Instituto de Matemática, Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática, 2024.

1. História da Matemática. 2. Problema da Precessão e Nutação. 3. Tratamento Analítico Matemático no Século XVIII. 4. Jean le Rond d'Alembert. 5. História dos Telescópios. I. Grimberg, Gerard Émile , orient. II. Título.

Elaborado pelo Sistema de Geração Automática da UFRJ com os dados fornecidos pelo(a) autor(a), sob a responsabilidade de Miguel Romeu Amorim Neto - CRB-7/6283.

Lucas Vinicius Antunes

O problema da precessão e da nutação na primeira metade do século XVIII

Dissertação de mestrado apresentado ao Colegiado do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro (PEMat/IM-UFRJ).

Aprovada em 13 de Dezembro de 2025.

Assinaturas dispensadas, resolução CEPG/UFRJ N/° 128, Art. 3°, de 11/11/2022.

Prof. Dr. Gerard Émile Grimberg
Orientador
Universidade Federal do Rio de Janeiro

Prof. Dr. Thiago Hartz Maia
Examinador Interno
Universidade Federal do Rio de Janeiro

Prof. Dr. Cleber Haubrichs dos Santos Doutor
Examinador Externo
Instituto Federal do Rio de Janeiro - Nolópolis

Rio de Janeiro
2025

AGRADECIMENTOS

Gostaria de agradecer, primeiramente, ao Professor Gerard Émile Grimberg, meu orientador, que me ofereceu todo o apoio necessário para a realização deste trabalho. Em especial, expresso minha gratidão à banca examinadora, que se dispôs a avaliar e apresentar sugestões de aprimoramento.

Aos meus amigos, colegas e familiares, sou igualmente muito grato pelo apoio, incentivo e ajuda que recebi, dentro das possibilidades de cada um. Em especial, gostaria de agradecer à minha namorada Isadora Dutra, à sua família, ao nosso amigo em comum João Spacek e à minha grande amiga Beatriz Cabral, por todo o suporte que me ofereceram nos momentos mais difíceis da conclusão deste trabalho.

Por fim, agradeço à CAPES, agência de fomento à pesquisa, pelo financiamento deste estudo. A valorização e o incentivo acadêmico são de extrema importância para a carreira daqueles que buscam alcançar esse êxito.

RESUMO

Palavras-chave:

Esta dissertação investiga as pesquisas sobre os fenômenos de nutação e precessão na primeira metade do século XVIII. Nesse período, o aprimoramento dos telescópios refratores e de suas metodologias de uso possibilitou a obtenção de dados observacionais mais precisos, enquanto o desenvolvimento do cálculo diferencial leibniziano aplicado à mecânica permitiu o cálculo teórico desses movimentos através do tratado de 1749 de d'Alembert, *Recherches sur la précession des équinoxes, et sur la nutation de l'axe de la Terre, dans le système Newtonien.* Pela primeira vez, a nutação e a precessão foram objeto de uma comparação sistemática entre previsões teóricas e dados experimentais, permitindo um tratamento analítico mais refinado por meio do uso do cálculo diferencial leibniziano. O trabalho é dividido em três partes: a evolução tecnológica dos telescópios, o avanço do cálculo diferencial aplicado à mecânica e uma análise dos resultados teóricos sobre os fenômenos obtidos por d'Alembert em 1749.

Palavras-chave: História do Telescópio; Nutação; Precessão; Cálculo Diferencial; D'Alembert; Século XVIII.

ABSTRACT

Keywords:

This dissertation investigates research on the phenomena of nutation and precession in the first half of the 18th century. During this period, improvements in refracting telescopes and their usage methodologies enabled the acquisition of more precise observational data, while the development of Leibnizian differential calculus applied to mechanics allowed for the theoretical calculation of these movements through d'Alembert's 1749 treatise, *Recherches sur la précession des équinoxes, et sur la nutation de l'axe de la Terre, dans le système Newtonien*. For the first time, nutation and precession were subject to a systematic comparison between theoretical predictions and experimental data, allowing for a more refined analytical treatment through the use of Leibnizian differential calculus. The study is divided into three parts: the technological evolution of telescopes, the advancement of differential calculus applied to mechanics, and an analysis of the theoretical results on these phenomena obtained by d'Alembert in 1749.

Keywords: History of the Telescope; Nutation; Precession; Differential Calculus; D'Alembert; 18th Century.

Lista de Figuras

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

O presente trabalho tem como objetivo principal analisar o êxito no tratamento analítico dos fenômenos de precessão e nutação na primeira metade do século XVIII, realizado por Jean Le Rond d'Alembert (1717–1783) em seu tratado de 1749. A análise será conduzida por meio de uma discussão que enfatiza, inicialmente, a importância da melhoria na qualidade e na quantidade de dados observacionais astronômicos até o século em questão. Como evidência chave para validar esse progresso observacional, destaca-se a detecção do fenômeno de nutação do eixo terrestre.

No entanto, para que fosse possível obter equações analíticas que dessem conta dos problemas mencionados, era necessária uma ferramenta matemática robusta. Essa necessidade foi suprida pelos avanços metodológicos proporcionados pelo uso do cálculo diferencial na descrição de problemas de mecânica. A comparação dessas equações com os dados observacionais permitiu seu refinamento, elevando o nível de precisão das análises. Como exemplo, será apresentado o trabalho desenvolvido por Alexis Claude de Clairaut (1713–1765) a respeito da forma da Terra, publicado no ano de 1743.

Por fim, o trabalho abordará a figura central na articulação dessas inovações, historicamente contextualizadas, junto aos fenômenos de precessão e nutação e aos dados observacionais. Isso será feito por meio do estudo da obra *Recherches sur la précession des équinoxes, et sur la nutation de l'axe de la Terre, dans le système Newtonien*, publicada por d'Alembert.

Para contextualizar brevemente os dois fenômenos mencionados, uma introdução preliminar será apresentada, com maiores detalhes sendo discutidos posteriormente. O movimento de precessão da Terra, segundo a literatura, foi registrado pela primeira vez na obra *Almagesto* de Cláudio Ptolomeu (90 E.C. – 168 E.C.), que atribui a descoberta inicial às observações do astrônomo grego Hiparco de Niceia (190 a.E.C.–120 a.E.C.). No que diz respeito à dinâmica precessional, sua principal característica está relacionada a um segundo movimento de "rotação"associado ao eixo terrestre[1], que ocorre em torno de um eixo ortogonal ao plano da órbita da Terra[2].

De maneira intuitiva, a precessão pode ser comparada ao movimento de um pião que, ao perder velocidade de rotação devido à ação da gravidade e à diminuição do

[1]A rotação considerada aqui como "primária"é aquela que ocorre em torno do próprio eixo terrestre, completada em aproximadamente 24 horas.

[2]Esse plano é conhecido como plano da eclíptica.

momento angular, passa a descrever um segundo movimento de rotação em torno de um eixo adicional, ortogonal ao plano principal de sua rotação.

A precessão do eixo terrestre apresenta um pequeno balanço angular periódico, restrito a um intervalo fixo de inclinação[3] do plano equatorial em relação ao plano da órbita terrestre. A composição do movimento de precessão com esse balanço gera um padrão semelhante a uma "circunferência senoidal". Esse balanço angular é conhecido como movimento de nutação e teve como principal precursor em sua identificação James Bradley (1692–1762), que publicou seus estudos na obra *An Apparent Motion Observed in Some of the Fixed Stars*, em 1748.

1.1 Questões de pesquisa

Dadas as considerações acerca dos fenômenos abordados neste trabalho, torna-se necessária a apresentação das questões que nortearão seu desenvolvimento. O questionamento central, já brevemente exposto, busca compreender como o cálculo diferencial leibniziano forneceu as ferramentas necessárias para um tratamento matemático tanto preciso quanto funcional da precessão e da nutação. Essa discussão será conduzida à luz dos métodos e esforços empregados pela Academia de Ciências de Paris na compreensão da verdadeira forma da Terra — outro grande problema da época —, cujo tratamento analítico foi viabilizado pelo cálculo diferencial leibniziano.

A segunda questão central busca analisar como a imprecisão dos antigos dados astronômicos, associada a equipamentos rudimentares, dificultava a compreensão dos movimentos celestes e como a evolução tanto dos telescópios quanto das metodologias permitiu uma coleta mais precisa de dados, resultando em aproximações matemáticas mais confiáveis. Em outras palavras, investigaremos como as principais comunidades astronômicas do final do século XVII e da primeira metade do século XVIII aprimoraram as medições da precessão e alcançaram um elevado grau de precisão na medição da nutação. Tal questão ganha relevância ao se considerar o aparente desinteresse de Newton pelo estudo da nutação, já que ele a considerava de pouca influência e, portanto, negligenciável. Esse desinteresse pode ser entendido como consequência direta da ausência de dados precisos que evidenciassem a importância desse movimento.

A inserção das lunetas — telescópios refratores — como ferramenta de trabalho

[3] Entre aproximadamente $21,1°$ e $24,5°$.

nos estudos astronômicos foi um fator crucial para o êxito na detecção da nutação por James Bradley e, consequentemente, para o tratamento analítico realizado por D'Alembert. Essas lunetas apresentaram inúmeras vantagens que não se limitaram apenas ao aumento da precisão em astronomia de posição. Além disso, em consonância com os interesses das comunidades acadêmicas, foram amplamente adotadas, o que resultou em frequentes aprimoramentos, a ponto de se tornarem ferramentas indispensáveis. Apesar de todas essas inovações, no que diz respeito ao movimento de nutação do eixo terrestre, há poucos trabalhos que o analisam sob essa perspectiva. Foi justamente graças ao aprimoramento das lunetas refratoras que a nutação pôde ser detectada com precisão suficiente para permitir um tratamento analítico-matemático mais detalhado e significativo.

Todo esse processo destacou figuras como Christiaan Huygens (1629–1695), no estudo das lentes; Robert Hooke (1635–1703), em sua investigação sobre a paralaxe estelar; Isaac Newton (1643–1727), em seu tratamento analítico da precessão e da nutação; Pierre Louis Moreau de Maupertuis (1698–1759), em seus estudos sobre o cálculo diferencial e a forma da Terra; James Bradley (1692–1762), por seus estudos a respeito da nutação; e Jean Le Rond D'Alembert (1717–1783), entre outros. A maioria dessas figuras esteve ligada às duas grandes comunidades acadêmicas do século XVII: a Royal Society, na Inglaterra, e a Academia de Ciências de Paris, na França.

Por fim, uma última questão de interesse nesta pesquisa é contextualizar e destacar os aspectos do tratado de 1749 que foram influenciados por outros estudos astronômicos contemporâneos. Em especial, sobressaem-se as investigações sobre a teoria da Lua, fortemente incentivadas pelas disputas acadêmicas promovidas pela Academia de Ciências de Paris, e o tratado de dinâmica, no qual d'Alembert apresenta seu famoso princípio, derivado das leis de Newton. Esses estudos visavam compreender melhor os fenômenos da mecânica por meio do cálculo diferencial: o primeiro com relação aos movimentos lunares, com o objetivo de aprimorar a orientação nas navegações marítimas — um tema de grande relevância prática para a época[4] —, e o segundo com relação à dinâmica de corpos rígidos, buscando descrever o movimento de corpos cujas partículas estão interconectadas.

A teoria da Lua foi um ponto-chave no estudo da precessão e da nutação, pois serviu como ponte para que d'Alembert migrasse para o segundo tema, uma vez que se sentia cansado da disputa contra Euler e Clairaut. Já o tratado de dinâmica foi essencial

[4] Hankins, 1970, p. 29-30

para que D'Alembert pudesse, a partir da dinâmica de corpos rígidos, aplicar esse método a problemas astronômicos. O tema então escolhido, relacionado diretamente às dinâmicas orbitais da Lua, tornou-se o foco de sua investigação.

1.2 Revisão bibliográfica e metodologia

Como via para o desenvolvimento das questões colocadas, serão analisados os principais trabalhos relacionados à precessão e à nutação, que exerceram influência sobre as pesquisas destacadas no século XVIII. Em especial, serão discutidos dois estudos fundamentais. Primeiro, a obra *Philosophiae naturalis principia mathematica* de Isaac Newton (1643-1727), que apresentou a primeira tentativa de tratamento analítico da precessão, embora tenha desconsiderado a nutação. O segundo destaque é a obra *Recherches sur la précession des équinoxes, et sur la nutation de l'axe de la Terre, dans le système Newtonien* publicada no ano de 1749 por Jean Le Rond d'Alembert (1717–1783), que traz um tratamento analítico aprofundado desenvolvido por ele.

Como mencionado, o enfoque central será no desenvolvimento da problemática a partir da perspectiva da obra de d'Alembert, considerado aqui como a figura articuladora que conectou o cálculo diferencial leibniziano aos problemas astronômicos discutidos na primeira metade do século XVIII. A fonte primária utilizada sobre esse autor será a edição científica e comentada de seu trabalho, organizada por Michelle Chapront e Jean Souchay e publicada em Paris no ano de 2006.

De forma complementar, mas não menos relevante, outros trabalhos darão suporte à pesquisa. Destacam-se os estudos de James Bradley, figura-chave para o sucesso da análise de d'Alembert sobre a nutação. Além da obra já mencionada, serão consultadas duas fontes principais. A primeira é o livro de Chapront e Souchay, que fornece uma excelente contextualização global dos temas e personagens relacionados a d'Alembert e Euler. A segunda é o artigo de Jean Eisenstaedt, intitulado *Bradley's discovery of nutation*, publicado em 2001, que sintetiza os processos e complementa a pesquisa com um robusto aparato bibliográfico. Adicionalmente, será considerado o livro de Eisenstaedt *Antes de Einstein: relatividad, luz y gravitación* originalmente publicado na França em 2005 e traduzido para o espanhol em 2015. Este último oferece um panorama sobre a relatividade e a gravitação antes de Einstein, tópicos que também possuem relevância para esta pesquisa.

Com o objetivo de contextualizar historicamente a detecção e os estudos sobre a precessão até alcançar a detecção e os estudos da nutação, a abordagem apresentada por Chapront e Souchay será complementada pelo artigo de Denis Savoie, chamado *The precession of the equinoxes from Hipparchus to Tycho Brahe*. Esse artigo apresenta aspectos relevantes, como um panorama das figuras históricas que discutiram a precessão, considerações geométricas que ilustram algumas linhas de pensamento e um corpo bibliográfico que ajudará no aprofundamento de discussões ao longo do trabalho.

Para abordar o desenvolvimento e a importância do cálculo diferencial leibniziano no século XVIII e sua influência no tratamento analítico da precessão e da nutação realizado por d'Alembert, será utilizada como base a tese de doutorado de Gerard Émile Grimberg, intitulada *A Constituição da Teoria das Funções de Várias Variáveis no Século XVIII: O ìnicio da Análise Moderna*. Nesse trabalho, encontra-se uma sólida contextualização do cálculo diferencial de Leibniz, das expedições para a medição da forma da Terra e do princípio de d'Alembert, que serão fundamentais para a análise proposta.

Por fim, para discutir o desenvolvimento histórico do aprimoramento dos telescópios, serão utilizadas três referências principais: o livro de Arthur Berry, de 1899, intitulado *A Short History of Astronomy*; o livro de Henry C. King e Harold S. Jones de 1955 denominado *The History of the Telescopes*; e o artigo denominado *Telescopes* de Jim Bennet publicado em 2016. Em especial, o segundo livro será a fonte mais relevante para essa etapa, pois contextualiza detalhadamente as nuances do processo histórico de evolução dos telescópios.

1.3 Estrutura do trabalho

As discussões propostas neste trabalho iniciarão com uma contextualização global do histórico de detecção e da caracterização dos fenômenos da precessão e da nutação. O segundo capítulo terá como ponto de partida os primeiros registros sobre a precessão, discutindo como Hiparco de Niceia percebeu o fenômeno e como, posteriormente, o problema foi sendo debatido por figuras como Ptolomeu, Tycho Brahe, Johannes Kepler, Isaac Newton, entre outros.

De modo análogo, o mesmo processo será desenvolvido em relação à nutação, que, embora tenha um histórico de detecção mais curto, facilitado por avanços tecnológicos nas ferramentas de observação e metodologias investigativas, é resultado de uma rede de discussões no século XVIII que antecedeu sua confirmação. O ponto de partida dessa investigação será a análise da variação da obliquidade da eclíptica. Esse debate se fundamentará na comparação de novos e antigos dados posicionais terrestres, tendo como principais articuladores nomes como Louville, Le Monier, Clairaut, Bradley, d'Alembert, Euler, entre outros.

Em seguida, será abordado o processo histórico de aprimoramento dos tratamentos analíticos dos fenômenos da mecânica, com ênfase no uso do cálculo diferencial, encerrando as discussões. A base dessa análise será o tratamento analítico do problema da forma da Terra proposto por Clairaut, após a expedição de Maupertuis à Lapônia. A partir disso, serão apresentados os principais indícios do tratado de 1749 de d'Alembert, que demonstram seu sucesso matemático ao investigar os fenômenos de precessão e nutação do eixo de rotação da Terra.

O quarto capítulo será dedicado a d'Alembert, partindo de problemas-chave por meio de uma breve abordagem biográfica do autor, incluindo seu tratado de dinâmica, a memória dos ventos, a teoria da Lua, entre outros. Serão apontadas também suas tendências de estudos e como elas culminaram na famosa obra de d'Alembert de 1749, dedicada ao estudo da precessão e nutação. Com isso, serão identificadas algumas das principais influências científicas registradas, assim como suas implicações nos trabalhos desenvolvidos pelos personagens anteriormente citados.

Ainda neste capítulo, será apresentada sua obra já mencionada, com foco nos assuntos de interesse investigativo deste trabalho, guiados pelas questões de pesquisa. Sendo assim, se faz necessária uma discussão sobre como se desenvolveu seu tratamento analítico do problema, analisando, por sua vez, como foram aplicados os conceitos do cálculo diferencial leibniziano, juntamente com os conceitos físicos e geométricos dos quais ele tinha domínio.

Por fim, na conclusão do trabalho, serão abordadas as questões sobre a originalidade de d'Alembert, enfatizando seu êxito ao utilizar o cálculo diferencial para sintetizar e tratar analiticamente problemas de mecânica no século XVIII.

