UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO

INSTITUTO DE MATEMÁTICA

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE MATEMÁTICA

IMPACTOS DA COMBINATÓRIA NO CONTEXTO DA FORMAÇÃO INICIAL DE PROFESSORES DE MATEMÁTICA NA PRÁTICA PROFISSIONAL DOCENTE

Victor Hugo Quaglia de Araujo

Rio de Janeiro

22 de novembro de 2024

IMPACTOS DA COMBINATÓRIA NO CONTEXTO DA FORMAÇÃO INICIAL DE PROFESSORES DE MATEMÁTICA NA PRÁTICA PROFISSIONAL DOCENTE

Victor Hugo Quaglia de Araujo

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Ensino de Matemática do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro – UFRJ, como parte dos requisitos necessários para obtenção do título de Mestre em Ensino de Matemática.

Universidade Federal do Rio de Janeiro

Instituto de Matemática

Programa de Pós-graduação em Ensino de Matemática

Orientador: Cleber Dias da Costa Neto

Rio de Janeiro

22 de novembro de 2024

CIP - Catalogação na Publicação

Q1i

Quaglia de Araujo, Victor Hugo
Impactos da combinatória no contexto da formação inicial de professores de matemática na prática profissional docente / Victor Hugo Quaglia de Araujo. -- Rio de Janeiro, 2024.
162 f.

Orientador: Cleber Dias da Costa Neto.
Dissertação (mestrado) - Universidade Federal do Rio de Janeiro, Instituto de Matemática, Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática, 2024.

1. Ensino de Matemática. 2. Análise Combinatória. 3. Educação Básica. 4. Resolução de Problemas. I. Dias da Costa Neto, Cleber , orient. II. Título.

Elaborado pelo Sistema de Geração Automática da UFRJ com os dados fornecidos pelo(a) autor(a), sob a responsabilidade de Miguel Romeu Amorim Neto - CRB-7/6283.

Universidade Federal do Rio de Janeiro

IMPACTOS DA COMBINATÓRIA NO CONTEXTO DA FORMAÇÃO INICIAL DE PROFESSORES DE MATEMÁTICA NA PRÁTICA PROFISSIONAL DOCENTE

Victor Hugo Quaglia de Araujo

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Ensino de Matemática do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro – UFRJ, como parte dos requisitos necessários para obtenção do título de Mestre em Ensino de Matemática.

Aprovada em: 22/11/2024

Cleber Dias da Costa Neto/ presidente da banca
Doutor – PEMAT/UFRJ, Presidente

Rute Elizabete de Souza Rosa Borba
Doutora – UFPE

Ulisses Dias da Silva
Doutor – PEMAT/UFRJ

AGRADECIMENTOS

Agradeço, primeiramente, a toda a minha família, começando pela minha mãe, Rita de Cassia por investir em mim, trabalhando duro durante toda sua vida, possibilitando-me trilhar essa trajetória acadêmica e profissional, que venho construindo. Dedico este trabalho a minha mãe. Na mesma prateleira, agradeço imensamente a meu irmão por todo o apoio, companheirismo e nossa forte amizade que cada dia é mais fortalecida. Ao meu pai (*in memoriam*), agradeço por todos os ensinamentos e incentivos ao estudo, mesmo que não tivesse me motivado a seguir pela carreira de professor, espero que esteja vendo toda a evolução e construção da minha caminhada, seja onde for.

À minha companheira, Karla Vieira, por sempre me dar forças, incentivar a continuar a pesquisa em conciliação com a enorme carga horária semanal de trabalho, e a responsabilidade de compartilhar o dia a dia. Obrigado por ter deixado tudo mais leve e por toda a compreensão.

Aos meus amigos pelas ajudas em leituras e sugestões para a construção do trabalho, além do apoio incondicional. Agradeço imensamente a minha grande referência e irmão, Ivo Knopp, por todos os conselhos e orientação ao longo deste trabalho.

Ao meu orientador, Cleber Dias da Costa Neto, pela parceria. Agradeço pela atenção e disponibilidade para ajudar tanto com as referências para o trabalho, quanto na produção dos dados, quanto para o desenvolvimento deste trabalho, de modo geral.

Aos professores da banca, Dra. Rute Borba e Dr. Ulisses Dias pelas contribuições tão formativas em suas falas durante a qualificação, que me guiaram para finalização deste trabalho.

Aos colegas de trabalho do CAp/UFRJ e aos meus colegas professores que me apoiam no cotidiano escolar. Agradeço ao meu querido amigo Sérgio Nóbrega (*in memoriam*) por toda a orientação e motivação para realização deste trabalho.

Aos professores do Mestrado em Ensino de Matemática da UFRJ que apontaram muitos caminhos possíveis para além da minha pesquisa. Aos colegas de turma de Mestrado que me apoiaram e contribuíram para a realização do Mestrado. Além de todos os pesquisadores do LaPraME, que muito acrescentaram neste trabalho.

RESUMO

Motivado pela minha trajetória pessoal-acadêmica, pelo número pequeno de pesquisas acerca da combinatória na última década, sobretudo ao que tange a formação inicial e continuada de professores, e a preocupação com a ênfase em um ensino de combinatória que privilegie o raciocínio combinatório, este trabalho tem como objetivo principal entender como a formação inicial de professores e professoras de matemática pode impactá-los, especificamente no que se refere ao ensino de combinatória no contexto da escola básica. Para isso, a partir de uma investigação qualitativa, fizemos entrevistas semiestruturadas com professores(as) que atuam na escola básica, acerca da validade ou não de soluções não padronizadas de problemas de contagem e aspectos de sua formação inicial, seguindo alguns poucos critérios específicos para escolha desses sujeitos de pesquisa, obtidos a partir de um estudo-piloto realizado com um professor, sendo o principal deles: o tempo de licenciados(as) – buscando os que não tivessem muito tempo de formação. O percurso metodológico deste trabalho foi elucidado em três etapas: a seleção dos professores, a aplicação do questionário com estes professores e a realização das entrevistas semiestruturadas. Para realizar a análise dos dados, nos debruçamos na Análise de Conteúdo (BARDIN, 2004), elencando três eixos temáticos: Universidade, Professores e Escola. Cada eixo contém categorias que construímos a partir das unidades de registro encontradas nas transcrições, na íntegra, das entrevistas realizadas. Como resultado, concluímos que há um impacto (negativo) e direto das formações iniciais no conhecimento de combinatória e na prática profissional docente dos egressos das respectivas universidades. Os docentes não buscam se referenciar na graduação quando se remetem ao planejamento de aulas de combinatória, sendo sua própria prática docente a principal referência, assim como livros e apostilas didáticas e a troca de saberes entre colegas professores(as). Apontamos para a *docência compartilhada* para o fortalecimento do elo entre Universidade e Escola, e a necessidade de fincar uma disciplina de combinatória, de cunho obrigatório, que valorize o desenvolvimento do raciocínio combinatório na Universidade. Na perspectiva da escola, indicamos a necessidade de utilização de abordagens problematizadas, no sentido de matemática problematizada, que não se baseiam em "fórmula-aplicação" e decorebas, mas, sim, na construção das propriedades e conceitos combinatórios, que deve ser realizada desde o Ensino Fundamental. Indicamos também a metodologia da Análise de Erro como uma possibilidade para implementação na Educação Básica, podendo contribuir para o processo de ensino-aprendizagem. Verificamos também a necessidade de registrar as soluções de problemas de combinatória de contagem de forma que seja possível reconhecer o raciocínio combinatório intrínseco ao problema, não baseando apenas em soluções numéricas. Espera-se que o trabalho traga contribuições para educadores matemáticos e docentes, articulando o conteúdo matemático de combinatória e a formação de professores e professoras que ensinam matemática, dois eixos centrais dessa pesquisa.

Palavras-chave: Ensino de Matemática. Análise Combinatória. Educação Básica. Resolução de Problemas. Formação Inicial de professores.

ABSTRACT

Motivated by my personal-academic trajectory, the small number of studies on combinatorics over the last decade, especially with regard to the initial and ongoing teacher education, and the concern with emphasizing a combinatorics education that prioritizes combinatorial reasoning, this work aims to understand how the initial training of mathematics teachers can impact them, specifically regarding the teaching of combinatorics in the context of basic education. To achieve this, through a qualitative investigation, we conducted semi-structured interviews with teachers working in basic education, exploring the validity (or lack thereof) of non-standard solutions to counting problems and aspects of their initial teacher education, based on a few specific criteria for selecting the research subjects. These criteria were derived from a pilot study conducted with one teacher, with the main criterion being the length of time since graduation – focusing on those who had not been in the field for too long. The methodological approach of this study was divided into three stages: selecting the teachers, administering a questionnaire to the teachers, and conducting the semi-structured interviews. For data analysis, we applied Content Analysis (BARDIN, 2004), identifying three main thematic axes: University, Teachers, and School. Each axis contains categories that we built from the units of registration found in the full transcripts of the interviews. As a result, we concluded that there is a direct (and negative) impact of initial teacher training on the knowledge of combinatorics and on the professional practice of graduates from the respective universities. The teachers did not reference their undergraduate training when planning combinatorics lessons; instead, their own teaching practice was the primary reference, as well as textbooks, teaching manuals, and the exchange of knowledge with fellow teachers. We point to shared teaching as a way to strengthen the link between university and school, and the need to establish a compulsory combinatorics course that values the development of combinatorial reasoning at the university level. From the school perspective, we indicate the need to use problematized approaches in teaching, meaning mathematics teaching that does not rely on "formula-application" or rote learning, but rather on the construction of combinatorial properties and concepts, which should begin in elementary education. We also recommend the use of Error Analysis methodology as a potential tool for implementation in basic education, which could contribute to the teaching-learning process. Additionally, we identified the need to record solutions to combinatorics counting problems in a way that allows for the recognition of the intrinsic combinatorial reasoning within the problem, rather than focusing solely on numerical solutions. It is hoped that this work will contribute to mathematics educators and teachers, connecting the mathematical content of combinatorics with the professional development of teachers who teach mathematics, two central axes of this research.

Keywords: Mathematics Teaching. Combinatorial Analysis. Basic Education. Problem Solving. Teacher Preparation Programs.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

LISTA DE QUADROS

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO: MOTIVAÇÕES, TRAJETÓRIA ACADÊMICA E JUSTIFICATIVAS

Nesta seção, me encarrego de descrever as principais motivações e justificativas para o meu ingresso no Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática (PEMAT/UFRJ) e, consequentemente, para pesquisar sobre formação de professores e professoras que ensinam matemática e sobre o ensino de análise combinatória, os dois eixos centrais desta pesquisa. Para isso, realizei uma divisão em cinco tópicos, que descreverei brevemente em cada subseção seguinte, sendo eles: (i) afinidade com o tema: experiências na graduação e no ensino básico; (ii) uma experiência no estágio supervisionado; (iii) *docência compartilhada* no âmbito do estágio de docência do PEMAT; (iv) o número de pesquisas acerca da combinatória na última década; (v) a importância do desenvolvimento do raciocínio combinatório no contexto escolar.

1.1 - Afinidade com o tema: experiências na graduação e no ensino básico

Durante minha graduação do curso de licenciatura em matemática pela UFRJ (2016-2020) pude participar do Programa Institucional de Bolsas de Iniciação Científica (PIBIC) por três anos consecutivos. Em 2018, ingressei como voluntário em um grupo de pesquisa que investigava sobre o ensino de Geometria Analítica e Álgebra Linear no contexto do Ensino Médio, coordenado pelo professor Victor Giraldo. Essa pesquisa buscava entender como podíamos articular os conhecimentos abordados nas disciplinas do curso de licenciatura com a matemática escolar, ou seja, aquela produzida na Educação Básica. Meu interesse por essa pesquisa foi grande, uma vez que, assim como em Giraldo (2018), entendo que pode haver uma desconsideração das relações entre as matemáticas acadêmica e escolar em cursos de formação de professores, criando uma falsa dicotomia entre elas.

Em 2019, como bolsista, continuei no PIBIC com orientação do professor Victor Giraldo e pude decidir, em conjunto com ele e outro colega que participou deste novo grupo, o tema da nossa pesquisa. Em virtude de muitas inquietações e incompreensões pessoais sobre o curso de licenciatura em matemática da UFRJ, em que destaco a valorização extrema da matemática acadêmica e um currículo pensado para futuros matemáticos, decidimos analisar como o curso de licenciatura em matemática da UFRJ pode influenciar nas mudanças de perspectivas e concepções dos licenciandos sobre o próprio curso e a profissão docente. Para isso, realizamos uma roda de conversa com quarenta alunos da licenciatura em matemática, estudantes tanto do turno integral como do noturno, que estavam, à época, em diferentes períodos no curso. Nosso objetivo era contrastar as diferenças de perspectivas e expectativas, sobretudo por meio das participações de alunos do início e fim do curso na roda de conversa. Os resultados dessa pesquisa (KNOPP *et al*., 2020) contribuem para o campo de pesquisa da formação de professores e professoras de matemática, principalmente quando estabelecemos um diálogo das falas emergentes da roda de conversa com as literaturas da formação de professores e da decolonialidade.[1]

Neste mesmo ano, comecei a atuar como pesquisador no Laboratório de Práticas Matemáticas do Ensino (LaPraME), projeto de pesquisa vinculado ao PEMAT e também coordenado por Victor Giraldo. Além disso, realizei a disciplina obrigatória “Matemática Finita”, que trata da combinatória, mas não só da contagem, ministrada pela professora Marcia Cerioli. Esta disciplina foi de central importância na minha formação profissional docente, tão impactante que me influenciou a escrever esse texto. Cerioli e Viana (2012) definem ramos da Análise Combinatória, sendo o ramo da contagem um deles, além dele temos o ramo da existência, da enumeração e da otimização. Analogamente, Batanero, Godino e Navarro – Pelayo (1996) definem cinco tipos de problemas combinatórios, sendo os de existência, de enumeração, de contagem, de classificação e de otimização, os quais iremos discutir mais adiante. A disciplina me aproximou da análise combinatória, conteúdo matemático que sempre tive dificuldades durante a Educação Básica. A partir do meu olhar atual, na posição de professor e pesquisador no campo de Educação Matemática, com interesse na formação de professores e no ensino de análise combinatória, vejo que o principal motivo por esse distanciamento que tive em relação a combinatória de contagem enquanto aluno do ensino médio tem relação direta com a forma com a qual ela foi ensinada à época.

Enquanto estudante da escola básica, tive o privilégio de estudar no Colégio Pedro II, uma das maiores instituições públicas federais do Rio de Janeiro e referência no Brasil. Tenho recordações de que as aulas de matemática combinatória eram quase sempre expositivas e buscavam associar os tipos de problemas de contagem a fórmulas específicas usadas na resolução. Durante toda a minha escolarização básica, o único momento que tive contato com a combinatória foi em um único trimestre do segundo ano do Ensino Médio. De

[1] Tais diálogos podem ser encontrados no artigo denominado *Formação Inicial de professores de matemática(s): um olhar decolonial sobre as mudanças de perspectivas dos estudantes* publicado em 2020 na Revista Paranaense de Educação Matemática (RPEM), escrito por mim e pelo meu colega Ivo Knopp com participação dos professores Victor Giraldo e Cleber Neto.

acordo com meu professor, à época, em 2014, os problemas de contagem são recorrentes, isto é, as ideias dos problemas são sempre as mesmas, alterando apenas o texto-base e o contexto nos quais estão inseridos. Dessa maneira, era suficiente entender como resolver os principais tipos de problemas de contagem, aqueles que envolvem arranjos, permutações e combinações, e depois associá-los a outros problemas análogos, resolvendo-os por meio das fórmulas, não demonstradas, apresentadas pelo professor, assumindo, assim, que a combinatória é uma matéria fácil na compreensão dele. Naquela época, nada daquilo fazia sentido para mim e foi um período que me marcou negativamente, sobretudo, por eu gostar de matemática e buscar incessantemente entender o porquê das proposições e teoremas da matemática que eram apresentados, durante as aulas, realmente são verdadeiros.

Recordo-me de não conseguir resolver os problemas propostos nas fichas de exercícios e carregar essas dificuldades e frustrações quanto à combinatória até o momento da realização da disciplina Matemática Finita no curso de graduação. Acredito que discursos como o desse professor, que entendem a combinatória como uma disciplina que não envolve lógica e/ou raciocínio, são comuns na Educação Básica, o que acaba por privilegiar um ensino de matemática tecnicista, pautado no paradigma do exercício (SKOVSMOSE, 2000), no qual o professor dita as *regras do jogo*, em detrimento de um ensino que favorece a construção do raciocínio combinatório e a compreensão dos princípios basilares da análise combinatória, construindo suas principais configurações a partir deles, em um cenário de investigação (*ibidem*, 2000)[2].

Fui monitor da disciplina Matemática Finita nos dois períodos seguintes à realização desta disciplina, lecionada pela professora Márcia Cerioli (IM/UFRJ), onde atuei com ela durante o curso e pude, em algumas ocasiões, também dar aulas para a turma de licenciatura em matemática. Nossos encontros para pensar a disciplina proposta se traduziram em importantes espaços de contribuição para minha reflexão sobre a formação de professores e para o planejamento de ações pedagógicas de uma disciplina da Educação Superior.

Em 2020, em alguns poucos encontros, participei como bolsista do PIBIC, sob orientação da professora Márcia Cerioli, analisando estruturas de contagem e da Teoria de

[2] Para Skovsmose (2000), a educação matemática tradicional se enquadra no paradigma do exercício. Em suma, professores privilegiam suas aulas com maior parte destinada a exposição de conhecimento e técnicas e outra para resolução de exercícios selecionados. O autor afirma que o abandono do paradigma do exercício em direção a cenários de investigação, ambientes que privilegiam a investigação e a criatividade por parte dos estudantes colocando-os em uma posição de ativos no processo de ensino-aprendizagem, pode contribuir para o enfraquecimento das aulas tradicionais e engajamento dos alunos a serem centrais no constructo do seu próprio conhecimento.

Grafos. Em razão da pandemia, nossos encontros não tiveram constância, mas, ainda que em um número pequeno, muito me acrescentaram enquanto professor e ampliaram meus conhecimentos e concepções sobre a combinatória. Destaco que, a partir desse momento, considerarei, no texto, análise combinatória e combinatória com o mesmo significado.

1.2 Uma experiência no estágio supervisionado

Iniciei meu estágio em uma instituição federal no Rio de Janeiro no segundo semestre de 2019, ainda presencialmente. Nesse período, houve uma experiência durante uma aula sobre combinações completas, uma das configurações da contagem, no 2º ano do Ensino Médio que me afetou muito e que narro resumidamente a seguir, a partir do meu ponto de vista. A aula havia começado normalmente, a professora regente estava de pé, pronta para dar aula, e eu estava sentado na sua mesa preparado para fazer minhas observações e anotações enquanto estagiário. Pouco tempo depois do início de suas explanações sobre o tema, um dos estudantes da turma começou a chorar, alegando que o assunto era impossível e que estava com muitas dificuldades para entender, o que fez com que a professora também ficasse emotiva e, de certa forma, desestabilizada com a situação. Por coincidência, eu tinha feito o curso de Matemática Finita no semestre anterior e, diante da minha posição de estagiário, ajudei a professora com o andamento da aula com a autorização dela e, juntos, conseguimos que a aula fluísse melhor.

Esse episódio que acabo de relatar me fez refletir sobre muitos aspectos, pensando em minha formação, na análise combinatória, no clima que permeou toda a aula, dentre outros fatores. Depois da aula, no intervalo, pude conversar com a professora e ela me relatou que, durante sua graduação, não houve disciplina que debatesse análise combinatória, que esta era a primeira vez que ela estava ensinando o referido conteúdo matemático e que suas últimas memórias não muito boas, sobre análise combinatória eram do seu Ensino Médio. Com toda certeza, foi a partir desse momento que pensei em olhar em conjunto a análise combinatória e a formação de professores, levando em consideração que o fato de a professora não ter tido contato com a análise combinatória no seu curso de formação de professores e professoras de matemática afetou (negativamente) a sua prática pedagógica.

1.3 *Docência compartilhada* no âmbito do estágio de docência do PEMAT

No primeiro período de 2022, realizei meu estágio de docência obrigatório referente ao curso de Mestrado oferecido pelo PEMAT, com supervisão do professor Agnaldo Esquincalha, na disciplina Laboratório de Instrumentação para o Ensino da Matemática (LIEM) junto a dois colegas do programa, um mestrando e uma doutoranda – à época. Essa disciplina do curso de licenciatura em matemática possui uma ementa pré-estabelecida, todavia permite que possam ser traçadas diversas estratégias distintas, bem como planejamentos e avaliações, tendo em vista ser uma disciplina formativa de caráter profissional. Nesse sentido, previamente ao início da disciplina no período relatado, em algumas reuniões pudemos decidir quais caminhos iríamos tomar e traçamos um planejamento inicial, assumindo, dessa maneira, uma disciplina que seria lecionada por meio de uma *docência compartilhada***,** permitindo o reconhecimento dos saberes emergentes da prática e a incorporação da formação inicial de professores, consolidando-se essencialmente por meio da construção coletiva de uma cultura de formação profissional, estabelecida a partir da integração entre escola e universidade (GIRALDO *et al.*, 2018). Essa proposta viabiliza professores da escola básica a atuarem em conjunto com o professor universitário, mas não como papel de auxiliar de ensino, como um estágio escolar, “mas sim com um papel de autoridade sobre saberes que são próprios de sua atividade profissional, e cuja legitimidade é reconhecida institucionalmente. ” (*ibidem*, 2018, p.226).