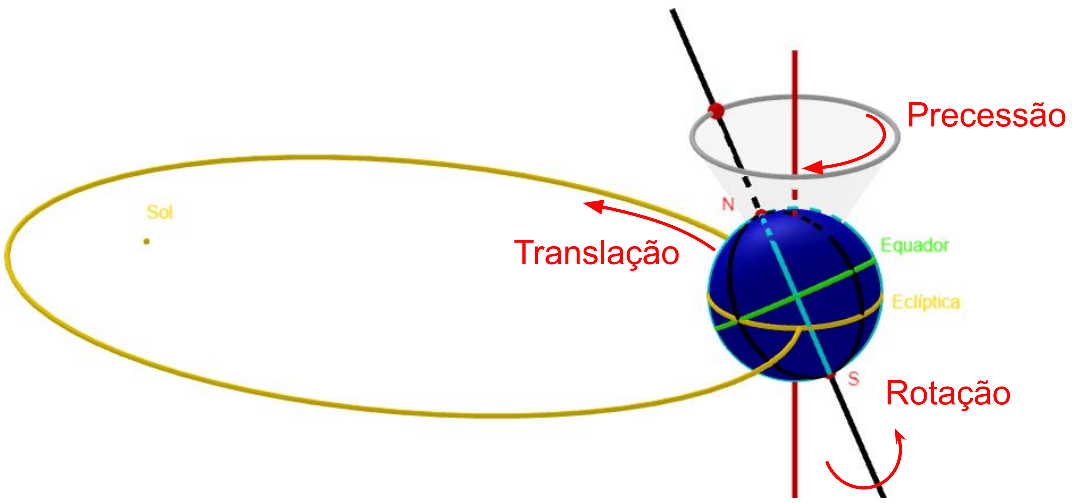
2 HISTÓRICO DE ESTUDOS SOBRE A PRECESSÃO E A NUTAÇÃO

2.1 Desenvolvimento histórico da precessão

Os movimentos de maior relevância para a astronomia até o século XVIII são, em especial, os que caracterizam a passagem dos dias e dos anos — movimentos de rotação e de translação do eixo da Terra — e os que influenciam as estações do ano e a posição dos polos celestes — movimentos de precessão e de nutação. O enfoque aqui será descrever brevemente os dois últimos citados, apresentando alguns esquemas em imagem para facilitar a visualização.

O movimento de precessão, pode ser descrito como sendo uma rotação periódica do eixo de rotação da Terra ao redor de um eixo ortogonal ao plano de sua órbita. De modo similar, trata-se de uma rotação do plano equatorial da Terra em relação a um eixo ortogonal ao plano da eclíptica, que passa pelo centro gravitacional da Terra[1]. Ambos os elementos mencionados estão, respectivamente, destacados em verde e vermelho na figura. 1.

Figura 1 – Representação dos sentidos dos movimentos da Terra.



Fonte: Elaborada pelo autor por meio do software Geogebra.

Segundo Chapront e Souchay (2006), esse fenômeno tem seu primeiro registro histórico, presente no *Almagesto* de Cláudio Ptolomeu (90-168). Em especial, trata-se da constatação do astrônomo grego Hiparco de Niceia sobre o fenômeno, onde, ao realizar medições referentes à passagem do ano na Terra, se intriga ao perceber que o retorno do

[1]A trajetória quando completa, se vista de forma traçada, forma um cone de revolução, tendo como origem o centro da Terra.

sol aos pontos solsticiais e equinociais[2] não parece ter exatamente 365 dias e $\frac{1}{4}$, quando comparado com o retorno às mesmas estrelas fixas de onde iniciaram-se as coletas[3]. Essas consm concluir que o ano acaba sendo mais longo, conjecturando então que a “esfera das estrelas fixas"— esfera celeste — movimenta-se de forma lenta[4] na direção oposta à do movimento de translação da Terra. Isso acontece por conta da diferença entre os sentidos de precessão do eixo terrestre e do movimento de translação do planeta em torno do Sol, como ilustra a figura 1.

Ptolomeu ainda relata que, Hiparco em sua época, identifica uma diferença de 6 graus de distância dos pontos do equinócio de outono com relação aos que se encontrava antes[5]. Enquanto que, para a época de Timocharis (300a.E.C.-270a.E.C.), essa discrepância era de aproximadamente 8 graus para os mesmos pontos. Tendo isso em vista, Segundo Chapont e Souchay (2006), Ptolomeu compara suas observações com as de Hiparco, concluindo que as estrelas da esfera celeste se movem para leste em cerca de um grau a cada cem anos, constituindo assim, um movimento secular. Além disso, levanta uma hipótese de que Hiparco já suspeitava desse movimento secular, acrescentando que essa variação ocorre em torno de um eixo que é perpendicular ao plano da eclíptica — eixo destacado em vermelho na figura 1. Sendo assim, Ptolomeu pode ter sido a primeira pessoa a apresentar uma estimativa para essa variação precessional.

Seguindo Hiparco e Ptolomeu, outras pessoas investigaram esse movimento precessional seja acrescentando algo ou sugerindo outras hipóteses, entretanto o estudo irá se ater as principais contribuições[6]. O matemático e astrônomo Johanes Kepler, propõe uma nova estimativa para esse fenômeno a partir do sistema copernicano e dos dados observacionais de Tycho Brahe, o interpretando como sendo uma rotação lenta e uniforme da linha dos equinócios. Kepler considera o plano da eclíptica como fixo, acrescentando

[2]Equinócio e solstício são respectivamente: os momentos do ano em que o Sol atinge sua declinação máxima em cada hemisfério e os momentos em que o sol incide igualmente nos dois hemisférios, ou seja, quando ele está exatamente sob a linha do equador terrestre.

[3]Ce qui le surprend le plus, c’est qu’en comparant le retours du Soleil aux points solstitiaux et équinoxiaux, l’année lui paroît n’être pas tout à fait de 365 jours $\frac{1}{4}$, et qu’en comparant les retours aux mêmes étoiles fixes, il la trouve plus longue ; d’où il conjecture que la sphere des étoiles fixes a elle-même une certaine marche lente qui lui fait parcourir la suite des points du ciel, et qui, comme celles des planètes, est en sens contraire du premier mouvement par lequel tout le ciel est entraîné perpendiculairement au cercle qui passe par les pôles de l’équateur et de l’oblique. (Ptolomeu (1496) apud) Chapront; Souchay, (2006, p.xiii).

[4]Em termos atuais, o movimento precessional leva cerca de 25.780 anos para completar uma volta.

[5]segundo Dennis Savoie (2001), isso ocorre em um tratado de Hiparco sobre o deslocamento dos pontos equinociais e solsticiais, que infelizmente o único registro é o apresentado por Ptolomeu

[6]Savoie (2001) discute uma linha cronológica sobre como esse fenômeno se desdobrou até chegar em Kepler.

que sua inclinação é constante com relação ao plano do equador terrestre. Tendo em vista as condições descritas, uma nova estimativa da velocidade precessional é apresentada, sendo de aproximadamente $50''$ por ano, enquanto que anteriormente a mesma era de $36''$.

A velocidade de rotação da linha dos equinócios se torna também um importante objeto de estudo, tendo diversas variações em seu valor com o decorrer dos diferentes estudos dos pensadores, de modo que a princípio foi determinada por Ptolomeu como sendo de $36''$ por ano e posteriormente foi reestabelecida como sendo de aproximadamente $50''$ por ano.

Após Kepler, Isaac Newton adentra nos estudos sobre precessão, de modo que seu trabalho vem a ser discutido diversas vezes pelos pensadores que o seguiram posteriormente nesses estudos. Newton calcula que a velocidade de rotação da linha dos equinócios seria de $50''$ por ano, entretanto, posteriormente d'Alembert mostra no capítulo XIV da sua obra *Recherches sur la précession des équinoxes* que essa solução apresentada continha erros teóricos[7].

Na proposição 66 do livro I Newton apresenta que a taxa da variação de precessão teria duas principais contribuições gravitacionais: a do Sol e a da Lua. Esta consideração é um ponto bastante importante para o decorrer do desenvolvimento das pesquisas que viriam à acontecer posteriormente. Ainda nessa proposição, no desenvolvimento de seus corolários, acaba sendo notado que o movimento precessional não ocorre de forma perfeita, uma vez que, ao levar em conta as variações orbitais lunares, bem como sua excentricidade e inclinação com relação ao plano do equador terrestre, conclui que isso resultaria em uma pequena oscilação no eixo de rotação da Terra, que no entanto não fora descrito com mais profundidade.

Neste ponto, é interessante destacar uma diferença que será melhor notada posteriormente, ao tratar sobre a nutação. Dadas as considerações anteriores sobre a precessão, evidencia-se que o movimento precessional terrestre já era conhecido desde antes da era comum, ou seja, antes da instrumentação mais sofisticada para observação celeste, aprimoradas e desenvolvidas entre os séculos XVI e XVIII, com o advento das inovações e precisões dos astrônomos Tycho Brahe (1546-1601), Galileu Galilei (1564-1642), Newton e outros. Sendo assim, a precessão se destaca como um fenômeno que pôde ser estudado a olho nu — sem o uso de instrumentos de ampliação de imagem — diferentemente da

[7]Chapront; Souchay, 2006, p.xv

nutação.

2.2 Os Telescópios no século XVII e início do XVIII

O objetivo desta seção explorar a relação entre o desenvolvimento dos telescópios de refração e a descoberta do movimento de nutação da Terra, destacando como os avanços tecnológicos foram essenciais para a precisão observacional e para a validação desse fenômeno astronômico. Para isso, será traçada uma linha histórica que parte das ferramentas observacionais utilizadas por Tycho Brahe — cujos instrumentos pré-telescópicos marcaram o início da astronomia de alta precisão —, passando pela adaptação da luneta por Galileu Galilei, até os desenvolvimentos técnicos mais avançados do século XVIII, culminando nos trabalhos de Samuel Molyneux (1689-1728).

A escolha de Molyneux como figura central neste contexto não é aleatória, pois ele desempenhou um papel crucial ao investigar o fenômeno da paralaxe estelar, um tema intimamente relacionado à detecção da nutação. Trabalhando em parceria com James Bradley, Molyneux utilizou telescópios refratores para observar a estrela γ Draconis, dando continuidade às investigações iniciadas por Robert Hooke. Essa colaboração não apenas levou à primeira detecção da nutação da Terra, como também revelou o impacto direto do aprimoramento tecnológico na observação de fenômenos astronômicos sutis.

Desse modo, esta seção apresentará como o avanço tecnológico das ferramentas de observação astronômica foi essencial para o sucesso de estudos de Bradley. Além disso, procura evidenciar o papel das metodologias rigorosas empregadas durante o século XVIII, que possibilitaram a transformação um fenômeno hipotético em uma descoberta sólida, confirmada por dados observacionais precisos. A análise abordará, portanto, como o progresso técnico dos telescópios moldou a capacidade das comunidades científicas de explorar questões fundamentais sobre a mecânica celeste e os movimentos da Terra.

O início do século XVII foi fortemente marcado pela demanda de dados observacionais coletados com precisão e em larga escala. Para atender a essa demanda, Berry (1899, p.128) em seu livro denominado *A Short History of Astronomy*, aponta como medida principal o desenvolvimento de duas escolas de excelência astronômica na segunda metade do século XVI[8]. Segundo ele, essa medida foi impulsionada pelo rápido desenvolvimento

[8]Embora não as cite nominalmente, as duas escolas mencionadas coincidem com a fundação do observatório projetado por Tycho Brahe na ilha de Hveen, a maior referência em observação celeste da época.

da álgebra e suas ramificações, destacando-se especialmente o desenvolvimento da notação arábica, a adoção das frações decimais e dos logaritmos, que tiveram seu uso disseminado a partir do início do século mencionado.

Ao citar essa demanda observacional neste período, é naturalmente necessário mencionar as significativas contribuições metodológicas e observacionais do astrônomo dinamarquês Tycho Brahe. Conhecido por suas precisas observações — as melhores da época — e por seus equipamentos de grande qualidade e precisão, de acordo com Linton (2004, p.157) alcançou precisões em suas medições de 4' de arco, conseguindo alcançar posteriormente o marco de 1' de arco[9]. Desfrutando do privilégio de subsídios irrestritos fornecidos pelo rei da Dinamarca Frederick II, teve à sua disposição uma ilha em Hveen — atualmente conhecida apenas como Ven, localizada na Suécia — onde pôde construir seus aposentos e seu observatório com tudo o que precisava, respondendo às demandas observacionais mencionadas.

O advento do telescópio se consolidou nas mãos do construtor e astrônomo Galileu Galilei. Embora possivelmente não tenha sido o primeiro a apontar uma luneta ao céu noturno[10], Galileu desenvolveu aprimoramentos especificamente para a astronomia, consolidando-se popularmente, como o “inventor do telescópio". Dentre suas ferramentas, Linton (2004, p.203-205) cita dois fatores de ampliação que Galileu foi capaz de atingir. Seu primeiro projeto, desenvolvido em 1609, tinha uma capacidade de ampliação de até 8 vezes, enquanto, em 1610, foi capaz de construir outro mais aprimorado, obtendo uma melhora nesse fator para até 20 vezes. O impacto de seus instrumentos e sua curiosidade em investigar os objetos celestes reverberaram por toda a comunidade astronômica do século XVII, trazendo outro salto ainda mais significativo para a história da astronomia, desta vez, voltado para as observações através das lentes de ampliação.

Apesar das adaptações e melhorias desenvolvidas por Galileu, ainda havia um grande defeito: as distorções de imagem causadas pela refração das lentes, em especial a aberração esférica e a aberração cromática, o que atrasou a inserção de suas lunetas como ferramentas de medição[11]. Esse entrave impulsionou um amplo interesse nos estudos

[9]Wesley (1978) faz uma análise sobre a precisão de seus instrumentos.

[10]Thomas Harriot (1560-1621) foi responsável pela primeira observação celeste na América do Norte com registro de uso de uma ferramenta de ampliação. (Montgomery (1999, p.106) apud Linton (2004, p.204))

[11]A aberração esférica diz respeito a uma diferença na refração dos feixes de luz que atingem a lente ou o espelho na região mais próxima à borda, o que faz com que a imagem do objeto observado fique com regiões desfocadas. A outra distorção, também gera uma imagem com regiões desfocadas, mas dessa

sobre lentes e refrações. René Descartes é destacado por King e Jones (1955) como um dos precursores da investigação acerca dos fenômenos citados, e seus resultados foram desenvolvidos e publicados em sua obra *Dioptrique*, lançada em 1637.

Para contornar as aberrações e obter imagens de melhor qualidade, os astrônomos se dedicaram ao desenvolvimento de lentes com a menor abertura angular possível combinada a grandes distâncias focais[12]. Foi constatado que em uma lente de pequena razão de abertura, a aberração é também pequena, o que consequentemente implica em uma menor incidência da aberração cromática. Entretanto, essa combinação encontrou limites físicos, devido às proporções que as lunetas passaram a ter para entregar imagens bastante ampliadas e com o mínimo possível de aberração[13]. Isso levou à construção de ferramentas ópticas com razão de até 1:150, referente ao raio da lente em relação à sua distância focal. Essa magnitude exigia grandes estruturas compostas por cordas e roldanas, presas em grandes mastros, implicando em alguns defeitos posteriores como desalinhamentos das lentes ou vibrações. No entanto, esses problemas se tornaram menores diante das aberrações contornadas, pois a ampliação atingida reduziu drasticamente os indesejados problemas óticos.

Dentre os construtores de grandes telescópios, Johannes Hevelius (1611-1687) destacou-se como um dos primeiros. Ele construiu um observatório em sua própria casa em Danzig, ao norte da Polônia. Usufruindo de suas ferramentas, Hevelius observou o Sol, a Lua, os planetas e também cometas, publicando em 1647 seu primeiro trabalho astronômico, chamado *Selenographia*. Neste trabalho, o foco principal foi apresentar um atlas lunar, com desenhos da lua em todas as suas fases e cerca de 250 formações lunares, superando os mapas apresentados por Christoph Scheiner (1573-1650) e Michel Florent Van Langrenus (1598–1675). Além disso, segundo King e Jones (1955, p.51), Hevelius descreveu também um breve relato sobre seus instrumentos, que incluíam ferramentas com distâncias focais de até 12 pés — aproximadamente 3,6 metros — e ampliação de até 50 vezes.

Seguindo essa tendência de grandes telescópios e motivado pela insatisfação com

vez, a causa diz respeito aos diferentes comprimentos de ondas de cada cor, o que implica em diferentes distâncias focais. Mais detalhes podem ser encontrados em Bennett (2016, p.532-533)

[12]King e Jones (1955, p. 49-50)

[13]A partir daqui, as lunetas serão mencionadas com o uso do termo “telescópio", o critério para essa nomenclatura é o início do processo de grandes ferramentas, com grande poder de ampliação e medição posicional, não atribuindo o termo as lunetas de Galileu, apesar de ter sido cunhado em sua homenagem em 1611 pelo matemático grego Giovanni Demisiani.

os exemplares disponíveis no mercado, em 1659, Christian Huygens publica seu trabalho denominado *Systema Saturnium*, apresentando novos resultados sobre o planeta Saturno. Apesar de ter descoberto Titã, o satélite mais brilhante de Saturno, em 25 de março de 1655, com um telescópio de apenas 2 polegadas de abertura e cerca de 4 metros de distância focal, Huygens só obteve resultados significativos no final deste mesmo ano, após desenvolver, junto com seu irmão Constantijn Huygens Jr. (1628-1697), telescópios ainda maiores. Essas novas construções, com dimensões de até 123 pés — aproximadamente 37,5 metros — permitiram a identificação da sombra do anel do planeta sobre o mesmo e também sua forma plana e circular.