Decidimos que nos primeiros encontros seriam apresentados alguns artigos específicos sobre laboratório de matemática, recursos didáticos e tecnologias, e, posteriormente, haveria a discussão acerca deles em rodas de conversas. Em uma das ocasiões, por exemplo, pudemos contar com a presença da professora Ana Kallef, professora aposentada da Universidade Federal Fluminense (UFF), uma das pioneiras da temática no Brasil. Em sua homenagem, foi fundado o laboratório de matemática nomeado LEG/UFF (Laboratório de Ensino de Geometria) no início da década de 1990 e o LEMAK (Laboratório de Educação Matemática Professora Ana Kaleff) em 2019.

Em um segundo momento, decidimos auxiliar os estudantes da disciplina com dificuldades em conteúdos matemáticos e, para isso, criamos um formulário online, proposto como atividade avaliativa, com duas questões. Em uma delas, solicitamos que os estudantes enumerassem os cinco conteúdos matemáticos explorados na Educação Básica, que julgavam como os mais difíceis de ensinar. Como resultado, das 20 respostas obtidas, 14 contemplavam a combinatória, que, por sua vez, foi o conteúdo matemático da pesquisa com maior número de aparições nas respostas, seguido de trigonometria com 9.

Dessa maneira, dividimos a turma em três grupos, que foram coordenados por cada um dos estagiários, sendo os grupos de Análise Combinatória — no qual eu fui responsável — Álgebra e Geometria. O objetivo dessa divisão era para que cada estagiário entendesse as principais dificuldades dos estudantes acerca da temática do grupo, os motivos para tal e que pudéssemos trabalhar para ressignificar as concepções sobre o tema, contribuindo com a formação deles enquanto professores.[3] Depois, encaminhamos cada um deles para lecionar sobre algum conteúdo da temática, de modo a, obrigatoriamente, explorarem algum recurso didático, sendo um material manipulável e/ou tecnológico, como algum software ou simulador. Essa decisão deixou os participantes inicialmente intrigados e impactados com a situação, tendo em vista que tinham dificuldades no conteúdo. Porém, fomos desconstruindo essa concepção coletivamente ao longo dos encontros e contamos com o empenho deles para preparar suas respectivas aulas.

Na minha posição de professor formador, em virtude da *docência compartilhada*, e responsável pelo grupo de Análise Combinatória com seis integrantes, a partir dos encontros, pude perceber alguns aspectos trazidos pela literatura de pesquisa acerca de combinatória, dialogando também com a formação de professores e professoras de matemática. Primeiramente, pude perceber que não há uma diferença nítida entre aqueles que já haviam realizado a disciplina de Matemática Finita e aqueles que não, considerando que todos possuíam dificuldades. “Quais eram as dificuldades?” Essa foi a questão que tomei como referência no primeiro encontro para poder auxiliá-los. Pude verificar que os alunos tentavam associar os problemas de contagem com fórmulas ou maneiras de resolver problemas, conforme já haviam visto antes, seja no Ensino Médio ou mesmo durante a disciplina no Ensino Superior, para aqueles que já haviam realizado. Ou seja, o raciocínio combinatório era deixado de lado e a preocupação maior era determinar o número natural que satisfazia a contagem. O mais impactante neste contexto é o fato de, muitas vezes, eles conseguirem determinar o resultado, porém não saberem explicar o porquê, o que esbarra no questionamento de que tipo de estudante esses professores seriam ou quais professores eles queriam se tornar.

[3] Foram três encontros de aproximadamente três horas antes do início das apresentações das aulas.

Assumindo como referência uma matemática problematizada (GIRALDO, 2019), trouxe para discussão alguns aspectos importantes da profissão docente para tensionar o debate, baseando-me, propositalmente, em problemas escolhidos que não faziam parte daqueles conhecidos por eles, em uma situação que não sabiam resolver e também não sabiam explicar, ainda que a estrutura fosse muito parecida com aqueles problemas já conhecidos. Dessa maneira, seria possível atravessar o conteúdo de combinatória, questionar o que seria a matemática para eles, se ela é única, ou se é igual para todo mundo, e o que pensam sobre o ensino da matemática, enquanto uma disciplina.

No segundo encontro, optei por trazer questões de combinatória para resolvermos juntos a partir do Princípio Multiplicativo e o Princípio Aditivo, sem uso de fórmulas ou busca de compreensão de tipos de problemas, como arranjos e combinações. No terceiro e último encontro, antes das apresentações das aulas, iniciamos a partir da resolução de algumas questões e tirando dúvidas acerca do conteúdo. Depois, falamos de plano de aula, selecionamos os temas das apresentações de cada um e discutimos sobre recursos e encaminhamento das aulas, que tiveram 50 minutos de duração cada uma. Como não é o foco dessa Dissertação, concluirei, a seguir, esta subseção destacando o que mais me marcou nesse capítulo de minha trajetória.

Compreendo que a licenciatura em matemática de uma Universidade ofertar a disciplina de combinatória não é suficiente para que os estudantes aprendam a disciplina. Isso vai depender de muitos aspectos, principalmente qual é a concepção do professor formador, responsável pela disciplina. O curso de licenciatura em matemática da UFRJ ainda é uma espécie de bacharelado mutilado (GIRALDO, 2018), necessitando de mais espaços que caracterizariam o curso de licenciatura como, de fato, um curso de formação inicial de docentes em matemática que vão atuar na Educação Básica. Professores e professoras de matemática são formados com poucas discussões sobre a combinatória enquanto conteúdo matemático e sobre o ensino de combinatória da Educação Básica, e, consequentemente, acabam recorrendo a aulas que tiveram na Educação Básica, livros didáticos e/ou videoaulas fornecidas na internet, tais como canais da plataforma YouTube, blogs e vlogs[4], como base para planejar aulas sobre o tema. Se isso ocorre recorrentemente, qual é o papel da

---

[4] Os blogs são um conjunto de páginas on-line, que são constantemente atualizadas, que podem ser diários, periódicos, ou páginas com fins educacionais, compartilhando materiais de aula, avaliações e/ou pensamentos acerca de determinado assunto. A diferença para o vlog é o formato da publicação, em que, os vlogs são caracterizados por pequenos vídeos ao invés de textos e imagens.

licenciatura na formação do(a) professor(a)? Como a formação docente impacta esse(a) professor(a) (ou futuro(a) professor(a)) na sua prática pedagógica?

1.4 O número de pesquisas acerca da combinatória na última década

Durante a realização da minha revisão de literatura sobre a combinatória, que ocorreu majoritariamente no primeiro ano do mestrado, encontrei um artigo, contemplado em um livro, denominado *Pesquisas Brasileiras Sobre Combinatória: uma investigação em periódicos na última década*, publicado em 2020 pelo autor Antonio Carlos de Souza e pela autora Cristiane de Aritmatéa Rocha. Esse trabalho apresenta uma revisão sistemática em relação aos artigos de combinatória publicados nos periódicos brasileiros, classificados com Qualis A1 a B2 indicados na plataforma Sucupira Capes, no período de 2009 a 2019. Foram encontrados 15 periódicos que apresentaram artigos relacionados à combinatória, totalizando 46 artigos em que, por sua vez, somente 36 tratavam diretamente sobre Combinatória, Raciocínio Combinatório e/ou Análise Combinatória (SOUZA E ROCHA, 2020).

Um dos critérios de análise escolhidos pelos autores para classificação dos artigos foi a *abrangência do foco da pesquisa em Combinatória* no Brasil, verificando que apenas oito trabalhos abordaram pesquisas com docentes, sendo cinco delas investigando concepções ou conhecimentos de professores formados sobre combinatória e apenas três centrados na formação inicial, mais especificamente na resolução de questionários de combinatória por licenciandos em matemática. Os autores concluem, neste artigo, nos alertando que:

> [...] há necessidade de mais investigações sobre a formação de professores tanto inicial quanto continuada que promovam discussões sobre aspectos conceituais e práticos para o ensino de Combinatória, visto que professores ainda necessitam de melhor embasamento que contribuam para as tomadas de atitudes em sala de aula. (SOUZA E ROCHA, 2020, p. 45).

1.5 A importância do desenvolvimento do raciocínio combinatório no contexto escolar

Afinal, o que é o raciocínio combinatório e qual a importância do seu desenvolvimento na Educação Básica? Borba, Rocha e Azevedo (2015) sintetizam uma resposta.

> O raciocínio combinatório pode ser definido como um modo de pensar presente na análise de situações nas quais, dados determinados conjuntos, deve-se agrupar seus elementos, de modo a atender critérios específicos (de escolha e/ou ordenação dos elementos) e determinar-se – direta ou indiretamente – o número total de agrupamentos possíveis (BORBA, 2010). A importância do desenvolvimento desse tipo de raciocínio se deve ao fato de possibilitar um modo de pensar

> necessário em situações cotidianas (tais como organização de equipes, de campeonatos esportivos, de cardápios etc.) e, também, aplicado a diversas áreas do conhecimento (tais como Biologia, Química, Estatística, Ciências da Computação dentre outras – em situações classificatórias, por exemplo). (BORBA, ROCHA, AZEVEDO, 2015, p.1349)

Lockwood, Wasserman e Tillema (2020) situam outros argumentos para a importância da combinatória (e, consequentemente, do raciocínio combinatório) e o seu desenvolvimento, na busca de um currículo mais amplo. Eles defendem a inclusão explícita de tópicos de combinatória no currículo (estadunidense), tanto no contexto da Educação Básica, quanto no Ensino Superior – que atualmente está isento[5]. Para eles, a inclusão é benéfica tanto para os estudantes quanto para a sociedade.

> Para os alunos, essa inclusão fornece oportunidades acessíveis para inclusão em torno do aprendizado matemático e fortalece seu desenvolvimento matemático ao aprofundar seu pensamento matemático e expandir suas noções de matemática. Para a sociedade, essa inclusão oferece oportunidades para melhorar o engajamento cívico em um mundo tecnológico. (*ibidem*, 2020, p. 1 – tradução nossa)

Nesse sentido, eles definem cinco fatores que enfatizam a importância da combinatória na Educação Matemática: 1) é *acessível*; 2) oferecem oportunidades para um *pensamento rico*; 3) promove *práticas matemáticas desejáveis*; 4) pode contribuir positivamente para questões de *equidade na Educação Matemática* e 5) é um domínio natural no qual se pode *desenvolver o pensamento e atividade computacional*. A seguir, discutimos cada uma dessas razões, a partir da perspectiva de Lockwood, Wasserman e Tillema (2020).