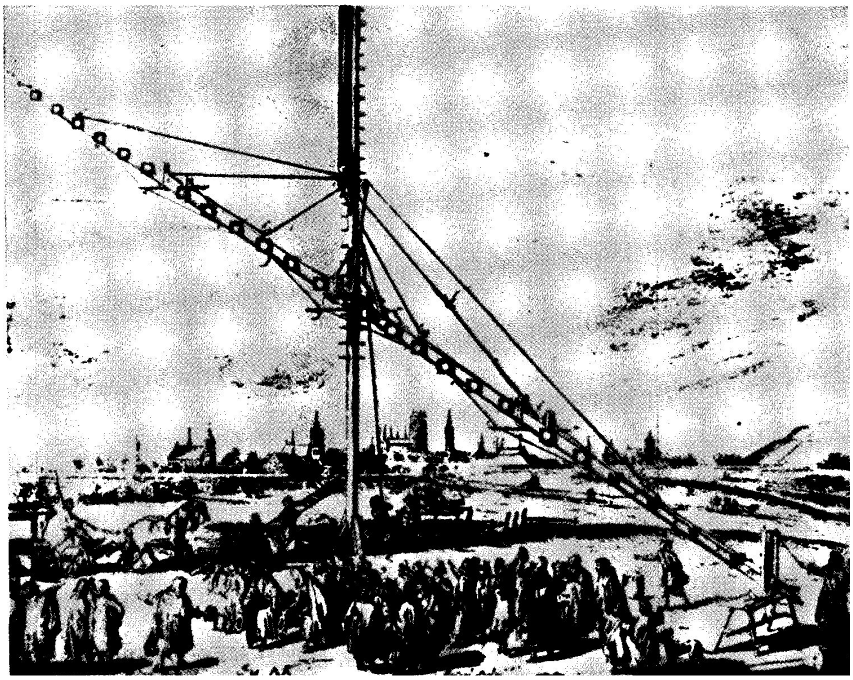
Como consequência dos investimentos de Huygens em construir telescópios mais potentes, Hevelius, ao tomar nota, deu início à construção de telescópios ainda mais potentes em termos de ampliação e dimensão. Dentre suas novas construções, destacam-se três, com distâncias focais de 60, 70 e 150 pés, respectivamente — aproximadamente 18, 21 e 45,7 metros de comprimento. De acordo com King e Jones (1955, p.51), todas essas construções foram descritas em seu trabalho publicado em 1673, intitulado *Machinæ, Coelestis*. A maior delas, ilustrada pela figura 2, teve suas lentes desenvolvidas por um especialista local e, apesar de apresentar problemas devido aos defeitos presentes nas lentes de refração da época, o maior obstáculo desse ambicioso projeto foi sua robusta estrutura:

> Para isso, Hevelius optou por usar madeira. Um tubo constituído de papel, apesar de ser mais leve, seria pouco resistente e frágil, enquanto um tubo de metal, seria muito mais caro e pesado. A estrutura foi seccionada, de modo que cada seção consistia em duas tábuas de 40 pés fixadas de forma ortogonal entre si. Três ou quatro dessas seções, unidas ponta a ponta, formavam uma algo similar a uma calha, onde em cada extremidade se localizavam de um lado a lente objetiva e do outro a lente ocular[14]. Essa composição, reforçada por fios, era suficiente para a utilização noturna, no entanto, nos períodos de crepúsculo ou de presença lunar, era preciso proteger a lente ocular da luz excessiva. Por conta disso, Hevelius fixou tábuas ao longo do tubo para devida contenção. Essas por sua vez, além de contribuir para o realinhamento do equipamento, também o tornava mais rígido em cada seção. Para sua fixação e manuseio, foi

[14]As lentes citadas, tem como finalidade primária a captação da luz e a convergência para segunda lente que, por sua vez, tem como finalidade secundária a refração da luz captada para o olho do observador.

utilizado um mastro de 90 pés para realizar sua suspensão, sendo manipulado pela parte de baixo por meio de cordas e roldanas [15] (King; Jones; 1955, p.52, tradução do autor)

Figura 2 – Telescópio de 150 pés suspenso em Danzing.



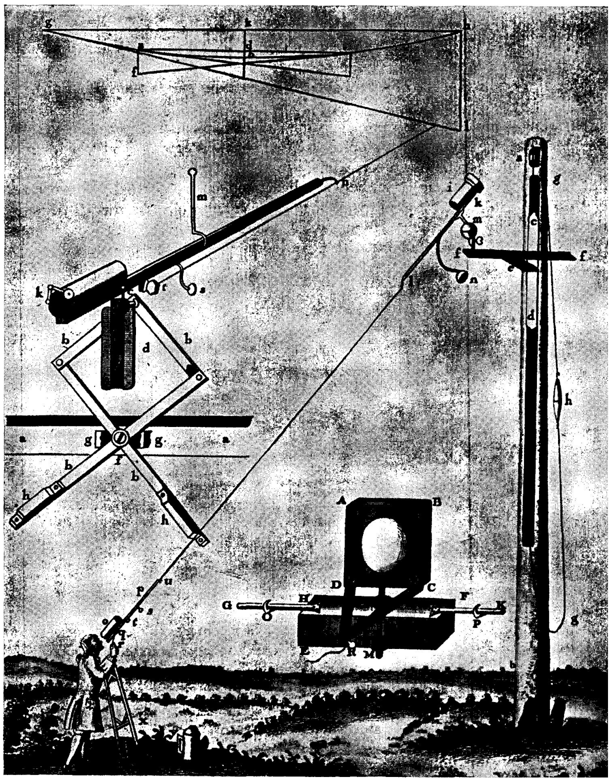
Fonte: King; Jones; 1955, p.53.

Os problemas apresentados por tamanha estrutura não demoraram a aparecer: umidade, vibração, desalinhamento, grande contingente de auxiliares, além de condições climáticas específicas para ser passível de uso ocasional. Deparando-se com esse dilema estrutural, como então contornariam os problemas mencionados? Huygens, segundo King e Jones (1955), sendo um dos primeiros a descartar os telescópios de Hevelius, teve como estratégia inicial a não adesão aos longos tubos rígidos conectando as lentes objetiva e ocular. Para isso, fixou a primeira delas no topo de um longo mastro, de modo que pudesse ter sua posição ajustada por meio de um contra-peso, mantendo-a conectada com a segunda através de um longo fio. Dessa forma, o observador deveria se apoiar em um

[15]For this, Hevelius used wood. A paper tube, although light, would have been too flimsy and fragile, an iron tube too heavy and costly. The tube was sectional, each section consisting of two 40-foot wooden planks fixed at right angles to each other. Three or four of these sections, joined end to end, made a two-sided trough; at the further end was the objective cell, at the other, the eyepiece. This arrangement, braced by wire stays, answered for night use but, during twilight or moonlight, the eyepiece had to be shielded from stray light. Hevelius, therefore, fixed wooden apertures or 'stops' at intervals along the tube. These not only assisted in its-re-alignment but added to the rigidity of each section. The entire apparatus was suspended from a mast 90 feet high and was operated from below by means of ropes and pulleys. (King; Jones 1955, p.52).

suporte no solo e, em seguida, apontar a lente ocular para a objetiva para então, poder observar o objeto celeste em questão. Isso é ilustrado pela imagem 3.

Figura 3 – Telescópio de Huygens sem tubo.



Fonte: King; Jones; 1955, p.55

Essa mudança estrutural lhe rendeu elogios vindos de Newton:

> Para tubos muito longos [ele escreveu] eles são complicados e de difícil manuseio, dado seu comprimento, está sujeito a vibrações, fazendo com que os objetos observados fiquem trêmulos, dificultando sua observação, enquanto, o artifício de Huygens, as lentes oculares são mais facilmente manejáveis e as lentes de ampliação estão firmemente fixadas verticalmente, tornando o polo mais estável[16]. (Newton (Optics, 1931 reimpressão da 4° edição), p.102, Apud. King & Jones; 1955, p.54, tradução do autor)

Como segunda medida de melhoria, Huygens desenvolveu uma combinação específica de lentes[17] que proporcionava uma melhor definição de imagem com um maior campo

[16]For very long tubes [he writes] are cumbersome, and scarce to be readily managed, and by reason of their length are very apt to bend, and shake by bending, so as to cause a continual trembling of the Objects, whereby it becomes difficult to see them distinctly, whereas by his [Huygens'] Contrivance the Glasses are readily manageable, and the Object-glass being fixed upon a strong upright Pole becomes more steady. (Newton (Optics, 1931 reimpressão da 4° edição), p.102, Apud. King & Jones; 1955, p.54)

[17]Descritas por King & Jones; 1955, p.54-57.

de visão. Seu sucesso foi tamanho que chamou a atenção de diversos óticos da época, de modo que em 1661, viajou para a Inglaterra para comunicar aos seus colegas da *Royal Society*. A partir deste ponto, o processo histórico da evolução dos telescópios passa a apresentar indícios mais diretos sobre seu impacto no trabalho de constatação do movimento de nutação do eixo terrestre realizado por Bradley e que, posteriormente, permitiria a d'Alembert ter subsídios de dados suficientes para realizar seu tratamento analítico do problema. Essa questão se evidencia pela relação de Bradley com Samuel Molyneux (1689-1728), uma vez que, King e Jones (1955, p.56) o conectam a Huygens no seguinte trecho:

> Algum tempo depois da visita de Huygens, Samuel Molyneux descreveu a técnica de Huygens na obra Opticks de Robert Smith. O seu pai, William Molyneux, visitou Huygens em 1685 e quem lhe mostrou os vários instrumentos no seu jardim em Haia. É provável que este contato pessoal com Huygens tenha contribuído muito para despertar o interesse de Molyneux pelos problemas do telescópio. [18] King e Jones(1955, p.56).

Deste modo, conseguimos apresentar parte do processo histórico do desenvolvimento e aprimoramento dos telescópios refratores até que se apresentassem seus primeiros indícios de impacto nos estudos sobre a descoberta da nutação da Terra, conectando assim o processo a Molyneux, o qual será apresentado como fonte direta para James Bradley no capítulo seguinte. Para além dele, Hooke e Flamsteed tiveram um importante papel neste processo, entretanto suas contribuições não serão aprofundadas neste trabalho.

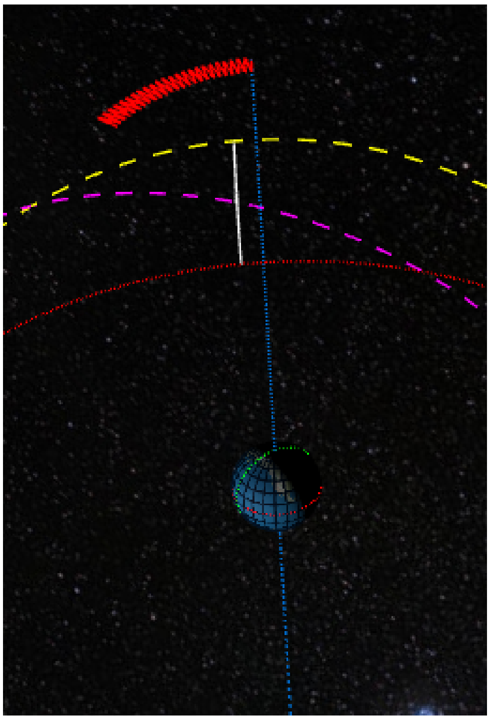
2.3 Desenvolvimento histórico da nutação

Até então, foi discutido um pouco sobre o que é o movimento precessional, como se deu sua constatação até chegar nas mãos de Newton e o desenvolvimento dos telescópios refratores. Agora a discussão abordará o que caracteriza o movimento de nutação do eixo terrestre. De modo simples, pode ser descrito como uma pequena variação periódica dentro do movimento de precessão, ou seja, uma oscilação da obliquidade do plano equatorial da Terra com relação ao plano da eclíptica. Ao passo em que o eixo da Terra realiza

[18] Some time after Huygens' visit, Samuel Molyneux gave an account of Huygens' technique in Robert Smith's Opticks. His father, William Molyneux, visited Huygens in 1685 and was shown the various instruments in his garden at the Hague. Probably this personal contact with Huygens did much to kindle Molyneux's interest in the problems of the telescope. King e Jones(1955, p.56)

sua revolução precessional, sofre uma oscilação angular periódica, sendo assim, a nutação delimita uma região a qual o eixo irá varrer enquanto precessiona. Essa oscilação tem uma causa bastante clara, de principal influência como sendo lunar, pois seu período coincide com o período orbital da lua em torno da Terra, sendo ele de aproximadamente 18,6 anos. A figura 4 a seguir ilustra a trajetória desse movimento.

Figura 4 – Representação da composição entre o movimento de precessão e nutação do eixo terrestre.



Fonte: Site observatório Nacional.

A região entre os planos representados respectivamente pelas circunferências em vermelho — plano equatorial — e amarelo — — plano da eclíptica —, é onde se apresenta a variação da amplitude de movimento de nutação do eixo da Terra, que por sua vez é representado por um arco variável branco[19]. Deste modo, conclui-se que a precessão e a nutação da Terra, quando vistas de forma composta, fazem com que o seu eixo siga uma trajetória senoidal. O cone em vermelho junto dos pontos em sua base foram colocados para ilustrar a rotação da Terra, podendo ser visualizado em movimento ao acessar o link da fonte.

A literatura, de modo geral, atribui a Bradley o êxito em determinar o principal termo da nutação, atribuindo sua origem como sendo lunar e cujo período seria o movimento

[19] O site https://daed.on.br/astro/obliquidade-da-ecliptica administrado pelo Observatório Nacional, apresenta uma excelente simulação de fácil manuseio desses movimentos.

médio dos nodos da órbita da Lua[20], ou seja, diz respeito ao período orbital da Lua em torno da Terra mencionado anteriormente. Ainda sobre a nutação, um fato curioso é que, antes mesmo de Newton ser o primeiro a especular sua existência, ainda que a tenha considerado irrelevante, não foi a primeira vez que o fenômeno apareceu na literatura se relacionando aos movimentos da Terra. Segundo Savoie (2001, p.128), os astrônomos árabes já haviam levantado uma hipótese sobre esse tipo de movimento com relação ao eixo terrestre, tendo como base a estimativa da precessão apresentada por Ptolomeu que, apesar de ser possivelmente uma primeira aproximação para esse fenômeno, tinha suas inconsistências, as quais fizeram com que adotassem uma falsa nutação para conseguir utilizar sua teoria sem questionar a validade de sua estimativa, que no entanto, posteriormente foi desconsiderada.

A confirmação do movimento de nutação da Terra realizada por Bradley só aconteceria cerca de 20 anos após sua detecção. Ainda que não soubessem sobre o fato, os responsáveis pela primeira detecção foram Robert Hooke (1635-1703), John Flamsteed (1646-1719) e outros astrônomos do século XVII. Neste trabalho que partilhavam, buscava-se a detecção de um fenômeno conhecido por paralaxe estelar[21], porém não contavam com que seus dados estivessem sob influência de uma nutação do eixo da Terra.

Especificamente, para que essa detecção fosse possível, segundo Eisenstaedt (2001), notou-se que um método bastante vantajoso seria trabalhar com observações realizadas em um setor zenital[22], pois assim, as medições das paralaxes estelares seriam realizadas com mais precisão. Isso se dá porque ao coletar constantemente dados posicionais de estrelas ideais para observação — em termos de brilho e região zenital —, poderiam ser descartados erros por mal ajuste posicional das ferramentas de coleta.

Para isso, um telescópio de longa distância focal — aproximadamente 36 pés — foi construído e fixado em uma estrutura de gimbals[23] que, com a ajuda da ação da gravidade da Terra, favorecia o apontamento para o zênite[24] local do instrumento. Esse equipamento permitiu que fosse atingida uma marca limite de precisão limitada em 5" de arco conforme mencionam King & Jones (1955, p.113). A figura chave para o estudo da nutação foi

[20]Chapront; Souchay, 2006, p. xvii

[21]Técnica utilizada para estimar a distância de estrelas com relação ao Sol, mediante um deslocamento aparente de uma estrela resultante da mudança de posição do observador, neste caso, essa mudança considerava a posição da Terra em pontos opostos de seu período orbital.

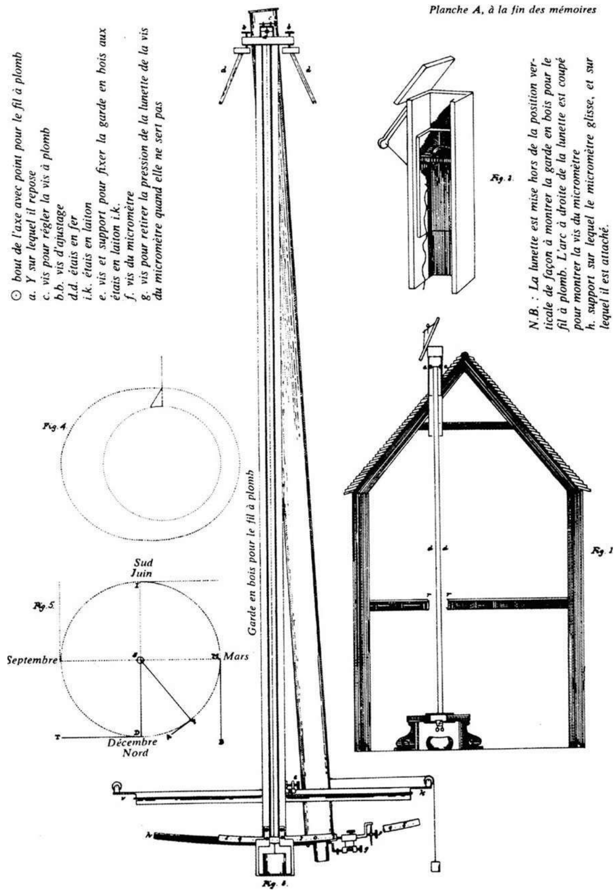
[22]Região celeste localizada sob um arco perpendicular ao plano onde se encontra o telescópio.

[23]Base multiarticulada que permite estabilizar a imagem de ferramentas de observação a depender do objetivo.

[24]Região celeste localizada no ponto exatamente a cima do observador ou da ferramenta astronomica.

Bradley, que, por sua vez, teve contato com um instrumento muito similar ao de Hooke, contendo 24 pés de comprimento; a ferramenta foi construída por George Graham, a pedido seu amigo Samuel Molyneux. Em especial, essa estrutura foi usada para estudar a mesma estrela estudada por Hooke, chamada γ Draconis. Eisenstaedt (2015) apresenta em seu livro *Antes de Einstein: relatividade, luz y gravitación* uma imagem que representa o modelo do telescópio de Bradley, vide figura 5.

Figura 5 – Modelo do telescópio e observatório de Bradley.



Fonte: Charles Kittel et al., Cours de physique de Berkeley, t. I: Mécanique, Armand Colin, París, 1972, lámina, apud Eisenstaedt (2015).

No estudo de Hooke, γ Draconis apresentou uma paralaxe de $27''$, entretanto, este dado não foi bem aceito pela comunidade acadêmica da época, sendo apontado como excessivo segundo Allan Chapman (1993, apud Eisenstaedt(2001)). Em contrapartida, Bradley (1729, apud Eisenstaedt (2001)), parece estar mais favorável aos dados de Hooke, uma vez que, considerando a descrição do ferramental usado e, tendo em vista o comprimento focal de trinta e seis pés do telescópio, sua argumentação tende a duvidar de que a medição da paralaxe estivesse sujeita a um erro tão grande.

Como os primeiros contatos de Bradley com a paralaxe de Hooke esteve associado aos estudos de Molyneux, que por sua vez, de acordo com Eisenstaedt (2001) no ano de 1726 redireciona sua atenção a outras demandas enquanto, concomitantemente seu telescópio quebra, Bradley acaba por perder acesso a essa fonte. Em contrapartida, no ano seguinte, conseguiria com que Graham construísse um telescópio de aproximadamente 12,5 pés na casa de uma tia em Wansted, considerando suficiente as dimensões adotadas para o grau de precisão que sua pesquisa demandava. Tendo isso em vista, prosseguiu com seus trabalhos até conceber em 1728, uma explicação a respeito de uma aberração detectada, que foi publicada nas *Philosophical Transactions of the Royal Society of London* do ano seguinte.

Em sua explicação, Bradley segundo Eisenstaedt (2001) aponta a seguinte descrição da aberração:

> De modo similar, encontrei algumas pequenas variações na declinação de outras estrelas em anos diferentes, que não parecem proceder da mesma causa. [...] No entanto, essas minímas alterações procedem de alguma causa regular, ou são ocasionadas por alguma mudança nos materiais do meu instrumento, ainda sou incapaz de determinar com certeza[25](Bradley (1729, p. 652) apud Eisenstaedt (2001)).

É interessante perceber que, apesar de toda a dimensão dos telescópios refratores usados por Bradley, que o permitiram atingir uma precisão de 1" de arco [26] a detecção do fenômeno ainda é vista como uma variação muito sutil. Isso justifica o fato de Newton não ter se aprofundado em investigar o fenômeno, uma vez que, para além dessa dificuldade, não haviam dados disponíveis que pudessem ser utilizados para caracterizá-lo, dado que Huygens apesar consolidando, concomitantemente, a eficácia dos processos de aprimoramento dos telescópios e suas metodologias. Em seu trabalho final *An apparent Motion Observed in Some of the Fixed Stars*, apresentado em 1748, Bradley ainda apresenta uma longa descrição dos métodos, ferramentas e testes por ele realizados. Dessa forma, obteve a certeza de que a precisão de suas técnicas e ferramentas seria suficiente para

[25]I have likewise met with some small Varieties in the Declination of other Stars in different Years which do not seem to proceed from the same Cause. [...]. But whether these small Alterations proceed from a regular Cause, or are occasioned by any Change in the Materials, etc., of my Instrument, I am not yet able fully to determine.(Bradley (1729, p. 652) apud Eisenstaedt (2001)).

[26]King & Jones; 1955, p.113.

detectar o fenômeno investigado. Em outro comentário apresentado por Eisenstaedt (2001), Bradley revela que para ele já era razoável imaginar que, segundo a influência do Sol e da Lua sobre a precessão da Terra descrita por Newton, haveria de sofrer variações em diferentes anos.

Ainda que a nutação tenha sido prevista por Newton e detectada por Bradley, como apresentado anteriormente, os avanços matemáticos mais significativos vieram através de d'Alembert e Euler, ao apresentarem tratativas essencialmente mais corretas do problema. No que diz respeito a Nutação, Chapront e Souchay ao analisarem o tratado de 1749 *Recherches sur la précession des équinoxes* de d'Alembert, onde é feita uma análise precisa sobre a proposição 39 do Livro III da obra *Principia* de Newton, levantam duas hipóteses para o fato de que d'Alembert ter ignorado o trabalho de Newton sobre a nutação. A primeira hipótese é de que d'Alembert entende por nutação o termo descoberto por Bradley, que não aparece no trabalho de Newton. A segunda hipótese é de que d'Alembert percebe que através das equações diferenciais apresentadas em seu tratado, poderiam ser determinadas as estimativas dos termos solares apresentados na obra de Newton, mostrando que a mudança de fase prevista por ele não existe, deste modo, ao se dar conta disso, d'Alembert não quis adicionar uma critica a mais à Newton.

As duas hipóteses são reflexões interessantes de serem analisadas, entretanto essa discussão não será aprofundada. No que tange a segunda hipótese apresentada pelos autores citados anteriormente, nota-se uma informação bastante relevante que se relaciona com a questão principal deste trabalho, que é buscar tensionar as discussões em torno da importância que o cálculo diferencial e a análise do século xvii, permitiram não apenas estimar fenômenos, mas chegar a uma aproximação bastante precisa deles, principalmente os de difícil determinação por meio apenas de observações empíricas, como foi o caso da precessão e mais ainda da nutação.

Para dar sequência à discussão sobre a precessão e nutação presente nos estudos de d'Alembert, é interessante ressaltar a presença do trabalho de um pensador chamado Louville que realizou um estudo bastante relevante para a obra *Recherches sur la précession des équinoxes* ao comparar os dados das antigas observações astronômicas aos dados do seu tempo, isso resultou na identificação de um fenômeno que ficou conhecido como variação secular da obliquidade da eclíptica, que pode ser melhor visualizado se pensarmos nele como um balanço do eixo da terra, assim como acontece com um pião mais pesado de um lado do que do outro [27].

É após esse trabalho de Louville que o questionamento de Le Monier - citado ao inicio - está direcionado, ele afirma também que “há razões para crer que as principais causas que alteram esta obliquidade são na sua maioria periódicas, & nunca estive disposto a adotar a suposta diminuição real, proposta em 1716 por M. de Louville"[28] (Chapront; Souchay, 2006, p.xxii, tradução nossa). Comentário que por sua vez, apesar da ignorado por d'Alembert quanto as possíveis observações imprecisas adotadas por Louville, o mesmo o segue de bom grado em matéria de astronomia, apresentada por Le monier em *Essai sur l'historie et sur le progrès de l'astronomie*[29] servindo de introdução as instituições astronômicas, mas não concorda com as ideias apresentadas por ele com relação a mecânica celeste. Posteriormente, d'Alembert volta a essa hipótese de Louville em 1754 em *Additions aux recherches sur la précession des équinoxes*, mostrando que uma segunda aproximação na solução das equações diferenciais do tratado de 1749 não apresenta um termo secular e que o mesmo teria de ser muito pequeno[30].

Euler por sua vez, apresenta uma prova teórica deste movimento secular da ecliptica em sua memória *Investigatio perturbationum quibus planetarum motus ob actionem eorum mutuam afficiuntur*[31], mostrando que esse efeito tem origem por conta das perturbações à órbita da Terra, causadas pelos planetas, ganhando assim o prêmio oferecido pela Academia real das ciências de Paris, no ano de 1756.

Uma outra discussão bastante importante impacta diretamente as previsões e cálculos da precessão e nutação, diz respeito ao formato e homogeneidade da terra, esta discussão foi motivo de bastante discussão. Chapront e Souchay (2006) partem dos dados apresentados por Newton nas proposições 18, 19 e 20 da obra *Principia*, onde ele considera a Terra como um elipsoide homogêneo e em rotação, com um achatamento nos polos e, também estabelece de modo teórico, o valor de $\frac{1}{229}$ para a sua elipticidade. Essa discussão perpassa diversos estudiosos, envolvendo até mesmo expedições para determinar o comprimento de um arco meridiano de 1° perto do círculo polar e perto do

[27]Chapront; Souchay, 2006, p.xix-xx

[28]“il y a lieu de croire que les principales causes qui altèrent cette obliquité sont la plupart périodiques, & je n'ai jamais été disposé à adopter la diminution prétendue réelle, proposée en 1716 par M. de Louville"(Chapront; Souchay, 2006, p.xxii).

[29]Ensaio sobre a história e o progresso da astronomia.

[30](Chapront; Souchay, 2006, p.xxiii)

[31]Uma investigação dos distúrbios pelos quais os movimentos dos planetas são afetados por sua ação mútua.

equador, confirmando assim a teoria de que a terra se trata de um esferoide achatado e estabelecendo novos valores para a elipticidade da Terra, que por sua vez impulsiona novas discussõesacerca desses valores[32]. O processo de elaboração da teoria da forma da Terra será desenvolvido a seguir.

[32]Chapront; Souchay, 2006, p.xxxvi-xlii

3 O USO DO CÁLCULO DIFERENCIAL LEIBNIZIANO

A demanda observacional mencionada no início do trecho sobre os telescópios refratores, nos primeiros anos do século XVII, consolidou-se junto à necessidade de criar e fortalecer comunidades científicas na Europa. Em meio a uma crise nas ideias científicas, que contrapunham os ideais Newtonianos e cartesianos, destacaram-se duas grandes comunidades acadêmicas: a *Royal Society* e a Academia de Ciências de Paris. Cohen (1980, p. 4-5) destaca esse início do século XVII como o período de surgimento de uma nova ciência, reforçando a dualidade entre o Newtonianismo e o cartesianismo.

Dessa disputa de narrativas, o cálculo diferencial leibniziano ganha espaço como uma ferramenta de enorme importância. Em 1696, L'Hôpital publica seu trabalho *Nova Methodus de Analyse des infiniment petits pour l'inteligence des lignes courbes*, onde apresenta de forma sintética a base do cálculo diferencial de Leibniz. Esse trabalho torna-se uma referência na França para a difusão dessa nova abordagem na análise de problemas matemáticos e, posteriormente, de problemas da mecânica, especialmente aqueles relacionados a conceitos e grandezas ligados ao movimento.

3.1 A Influência do cálculo diferencial Leibniziano na mecânica da primeira metade do século XVIII

A aplicação do cálculo leibniziano no estudo das grandezas de movimento pode ser observada por exemplo, no caso do problema da curva isócrona[1], proposto inicialmente por Leibniz aos cartesianos. Contudo, Johan e Jacob Bernoulli, cada um à sua maneira, ofereceram um tratamento analítico do problema utilizando o cálculo diferencial de Leibniz. Após esse desenvolvimento, seguiu-se uma discussão sobre a relação entre força viva e quantidade de movimento, que também foi abordada de maneira analítica, sendo apresentada por Leibniz em seu *Specimen Dynamicum*.

Os apontamentos anteriores culminam na elaboração da mecânica leibniziana, impulsionada pelas críticas à física cartesiana. Leibniz apresenta um tratamento analítico a respeito do choque de dois corpos, rediscutindo a lei da continuidade por meio do cálculo infinitesimal, consolidando sua metodologia como fundamental na mecânica dos corpos. Grimberg (2001, p. 35) afirma que"o laço entre o algoritmo leibniziano e a ciência do

[1]Problema cinemático que buscava a construção de uma curva tal que o tempo necessário para que um objeto percorra dois pontos quaisquer fosse constante.

movimento é o caráter espetacular que reveste o desenvolvimento da mecânica a partir de 1690".

Pierre Louis Moreau de Maupertuis (1698-1759), uma das figuras centrais na discussão desenvolvida nesta seção, foi um importante defensor do Newtonianismo dentro da Academia de Ciências de Paris — assim como Alexis Clairaut e Jacques Cassini. Interessado em aprimorar seus conhecimentos em cálculo diferencial, no final da década de 1720, buscou a orientação de Johann Bernoulli em Basileia. Durante esse período, insatisfeito com a forma como Newton havia abordado certas equações diferenciais, ele passou a buscar métodos alternativos e mais diretos, mas não obteve sucesso.

Apesar de sua admiração por Newton, Maupertuis identificava em Leibniz um maior potencial para expressar as leis da natureza de forma mais eficaz. Ele via o método leibniziano como mais direto e adaptável ao tratamento de problemas complexos, em contraste com a abordagem apresentada no *Principia*, Newton tendia a utilizar métodos geométricos, muitas vezes omitindo processos diferenciais por hábito ou pela intenção de manter certos detalhes em segredo. Dessa forma, Maupertuis desempenhou um papel fundamental na introdução das ideias Newtonianas na Academia de Paris, mas com uma perspectiva que reconhecia o valor do cálculo diferencial leibniziano.

Esse cenário caracteriza o período a partir da década de 1730 como o início de uma nova era para os tratamentos analíticos dos problemas da mecânica, atendendo à demanda por uma abordagem mais algebrizada, reproduzível e com uma linguagem mais objetiva. No entanto, haviam duas vertentes de pensamento matemático em alta, a Newtoniana, defendida por Maupertuis e a cartesiana, defendida por Voltaire, Montesquieu e outros. A corrente cartesiana defendia a teoria de Huygens, que propunha que a Terra era achatada no equador e alongada nos polos, em oposição à teoria Newtoniana, que afirmava exatamente o contrário. Essa controvérsia, levou a Academia de Ciências de Paris encomendar duas expedições no ano de 1735 buscando resolver o problema por meio de medições. Uma delas foi para a Lapônia, com Maupertuis, Clairaut para medir a curvatura do meridiano próximo ao polo norte e outra para o Peru, com Charles-Marie de La Condamine (1701-1774), Pierre Bouguer (1698-1758), para medir a curvatura do meridiano perto do equador. Ambas expedições concluíram a favor da teoria Newtoniana. De volta da expedição, Clairaut utilizando do cálculo diferencial, passa a trabalhar em um tratamento analítico para o problema.

No que diz respeito aos novos métodos aplicados aos problemas físicos, a busca por formas de resolver equações diferenciais por meio do conceito de integração de funções com mais de uma variável — onde essas variáveis não são separáveis — ganha protagonismo. Esses métodos são representados, por exemplo, na seguinte equação:

$$A(x, y)dx + B(x, y)dz = 0. \tag{3.1}$$

A resolução dessa equação diferencial envolve a busca por uma função $P(x, y)$ cuja diferencial tenha a forma $dP = Adx + Bdy$. Louis de Launay de Fontaine (1709-1779) e Alexis Claude de Clairaut (1713-1765) desempenharam papéis significativos nas discussões sobre o desenvolvimento desse tipo de tratamento analítico. Embora Fontaine tenha proposto uma solução inicial e promissora, que marcaria o início do que viria a ser conhecido como o cálculo diferencial parcial, foi Clairaut quem formalizou uma abordagem mais rigorosa. Ele apresentou suas resoluções nos trabalhos *Recherches générales sur le calcul intégral* e *Sur l'intégration et la construction des équations différentielles du primer ordre* publicados em 1739 e 1740, respectivamente. De forma independente, em 1739 Euler em seu trabalho *Nova Methodus pro Tractandis Aequationibus Differentialibus* também obtém os mesmos resultados.

Paralelamente a esses avanços, Thomas Le Seur (1703-1770) e François Jacquier (1711-1788) publicaram, em 1739, uma edição comentada dos *Principia* de Newton, com observações e notas de rodapé que traduziam as relações matemáticas originais para a linguagem do cálculo diferencial leibniziano. Essas anotações facilitavam a interpretação analítica das leis de Newton, evidenciando a crescente influência do cálculo diferencial na abordagem dos problemas da mecânica na primeira metade do século XVIII. Esse processo culminaria posteriormente no tratamento analítico sobre a forma da Terra publicado por Clairaut em 1743, denominado *Théorie de la figure de la terre, tirée des principes de l'hydrostatique*, que será apresentado a seguir.

3.2 O Problema da Forma da Terra por Clairaut

Com relação aos dois principais tratamentos analíticos, em debate até então a respeito da forma da Terra, eram os desenvolvidos por Newton e Huygens respectivamente, onde adotavam diferentes princípios para a condição de equilíbrio da camada fluida da Terra. Na teoria de Newton, era levado em conta uma igualdade de peso entre canais de mesma profundidade. Huygens, por outro lado, partia da ideia de que o equilíbrio entre as forças centrífuga — oriunda da rotação da Terra — e gravitacional resultante ocorria por meio de uma terceira força perpendicular atuando em cada ponto da superfície terrestre. Ambos os princípios apresentavam limitações, uma vez que derivavam exclusivamente de conceitos qualitativos e conceituais. A igualdade proposta por Newton não permitia a determinação precisa da forma da superfície, enquanto a intensidade da força proposta por Huygens em direção à superfície não era passível de cálculo.

Por volta de 1740, Colin Maclaurin (1698-1746), ao considerar a Terra como um fluido em rotação, propôs uma forma achatada nos polos como solução para descrever o equilíbrio dinâmico da massa fluida. Apesar de seguir os princípios de Newton, Maclaurin chegou à mesma conclusão utilizando uma série rigorosa de cálculos aplicados a um modelo bidimensional.

Clairaut, por sua vez, investigou sistematicamente os conceitos apresentados por Newton e Maclaurin, primeiramente compreendendo as condições de equilíbrio dinâmico de um corpo fluido, e posteriormente desenvolvendo uma generalização para o caso bidimensional. Ele denotou essas componentes de aceleração por P e Q em função das variáveis x e y, que atuavam sobre um ponto S qualquer da massa terrestre. Após algumas deduções, concluiu que os canais entram em equilíbrio em um ponto determinado.

Ao generalizar as conclusões apresentadas para o caso bidimensional, no capítulo IX de seu trabalho, Clairaut introduziu uma terceira componente da aceleração, R, agora como função de três variáveis: x, y e z. Assim, ele conseguiu expandir o problema para o espaço tridimensional, tratando um canal cujo eixo também é tridimensional. A equação que descreve a forma da Terra, de acordo com suas descobertas, aparece nos seguintes termos:

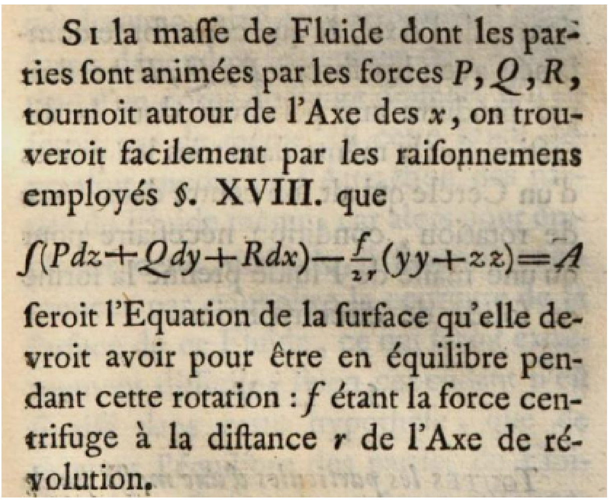
$$\int (Pdz + Qdy + Rdx) - \frac{f(yy + zz)}{2r} = A,$$

podendo ser observada nos termos originais através da imagem 6.

Com esse cálculo analítico, Clairaut consegue comparar a forma teórica da Terra com as observações da curvatura do meridiano obtidas nas expedições de Maupertuis na Lapônia e de La Condamine no Peru.

Na expressão apresentada, o termo externo à integral refere-se à força centrífuga gerada pela rotação, exercida sobre um ponto $M(x, y, z)$ da massa do fluido. Nesse contexto, f representa o valor dessa força a uma distância r qualquer do eixo de rotação. Já a integral da equação diferencial, que aparece no primeiro termo, corresponde à equação

Figura 6 – Equação da forma da Terra apresentada por Clairaut.


Sɪ la maſſe de Fluide dont les parties ſont animées par les forces P, Q, R, tournoit autour de l'Axe des x, on trouveroit facilement par les raiſonnemens employés §. XVIII. que

$$\int(Pdz+Qdy+Rdx)-\frac{f}{2r}(yy+zz)=A$$

ſeroit l'Equation de la ſurface qu'elle devroit avoir pour être en équilibre pendant cette rotation : f étant la force centrifuge à la diſtance r de l'Axe de révolution.

Fonte: Clairaut (1743, p.101).

que descreve a forma da Terra[2].

Associado ao formalismo proposto por Clairaut, d'Alembert aplica seu método a vários de seus trabalhos. Seu objetivo, era a partir de uma equação diferencial, aplicar o princípio que havia estabelecido em seu tratado de dinâmica. Levando isso em consideração, posteriormente d'Alembert propõe a análise de um canal infinitesimal, no qual as forças atuantes sobre seus pontos são decompostas em duas componentes proporcionais às funções de x e y, bem como às suas densidades. Após um desenvolvimento diferencial detalhado das componentes envolvidas, e ao desconsiderar termos de segunda ordem, chega a uma generalização que estabelece a base para a descrição do movimento da Terra[3].

De forma mais ampla, o formalismo do cálculo diferencial de várias variáveis permite a D'Alembert aplicar seu método a vários problemas de Mecânica. Esse mesmo método, consiste em aplicar o princípio de dinâmica que havia estabelecido em seu tratado de dinâmica em 1743, que pode ser visto como outra expressão das leis de Newton. A partir do seu princípio, derivam-se as equações diferenciais que caracterizam fenômenos de movimento, tais como o comportamento dos fluidos, das cordas vibrantes e das marés atmosféricas. Ou seja, o uso do cálculo diferencial e do cálculo diferencial parcial permitiu a D'Alembert derivar equações que descrevem fenômenos mecânicos[4].