Quanto a ser *acessível*, acreditam que os problemas de combinatória possuem fácil compreensão do que é solicitado, não necessitando o conhecimento de alguma terminologia específica[6], e que necessitam de poucos pré-requisitos para os estudantes explorarem suas soluções, já que mesmo um estudante bem pequeno, com poucos conhecimentos algébricos, possui a oportunidade de entender e explorar alguns problemas. Contudo, ainda que sejam fáceis no que tange a compreensão, reconhecem que os problemas de combinatória podem ser muito difíceis.

---

[5] Os autores reconhecem que em alguns países a combinatória é um tópico do currículo da Educação Básica e da Educação Superior, citando o Brasil, por meio de uma publicação em evento científico vinculada ao grupo Geração/UFPE.

[6] Diferentemente do que ocorre em “Prove que $sen^2(x) + cos^2(x) = 1$” ou “Determine as raízes do polinômio”, que exigem conhecimentos de terminologias e/ou conceitos prévios. (LOCKWOOD, WASSERMAN, TILLEMA, 2020).

Eles afirmam que parte do que torna os problemas de combinatória tão únicos, com o potencial de serem muito *ricos*, é que não existe sempre um caminho claro ou algum procedimento/algoritmo que resolva problemas de contagem, como ocorre em problemas de Cálculo Diferencial e Integral, por exemplo. É necessário pensar, existem algumas fórmulas, porém cada problema pode ter sua especificidade, sendo totalmente diferentes, necessitando técnicas diferentes de contagem. Além disso, citam diversas pesquisas no campo da Educação Matemática, majoritariamente de naturezas qualitativas por meio de entrevistas e experimentos de professores, nas quais evidenciam que os estudantes podem pensar profundamente sobre uma variedade de tópicos em combinatória, como o princípio multiplicativo e combinações, fornecendo um domínio que é suficientemente rico e desafiador para promover o pensamento e o raciocínio matemático.

Quanto a *práticas matemáticas desejáveis*, argumentam que devido a problemas combinatórios não possuírem um procedimento para serem resolvidos, os estudantes abordam e resolvem os problemas de forma muito diferente, sendo uma importante qualidade dos problemas de combinatória. Isso sugere que os alunos devem defender suas próprias soluções e criticar, ou vir a entender soluções distintas propostas por outros estudantes. Na percepção deles, o interessante é perceber que por mais que as soluções sejam totalmente diferentes, possivelmente estão todas corretas, isto é, a contagem foi realizada corretamente.

Os autores justificam a possibilidade de *equidade na Educação Matemática* por meio do impacto da combinatória em quem tem acesso à matemática na sociedade. Eles reconhecem que existem estudantes que não se sentem “bem-vindos” como membros da comunidade matemática, sendo parte de sua não identificação atrelada ao fato de não terem acesso a diferentes domínios matemáticos. Dessa maneira, pelo fato da combinatória ser acessível e não exigir muitos pré-requisitos, acreditam que pode ser importante para expandir o acesso a matemática e mudar os valores e pensamentos sobre ela. Trazem como razões para isso, a possibilidade de os problemas combinatórios serem aplicados para explorar relevantes problemas sociais, a possibilidade de expandir o entendimento do que é matemática e que os estudantes podem mudar a perspectiva sobre a natureza da matemática, tornando-a alcançável para eles, de modo que faça sentido.

Finalmente, eles alegam que a combinatória é um *tópico matemático essencial para cientistas da computação* conhecerem e entenderem, mas também é cada vez mais essencial para cidadãos serem capazes de entender e se envolver criticamente no mundo tecnológico, com o crescimento de campos que envolvem computação, e o requisito de conhecimentos computacionais para obtenção de uma gama de empregos. Citam, por exemplo, um trabalho que foi realizado com estudantes para explorarem soluções de problemas de contagem por meio da programação, envolvendo código em *Python*. Com um campo de pesquisa, há evidências empíricas de maneiras da combinatória contribuir para o enriquecimento do pensamento computacional, mas indicam a necessidade de um trabalho contínuo nessa área, sobretudo ao dialogar com a Educação Básica.

Portanto, os autores destacam importantes argumentos para inclusão da combinatória no currículo estadunidense, baseados em pesquisas da área de combinatória e da Educação Matemática. Em relação ao Brasil, a combinatória constitui um componente curricular importante, que com a última mudança da Base Nacional Comum Curricular (BNCC) (Brasil, 2018), encontramos habilidades relacionadas à contagem desde o quarto ano do Ensino Fundamental até o Ensino Médio. Embora, haja pesquisas, como Pessoa e Borba (2012), que trazem relatos que acreditam que é possível trabalhar com problemas de contagem simples desde a Educação Infantil.

Entretanto, a literatura de pesquisa indica, conforme será abordado na seção subsequente, que tanto os estudantes quanto os professores de matemática frequentemente enfrentam dificuldades na área da combinatória. Esse fenômeno parece estar diretamente relacionado à formação inicial dos docentes. Na seção anterior, ao relatar minha experiência como professor formador durante o estágio em uma disciplina da graduação, evidenciei que os licenciandos, embora muitas vezes fossem capazes de resolver problemas de combinatória, demonstravam dificuldade em articular as justificativas subjacentes a essas soluções. Em outras palavras, esses estudantes tendiam a associar os problemas a situações previamente enfrentadas, sem se empenharem em elencar ou compreender o raciocínio combinatório que permeia a problemática em questão. Veremos também, que o mesmo ocorre em diversas outras pesquisas, não sendo a minha experiência um caso isolado – muito pelo contrário. Ademais, as estratégias frequentemente adotadas por professores e professoras tendem a estar, em sua maioria, vinculadas a fórmulas e/ou à resolução predominantemente numérica, sem que haja uma clara explicitação do raciocínio combinatório que fundamenta os resultados apresentados.

Nesse sentido, assumimos ter uma grande preocupação com o desenvolvimento do raciocínio combinatório na escolarização básica e como ele desenvolve o modo de pensar, tanto dos professores quanto dos estudantes, aprofundando o entendimento sobre a matemática combinatória. Acreditamos que seja essencial um trabalho árduo e constante que valorize o raciocínio combinatório de problemas de contagem em detrimento do resultado final, isto é, do número natural correspondente a contagem do problema. Assim, será possível que os cinco fatores elencados por Lockwood, Wasserman e Tillema (2020) façam sentido e contribuam para formação destes estudantes enquanto alunos(as) da escola básica, mas também como cidadãos, permitindo que os estudantes desenvolvam seu modo de pensar em situações cotidianas e contribua para o entendimento de outras áreas (BORBA, ROCHA, AZEVEDO, 2015).

1.6 Justificativas, objetivos e estrutura do texto

Diante desses cinco tópicos, concluo esta primeira parte do capítulo afirmando que falar sobre minhas motivações e trajetória acadêmica é pensar a formação de professores e professoras de matemática e a combinatória conjuntamente e, ao mesmo tempo, colaborar com uma área que necessita de mais pesquisas. Ademais, justificamos esta pesquisa pelas motivações pessoais-profissionais, pela contribuição de um trabalho para esta área da Educação Matemática que necessita de mais pesquisas, mas, principalmente, com a preocupação do desenvolvimento do raciocínio combinatório na Educação Básica, que nos fez pensar em uma proposta de trabalho que objetiva olhar para as formações iniciais de professores e seu impacto no ensino de combinatória no contexto escolar.

No decorrer da realização desta Dissertação, desde o primeiro momento, quando pensado um panorama geral para a pesquisa e a realização do pré-projeto, foi necessário assumir um viés importante quanto às minhas crenças e aos meus pensamentos acerca da análise combinatória e da formação de professores. Dessa maneira, assumo uma postura crítica ao traçar diálogos entre discussões mobilizadas tanto por sujeitos da investigação como da literatura de pesquisa acerca dos eixos delimitados, não me baseando, assim, de uma posição neutra em relação ao trabalho, até porque esta suposta neutralidade, sobretudo ao falar de educação, não existe (FREIRE, 1996).

Ressaltamos a presença de dois pronomes pessoais ao longo deste texto: a primeira pessoa do singular — nos momentos em que apresento opiniões, concepções e crenças pessoais —; e a primeira pessoa do plural — por entender que esse trabalho que vem sendo construído é coletivo, fruto de contribuições e de conhecimentos plurais que permeiam e influenciam quem eu sou. Colegas da turma de mestrado, professores e professoras do ensino superior, professores e professoras atuantes da escola básica, pesquisadores(as) do LaPraMe, meu orientador de monografia, de mestrado e colega de profissão no Colégio de Aplicação da Universidade Federal do Rio de Janeiro (CAp/UFRJ), durante os dois anos letivos que estive por lá, Cleber Neto, são exemplos de pessoas que foram imprescindíveis para a realização deste trabalho acadêmico.

À luz da literatura da formação de professores, a partir do contexto da matemática problematizada (GIRALDO, 2018; 2019) e a partir das reflexões sobre o que emerge da literatura sobre combinatória, acreditamos que o caminho para efetivas mudanças sobre o conhecimento de combinatória de professores e o processo de ensino-aprendizagem no contexto escolar da referida disciplina é pensar em outro(s) modelo(s) acerca das licenciaturas em matemática e que tipo de profissionais as universidades querem formar. Não há dúvidas de que existem questões e problemas nas formações iniciais de professores que impactam diretamente no conhecimento de combinatória dos futuros professores, mas é desafiador entender como isso ocorre. Neste sentido, temos como objetivo de pesquisa responder à seguinte questão: *Quais são os possíveis impactos da formação inicial de professores de matemática no conhecimento e ensino de combinatória dos docentes no âmbito da Educação Básica?*

A partir de uma perspectiva do que entendemos como matemática problematizada (GIRALDO, 2018; 2019), que será aprofundada na terceira seção, iremos nos orientar pelos seguintes objetivos específicos[7]:

(i) Investigar como os professores lidam com situações-problemas em combinatória, motivadas a partir de possíveis situações promovidas em sala de aula;
(ii) Identificar as referências dos professores para estudo e planejamento de aulas de combinatória, identificando (ou não) traços de suas respectivas formações iniciais;
(iii) Entender quais os critérios de validação usados por parte dos professores quanto às resoluções de problema de contagem e a perspectiva deles acerca de resoluções essencialmente numéricas;
(iv) Entender como abordagens de combinatória de forma não problematizada podem contribuir para o afastamento e, consequentemente, desabrochar possíveis dificuldades em estudantes e professores acerca do conteúdo em questão.

[7] Após a qualificação, refletimos sobre os objetivos deste trabalho e optamos por descartar um dos específicos, referente a compreensão do conhecimento dos docentes em relação ao conteúdo da análise combinatória.

Optamos por uma pesquisa qualitativa com professores de matemática atuantes do contexto escolar, buscaremos responder à questão de pesquisa, nos debruçando nos objetivos específicos, com base em nossas considerações e concepções sobre a combinatória e a formação de professores; e a literatura de pesquisa referente a estas duas grandes áreas.