[2]Para mais detalhes sobre o desenvolvimento desses cálculos, ver Grimberg (2001, p.183) ou Clairaut (1743, p.99)

[3]Euler, seguindo caminhos tanto independentes quanto dependentes dessas análises, também desenvolveu seus próprios resultados sobre esses fenômenos físicos.

[4]utilizando desses métodos, d'Alembert enfrentaria posteriormente o problema da precessão e da nutação, desenvolvendo um estudo sobre esses fenômenos.

Esse procedimento, aliado ao crescente interesse por estudos astronômicos no início da década de 1740, levou D'Alembert a investigar as irregularidades do movimento lunar, realizando um tratamento analítico do problema envolvendo os três corpos celestes: Sol, Terra e Lua. No entanto, sua insatisfação com o fato de que esses estudos sobre o movimento lunar também estavam sendo conduzidos por Clairaut, juntamente com seu interesse astronômico, levou D'Alembert a redirecionar seus esforços para uma investigação sobre a precessão e a nutação da Terra. Ele adaptou seus métodos para abordar esse novo problema, assim como havia feito em trabalhos anteriores.

4 TRATAMENTO ANALÍTICO DE D'ALEMBERT

4.1 Breve biografia

d'Alembert, mencionado diversas vezes nos capítulos anteriores, até o momento não foi devidamente apresentado. Aqui será desenvolvido um breve resumo sobre sua importância para a época em que viveu. Se faz necessário no momento, desenvolver uma contextualização acerca de suas contribuições científicas de forma mais global e também de como se desenvolveu cientificamente até o momento em que publica seu tratado de 1749. Neste processo serão apresentados alguns dos principais cientistas que estiveram envolvidos em sua história acadêmica.

Como já apontado, d'Alembert foi um dos mais brilhantes matemáticos do século XVIII, nascido em 1717, sendo adotado após ser abandonado em frente a uma igreja. Desde cedo já demonstrava afinidade com os estudos em matemática. Após ingressar no *Collège des Quatre-Nations*, estudou direito e teologia, no entanto acabou por se dedicar as ciências exatas, ingressando posteriormente na academia de ciências de Paris.

Segundo Hankins (1970) Vivenciando o movimento iluminista em seu auge e, identificando-se com os ideais propagados, d'Alembert esteve associado ao projeto da *Encyclopédie*, participou da campanha filosófica de 1760, esteve persistentemente presente na academia de Paris e no *Paris Salon* e, no que diz respeito aos seus contatos com intelectuais, manteve conexões com Diderot, Rousseau, Condillac, Voltaire e Frederick o Grande. Todas essas conexões o consolidaram como Filósofo e cientista, uma vez que era um exímio defensor do Newtonianismo, se aprofundando em seus estudos e buscando constantemente interpretar fenômenos físicos através de suas teorias. Além de ter sido eleito membro da Academia de Ciências de Berlim e posteriormente da Academia Francesa. Ernst Cassirer (1874-1945) filósofo alemão, reconhece d'Alembert como um dos cientistas mais respeitáveis do seu tempo, ou seja, um dos mais representativos do iluminismo, esse reconhecimento é evidenciado em seu trabalho denominado *Philosophy of the Enlightenment* de 1932[1].

[1] Cassirrer, 1932 (1992, p.21)

4.1.1 Produção científica

No que diz respeito aos trabalhos científicos desenvolvidos com base em seu interesse pela teoria Newtoniana, em 1743 d'Alembert publica seu *Traité de Dynamique*, fortemente apoiado em uma mecânica racionalista, desenvolvendo suas demonstrações geometricamente. É neste trabalho onde o famoso Princípio de d'Alembert é enunciado, apresentando uma reinterpretação das leis de Newton ao tratar de problemas de dinâmica. Servindo como base para diversos problemas, introduz a ideia de forças inérciais, facilitando assim a sistematização de problemas que envolvam sistemas dinâmicos por meio de uma hipótese de equilíbrio que adiciona a equação uma componente referente a força de inércia.

Seguindo com suas pesquisas, no ano de 1744 é publicado seu *Traité de l'équilibre et du mouvement des fluides*, onde busca-se aplicar seu princípio aos estudos de hidrodinâmica, formulando uma abordagem para o estudo de fluidos. Aqui d'Alembert estabelece novos fundamentos para a área, impactando diretamente em futuros trabalhos, como é o caso do estudo da forma da Terra, cuja camada fluida é uma das principais variáveis do problema.

Dando continuidade, No ano de 1747 dois importantes trabalhos são apresentados, o primeiro diz respeito ao *Recherches sur la courbe que forme une corde tendue mise en vibration* onde, por meio de equações diferenciais, é desenvolvida a equação de d'Alembert para ondas, de modo que seja possível descrever seus movimentos. O segundo trabalho, denominado *Réflexions sur la cause générale des vents*, lhe rendeu uma premiação na Academia de Berlim, por se tratar de um importante problema para a navegação na época. Aqui d'Alembert realiza um tratamento analítico inovador do problema por meio de equações diferenciais, uma vez que aborda o problema de maneira sistemática e rigorosa.

4.1.1.1 Produção científica na mecânica celeste

As duas primeiras memórias desenvolvidas pro d'Alembert no que diz respeito a astronomia e mecânica celeste, estão associadas a Academia de Ciências e Belas Letras de Berlim, desenvolvidas entre o final de 1746 e início de 1747. A primeira é denominada *Mémoire sur le calcul astronomique pratique*, onde apresentam-se técnicas para se calcular com precisão a posição e movimento de corpos celestes. O segundo trabalho, é denominado *Mémoire sur le problème des trois corps*, onde examinam-se as interações gravitacionais e as dificuldades de cálculo que as envolvem. Ainda sobre o segundo trabalho, d'Alembert segue se debruçando sobre o problema durante o ano de 1747 e a primeira metade de 1748, tendo finalizado ao final desse mesmo ano uma teoria completa sobre o movimento orbital da Lua.

Sua teoria foi desenvolvida em um período de crise da teoria Newtoniana, uma vez que ela a princípio, não dava conta de explicar por completo o movimento das apsides[2] da Lua. Envoltos na busca por uma solução de forma independente, também estavam os matemáticos Clairaut e Euler, que de forma semelhante, por meio da teoria de Newton conseguiram calcular apenas cerca de metade do valor real observado. No entanto, Clairaut foi capaz de reajustar sua teoria e obter êxito em sua solução.

4.2 Motivações para estudar a precessão e a nutação

Dados os processos apresentados até o momento, que impulsionaram o desenvolvimento da mecânica analítica, era natural que essas inovações se refletissem em problemas da astronomia. D'Alembert, como mencionado, dedicou-se ao estudo da teoria da Lua, buscando apresentar uma solução analítica para seu movimento. Após esse trabalho, ele começou a investigar os movimentos de precessão e nutação da Terra. Um questionamento pertinente a ser feito é: quais foram suas motivações para adentrar especificamente nesse tema?

Na introdução de seu livro, d'Alembert relata o seguinte:

> [...] A perfeição com que a análise está progredindo dia a dia nos dá motivos para ter esperança. Pelo menos estará contribuindo para o avanço da ciência o cumprimento de alguma parte de um objetivo tão grande. Motivado por isso, empreendi este trabalho para discutir os meios que a atração pode fornecer para explicar um dos principais fenômenos celestes. [3](d'Alembert, 1749, p.viii, tradução do autor).

Aqui observa-se claramente a ênfase proposta neste capítulo, que destaca a importância do desenvolvimento da análise para a elaboração de um tratamento analítico consistente dos problemas da mecânica do seu período. Souchay, em seu artigo intitulado

[2]Lenta precessão lunar, cujo ciclo é de aproximadamente 8,85 anos, que ocasiona em um deslocamento da linha que indica o perigeu e apogeu da órbita lunar em torno da Terra.

[3][...] Quoique l'examen de cette importante question renferme de grandes difficultés de calcul, peut-être touchons-nous au moment de sa / décision: la perfection à laquelle l'analyse s'élève de jour en jour, nous donne lieu de l'espérer. Ce sera du moins contribuer à l'avancement des sciences, que de remplir quelque partie d'un si grand objet. Animé par ce motif, j'ai entrepris de discuter dans cet ouvrage les moyens que l'attraction peut fournir d'expliquer un des principaux phénomènes célestes. (d'Alembert, 1749, p.viii)

d'Alembert's theory of precession-nutation publicado em 2001, apresenta outras possíveis motivações para o interesse de d'Alembert nesse problema. Ele inicia a discussão dessas hipóteses com uma breve abordagem sobre os resultados de Bradley a respeito da nutação, obtidos e apresentados em 1748 em sua carta endereçada à *Royal Society*.

Em seus resultados, notável a relação entre o período de nutação do eixo terrestre e o período orbital da Lua em torno da Terra. Dado que d'Alembert já havia realizado investigações sobre esse movimento, era de se esperar que esses achados o incitassem a se aprofundar nesse fenômeno, especialmente como uma oportunidade de ser um dos primeiros a formular uma explicação detalhada para esses movimentos.

Para além da influência de Bradley, no período que antecede a publicação da obra de 1749 de d'Alembert, destaca-se, a partir dos estudos sobre a teoria da Lua, a disputa entre Clairaut, Euler e d'Alembert na busca por determinar com precisão o movimento do apogeu lunar. Além disso, havia uma competição para estabelecer os fundamentos da física matemática. Outra hipótese levantada por Souchay (2001) é que d'Alembert poderia estar insatisfeito com as inconsistências no trabalho de Newton a respeito dos fenômenos mencionados, o que também ganha destaque na discussão sobre suas motivações. Em uma carta endereçada a Euler em 1749, d'Alembert sugere que suas tentativas de tratamento analítico dos movimentos do eixo de rotação da Terra foram motivadas pelo desejo de confirmar a validade das leis de Newton. Na introdução de seu tratado de 1749, encontra-se um trecho em que ele menciona sua motivação por trás de Newton e também sua intenção de elaborar um método rigoroso para realizar esse trabalho.

> A aparente concordância dos cálculos deste grande geômetra com as observações não parece, portanto, tão favorável à atração como se poderia acreditar. Contudo, seria injusto atribuir a este sistema, sem um exame mais aprofundado, um defeito que, supondo que seja real, talvez esteja apenas nos princípios e suposições que o autor utilizou. Além disso, é surpreendente que um filósofo a quem devemos tantas descobertas tenha deixado alguns passos a dar na imensa carreira em que tanto avançou? & podemos nos gloriar se, instruídos como somos por observações para as quais ele não conseguiu obter ajuda, e ajudados por uma análise que derivamos quase inteiramente dele, nos encontrarmos em posição de acrescentar algo ao edifício que ele tão prodigiosamente ergueu? Foi a partir dessas reflexões que acreditei poder tratar

> o problema da astronomia física em questão como um assunto inteiramente novo. Procurei encontrar, por um método rigoroso e direto, o movimento que a ação combinada do Sol e da Lua deve produzir no eixo da Terra. [4](d'Alembert (1749, p.xxii-xxiii, tradução do autor)).

4.3 Como se divide a obra de d'Alembert

O tratado de 1749 é dividido em 15 capítulos, além da introdução, que é elogiada por Souchay (2001) como um ponto de partida essencial para quem deseja compreender o estado do conhecimento sobre o movimento de rotação da Terra no século XVII. Além da introdução, os três primeiros capítulos da obra contêm toda a solução analítica para o problema da combinação dos movimentos de precessão e nutação do eixo terrestre. No quarto capítulo, d'Alembert apresenta um confronto entre os cálculos teóricos e os dados observacionais, validando, assim, o êxito de seu tratamento analítico.

No primeiro capítulo, d'Alembert apresenta um estudo sobre o torque exercido por um corpo externo em um esferoide. A amplitude e a direção desse torque são determinadas com base na lei da gravitação de Newton. Nessa etapa, já é possível identificar o uso do cálculo integral para estabelecer de forma precisa a fórmula do torque, que inclui uma variável representando a posição angular do corpo externo em relação ao plano equatorial da Terra.

O segundo capítulo levanta algumas proposições básicas necessárias para a solução do problema. D'Alembert também apresenta seu princípio desenvolvido no *Traité de Dynamique*, que já discutimos como a ferramenta utilizada para realizar seu tratamento analítico em problemas de mecânica. No terceiro capítulo, ele apresenta as equações de movimento resultantes da aplicação desse princípio. Essas equações possuem caráter de equações diferenciais de segunda ordem, onde os parâmetros ϵ e π correspondem a posição angular do eixo da Terra em com relação ao plano da eclíptica e a um eixo fictício

[4]L'accord apparent des calculs de ce grand géomètre avec les observations, ne paroît donc pas aussi favorable à l'attraction, qu'on auroit pu le croire. Cependant il seroit injuste d'attribuer à ce système sans autre examen, un défaut, qui, supposé qu'il soit réel, n'est peut-être que dans les principes & les suppositions dont l'auteur s'est servi. D'ailleurs, est-il surprenant qu'un philosophe à qui nous devons un si grand nombre de découvertes, ait laissé quelques pas à faire dans la carrière immense où il a tant avancé ? & pouvons-nous nous glorifier, si, instruits comme/nous le sommes par des observations dont il n'a pu avoir le secours, & aidés par une analyse que nous tenons de lui presque toute entière, nous nous trouvons en état d'ajouter quelque chose à l'édifice qu'il a si prodigieusement élevé? C'est d'après ces réflexions que j'ai cru pouvoir traiter le point d'astronomie physique dont il s'agit, comme un sujet entièrement nouveau. J'ai tâché de trouver par une méthode rigoureuse & directe, le mouvement que l'action réunie du Soleil & de la Lune doit produire dans l'axe de la Terre. (d'Alembert (1749, p.xxii-xxiii))

perpendicular a esse plano. Ambos referem-se diretamente aos movimentos de precessão e nutação. Esses deslocamentos são apresentados em dois momentos principais por um sistema duplo de equações diferenciais, primeiro apresenta-se o sistema (Y) e (Z) no capítulo III com equações de segunda ordem que, após serem aproximadas desconsiderando termos negligenciáveis e, posteriormente integradas resultam em um segundo sistema (A') e (B') de primeira ordem presente no capítulo VIII. Essa simplificação aparece da seguinte forma:

$$\begin{cases} k\,d(sen\,\pi) = Y dz \\ k\,cos\pi\,d\epsilon = Z\,dz, \end{cases}$$

onde a variável independente z corresponde a variação da longitude média da Terra durante o tempo, enquanto k é uma constante que representa a razão entre o período do movimento orbital da Terra e o período de seu movimento diurno. O termo Y representa a soma de quatro termos: uma constante aditiva, a longitude trópica do nódo ascendente da órbita lunar na eclíptica, duas vezes a longitude trópica da órbita lunar na eclíptica, a diferença dos dois argumentos anteriores e por fim, duas vezes a longitude trópica do Sol. O termo Z por sua vez, representa a soma de um termo constante e de quatro termos proporcionais ao cosseno dos mesmos argumentos.

d'Alembert, no capítulo IV, após apresentar no artigo 52 algumas considerações a respeito de termos negligenciáveis, com relação as equações (Y) e (Z), integra as novas expressões obtidas e desenvolve um confrontamento entre sua teoria desenvolvida até o capítulo III com as observações astronômicas disponíveis até então, em especial as apresentadas por Bradley à *Royal Society* em 1748. Essas expressões estão representadas a seguir:

$$\pi = \bar{\omega} - \frac{3A(1+\beta)}{2K}\frac{m' sen\bar{\omega}}{k(n'-M)}cos(n'z - Mz)$$
$$\epsilon = \frac{3A(2+\beta)}{2K}\frac{sen\bar{\omega}}{k}z - \frac{3A(1+\beta)}{2K}\frac{m' cos2\bar{\omega}}{k(n'-M)cos\bar{\omega}}sen(n'z - Mz),$$

de modo que os termos constantes $\bar{\omega}$, m', $n' - M$, $\frac{A}{K}$ e $1+\beta$ representam respectivamente o valor médio de π; a tangente da inclinação da órbita lunar com relação a eclíptica; a razão entre o período orbital sideral da Terra e o período trópico dos nódos da órbita da lua sobre a eclíptica; a elipticidade dinâmica — dependo da forma e da constituição da Terra — e a razão entre as massas da Lua e do Sol multiplicadas pela razão inversa dos cubos de suas distâncias a Terra. Os três primeiros termos mencionados são conhecidos com precisão suficiente, enquanto que os dois últimos são pouco conhecidos[5]

Tendo em mãos essas constantes, d'Alembert então realiza os ajustes necessários para que seu tratamento analítico fosse coerente com os dados coletados por Bradley. Essa articulação entre tratamento analítico e dados precisos, que de fato é inédita no período em questão, sendo fortemente possibilitada pela consolidação do cálculo diferencial de Leibniz dentro da mecânica.

4.4 Tratamento analítico dos fenômenos

Para dar início a análise do tratamento analítico de d'Alembert, é preciso primeiro ter clareza dos aspectos mecânicos desenvolvidos nesse processo. De acordo com Chapronto e Soucahy (2006, p.li), o tratado de 1749 constituiu o primeiro estudo terótico do movimento de rotação de um sólido ao redor de um eixo variável. Seus aspectos mecânicos estão localizados essencialmente nos capítulos I, II, III, VIII, XI e XII. No entanto, os que tangem os principais objetivos desta dissertação se concentram nos três primeiros capítulos, os quais serão desenvolvidos a seguir.

4.4.1 Hipóteses tomadas como base para o tratado

A respeito da Forma da Terra, d'Alembert a considera como um sólido de revolução composto de camadas homogêneas que, por sua vez, a depender da situação são tratadas como conchas esféricas ou elípticas concêntricas. Para além dessas considerações, também e introduzido ao trabalho o termo "eixo da figura" para se referir ao eixo de revolução do esferoide em questão.

O Sol e a Lua por sua vez, são reduzidos aos seus centros de gravidade[6]. Já o movimento do centro de gravidade C da Terra em torno do Sol, é considerado como sendo circular e uniforme, assim como o da Lua em torno de C. Outro aspecto com considerações referente a esses corpos, se trata do plano orbital heliocêntrico da Terra, o plano da eclíptica, para ele há uma suposição de que está fixo no espaço[7].

A força de atração exercida por uma massa pontual S — podendo se tratar do Sol ou da Lua — que incide sobre um elemento de massa da Terra, é direcionada pela linha imaginária que liga os dois pontos. Desde os primeiros artigos do tratado, presume-se que

[5]Para mais detalhamentos a respeito dos desenvolvimentos realizados por d'Alembert, ver Chapront; Souchay, (2006, lxiii-lxx).
[6]A justificativa para essa escolha aparece em seu tratado de dinâmica de 1743, nas páginas 52 e 53.
[7]Espaço absoluto Newtoniano.

para qualquer distância, ela irá variar de forma inversamente proporcional ao quadrado da distância.

Para além das hipóteses mecânicas mencionadas, o princípio de d'Alembert assume um papel fundamental no desenvolvimento de sua solução analítica do problema da precessão e da nutação. Tendo sido desenvolvido no artigo 50 de seu tratado de dinâmica, a grande inovação proposta é sua nova formulação das leis de Newton em termos diferenciais, utilizando por sua vez, a variação das velocidades buscando “equilibrar"as forças envolvidas ao se colocar no referencial do móvel. A ideia é encontrar um equilíbrio dinâmico entre as forças, ou seja, buscamos encontrar um equilíbrio de modo que as forças efetivas e virtuais, se “anulem". O método será retomado no segundo capítulo de seu tratado de 1749, mais especificamente no artigo 37.

4.5 Capítulo I: Da ação do Sol e da Lua sobre a Terra, considerada um esferoide achatado

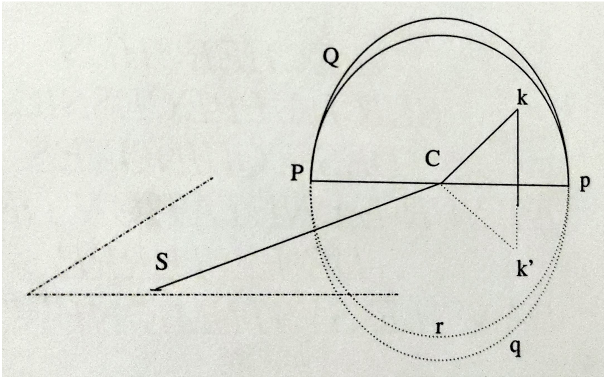
Neste primeiro capítulo, é iniciado o processo de avaliar a ação do sol sobre o movimento da Terra em torno de seu centro de gravidade, que será dividido em dois casos. O primeiro passo é tratar do caso geral de uma massa pontual S agindo sobre a Terra. Tendo em vista as simetrias das forças que agem sob cada elemento de massa dos corpos, d'Alembert reduz as que atuam sob C a forças paralelas a SC que se anulam em C. Como sequência desse processo, utilizando uma lógica da superposição de forças, em seu segundo corolário introduz uma metodologia para analisar o movimento rotacional dos corpos, onde irá realizar a diferença entre as forças de S que agem sobre a superfície de um sólido esférico PQpq e a força de S que age sobre o centro de massa de C. Em sequência deduz que a presença de uma esfera interior não afetaria o cálculo desse movimento. O sólido e os elementos aqui definidos podem ser observados na figura 7.

Seguindo para seu terceiro corolário, d'Alembert aplica sua metodologia e deduz para o seu problema a relação de superposição de força mencionada anteriormente. Supondo que a intensidade dessa atração exercida por S varia de acordo com o inverso do quadrado da distância e, utilizando dos levantamentos anteriores, chega na seguinte expressão:

$$\frac{S \cdot CS}{Sk^3} - \frac{S}{CS^2}, \tag{4.1}$$

onde, o primeiro termo diz respeito a força exercida sob um ponto qualquer do sólido PQpq, o segundo é referente a força exercida sobre o centro de massa C, CS é a distância

Figura 7 – Sólido PQpq.



Fonte: Chapront, Souchay (2006, p.36).

de S até C e k representa um ponto qualquer do sólido que não seja o seu centro. De modo geral está desenvolvendo a expressão do momento do corpo esférico que, ao dar continuidade, apresenta em seu primeiro problema uma redução para o caso de uma coroa paralela ao plano paralelo a CS e perpendicular a um eixo Pp, de modo que ele possa desenvolver uma simplificação do problema para que o cálculo dos efeitos gravitacionais gerados por S seja mais simples, sendo assim se exprime a seguinte relação:

$$G'g \times GG' \times \left(\frac{S \cdot CS}{Sg^3} - \frac{S}{CS^2}\right) \times Ci. \tag{4.2}$$

Os termos G e G' estão sob a mesma circunferência no círculo máximo da coroa, definindo uma variação angular infinitesimal e g está alinhado com G' e C' — centro das circunferências concêntricas da coroa —, pertencendo a circunferência interna da coroa e, definindo uma espessura infinitesimal a mesma quando tomada a distância $G'g$. A soma de todos esses momentos, exceto pelo momento do esferoide central, constituirá o momento da resultante Ψ com relação a C.

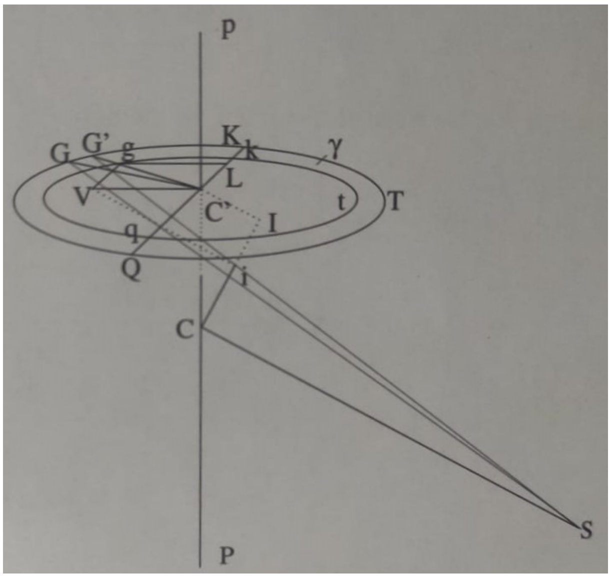
Dando prosseguimento ao desenvolvimento desse problema apresentado, d'Alembert apresenta as seguintes substituições:

kC'	$\longrightarrow$	f
G'g	$\longrightarrow$	β
Ângulo kC'g	$\longrightarrow$	X
Segmento gL	$\longrightarrow$	$f sen\, X$
CC'	$\longrightarrow$	q'
SC	$\longrightarrow$	u
Ângulo PCS	$\longrightarrow$	V

Tabela 1 – Mudança de variáveis.

Como resolução do problema, são apresentadas duas formas de prosseguir, a primeira

Figura 8 – Coroa paralela ao plano CS.



Fonte: Chapront, Souchay (2006, p.44).

4.3 se trata de um caminho mais trigonométrico, e a segunda 4.4 mais analítico, utilizando o conceito de integração[8].

$$-\frac{3 \cdot 4Sf\beta D}{u^3} \times cosV \cdot sinV \left(q'q' - \frac{ff}{2}\right) \tag{4.3}$$

$$-\frac{3S\beta f}{u^3}(2kqq'q'\pi - qk\pi ff)^9 \tag{4.4}$$

Em seguida, considerando o caso em que a Terra é tida como homogênea, leva-se em conta as forças que atuam na crosta entre a superfície externa e a esfera inscrita. A resultante Ψ obtida dessas forças, paralela a SC no plano em que contém S e o eixo da figura, é determinada pelo método mencionado anteriormente, tanto para forças coplanares quanto paralelas. Em sequência, utiliza-se somente o momento de Ψ com relação a C.

Dando início ao segundo caso, d'Alembert enuncia o primeiro corolário, onde irá considerar a Terra homogênea e, após realizar a substituição de Pp por $2a$, considerar $ff = 2ab - bb$, $q' = a - b$, $\beta = \alpha f$ e apresentar pC', b, $a + \alpha a$ respectivamente como o raio do equador, sendo α uma pequena variação que marca a diferença dos eixos quando

[8]Segundo Chapront e Souchay (2006, p.52), apesar de d'Alembert já ter utilizado integrais clássicas anteriormente, como no caso do *traité des fluides* de 1744 artigo 423 e em seu desenvolvimento da teoria da Lua de 1748 artigo 130, parece ser a primeira vez que utiliza a notação utilizada atualmente ao tratar do conceito.

[9]É importante ressaltar que aqui o termo π que aparece na equação, diz respeito a uma constante, não sendo atribuido seu sentido mais moderno, conforme expressa Chapront e Souchay (2006, p.52) em nota de rodapé.

trata-se de uma Terra homogênea, surge uma nova expressão relativa a expressão anterior 4.4.

Nos demais corolários, são desenvolvidas algumas considerações. No segundo, d'Alembert determina que para obter o momento total, deve multiplicar a expressão anterior por termo infinitesimal db e tomar a integral igual a zero quando $b = 0$. Deste modo, quando o termo b for igual a $2a$ a integral tomara uma forma mais simplificada[10]. No corolário seguinte, apresenta-se uma notação para a força resultante obtida, que por sua vez, irá descrever a equação obtida até então por meio de $\Psi \times L$, sendo L perpendicular ao eixo Pp em C, cuja medida é igual a de um ponto H qualquer sob o eixo.

Posteriormente no corolário IV, considerando que a Terra não fosse homogênea, porém fosse composta por conchas de raio f cujas elipticidades estivessem em função de f e das densidades Δ, o produto $\Psi \times L$, após passar por um processo de integração, seria reescrito como:

$$\Psi \times L = \frac{3A \times 4D \times cosV \times S}{15u^3}, \tag{4.5}$$

onde, A é uma quantidade que depende do achatamento e da densidade das diferentes camadas do esferoide. Uma importante consideração apresentada nesse corolário, é de que a expressão que envolve $\Psi \times L$ será sempre proporcional a $3S \times \frac{4D \times cosV}{15u^3}$ para qualquer sólido de revolução que seja pouco diferente de uma esfera.

Em resumo, para o caso em que a Terra é considerada com sendo constituída de uma sequência de conchas elípticas e homogêneas, o momento Ψ com relação a C é encontrado a partir da integral do esferoide com relação aos momentos elementares obtidos por meio de uma diferenciação, considerando uma densidade constante, da expressão do corolário III. A nova expressão 4.5 obtida, apresenta uma constante A que depende da forma e da constituição interna da Terra. Em termos modernos, os cálculos podem ser deduzidos de modo que o termo $2\pi A$ seja a diferença entre C e A, onde ambos representam os momentos de inércia do esferoide em relação ao seu eixo de revolução e em relação a um eixo equatorial qualquer.

Em seguida, é desenvolvida uma particularização das duas forças, Ψ paralela a direção Terra-Sol pelas forças resultantes exercidas pelo Sol e Ψ' paralela a direção

[10]Ver Chapront, Souchay (2006, p.54).

Terra-Lua pelas forças resultantes exercidas pela Lua, obtendo a expressão,

$$\Psi' L' = \frac{A \times 4D \times cosV' \times S \cdot 3\lambda}{15u'^3}. \tag{4.6}$$

Por sua vez, a partir do desenvolvimento do segundo problema do capítulo, a última força é decomposta em outras duas forças, Ψ'' paralela ao plano da eclíptica e $\Psi''p$ perpendicular ao mesmo plano, onde Ψ'' expressa por

$$\Psi'' = \frac{\Psi'}{\sqrt{1+pp}}. \tag{4.7}$$

Essas expressões irão envolver as "massas" S e λ referentes ao Sol e a Lua respectivamente. Em termos modernos, elas dizem respeito ao produto das massas pela constante da gravitação universal.

4.6 Capítulo II: Proposições de geometria e mecânica necessárias para a solução do problema

Este segundo momento do tratado, corresponde ao que d'Alembert indica ser seu primeiro método, que consiste na aplicação de seu princípio a primeira das duas formas apresentadas anteriormente. Aqui encontram-se as seis primeiras equações de sua teoria, elas serão numeradas de (A) a (F) e, dizem respeito ao equilíbrio entre seis forças, onde três delas são identificadas como exteriores Ψ, Ψ' e $\Psi''p$ exercidas pelo Sol e pela Lua. As demais forças restantes, G, F e Π, paralelas respectivamente aos eixos Ce, Cz e CE', representam as resultantes dos componentes de acordo com esses eixos de $u'\frac{u''}{dt}$ — ou, em termos modernos, de $-dm\frac{d\vec{u}}{dt}$. A demonstração desse resultado se baseia no princípio da composição de forças. No que diz respeito as equações (A), (D) e (E):

$$\Psi cos\, v + \Psi'' \times cos\, v' = G, \tag{A}$$

$$\Psi'' p = \Pi \tag{D}$$

$$F = \Psi sen\, v + \Psi'' \times sen\, v', \tag{E}$$

apenas as intensidades de forças estão envolvidas, enquanto que, as equações (B), (C) e (F):

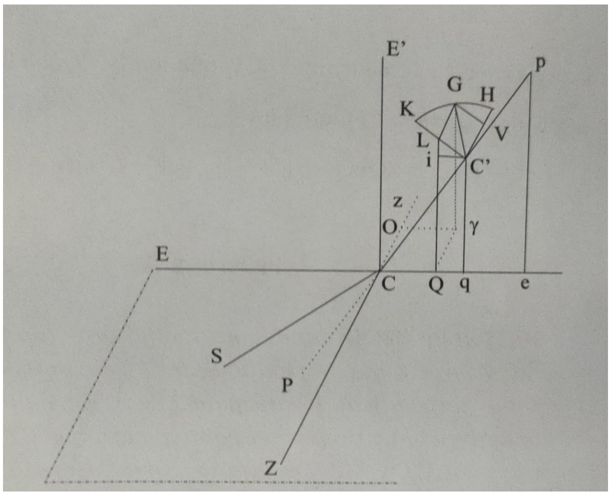
$$G\xi - \Pi = \Psi' \times cos\, v \cdot L\sqrt{1-yy} + \Psi'' \times cos\, v' \cdot L'\sqrt{1-yy} - \Psi'' L' py, \tag{B}$$

$$F \cdot \theta - G \cdot \chi = \Psi \times Lysen\, v + \Psi'' \times L'ysen\, v', \tag{C}$$

$$F\zeta - \Pi \cdot \mu = \Psi sen\, v \cdot L\sqrt{1-yy} + \Psi'' \cdot L' sen\, v' \times L'\sqrt{1-yy}, \tag{F}$$

envolvem quantidades que representam os momentos das forças Ψ, Ψ' e $\Psi'' p$ com relação a C e os momentos das forças G, F e Π com relação aos eixos que lhes são respectivamente ortogonais.

Figura 9 – Forças atuantes sobre o eixo Pq advindas do Sol e da Lua.



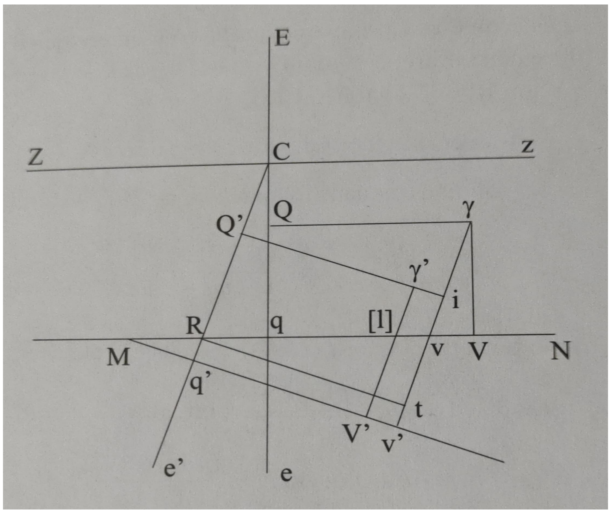
Fonte: Chapront, Souchay (2006, p.88).

Utilizando de um processo geométrico, d'Alembert desenvolve um problema que busca analisar o comportamento da Terra com relação aos fenômenos de precessão e nutação, por meio de relações entre distâncias e projeções de pontos em diferentes planos e linhas referenciais, desenvolve a base matemática necessária para descrever a força, os torques e os efeitos que levam as oscilações do eixo de rotação da Terra. Esse processo envolve o cálculo das componentes de velocidade η e η' de um ponto qualquer do sólido que se move ao redor de C, em dois instantes $t + dt$ e $t + 2dt$. As componentes são respectivamente paralelas a três direções iguais, compostas por CE' e as posições dos eixos Ce e Cz no segundo instante, esses eixos representam um referencial tridimensional fixo, onde E' é perpendicular ao plano formado por Ce, Cz e o Sol, ou seja referente ao plano da eclíptica, conforme ilustra a figura 9.

O uso de variações infinitamente pequenas nas posições das projeções mencionadas, implica consequentemente, no uso de diferenciais durante todo o desenvolvimento do problema. Em especial, a figura 10 representa uma vista superior da anterior, de modo que Ee — representando a projeção ortogonal do eixo Pp sob o plano da eclíptica — junto da perpendicular Zz, servem de base para a análise geométrica a variação angular da precessão por meio do segmento Ce', uma vez que, no corolário II referente ao problema

IV o ângulo eCe' é denotado por $d\varepsilon$. Posteriormente, desenvolve-se uma linha de análise para uma variação diferencial dessa variação já mencionada, referente ao momento $t + 2dt$.

Figura 10 – Projeção ortogonal do eixo da Terra representando sua variação angular $d\epsilon$



Fonte: Chapront, Souchay (2006, p.91).

Para encerrar o capítulo, em sua terceira parte ele inicia com a enunciação de seu princípio. Ao notar que as velocidades u e u' — descritas como diferentes velocidades para diferentes elementos de massa do sólido em um movimento qualquer — são compostas pelas velocidades de translação v e v' — que se mantém iguais para todos os pontos do sólido — e as velocidades de rotação η e η', o geômetra desenvolve as fórmulas gerais que reduzem a três forças G, F, Π, o sistema $\mu'\frac{u''}{dt'}$ constituído por $\mu'\frac{v''}{dt}$ e $\mu'\frac{\eta''}{dt}$. A estratégia utilizada, consiste em decompor $\mu'\frac{v''}{dt}$ e $\mu'\frac{\eta''}{dt}$ em forças paralelas aos eixos Ce, Cz, CE' e determinar a resultante de cada conjunto de forças paralelas ao mesmo eixo pela igualdade de intensidades e momentos em relação a dois eixos perpendiculares ao primeiro.

Ao realizar a substituição das expressões das intensidades e dos momentos de G, F e Π nas equações de (A) a (F) obtém-se seis equações denotadas (G), (H), (K), (L), (M) (N) que, por sua vez, descrevem o movimento geral do sólido (movimento de translação e movimento em torno de C). As três primeiras, envolvendo momentos, dependem apenas das componentes de η'' nos três eixos e das correspondentes coordenadas do ponto atual do sólido,

$$\int \frac{\mu'\alpha''\pi}{dt} - \int \frac{\mu'\omega''\rho'}{dt} = \Psi' cos\, v \cdot L\sqrt{1-yy} + \Psi'' cos\, v' \times L'\sqrt{1-yy} - \Psi'' L'py, \tag{G}$$

$$\int \frac{\mu'\beta''\rho}{dt} - \int \frac{\mu'\alpha''\bar{\omega}}{dt} = \Psi Lysen\, v + \Psi'' \times L'ysen\, v', \tag{H}$$

$$\int \frac{\mu'\beta''\pi}{dt} - \int \frac{\mu'\omega''\bar{\omega}}{dt} = \Psi \cdot L \cdot sen\, v\sqrt{1-yy} + \Psi'' \times L'sen\, v' \cdot L'\sqrt{1-yy}, \qquad \text{(K)}$$

sendo assim, elas descrevem o movimento em torno do centro de gravidade. Os três últimos descreveriam o movimento orbital, o que não interessa ao tratado no momento.