Em termos de estrutura, iniciamos esse texto com a seção *introdução: motivações, trajetória acadêmica e justificativas*, por entendermos que é essencial conhecer o pesquisador, bem como suas motivações e justificativas para a escolha da temática de pesquisa, bem como situar seus objetivos. Além dela, teremos outros seis capítulos, nesta ordem, *"o que emerge da literatura sobre combinatória"*, "*a formação de professores e professoras de matemática"*, "Formação de professores e combinatória: interseções e implicações no ensino básico*"*, "*metodologia",* "eixos temáticos e análise das entrevistas semiestruturadas" e "considerações finais".

A seguir, damos um panorama geral acerca da literatura de pesquisa dos dois eixos centrais da pesquisa (a análise combinatória e a formação de professores), optando por não destinar um único momento (a partir de uma seção ou subseção) para dialogar com a pesquisa e discutir as problemáticas do trabalho. Dessa maneira, apresentamos os diálogos ao longo das seções subsequentes, conversando e provocando tensionamentos e reflexões, a partir de outras pesquisas trazidas e pontuadas a seguir, bem como seus resultados, a partir do nosso lugar de fala e dos objetivos que elencamos para essa pesquisa.

Em seguida, realizamos um diálogo entre as duas áreas, apresentando *o ciclo vicioso* e explorando o ensino de combinatória no contexto escolar, mostrando abordagens baseadas em uma matemática não-problematizada e, ao mesmo tempo, possibilidades de ensino-aprendizagem que prevaleçam o desenvolvimento do raciocínio combinatório via abordagens problematizadas. Assim, justificamos as escolhas de problemas a serem analisados nas entrevistas semiestruturadas, bem como das soluções elaboradas e as soluções que propomos para resolvê-los. Finalmente, explicitamos o percurso metodológico, a produção dos dados empíricos e nossa análise, indicando as conclusões desta Dissertação.

2 O QUE EMERGE DA LITERATURA SOBRE A COMBINATÓRIA?

No decorrer da minha revisão de literatura, guiei-me em pesquisas que optaram por olhar a combinatória sob a perspectiva de professores ou a partir de um contexto que os envolva. Conforme Souza e Rocha (2020) trazem em sua revisão sistemática, esse critério fez com que a quantidade de pesquisas encontradas fosse pequena, principalmente quando comparamos com a vasta literatura sobre a formação de professores. Muitos dos artigos e Dissertações escolhidos são provenientes de um grupo de pesquisa da Universidade Federal de Pernambuco (UFPE), denominado Geração (Grupo de Estudos em Raciocínio Combinatório e Probabilístico do Centro de Educação da UFPE) e coordenado pela professora Rute Borba.

Em um olhar amplo sobre as licenciaturas em matemática ofertadas pelas universidades públicas brasileiras, principalmente as do Rio de Janeiro, percebemos, em termos de grades curriculares, que a combinatória não é muito frequente e que, quando eventualmente se manifesta não é concedida como uma disciplina, mas como tópico de outra (MARTARELLI; DIAS, 2020). As mais frequentes são *Matemática Finita* (*ibidem*, 2020), que apresenta, em sua matriz, a combinatória de existência (teoria dos grafos, por exemplo) e a de contagem, e outras disciplinas comumente vinculadas à probabilidade, cujos nomes variam nas universidades, contudo a contagem aparece, em geral, como uma ferramenta para os cálculos probabilísticos e, portanto, também constitui a ementa dessas disciplinas.

Em um olhar específico sobre a licenciatura de matemática da Universidade do Estado de Mato Grosso (UNEMAT), especificamente do campus de Barra do Bugres/MT, Da Silva Rodrigues e Rodrigues (2019) realizaram uma pesquisa qualitativa com 21 futuros professores no final do curso (5º a 8º período). Por meio de um questionário, buscaram entender como os cursos de licenciatura de matemática abordam os conhecimentos relacionados ao processo de ensino e aprendizagem de análise combinatória ao futuro professor. A partir da Análise de Conteúdo, analisaram os dados obtidos, concluindo que:

> 86% dos futuros professores de Matemática sentirão inseguros e terão muitas dificuldades para abordarem os tópicos de Análise Combinatória em suas aulas de Matemática no Ensino Médio, porque 66,7% desses futuros professores não aprenderam os conteúdos de Análise Combinatória durante o curso de Licenciatura em Matemática (DA SILVA RODRIGUES; RODRIGUES, 2019).

Teixeira (2020) traz um recorte da sua Tese de Doutorado, defendida em 2012, em um formato de artigo. Esse trabalho objetivou identificar, conhecer e relatar práticas pedagógicas dos professores acerca das experiências vivenciadas durante a resolução de diversos problemas de contagem, propostos para serem desenvolvidos em uma formação continuada desenvolvida pelo professor Paulo Teixeira, autor do artigo, em oito encontros de aproximadamente 5 horas cada. Em sua metodologia, o autor prepara uma sequência didática baseada em fichas de atividades, que trazem problemas de contagem pensados a partir das questões de pesquisas declaradas. As orientações para os 20 sujeitos da pesquisa[8] foram no sentido de que não fizessem a utilização de fórmulas para resolver os problemas propostos, bem como se colocassem na posição de alunos de Ensino Fundamental que estariam na mesma situação que eles, ou seja, sem ter conhecimentos prévios acerca da contagem, possibilitando, assim, que os professores refletissem sobre o quanto a prática pedagógica é necessária para desenvolver habilidades combinatórias. (TEIXEIRA, 2020).

No referido trabalho, foram apresentados dois problemas desenvolvidos no primeiro dos oito encontros e as soluções propostas pelos professores, que foram subdivididos em grupos de até quatro componentes cada. O primeiro problema (figura 1) é introdutório ao Princípio Multiplicativo, bastante comum em livros didáticos. Como resultado, 90% dos docentes apresentaram uma representação numérica, obtendo o correto quantitativo, com o uso de um registro multiplicativo para determinar o total de possibilidades "e, pronto, deram por encerrada a solução, sem quaisquer considerações adicionais [...]" (TEIXEIRA, 2020, p.97) – critica o autor.

Figura 1: Problema 1 e 2

Considere que Bia possui 4(quatro) blusas, nas cores: branco, lilás, verde e azul, e 3(três) saias nas cores: preta, cinza e amarelo.

Problema 1) De quantos modos Bia pode se vestir, fazendo uso de uma saia e uma blusa?

Problema 2) De quantos modos Bia pode se vestir, fazendo uso de uma saia e uma blusa, considerando que quando ela faz uso da saia de cor preta escolhe usar uma blusa de cor clara; quando faz uso da saia de cor amarela escolhe usar uma blusa de cor escura, e quando faz usa da saia de cor cinza se dá o direito de escolher uma blusa de qualquer cor?

[8] Compostos por professores que ensinam matemática na escola básica; estudantes de um curso de Pós-Graduação em Educação Matemática (mestrado e doutorado); pesquisadores, e professores do curso, que pesquisam acerca da formação continuada de professores que ensinam matemática na Educação Básica. Contudo, todos são professores da rede estadual de São Paulo à época, atuantes do Ensino Fundamental e/ou Médio.

Fonte: Teixeira (2020).

Quase todos erraram o segundo problema (figura 1) — 80% dos participantes — tendo em vista que suas soluções foram novamente apenas numéricas, apresentadas por registros multiplicativos e/ou aditivos e, assim como no problema 1, sem levar em consideração quaisquer considerações adicionais ao quantitativo obtido. Esse problema exigia a utilização do Princípio Aditivo, não podendo ser utilizado, desta maneira, somente uma vez o Princípio Multiplicativo, como muitos dos que erraram sugeriram. O professor Paulo Teixeira, coordenador da formação continuada, enfatiza para os sujeitos de pesquisa a necessidade de eles compreenderem em que momento um problema de contagem não pode ser resolvido somente por um registro multiplicativo, justificando por meio de resoluções gráficas, a partir de árvores de possibilidades, que isso ocorre toda vez que a árvore de possibilidades for assimétrica.

As discussões promovidas nesse episódio evidenciaram o não conhecimento, conforme afirma Teixeira (2020), dos participantes deste grupo acerca do Princípio Aditivo. Houve a constatação de falas de professores afirmando que utilizam a operação da adição em alguns casos, acertando alguns problemas e outros não, mas que nem sequer sabiam que o motivo de somar para obtenção de resultados em contagem está atrelado ao Princípio Aditivo. O autor busca justificar esse desconhecimento pela busca demasiada, e, por vezes, única, dos professores nos livros didáticos para fundamentar e preparar suas aulas. E também que:

> Junta-se a essa posição os resquícios de algumas crenças e modelos que foram vivenciados e formadas à época dos estudos na escola básica, e que se estenderam durante a formação inicial nos cursos de Licenciatura, por conta de a formação inicial para o trabalho docente não ter sido suficientemente assertiva a tal ponto de dar conta de reverter uma formação conceitual fragilizada da Matemática, que se tem visto nos dias de hoje (TEIXEIRA, 2020, p.105)

No espaço do desenvolvimento deste trabalho, assumiremos uma perspectiva que privilegia o conhecimento da prática do professor, isto é, o reconhecimento de um conhecimento (próprio) docente. Assim, declaramos uma postura que buscará não olhar para conhecimentos que faltam ao professor, pois, dessa maneira, colocaríamos o saber matemático acadêmico como saber de referência, sucateando o lugar (como *lócus*) de potencialidade da escola, em termos de construção de novos conhecimentos, sobretudo aos professores que atuam nesse âmbito. Portanto, evitaremos utilizar a palavra desconhecimento (ou não conhecimento) do(a) professor(a) acerca de algum conteúdo, como fez Teixeira (2020), atribuindo outros conceitos como confusões ou falta de sistematização de alguns conceitos, que poderiam, por exemplo, ser realizados e obtidos por meio da prática e de ambientes de formação continuada, como proposto por Teixeira (2020) e outros programas, baseados, tais como, no *concept study* (DAVIS, 2011 *apud* GIRALDO *et al.*, 2018).

Martarelli e Dias (2020) também trazem uma proposta próxima à pesquisa de Teixeira (2020) em relação à investigação da resolução de problemas de contagem considerando professores que atuam na escola básica. Eles afirmam que, de fato, há falhas na formação docente em relação à combinatória e que a contagem pode ser um assunto desafiador levando em conta também a variedade de heurísticas[9] para resolução de problemas e as dificuldades de avaliar a resolução de um problema de contagem, assim como a sua (não) validação.