4.7 Capítulo III: Solução do problema da precessão dos equinócios

O início do capítulo III apresenta a substituição, nas equações (G), (H), (K), das expressões dos momentos das forças externas ($\Psi, \Psi'', \Psi''p$) obtidas no capítulo I e as expressões dos opostos das variações das velocidades ($\eta'' = \eta - \eta'$), obtidas no capítulo II. Os cálculos são realizados assumindo que a Terra é um elipsóide homogêneo. D'Alembert obtém assim três equações diferenciais de ordem 2, denotadas em seu trabalho por (P), (Q), (R), que conectam $y, dy, d\epsilon, dP$ e suas diferenciais.

Seguindo o desenvolvimento dessas equações diferenciais, são deduzidas outras duas de ordem 2, denotadas por (S) e (T) e independentes de P, que dão o movimento do eixo da figura da Terra. Uma vez integradas essas equações, uma terceira fórmula fornece a expressão de dP, consistindo em um termo proporcional a dt que corresponde ao movimento diurno da Terra caracterizado por uma constante K e uma função de termo de $d\epsilon$ e y.

$$\begin{aligned} dd\pi = {} & \frac{3\alpha\, \cos v^2 sen\pi \cdot \cos\pi \times dz^2}{1+3\alpha} + \frac{3\alpha\, dz^2(1+\beta)\cos v'^2 sen\pi \cdot cos\pi}{1+3\alpha} \\ & -\frac{3\alpha\, dz^2(1+\beta)m'\zeta\cos v'(1-2[cos\pi]^2)}{1+3\alpha} - d\epsilon^2\, sen\pi\, cos\pi + \left(\frac{1+4\alpha}{1+3\alpha}\right) k\, d\epsilon\, dz\, cos\pi \end{aligned} \qquad \text{(S)}$$

$$\begin{aligned} & \frac{3\alpha\, dz^2\, sen2v \cdot \cos\pi^2}{2(1+3\alpha)} + \frac{3\alpha(1+\beta)\, sen2v' \cdot \cos\pi^2 \cdot dz^2}{2(1+3\alpha)} \\ & \qquad - \frac{3\alpha(1+\beta)dz^2\, senv' \cdot m'\zeta \cdot sen\pi\cos\pi}{1+3\alpha} \\ & \qquad = d(d\epsilon\cos\pi^2) + \frac{(1+4\alpha)d(kdz\, sen\pi)}{1+3\alpha}_{11} \end{aligned} \qquad \text{(T)}$$

O cálculo é então estendido a um sólido de revolução formado por camadas homogêneas, o que faz surgir duas novas constantes K e M que dependem apenas da forma e constituição da Terra. Para um leitor moderno, $2K\pi$ e $2\pi M$ são respectivamente C e $2A - C$. As equações (S) e (T) são substituídas pelas equações (V) e (X), nas quais as três constantes A, K, M são expressas através de duas razões $\frac{A}{M+K}$ e $\frac{2K}{M+K}$. Finalmente, ao negligenciar a solução dos termos da ordem do quadrado das elipticidades, d'Alembert chega às equações (Y) e (Z)[12] , sempre de ordem 2, que não depende mais do valor de $\frac{A}{K}$.

$$\begin{aligned} \frac{3Adz^2 sen2v \cdot \cos\pi^2}{2K} + \frac{3A(1+\beta)dz^2 sen2v' \cdot \cos\pi^2}{2K} \\ -\frac{3A(1+\beta)senv' \cdot m'\zeta\cos\pi \cdot sen\pi \cdot dz^2}{K} \\ = d(d\epsilon\cos\pi^2) + d(kdzsen\pi) \end{aligned} \tag{Y}$$

$$\begin{aligned} dd\pi = \frac{3A\cos v^2 dz^2 sen\pi \cdot \cos\pi}{K} \\ +\frac{3A\cos v'^2 dz^2 \cdot sen\pi \cdot \cos\pi \times (1+\beta)}{K} \\ -\frac{3Adz^2(1+\beta)\cos v' \cdot m'\zeta \cdot (1-2\cos\pi^2)}{K} \\ -d\epsilon^2 sen\pi \cdot \cos\pi + kd\epsilon dz\cos\pi. \end{aligned} \tag{Z}$$

Para fechar o capítulo, são apresentadas duas igualdades trigonométricas referentes aos termos $-\zeta cosv'$ e $-\zeta senv'$, onde as variações angulares analisadas são caracterizadas explicitamente:

$$-\zeta cosv' = \frac{sen(U'+\delta+2nz+n'z+Mz)}{2} + \frac{sen(-U'+\delta+n'z+Mz)}{2}; \tag{4.8}$$

e

$$-\zeta senv' = \frac{cos(U'+\delta+2nz+n'z+Mz)}{2} + \frac{cos(-U'+\delta+n'z+Mz)}{2}, \tag{4.9}$$

onde U representa o ângulo entre posição inicial da projeção do eixo da terra com relação a posição inicial do eixo que liga o Sol ao seu centro e Mz o ângulo formado entre a posição inicial da projeção do eixo terrestre com relação a sua variação angular infinitesimal, ou seja, igual a $d\epsilon$. Já os termos n e n' dizem respeito a razão entre os períodos siderais da Terra e da Lua e, a razão do período sideral da Terra (aproximadamente 1 ano) ao período de revolução dos nodos da Lua (cerca de 18 anos). Antes de realizar a substituição das expressões apresentadas nas equações (Y) e (Z) e posteriormente integrá-las, d'Alembert opta explicitamente por analisar o que pode observar das observações a respeito do movimento do eixo da Terra, adentrando então no quarto capítulo de seu tratado, denominado *Comparison de la théorie précedente avec les observations.*

[12]Nessa equação, o termo m' diz respeito a tangente de inclinação da órbita lunar e ζ o seno da distância da localização da lua na eclíptica com relação ao seu nodo ascendente.

4.8 Capítulo IV: Comparação da teoria anterior com as observações

d'Alembert inicia o capítulo com o parágrafo 48, citando a carta de Bradley para George Earl of Macclesfield em 31 de dezembro de 1747 detalhando suas observações astronômicas desenvolvidas durante 20 anos. As conclusões apresentadas foram duas: Durante uma revolução da Lua o eixo da Terra está sujeito a uma nutação significativa, que se aproxima de $18''$; Que essa nutação também é acompanhada por uma equação na precessão dos equinócios.

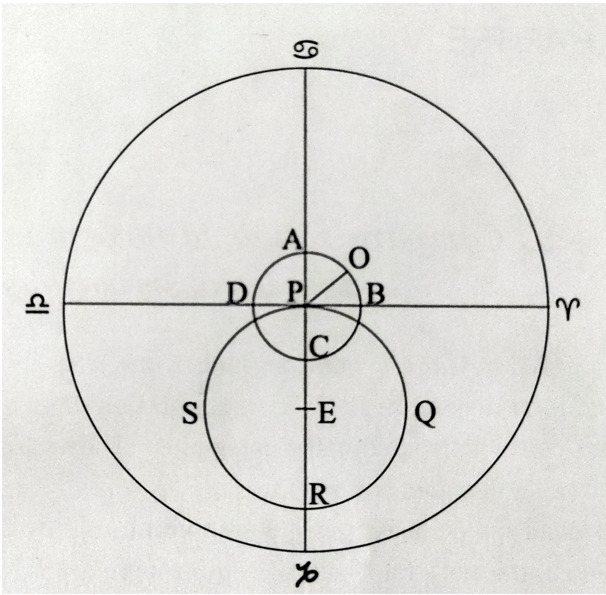
Em seguida retoma a hipótese de Machin de 1730, ao notar que de acordo com Bradley ela concorda em $2''$ com as observações. Essa hipótese diz respeito a posição relativa do pólo verdadeiro da Terra, uma vez que descreve um círculo de diâmetro de $18''$ cujo centro é descrito como sendo o pólo médio P que gira uniformemente ao redor de E, considerado como o lugar geométrico do pólo da eclíptica. O centro desse pequeno círculo é dito pertencente a um plano considerado como sendo de provável paralelismo com relação ao plano equatorial médio do instante considerado[13]. D'Alembert apresenta a figura 11 como uma representação geométrica do modelo de Machin. Dessa hipótese, de acordo com Chapront, Souchay (2006), d'Alembert hesita entre duas interpretações geométricas a respeito do plano do pequeno círculo onde em uma delas o plano do pequeno círculo é paralelo ao plano da eclíptica e é descrito pela projeção do pólo verdadeiro, ou é paralelo ao equador e é descrito pelo pólo verdadeiro, tendo confundido a esfera celeste e seu plano tangente na proximidade do pólo médio.

No artigo 50, antes de discutir suas primeiras aproximações para os valores de ϵ e π e, tendo em vista essa dualidade na interpretação do paralelismo dos planos mencionados anteriormente, argumenta que como o ângulo do equador e da eclíptica é de apenas $23\frac{1}{2}^{\circ}$ e que seu cosseno não difere do seno total, uma vez que é igual a $\frac{91706}{100000}$, seria indiferente a suposição adotada. Apresenta ainda como exemplo que, considerando o primeiro caso e considerando que o raio AP do círculo menor mede $9''$, a variação da inclinação ao invés de ser de $18''$, seria de $18'' \times \frac{100000}{91706} = 20''$, implicando em um erro de $2''$ nas observações de Bradley. De acordo com Chapront e Souchay (2006, p.136), em nota de rodapé apontam uma nova representação geométrica apresentada na figura 12, que se enquadra nessa hipótese de d'Alembert.

Para cada hipótese mencionada anteriormente, são calculadas as expressões dos

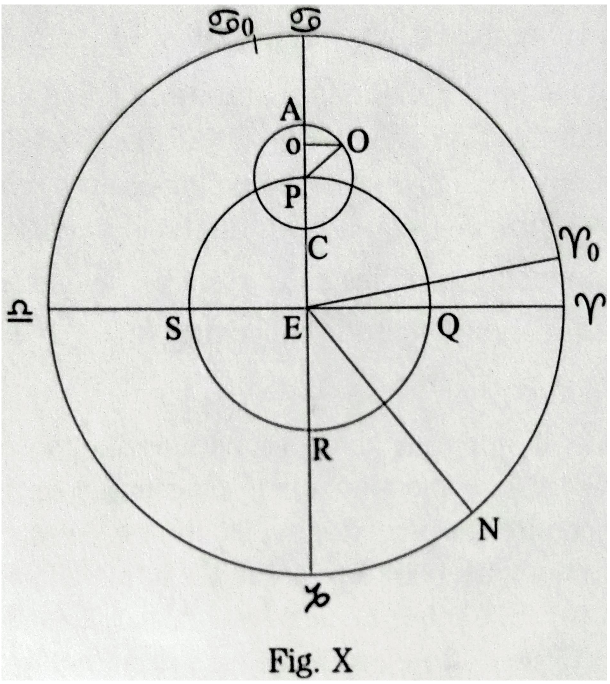
[13]Chapront, Souchay (2006, p.xxxiii-xxxiv)

Figura 11 – Representação geométrica da hipótese de Machin.



Fonte: Chapront, Souchay (2006, p.132, figura 23).

Figura 12 – Representação geométrica da hipótese de d'Alembert.



Fonte: Chapront, Souchay (2006, p.136, figura X).

ângulos ϵ e π, sendo os resultados da primeira os que serão comparados com sua teoria. Para o primeiro caso encontram-se as seguintes expressões:

$$\pi = \bar{\omega} - Qcos(n'z - Mz) \tag{4.10}$$

e

$$\epsilon = Mz + \frac{Q \cdot sen(n'z - Mz) \cdot sen\bar{\omega}}{cos\bar{\omega}}, \tag{4.11}$$

onde $\bar{\omega}$ representa o valor médio do ângulo π. Considerando a segunda hipótese, d'Alembert apresenta no artigo 51 as seguintes expressões para os ângulos em questão, de modo que a projeção da extremidade do eixo terrestre descreveria uma pequena elipse:

$$\pi = \bar{\omega} - \frac{Qcos(n'z - Mz)}{sen\bar{\omega}} \tag{4.12}$$

e

$$\epsilon = Mz + \frac{Q \cdot sen(n'z - Mz)}{cos\bar{\omega}}. \tag{4.13}$$

4.8.1 O artigo 52

Dando prosseguimento a segunda parte do quarto capítulo, d'Alembert apresenta no artigo 52 a junção entre sua teoria desenvolvida até então e as considerações elaboradas a partir das observações de Bradley e Machin. Fazendo referência primeiramente a equação (Y), ao comparar a as quantidades $d\epsilon$ e dz, nota que a primeira é quase nula quando comparada a segunda no que diz respeito a variação do movimento diário do globo, deste modo, desconsidera o termo $d(d\epsilon cos\pi^2)$ uma vez que seria praticamente nulo quando comparado ao termo $d(k\,dz\,sen\pi)$.

> Observarei primeiramente que o dP, representando o movimento diário do globo terrestre, é igual (art. 43) a $-d\epsilon\sqrt{1-yy}+kdz$, ou $-d\epsilon sin\pi + /kdz$; & como $d\epsilon$ é muito pequeno comparado a dz, & que de modo contrário, dP deve ser muito grande comparado a dz, ou seja, aproximadamente $365\frac{1}{4}$ vezes maior; segue-se que kdz deve ser muito grande comparado a $d\epsilon$, e que podemos considerá-lo como sendo nulo quando comparado a kdz; além disso, como assumimos que a rotação ou movimento angular dP ocorreu na mesma direção que $d\epsilon$, e que é exatamente o oposto na Terra, é visível que k será aproximadamente igual a $365\frac{1}{4}$, tomado negativamente: a partir do qual segue-se que na equação (Y) podemos apagar o termo $d(d\epsilon cos\pi^2)$ do segundo membro, uma vez que esta

quantidade é muito pequena quando comparada a $d(k\,dz\,sen\pi)$. [14](d'Alembert (1749, p.57-58) Apud Chapront, Souchay 2006, p.141, tradução do autor)).

Após integrar a nova equação obtida, d'Alembert observa que os termos que contém o ângulo $n'z - Mz$ serão muito maiores que os demais, desenvolvendo em seguida, uma análise a respeito dos demais termos envolvidos na equação conforme aparece no seguinte trecho.

Agora, estando a equação nesta forma, resta integrá-la para obter o valor do $sen\pi$, após ter feito as substituições indicadas no artigo 46; no entanto, deve-se notar que nestas integrações os termos que conterão o ângulo $n'z - Mz$ serão muito maiores que os demais. Porque por integração estes termos terão como divisor a fração $n' - M$ igual a aproximadamente $\frac{1}{18}$, & como a quantidade m' que é a tangente da inclinação da órbita lunar é aproximadamente $\frac{1}{12}$, segue $\frac{m'}{n'-M}$ que multiplicará na integral o coeficiente $\frac{3A(1+\beta))}{2K}$ será um número aproximadamente igual a $\frac{3}{2}$; pelo contrário, o termo que conterá o ângulo $2U' + 2nz + 2Mz$, será dividido por $2n$, ou seja, por aproximadamente 27; & o termo que conterá $\frac{3A}{2K}$ com o ângulo $2U + 2z + 2Mz$, será dividido por 2; do mais, $1 + \beta$ expressa (artigo 43) a proporção de $\frac{\lambda}{u'^3}$ à $\frac{S}{u^3}$. Ou essa proporção, segundo o Sr. Newton, é igual a 4; & mostraremos abaixo que é maior que 2; portanto o termo que terá $\frac{3A}{2K \cdot 2}$ como coeficiente, estará no final, que terá $\frac{3A(1+\beta))}{2K} \times \frac{m'}{n'-M}$ como coeficiente, pois 1 está para 6. Portanto, esse termo será muito menor do que o dos três termos que contém o ângulo $n'z - Mz$ [15](d'Alembert, 1749, p.57-58) apud Chapront, Souchay (2006, p.141, tradução

[14]J'observerai d'abord, que dP qui représente le mouvement journalier du globe terrestre, est égal (art. 43) à $-d\epsilon\sqrt{1-yy} + kdz$, ou $-d\epsilon sin\pi + /kdz$; & comme $d\epsilon$ est très petit par rapport à dz, & qu'au contraire dP doit être très grand par rapport à dz, c'est-à-dire environ $365\frac{1}{4}$ fois plus grand; il s'ensuit que kdz doit être très grand par rapport à $d\epsilon$, & qu'on peut regarder $d\epsilon$ comme nulle par rapport à kdz; de plus, comme nous avons supposé que la rotation ou le mouvement angulaire dP se faisoit dans le même sens que $d\epsilon$, & que c'est tout le contraire dans la Terre, il est visible que k sera égal à peu près à $365\frac{1}{4}$, pris négativement: d'où il s'ensuit, que dans l'équation (Y) on peut effacer le terme $d(d\epsilon cos\pi^2)$ du second membre, puisque cette quantité est comme nulle par rapport à $d(k\,dz\,sen\pi)$ (d'Alembert (1749, p.57-58) Apud Chapront, Souchay 2006, p.141).

[15]Maintenant, l'équation étant sous cette forme, il n'y a plus qu'à l'intégrer simplement pour avoir la valeur de $sen\pi$, après avoir fait les substitutions indiquées dans l'article 46; mais il faut remarquer que dans ces intégrations les termes qui contiendront l'angle $n'z - Mz$, seront beaucoup plus grands que les autres. Car par l'intégration ces termes auront pour diviseur la fraction $n' - M =$ environ $\frac{1}{18}$, & comme la quantité m' qui est la tangente de l'inclinaison de l'orbite lunaire est environ $\frac{1}{12}$, il s'ensuit que $\frac{m'}{n'-M}$ qui multipliera dans l'intégrale le coefficient $\frac{3A(1+\beta))}{2K}$, sera/ un nombre à peu près $= \frac{3}{2}$; au contraire, le terme qui contiendra l'angle $2U' + 2nz + 2Mz$, sera divisé par $2n$, c'est-à-dire par environ 27; & le terme

do autor)).