Martarelli e Dias (2020) buscam entender as concepções e crenças de professores acerca da validade de diferentes soluções de um problema de contagem. Acreditam que, como, comumente, a contagem não figura nos cursos de formação e, quando aparece, é tópico de outra disciplina, essas concepções e crenças dos professores quanto às resoluções de problemas de contagem está diretamente relacionada à sua experiência enquanto aluno da Educação Básica. Analogamente, Teixeira (2020) relaciona o desconhecimento de um dos principais princípios da contagem por um dos professores participantes de sua investigação à experiência enquanto aluno da Educação Básica.

Martarelli e Dias (2020) realizam entrevistas semiestruturadas com quatro professores que atuam na Educação Básica. Para isso, se inspiram na metodologia MathTASK (BIZA *et al.*, 2018), ao criarem quatro possíveis resoluções para um problema escolhido (figura 2), mostrando diferentes heurísticas que podem ser utilizadas por alunos para resolver o problema dado. Num momento inicial, os professores resolveram o problema proposto e posteriormente comentaram e deram nota para as resoluções pensadas pelos autores. Para a análise de dados, os autores optaram por utilizar a análise de conteúdo (BARDIN, 2004). Desse modo, alguns aspectos quanto aos sujeitos da pesquisa foram pouco relevantes, quando analisados os dados, podendo citar, por exemplo, se sua formação inicial se situou no âmbito privado ou público.

[9] Segundo Polya (2006), o objetivo da Heurística é o estudo dos métodos e das regras da descoberta e da invenção.

Figura 2: Problema respondido pelos entrevistados

Jair resolveu vender alguns dos livros que tem em casa para poder ganhar um pouco de espaço na estante da sala. Ele possui sete livros de matemática, nove livros de literatura brasileira e dez biografias. No total, ele quer se desfazer de cinco livros. De quantas formas ele pode fazer isso?

Fonte: Martarelli e Dias (2020)

Contudo, as análises dos professores em relação às resoluções propostas foram contundentes. Assim como os outros resultados, que apontam resoluções de contagem associadas a resoluções numéricas, a primeira solução proposta é simplesmente numérica, sem qualquer justificativa. Com exceção de um dos professores, os outros três conseguiram avaliar a solução dada, concluindo por motivos diferentes que a solução está errada. De fato, a contagem na resolução está errada. Mas há uma grande questão por trás dessa análise: Como conseguimos avaliar o raciocínio combinatório na resolução de um problema que não há justificativas? Acredito que essa e as outras análises mostram, na perspectiva desses quatro professores em conjunto com a pesquisa de Teixeira (2020), que as resoluções simplesmente numéricas são privilegiadas quanto à validação de resoluções de problemas de contagem, quando não há a busca de fórmulas apropriadas para o tipo de problema em questão. Nesse sentido, um dos objetivos específicos para esse trabalho é pautado nessa recorrência e na validação de resoluções puramente numéricas no contexto da análise combinatória.

Na Dissertação de Cristiane de Arimatéa Rocha, integrante do grupo Geração – UFPE, defendida em 2011, a autora busca analisar os conhecimentos que professores do Ensino Fundamental e Médio têm sobre combinatória e seu ensino, partindo do pressuposto que a formação inicial e a experiência vivenciada pelos professores impactam e são relevantes para o ensino da combinatória nos diferentes segmentos. Como procedimento metodológico, ela realiza entrevistas semiestruturadas com seis professores, sendo dois dos Anos Iniciais, dois dos Anos Finais do Ensino Fundamental e dois do Ensino Médio. A autora traz em seu trabalho a dificuldade existente, tanto por parte dos professores quanto por parte dos alunos, em relação à resolução de problemas de contagem. Assim, um dos seus objetivos específicos é tentar entender quais estratégias são priorizadas pelos docentes para auxiliar alunos com dificuldades em resoluções de problemas de combinatória.

Na subseção *Ensino de Combinatória e a Formação de Professores*, a autora identifica algumas obras que abordam a formação de professores que ensinam matemática, relacionadas às perspectivas para a formação de professores e o ensino de combinatória. Duas delas são investigações com turmas de licenciandos, enquanto as outras quatro são investigações com professores. Ao longo dessa subseção, ela discorre um pouco sobre cada uma dessas pesquisas, trazendo os aspectos mais relevantes em breves palavras. Nas investigações com as turmas de licenciandos, ambas as pesquisas revelaram dificuldades dos licenciandos na resolução de problemas de Análise Combinatória (ROCHA, 2011), ainda que esses sujeitos acreditem na importância de seu ensino na escola da Educação Básica.

Já em relação às investigações com professores, Cristiane destaca o trabalho de Costa (2003) que, por sua vez, propôs dois questionários para 37 professores que participaram de uma ação de formação continuada. O primeiro identificou os professores e o segundo constatou algumas dificuldades dos professores em relação ao ensino de combinatória, das quais destacamos: a falta de um procedimento sistemático que os auxiliem na listagem de possibilidades e a ausência de justificativa nas soluções apresentadas.

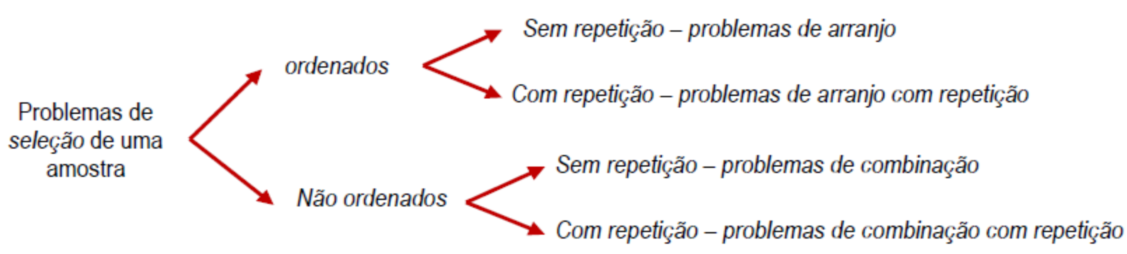
> Essa pesquisa assinalou a necessidade de melhor preparo da formação Matemática e Didática dos professores que apresentam dificuldades em explicitar as suas práticas possuindo uma relação insatisfatória com as propriedades de Combinatória. (ROCHA, 2011, p.73)

No que se refere às outras investigações escolhidas pela autora, todas possuem sua peculiaridade e trazem procedimentos metodológicos distintos. Como interseção, todas apresentam a constante valorização pela utilização de fórmulas pelos professores em detrimento do uso do Princípio Multiplicativo. Teixeira (2020), pensando na construção dos saberes profissionais e da prática profissional docente, aponta para a importância das formações continuadas e das trocas entre os colegas de profissão, nesse sentido.

Dessa maneira, levando em conta as pesquisas, as discussões e os saberes abordados até aqui, é fato que existem problemas no que tange a formação de professores e professoras que ensinam matemática em relação ao ensino de combinatória, mostrando que docentes em formação inicial e continuada possuem dificuldades em resolver problemas de contagem. Tais problemas são evidenciados nas dificuldades em sistematizar uma grande lista de possibilidades e/ou buscar uma resolução meramente numérica sem, contudo, explorar outras estratégias, como a tabela de dupla entrada, a árvore de possibilidades, a listagem — identificando exemplares —, entre outras. Percebemos também que há uma valorização do uso de fórmulas como estratégia para resolução de problemas de contagem, sem, muitas vezes, haver o entendimento do porquê utilizá-las. Rocha (2011) relaciona a dificuldade do professor e o não entendimento efetivo acerca da combinatória às dificuldades que os alunos e as alunas apresentam sobre esse conteúdo. Porém, ainda que não seja seu objetivo em sua Dissertação, reconhece que há direta relação das dificuldades elencadas por docentes com sua formação inicial.

Notamos também que é presente na literatura, ainda que de modo indireto, a falta de justificativas em resolução de problemas de contagem, mostrando a valorização dos docentes por resoluções numéricas, não importando, dessa forma, o raciocínio combinatório envolvido para resolução de uma questão de contagem, por exemplo. Entendemos que é importante refletirmos quanto à possível ruptura que a combinatória traz, em termos de resolução de problemas matemáticos, em relação à necessidade da escrita em conjunto com uma resolução totalmente simbólica (no sentido denotativo) ou numérica. Em nossa perspectiva, talvez um dos grandes problemas do ensino de combinatória seja a constante tentativa de buscar associar problemas de contagem a tipos de problemas recorrentes, como aqueles que envolvem Arranjos, Combinações e Permutações. Cria-se (quase que) um fluxograma que denota procedimentos, vinculados a fórmulas, que supostamente resolveria quaisquer problemas que envolvam contagem. Por meio da Dissertação de Rocha (2011), pudemos perceber que Batanero *et al.* (1996) apresentam um modelo para um dos tipos de problemas simples de matemática, caracterizados por eles como *problemas de seleção*. A estrutura desse modelo pode ser representada a partir de um diagrama, conforme em destaque (figura 3).

Figura 3: Estrutura dos problemas de seleção da classificação de Batanero *et al.* (1996)



Fonte: Batanero *et al.* (1996)

Batanero *et al.* (1996) definem três tipos de problemas combinatórios simples (de contagem): *problemas de seleção, de colocação* e *de partição*. Os problemas de seleção são aqueles que consideram um conjunto com **m** objetos (geralmente distintos), dos quais uma amostra de **n** elementos é retirada/selecionada; os problemas de colocação se referem a colocação/distribuição de uma série de **n** objetos em **m** células; os problemas de partição são aqueles em que se está interessado em dividir um conjunto de **n** objetos em **m** subconjuntos, isto é, fazer uma partição de um conjunto. A seguir destacaremos (figura 4) três problemas, conforme suas classificações.

Figura 4: Problemas simples de combinatória (contagem)

1) (*Problema de seleção*) Numa urna existem quatro bolas numéricas com os algarismos 2, 4, 7 e 9. Uma é sorteada e anota-se seu número. A bola extraída é recolocada na urna e sorteia-se uma segunda e também anota-se seu número. A bola retirada é reintroduzida na urna. Por fim, escolhe-se uma terceira bola e anota-se o seu número. Quantos números de três dígitos podemos obter? Exemplo: Você pode obter o número 222.

2) (*Problemas de colocação*) Temos três cartas idênticas. Queremos colocá-los em quatro envelopes de cores amarelo, branco, creme e dourado. Se cada envelope só puder conter somente uma carta, de quantas maneiras é possível colocar as três cartas nos quatro envelopes? Exemplo: Podemos colocar um cartão no envelope amarelo, outro no envelope branco e outro no envolope creme.

3) (*Problemas de partição*) Maria e Carmen têm quatro cartões numerados de 1 a 4. Elas decidem distribuí-los entre as duas (duas cartas para cada uma). De quantas maneiras eles podem ser distribuídos? Exemplo: Maria pode ficar com as cartas 1 e 2, e Carmen pode ficar com as cartas 3 e 4.

Fonte: Navarro-Pelayo *et al* (1996) – tradução nossa

Os autores afirmam que os problemas não têm o mesmo nível de dificuldade, incluindo aquele que envolvem a mesma operação combinatória. Isto é, problemas diferentes podem ser resolvidos pela aplicação da mesma fórmula, mas que possuem graus de dificuldades muito diferentes. Neste artigo, Navarro-Pelayo *et al* (1996), relatam que elaboraram um questionário com 11 questões para 720 alunos de 14 e/ou 15 anos de 9 institutos de Granada e Córdoba, em que 352 já haviam tido contato com conhecimentos combinatórios e o restante não. As 11 questões selecionadas foram de problemas simples de combinatória, incluindo os três destacados na figura 4, em que foram consideradas as variáveis: (a) modelo combinatório implícito, se o problema é de seleção, colocação ou partição; (b) tipo de operação combinatória, se o problema envolve arranjos, permutações e combinações, com e sem repetições; (c) tipos de elementos que se combinam, letras, números, objetos e pessoas; (d) valor dados aos parâmetros m e n, para $A_{m,n}, AR_{m,n,} C_{m,n}, CR_{m,n}, P_n$ – notação para arranjos, arranjos com repetição, combinação, combinação com repetição e permutações, respectivamente.

Perceba que o primeiro problema destacado pode ser resolvido por meio do fluxograma da figura 3, como há uma retirada com reposição, a ordem da retirada importa e os elementos podem ser repetidos, sendo a operação combinatória desejada para resolver o problema o arranjo com repetição, onde m seria 4, o total de bolas disponíveis e n seria 3, que é o total de bolas retiradas da urna. Portanto, o número de arranjos com repetições de quatro elementos tomados três a três é a resposta, isto é, aplicando-se a fórmula obtemos que $AR_{4,3} = 64$. Esta, seguindo o modelo previsto e pensado ao elaborar os itens pelos autores, seria o que se esperava para os estudantes responderem. Porém, surgem algumas dúvidas, a se considerar: Qual é o desenvolvimento do raciocínio combinatório do estudante ao realizar esse processo? Possivelmente, não seria um tanto mecânico e restrito, haja vista a gama de problemas de contagem, que configurem, por exemplo, a necessidade de mais de uma operação combinatória para a realização da contagem? A utilização de fórmulas e o reconhecimento de operações combinatórias é mais importante que o reconhecimento e conhecimentos da necessidade da utilização do princípio multiplicativo e aditivo?

Nesse sentido, Rodrigues, Dalla e Teixeira (2013) apresentam um relato de experiência acerca de uma oficina, cuja temática é a análise combinatória, proposta com 12 estudantes de 2º ano do Ensino Médio em um colégio público da cidade de Londrina – PR[10]. A preparação e implementação da oficina ocorre no contexto do Estágio Supervisionado do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Estadual de Londrina (UEL), projetada por dois licenciandos em conjunto com o professor formador, autores do relato. Para isso, adotaram a Resolução de Problemas como metodologia, explicitando três perspectivas distintas definidas por Mendonça (1999) e buscam trazer uma proposta diferente da que tradicionalmente é adotada no ensino da contagem.

> Geralmente em uma aula tradicional, a Análise Combinatória é trabalhada com aplicação de fórmulas, sem significado para os alunos. Assim, adotar outra metodologia, que permite a participação do aluno na construção dos conceitos de arranjo, permutação e combinação, pode contribuir para a aquisição de uma compreensão mais significativa, que procura dar sentido à matemática construída. (SOUZA, 2011, p.4 *apud* RODRIGUES; DALLA; TEIXEIRA, 2013, p.206).

Assim, os autores optaram pela *Resolução de Problemas como um ponto de partida*, caracterizada por Mendonça (1999) como a apresentação de um problema no início dos

[10] Esta oficina ocorreu em um sábado, com duração aproximada de 4 horas.

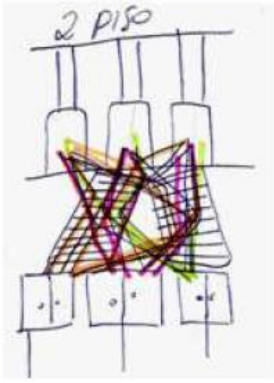
processos de ensino-aprendizagem para que, por meio das resoluções, ou tentativas de resoluções e de discussões promovidas a partir do problema, os alunos possam construir conhecimentos matemáticos. Dessa maneira, os estagiários, professores em formação inicial, dividiram os estudantes em três grupos, nomeados A, B e C, e atuaram como mediadores da atividade, auxiliando-os com dúvidas e questionamentos, intervindo no processo de ensino-aprendizagem, quando necessário. Foram selecionadas cinco questões para a oficina, uma para o Princípio Multiplicativo, uma para o Fatorial, uma para o Arranjo Simples, uma para Permutação Simples e outra para Combinação Simples (RODRIGUES; DALLA; TEIXEIRA, 2013). O objetivo central da oficina foi sistematizar os principais conceitos da análise combinatória bem com suas fórmulas, a partir das resoluções dos problemas que os próprios alunos desenvolveriam.

Durante a oficina, após a proposta da primeira questão, foi pedido que um aluno de cada grupo apresentasse a sua resolução para a turma de modo que fosse possível discutir a respeito das resoluções encontradas. Entendo que as resoluções contribuem muito para algumas discussões que almejo tecer neste trabalho, e, portanto, destacarei a questão, referente ao conteúdo Princípio Multiplicativo, a partir da abordagem dos autores. Destacarei também as soluções dos três grupos, podendo então trazer algumas discussões acerca do raciocínio combinatório e da sistematização dos conceitos de contagem. Segue o problema mencionado:

> Um shopping Center possui 3 portas de entrada para o andar térreo, 2 escadas rolantes ligando o térreo ao primeiro pavimento e 3 elevadores que conduzem do primeiro para o segundo pavimento. De quantas maneiras diferentes uma pessoa, partindo de fora do Shopping Center pode atingir o segundo pavimento usando os acessos mencionados? (RODRIGUES; DALLA; TEIXEIRA, 2013, p.211)

O grupo A apresentou, em pouco tempo, uma resolução numérica: 3x2x3=18. A resposta do problema estava correta, contudo, o grupo não conseguiu explicar por que utilizava a multiplicação e não a adição, por exemplo. Já o grupo B, apresentou a seguinte resolução:

Figura 5: Resolução do problema 1 apresentado por um aluno do grupo B



Fonte: Rodrigues; Dalla; Teixeira (2013)

Os autores relatam que previamente a este desenho, os estudantes do grupo B tentaram contar todas as possibilidades. Depois, perceberam que para chegar no primeiro pavimento, tem duas escadas e existem três elevadores que dão acesso ao segundo pavimento, então existem seis possibilidades para se deslocar do térreo ao segundo pavimento. Concluíram que, como existem três entradas ao shopping, são 18 (3x6) maneiras de chegar ao segundo pavimento, dadas as condições do problema proposto. O terceiro grupo utilizou a listagem direta ainda que inicialmente não conseguissem visualizar que existiam várias possibilidades, mas, depois de algumas discussões, conseguiram listar todas as possibilidades. Após as apresentações, foi possível sistematizar o Princípio Multiplicativo da contagem, isto é, determinar uma maneira de calcular as possibilidades de ocorrer certo evento sem necessariamente listar todos os casos. “A partir da figura apresentada pelo grupo B era possível se chegar à listagem das possibilidades realizada pelo grupo C, e, com base nessas duas resoluções, era possível justificar a resolução proposta pelo grupo A.” (RODRIGUES; DALLA; TEIXEIRA, 2013).

As três soluções mostram que apenas com conhecimentos prévios é possível determinar a solução do problema proposto, que pode ser considerado um problema de contagem, e que, com uma proposta integradora e coletiva, é possível sistematizar princípios basilares da contagem a partir da resolução de problemas. Cada solução apresentou uma estratégia diferente para resolver o problema: o grupo A utilizou a multiplicação de números naturais, o grupo B utilizou desenhos/esquemas para representar as possibilidades e posteriormente contá-las mais facilmente, e o grupo C utilizou a listagem direta das possibilidades. Os professores responsáveis conseguiram colocar as diferentes soluções em um lugar de potencialidade, permitindo a sistematização do que muitos livros, autores e autoras trazem como Princípio Fundamental da Contagem (PFC), equivalentemente ao Princípio Multiplicativo (PM). Partindo desse princípio, conseguiram explorar os problemas propostos em seguida, dos quais destacarei brevemente um recorte do terceiro. Salientamos que, entendemos *estratégias* como todos os meios de se traçar a resolução de um dado problema. No caso de problemas de contagem, são estratégias recorrentes, tanto em livros didáticos quanto em artigos de divulgação científica e resoluções de alunas e alunos do ensino básico, listagem de todas as possibilidades; desenhos; criação de árvores de possibilidades; uso de operações aritméticas simples como a adição e multiplicação; utilização de fórmulas; entre outras.

O problema 3, referente a Arranjo Simples, que pedia o número de senhas — sequências de três vogais distintas — que podem ser formadas, apresenta um grau de complexidade um pouco maior, pelo fato de envolver um maior número de exemplares. Contudo, para determinar o número de arranjos simples de uma configuração, basta utilizarmos o Princípio Multiplicativo, abordado e sistematizado no primeiro problema. Mas, essa abstração num período curto de tempo não é tão simples para os estudantes, isto é, perceber que um problema de contagem pode ser resolvido por meio do PM, sobretudo quando não há participação do professor ativamente nesse processo de aprendizagem. Dessa maneira, com a intervenção dos professores (em formação), os grupos A e C conseguiram obter a resposta correta por meio do PM, porém com algumas dificuldades e erros, que, com as discussões, foram consertados. Já no grupo B, alguns alunos tentaram determinar o número de senhas por meio da listagem delas, contudo outros afirmavam que o número era muito grande. “Nessa situação, é possível observar a necessidade de sistematização de fórmulas [...], de modo que se possa obter uma quantidade de possibilidades diferentes, sem precisar listá-las” (RODRIGUES; DALLA; TEIXEIRA; 2013, p. 216-217).

Antes da realização da oficina e da experiência no Estágio Supervisionado, os dois licenciandos afirmaram ter dificuldades na compreensão dos conceitos da Análise Combinatória. O planejamento e o desenvolvimento da oficina, junto ao professor formador, além de reflexões acerca de aspectos didáticos e pedagógicos da abordagem de conteúdo em detrimento de uma aula expositiva numa perspectiva tradicional de ensino, permitiram que esses estudantes pudessem ter uma nova visão da matemática combinatória, em um sentido positivo.