Tendo isso em vista, concluí-se que ela será reduzida a seguinte forma:

$$\frac{3A(1+\beta)}{2K} \times \frac{m'\,dz}{n'-M} \times \frac{-cos\pi \cdot sen\pi \cdot \zeta senv'}{-365\frac{1}{4}} = d\,sen\pi, \tag{4.14}$$

de modo que, ao considerar os resultados obtidos em 4.9 e desenvolver uma breve argumentação a respeito dos ângulos quando $z = 0$, chega na seguinte igualdade $cos(-U' + \delta + n'z + Mz) = -sen(n'z - Mz)$ que, ao ser substituída na expressão 4.14 obtém as seguintes expressões para π e $sen\pi$:

$$sen\pi = sen\bar{\omega} - \frac{3Am'(1+\beta)}{2K \cdot 365\frac{1}{4}} \times \frac{sen\bar{\omega} \cdot cos\bar{\omega} \times cos(n'z - Mz)}{n'-M} \tag{4.15}$$

onde,

$$\pi = \bar{\omega} - \frac{3Am'(1+\beta)}{2K \cdot 365\frac{1}{4}} \times \frac{sen\bar{\omega} \cdot cos(n'z - Mz)}{n'-M}. \tag{4.16}$$

Essas equações por sua vez, concordam com as observações de Bradley ao assumir:

$$\frac{3Am'(1+\beta)}{2K \cdot 365\frac{1}{4}} \times sen\bar{\omega} = 9''. \tag{4.17}$$

Utilizando das mesmas argumentações, d'Alembert apresenta em seguida a redução da equação (Z) após negligenciar o termo $dd\pi$, uma vez que de acordo com suas estimativas seria pouco relevante[16]. A equação apresentada foi a seguinte:

$$d\epsilon = -\frac{3A}{2K \cdot k} \times (2+\beta) \times sen\pi \times dz + \frac{3Am'(1+\beta)}{k \cdot Kcos\pi} dz \times \zeta cosv' \times (1 - 2cos\pi^2), \tag{4.18}$$

que ao ser integrada apresenta a expressão

$$\epsilon = \frac{3A(2+\beta)}{2K \cdot 365\frac{1}{4}} / z \cdot sen\bar{\omega} - \frac{3Am'sen(n'z - Mz)}{(n'-M)2K \cdot 365\frac{1}{4}} \times \frac{cos2\bar{\omega}}{cos\bar{\omega}} \times (1+\beta), \tag{4.19}$$

concordando com a equação de Bradley ao assumir

$$\frac{3A(2+\beta)}{2K \cdot 365\frac{1}{4}} \times sen\bar{\omega} = M = \frac{1}{6 \cdot 12 \cdot 360} \tag{4.20}$$

e

$$9'' \times sen\bar{\omega} = -\frac{3Am'cos2\bar{\omega}}{(n'-M)2K \cdot 365\frac{1}{4}} \times (1+\beta)^{17}. \tag{4.21}$$

qui contiendra $\frac{3A}{2K}$ avec l'angle $2U + 2z + 2Mz$, sera divisé par 2; de plus $1+\beta$ exprime (article 43) le rapport de $\frac{\lambda}{u'^3}$ à $\frac{S}{u^3}$. Or ce rapport, selon M. Newton, est égal à 4; & nous ferons voir plus bas, qu'il est plus grand que 2; donc le terme qui aura $\frac{3A}{2K \cdot 2}$ pour coefficient, sera au terme qui aura $\frac{3A(1+\beta))}{2K} \times \frac{m'}{n'-M}$ pour coefficient, comme 1 est à 6 & même plus. Donc ce terme sera beaucoup plus petit que celui des trois termes qui contient l'angle $n'z - Mz$ (d'Alembert, 1749, p.57-58) apud Chapront, Souchay (2006, p.141) .

[16]Chapront, Souchay (2006, p.145) apresentam em nota de rodapé uma estimativa para $\frac{n'-M}{k}$ — presente no termo negligenciado — que é da ordem de $\frac{1}{18 \times 365{,}25}$

4.9 Síntese: Comparações entre métodos e observações

Neste tratado, d'Alembert dedica-se a desenvolver um tratamento analítico para os fenômenos da precessão e nutação do eixo terrestre. Com sua vasta bagagem teórica e prática, adquirida em estudos anteriores como a teoria da lua, o tratado de dinâmica, a teoria das cordas vibrantes, a memória dos ventos, entre outros trabalhos em que aplicou o cálculo diferencial para resolver problemas mecânicos, d'Alembert possuía o subsídio matemático necessário para equacionar os fenômenos em questão. Esses aspectos, fundamentais para o desenvolvimento de sua abordagem, foram discutidos ao longo dos capítulos I a III.

Após estabelecer as bases teóricas de seus cálculos, d'Alembert parte para o passo inovador em sua época: integrar dados observacionais em seus modelos. Tendo desenvolvido soluções analíticas, ele busca ajustar suas constantes de modo que as equações refletissem de maneira mais fiel as variações físicas reais observadas. Esse objetivo só se tornou viável com a contribuição de James Bradley, que, após 20 anos coletando dados precisos sobre uma estrela em busca de evidências da paralaxe estelar, apresentou, em 1748, uma anomalia inesperada. Essa anomalia, que inicialmente não foi explicada por falhas instrumentais, revelou-se como a confirmação da nutação do eixo terrestre.

Contudo, para que essa detecção fosse possível, foi necessário o uso de instrumentos altamente desenvolvidos, capazes de fornecer a precisão e ampliação necessárias, já que o fenômeno de nutação, embora cogitado anteriormente por Newton, havia sido negligenciado devido à sua aparente irrelevância. O avanço tecnológico dos telescópios e o esforço contínuo na coleta de dados observacionais em larga escala foram, portanto, fatores determinantes para o sucesso na detecção da nutação. Essa descoberta, por sua vez, possibilitou que d'Alembert refinasse seus resultados analíticos, ajustando suas equações a partir dos dados observacionais de Bradley, o que levou à confirmação definitiva do fenômeno e à solidificação de seu tratamento analítico.

5 CONCLUSÃO

A investigação proposta foi analisar o êxito no tratamento analítico dos fenômenos de precessão e nutação na primeira metade do século XVIII por Jean Le Rond d'Alembert em seu tratado de 1749. Para tratar desse problema, foram levantadas três principais questões que buscavam compreender: a influência do cálculo diferencial leibniziano sobre o tratamento analítico dos fenômenos, o impacto do aprimoramento tecnológico e metodológico sobre as observações astronômicas por meio das comunidades científicas e como a imprecisão dos dados limitava uma compreensão mais precisa do tema. Essas linhas de análise ajudam a avaliar o problema estudado como um desafio de grande relevância para o período em questão, que foi marcado como um momento crucial na evolução dos estudos em mecânica, onde os tratamentos analíticos passaram a ser desenvolvidos por dois caminhos simultâneos: primeiro o matemático e depois o experimental, usado como método de refinamento dos estudos.

Para dar conta desse objetivo, o estudo foi estruturado em três etapas relacionadas. Primeiramente, foi desenvolvida uma caracterização dos fenômenos, de modo que o leitor tivesse clareza de como se dão seus movimentos e suas principais características. Em seguida, foi apresentado o processo histórico de estudo dos fenômenos, desenvolvendo concomitantemente uma explicação de como a obtenção de dados observacionais precisos foi facilitada por instrumentos e metodologias cada vez mais aprimorados.

Finalizando o desenvolvimento das questões, o trabalho focou na solução analítica que d'Alembert apresentou em 1749. Para isso, conduziu-se uma linha de apresentação de seus interesses acadêmicos relacionados a fenômenos mecânicos, com a finalidade de apresentar sua bagagem matemática antes de se deparar com o problema da precessão e da nutação. Por fim, a apresentação de seu tratado focou nos quatro primeiros capítulos, que, por sua vez, consolidam a solução analítica do problema, suficiente para esta dissertação.

Os resultados obtidos na primeira etapa evidenciam que a precessão é um fenômeno conhecido desde antes da era comum. No entanto, apesar de séculos de estudo, seu tratamento analítico adequado só foi possível a partir do século XVII, quando a comunidade científica compreendeu a necessidade de produzir dados observacionais em larga escala e aprimorar os métodos matemáticos. Os avanços instrumentais e metodológicos subsequentes permitiram aumentar ainda mais a precisão das análises astronômicas.

Nesse contexto, o fenômeno que mais se destaca é a nutação. Embora tenha sido prevista teoricamente por Newton e detectada por Hooke e Flamsteed, sua confirmação definitiva ocorreu apenas na primeira metade do século XVIII, com o trabalho de James Bradley. Após 20 anos de observações sistemáticas em seu observatório particular, Bradley consolidou sua descoberta por meio de ferramentas mais precisas e metodologias rigorosas para garantir a validade dos dados. Esse resultado foi apresentado à *Royal Society* em 1748, marcando um avanço significativo no conhecimento sobre o movimento do eixo terrestre.

A comparação entre as precisões observacionais ao longo dos séculos reforça essa trajetória de aprimoramento. No início do século XVII, Tycho Brahe obteve uma precisão notável de 1' de arco a olho nu, sem o auxílio de instrumentos ópticos. Com o progresso na construção das lunetas — que envolveu melhorias mecânicas, ópticas e metodológicas —, astrônomos como Hooke, Flamsteed e Bradley alcançaram margens de erro cada vez menores, chegando a 5" e 1" de arco, respectivamente. Esse salto qualitativo nos dados foi determinante para a caracterização detalhada da nutação.

Além disso, destaca-se o fato de que Bradley obteve uma precisão superior à de seus antecessores, mesmo utilizando um telescópio com menor poder de ampliação. Enquanto os telescópios de Hooke e Flamsteed possuíam dimensões de 36 e 24 pés, respectivamente, Bradley conseguiu resultados mais refinados com um equipamento menor, evidenciando que não apenas os avanços tecnológicos, mas também o desenvolvimento metodológico no uso dos instrumentos foram cruciais para o progresso da astronomia observacional.

Esse panorama histórico responde à questão central do estudo: a evolução do conhecimento sobre a precessão e a nutação esteve diretamente relacionada ao aperfeiçoamento dos telescópios e das metodologias observacionais. A busca por dados cada vez mais precisos e numerosos impulsionou a comunidade científica a investir em melhores instrumentos e técnicas, um movimento que pode ser observado desde os trabalhos de Tycho Brahe, passando por Galileu, Newton, Huygens e Bradley, até atingir sua consolidação no século XVIII.

Apesar das detecções feitas, os avanços no tratamento analítico da precessão e da nutação só foram possíveis por meio de métodos rigorosos, desenvolvidos e aplicados a diversas problemáticas da mecânica do século XVIII por Maupertuis, Clairaut, d'Alembert, Euler e outros. O uso do cálculo diferencial de Leibniz estabeleceu uma tendência de resolver problemas físicos de maneira analítica, alinhando-os de forma mais precisa com os dados observacionais e consolidando seu uso em problemas de grande complexidade.

O século XVIII testemunhou, assim, a formação de uma comunidade internacional de observadores astronômicos, consolidada principalmente por meio da Academia de Ciências de Paris, na França, e da *Royal Society*, no Reino Unido. Simultaneamente, o desenvolvimento do cálculo diferencial leibniziano e suas aplicações à mecânica por Euler, Clairaut e d'Alembert possibilitou um tratamento analítico desses fenômenos, utilizando as equações da dinâmica Newtoniana. Bem como em outros domínios da mecânica, houve a necessidade de confrontar os cálculos teóricos com os dados experimentais, um processo que ocorreu pela primeira vez na astronomia com os trabalhos de d'Alembert *Recherches sur la précession des équinoxes, et sur la nutation de l'axe de la Terre, dans le système Newtonien*, seguidos pelas memórias de Euler sobre o mesmo problema, denominadas Recherches *sur le mouvement des corps célestes en général, et des planètes en particulier* e publicadas a partir de 1751.

D'Alembert, por sua vez, une os processos mencionados anteriormente e, em seu tratado, constrói sua solução analítica. Partindo de sua base em outros trabalhos de dinâmica, como a memória dos ventos, o tratado de dinâmica — onde, por meio do cálculo diferencial, ele desenvolve o princípio mecânico que leva seu nome — e a teoria da Lua, ao tomar nota da confirmação do problema de nutação da Terra por Bradley e buscando outro tema para se aprofundar, desenvolve um tratamento analítico por meio de seu princípio e, posteriormente, ajusta as equações encontradas utilizando os dados observacionais disponibilizados por Bradley.

O tratado de 1749, então, assume um papel inovador dentro da mecânica analítica, pois une as questões discutidas até aqui, consolidando uma abordagem matemática precisa sobre o problema da precessão e da nutação, refinada pelos dados observacionais mais precisos e criteriosos até então. Dessa forma, foi possível relacionar as constantes físicas do problema às constantes de integração das equações simplificadas, em uma tentativa de esclarecer as variáveis que dependem dessas constantes. Como consequência direta desse trabalho, Euler, de forma paralela, também desenvolvia uma investigação sobre os mesmos fenômenos, apresentando, em 1751, outra solução analítica que seguia um caminho distinto do encontrado por d'Alembert. Essa proposta, denominada *Recherches sur la précession des équinoxes et sur la nutation de l'axe de la Terre*, possibilitou um maior aprofundamento da discussão. Ao partir de um contemporâneo e concorrente na disputa pela solução do problema, abre-se uma oportunidade para comparações entre seus métodos em trabalhos futuros.

Essa disputa eleva o amadurecimento da mecânica analítica no século XVIII reforçando o protagonismo do cálculo diferencial e integral na formulação das equações do movimento. De modo complementar, o desenvolvimento desses métodos não ocorreu de forma isolada, mas como parte de um amplo processo de intercâmbio intelectual entre diversas tradições matemáticas da época presentes nas comunidades acadêmicas. A crescente busca por rigor e generalização levou a uma consolidação das ferramentas matemáticas utilizadas para tratar problemas físicos, estabelecendo um forte vinculo entre a matemática e os tratamentos analíticos dos problemas da mecânica celeste.

Sendo assim, a investigação sobre a precessão e a nutação no século XVIII marca a transição de uma abordagem qualitativa para uma metodologia quantitativa e analítica, fundamentada na utilização sistemática do cálculo diferencial. O trabalho de d'Alembert, ao lado das contribuições de Euler, Clairaut e outros, evidencia o impacto duradouro desse formalismo na compreensão dos fenômenos físicos e consolida um passo fundamental na mecânica como uma ciência matematizada. Essas contribuições abrem espaço para diversas novas investigações, desde um aprofundamento nos demais capítulos do tratado de d'Alembert, para acompanhar como ele dá continuidade às suas equações, até uma análise de outras obras referentes ao tema, como a de Euler, contemporâneo de d'Alembert, que também apresentou uma solução relevante para o problema da precessão e da nutação.

Referências Bibliográficas

Bennett, J. *A Companion to the History ofScience: Telescopes*, First Edition. Edited by Bernard Lightman. Published 2016 by John Wiley & Sons, Ltd.

Berry, A. *A Short History of Astronomy.*, Nabu Press, 2010 (1899).

Bradley, J. *A letter to the right honourable George Earl of macclesfield concerning an apparent motion observed in some of fixed stars*,Phil. Trans., vol. 45, nº485 (janiver 1747-48), p. 1-43.

Cassirrer, Ernst. *A filosofia do iluminismo.* Tradução de Maria Lúcia Machado. Campinas: Editora da UNICAMP, 1992.

Chapront-Touzé, Michelle; Souchay, Jean. *Traités et mémoires mathématiques, 1736-1756: Précession et nutation, 1749-1752.* Paris: CNRS Editions, 2006. 649 p. v. 7. ISBN 2-271-06456-2.

Clairaut, Alexis-Claude. *Mémoire sur le calcul intégral, et sur le développement des équations aux différences partielles.* Histoire de l'Académie Royale des Sciences, 1743.

Clairaut, Alexis-Claude. *Théorie de la figure de la Terre, tirée des principes de l'hydrostatique.* Paris: David l'aîné, 1743.

d'Alembert, Jean Le Rond. *Traité de dynamique.* Paris: David l'aîné, 1743.

d'Alembert, Jean Le Rond. *Mémoires sur les vents.* Paris: Histoire de l'Académie Royale des Sciences, 1746.

d'Alembert, Jean Le Rond. *Mémoire sur les cordes vibrantes.* Histoire de l'Académie Royale des Sciences, 1747.

d'Alembert, Jean Le Rond. *Essai d'une nouvelle théorie de la résistance des fluides.* Paris: David l'aîné, 1752.

Eisenstaedt, J. *Antes de Einstein: relatividad, luz y gravitación*, Fondo de Cultura Económica, Carretera Picacho-Ajusco, 227; 14738 México, D. F., 2015.

Eisenstaedt, J. *Bradley's discovery of nutation*, Laboratoire de Gravitation et Cosmologie Relativistes, Université Pierre et Marie Curie, CNRS/ESA 7065 Tour 22-12, 4ème étage, B.C. 142, 4, place Jussieu, 75252 Paris Cedex 05, France, 75014, Paris, France, 2001.

Euler, L. *Recherches sur la précession des équinoxes et sur la nutation de l'axe de la Terre*, HAB, anné 1749(1751), p.289-325.

Grimberg, G. E. *A constituição da Teoria Das Funções de Várias Variáveis no século XVIII: O Início da Análise Moderna*. Tese de Doutorado. Universidade de São Paulo, Departamento de Filosofia, 2001.

Hankins, Thomas L. *Jean d'Alembert: Science and the Enlightenment*. Oxford: Clarendon Press, 1970.

Hestenes, D. *New Foundations for Classical Mechanics*, segunda edição, Kluwer Academic Publischers, Dordrecht, 1999.

Huygens, C. *Systema Saturnium: sive, De causis mirandorum Saturni phaenomenôn, et comite ejus Planeta Novo*, 1629-1695; Vlacq, Adriaan, 1600-1667, printer; Hollingworth, Jacob, 17th century.

Le Monnier, Pierre - Charles *De la précession annuelle de l'équinoxe et de la nutation de l'axe terrestre causée par la Lune*, RMAS, t. 64, 1745, p.287-293.

Linton, C. M. *From Eudoxus to Einstein: A History of Mathematical Astronomy*, Cambridge University Press, New York, 2004.

Louville, Jacques - Eugène D'Allonville, chevalier DE *Observation de l'équi noxe de printems de cette année 1714, d'où l'on déduit la véritable lon gueur de l'année & quelle est présentement l'obliquité de l'écliptique*, RMAS, t. 33, 1714, f. 99 r^{o}-103 v^{o}.

Louville, J. D. *Observations par lesquel les on détermine quelle est aujourd'hui l'obliquité de l'écliptique, & qui décident la fameuse question, qui est de savoir si elle est variable, ou non*, RMAS, t. 35, 1716, f.53 r^{o}-66 v° et f. 105v^{o}-107 r^{o}.

Nacional, O. ASTRO - *Ferramentas Básicas de Astronomia.*, Disponível em: <https://daed.on.br/astro/obliquidade-da-ecliptica>. Acesso em: 31 maio. 2024.

Newton, I. *Philosophiae naturalis principia mathematica*, 2ºéd, Londres, G. et. J. Innys, 1726.

Savoie, D. *The precession of the equinoxes from Hipparchus to Tycho Brahe*. Edited by N. Capitaine, Paris: Observatoire de Paris, p. 125-130, 2001.

Souchay, J. *d'Alembert's theory of precession-nutation*. Edited by N. Capitaine, Paris: Observatoire de Paris, p. 136-141, 2001.

Wilson, C. *d'Alembert versus Euler on the precession of the equinoxes and the mechanics of rigid bodies*, Arch. Hist. Exact Sci. 37, 233–273 (1987). https://doi.org/10.1007/BF00329902