> Diante disso, consideramos importante para a formação inicial de professores de Matemática e o desenvolvimento de ações como a que deu origem a essa experiência relatada, no sentido de oportunizar-lhes trabalhar com uma abordagem diferenciada em sala de aula desde o Estágio Supervisionado para que possam, futuramente, se encorajarem a utilizar diferentes estratégias metodológicas no trabalho com seus alunos. (RODRIGUES, DALLA, TEIXEIRA, 2013, p.226)

Os trabalhos de Teixeira (2020), Martarelli; Dias (2020), Rocha (2011), Rodrigues; Dalla; Teixeira (2013), evidenciam, não necessariamente de maneira direta, que é possível construir soluções de problemas de contagem com conhecimentos prévios, utilizando estratégias que não privilegiam conhecimentos formais da combinatória, sem sequer situar a análise combinatória como um conteúdo a ser estudado. Este fator é situado por Lockwood, Wasserman e Tillema (2020) como o que torna a combinatória *acessível*, permitindo, inclusive, a possibilidade de contribuir positivamente para questões de *equidade* na Educação Matemática, tornando a matemática possível para estudantes que se veem distantes da matemática enquanto disciplina. Diante disso, analisaremos o estudo de Pessoa; Borba (2010), que teve como objetivo geral analisar a compreensão de estudantes do 2º ano do Ensino Fundamental até a 3ª série do Ensino Médio sobre problemas que envolvem o raciocínio combinatório, destacando quatro objetivos específicos, dos quais destacamos o quarto: analisar como os alunos de séries posteriores (Ensino Médio) lidam com as situações (problemas) após o conhecimento de procedimentos formais.

Esse estudo foi realizado com 568 alunos de quatro escolas ao total, sendo duas escolas públicas e duas escolas privadas, de modo que cada aluno respondeu, individualmente, uma ficha contendo oito problemas de combinatória, dois de cada tipo: produto cartesiano, arranjo, permutação e combinação (PESSOA; BORBA, 2010). Previamente à realização, os estudantes foram informados que a resolução dos problemas era totalmente livre e que poderiam escolher as estratégias que achassem melhor (desenhos, tabelas, operações numéricas, uso de fórmulas, entre outros), não havendo restrição quanto ao tempo para realização da atividade. A análise de resultados foi realizada de forma mista (quali-quanti) utilizando o *Statistical Package for the Social Science* (SPSS), considerando as seguintes variáveis: *tipos de escola* (pública ou privada); *nível de ensino* (Ensino Fundamental I, Ensino Fundamental II e Ensino Médio); e o que as autoras chamam de *significados da Combinatórias dos problemas* (produto cartesiano, arranjo, combinação e permutação).

Os resultados são interessantes, sobretudo no que se refere ao desenvolvimento do raciocínio combinatório na escolarização básica, em que destaco alguns deles, que acredito que possam contribuir para este texto. A tabela 3 do estudo das autoras traz os percentuais de acerto[11] por nível de ensino, evidenciando que o progresso entre estudantes do Ensino Fundamental I e Ensino Fundamental II é grande, de 9,3 por cento para 33,5 por cento, enquanto o avanço de estudantes do Ensino Fundamental II e Médio é bem menor, de 33,5 por cento para 43,2, ainda que exista uma diferença significativa. Elas concluem que experiências extraescolares e/ou maturidade, sem necessariamente estar relacionadas com o ensino da análise combinatória, têm uma grande influência nos desempenhos, tendo em vista os resultados supracitados.

A expectativa das autoras sobre o crescimento percentual de acertos dos estudantes dos anos finais do Ensino Fundamental para o Ensino Médio era maior do que efetivamente notou-se, principalmente devido à formalização e à sistematização dos conceitos da análise combinatória comumente estabelecidas nesse nível de ensino. As autoras notaram que, na análise de dados, ao se debruçarem em fórmulas, os estudantes ainda o faziam de maneira errada, o que demonstra que possivelmente a formalização das estruturas da combinatória não esteja ocorrendo da maneira adequada, tendo em vista que essa deveria auxiliar o estudante a pensar sobre a lógica implícita em cada *significado*[12] do problema, destacando também que há uma priorização do cálculo numérico por meio de fórmulas, em detrimento do cálculo relacional (VERGNAUD, 1991 *apud* PESSOA, BORBA, 2010).

No livro *Razonamiento Combinatorio* (1996), Batanero *et al* sintetizam o resultado de investigações com estudantes da Educação Básica de diversos autores, com recortes de idades específicas, que apresenta conclusão análoga ao trabalho de Pessoa e Borba (2010): quebra de expectativa quanto a capacidade de sistematização, sem a necessidade de enumerar as possibilidades, de problemas de combinatória pelos estudantes com idade mais avançada e a busca de utilização de fórmulas por eles, em detrimento de outras estratégias.

> No entanto, a investigação sobre estratégias de resolução de problemas de enumeração combinatória, que abrangeu diferentes idades e utilizou diferentes tipos de problemas, mostra que, frequentemente, os alunos, especialmente os mais novos, não têm uma capacidade sistemática de enumerar. Ou utilizam procedimentos incompletos, embora sistemáticos, que os levam a resolver o problema de forma inadequada. Outras vezes, os sujeitos que receberam instrução tiveram uma percentagem menor de sucesso numa determinada tarefa do que outros sujeitos que não a receberam. Isto deve-se frequentemente ao fato de que,

---

[11] As autoras optaram por considerar em sua análise quantitativa somente resoluções totalmente assertivas, desconsiderando aquelas que são parcialmente corretas.

[12] No sentido das autoras.

> embora estes últimos tenham aplicado uma estratégia de enumeração sistemática, os alunos instruídos procuraram uma fórmula que resolva o problema, mas identificaram incorretamente a operação combinatória necessária. (BATENERO *et al*, 1994, p. 75- tradução nossa)

Pessoa; Borba (2010) ratificam a necessidade de explorar problemas que envolvam o raciocínio combinatório desde os anos iniciais do Ensino Fundamental, privilegiando estratégias espontâneas e distintas nas resoluções dos diversificados problemas de contagem, estimulando os estudantes ao uso de diferentes representações simbólicas, reconhecendo, desta maneira, o desenvolvimento do raciocínio combinatório ao longo dos níveis de ensino, aprofundando-os à medida que se avança nos anos escolares. Assim como proposto por Rodrigues; Dalla; Teixeira (2013), as autoras (re)afirmam a necessidade de aproveitamento das pistas fornecidas por estudantes ao longo de resolução de problemas combinatórios, para que possam auxiliá-los nos processos de sistematização, ampliação e formalização dos seus conhecimentos referentes à combinatória. O que se alinha com Batanero *et al* (1996), que relatam que quando os estudantes são muito pequenos, possuem dificuldades de sistematização, ou seja, na elaboração de estratégias para determinar a solução de problemas de contagem sem a necessidade de enumerar.

Conforme encaminhamos a linha de pensamento e a seleção dos trabalhos para revisão bibliográfica inicial desse texto, podemos ter enviesado de tal modo a dar como entendimento que nós, ou mesmo que os autores e autoras referenciados, não concordamos (concordam) com a formalização e a sistematização dos principais conceitos e teoremas (ou, princípios) da contagem durante a escolarização básica, especialmente ao afirmar que é possível resolver diversos problemas de combinatória apenas com conhecimentos anteriores, como a operação de multiplicação no conjunto dos naturais e seus significados, por exemplo. Todavia, relatamos que isso não é o que desejamos, muito pelo contrário, pois, quanto às nossas concepções, acreditamos que seja importante a sistematização e a formalização da contagem, mas com algumas ressalvas, diretamente relacionadas com a sequência didática pensada para tal, bem como o tipo de abordagem (problematizada ou não problematizada) (GIRALDO, 2019) e o ano de escolaridade dos estudantes.

As professoras Pessoa e Borba (2010), trazem em seu artigo científico o pensamento de dois trabalhos, que, por sua vez, destacam a formalização e a sistematização da combinatória. Por um lado, os resultados de Inhelder e Piaget (1955) nos levam a concluir que o desenvolvimento do raciocínio combinatório está associado meramente ao desenvolvimento do pensamento lógico, destacando que acreditam no desenvolvimento da combinatória por estágios. Por outro lado, Fischbein (1975) defende que a capacidade de resolução de problemas de combinatória não poderá ser alcançada sem o ensino formal (PESSOA; BORBA, 2010). Percebemos que ambos os trabalhos colocam a forma de perceber o ensino de combinatória na escola básica de maneiras opostas. Como já mostramos aqui, existem situações-problemas em contagem que envolvem um número significativo de exemplares e que sua contagem não é tão simples, isto é, necessitam da utilização de recursos que sistematizem as soluções. Nesse sentido, reiteramos a necessidade da formalização e sistematização da combinatória no ensino básico, porém gostaríamos de problematizar a maneira como isso vem sendo feito. A nossa literatura de pesquisa aponta, em diversos âmbitos e instâncias, problemas sobre a maneira como a sistematização e a formalização vem sendo realizadas.

Rocha (2011) reconhece que há dificuldades dos professores atuantes acerca do conteúdo e que existe direta relação com suas respectivas formações iniciais. Teixeira (2020) cita resquícios do ensino de combinatória que os professores que participaram de sua pesquisa carregam do ensino básico e justifica que suas formações iniciais não foram *totalmente assertivas*, indicando reprodução de aulas que tiveram antes e/ou o livro didático como base e/ou única fonte para estudo e preparação de suas aulas e, consequentemente, a falta de conhecimento dos princípios basilares da contagem por conta desses professores. Em minha experiência no estágio de docência, enquanto mestrando do PEMAT, realço falas que me marcaram e motivaram a fazer esse trabalho, como, por exemplo, a busca dos estudantes, que estavam sob minha orientação, pelas aulas que tiveram de seus respectivos professores e/ou professoras no âmbito escolar como referência para estudo e planejamento das aulas que deveriam planejar e executar na disciplina.

Diante desses fatores, percebemos que existem problemas nas diversas licenciaturas do Brasil, mas que ações como a que fizemos na disciplina de Laboratório de Instrumentação para o Ensino da Matemática (LIEM/UFRJ) e a da oficina do Estágio Supervisionado da UEL (RODRIGUES; DALLA; TEIXEIRA, 2013) apontam caminhos para essa formalização, nesses casos, a partir da *Resolução de Problemas como um ponto de partida* (MENDONÇA, 1999), que ocorreram no âmbito da Educação Superior, com professores em formação inicial. Ações isoladas possivelmente não são suficientes para provocar alterações efetivas nas estruturas das licenciaturas de matemática nas universidades públicas brasileiras, porém acreditamos que devemos buscar por institucionalizar espaços (de formação) que permitam que estudantes conceituem, pensem e reflitam acerca do raciocínio combinatório, das estruturas da análise combinatória e do processo de ensino-aprendizagem na Educação Básica.

Teixeira (2020) propôs um desses espaços durante a realização do seu Doutorado, a partir de uma formação continuada, e pôde perceber que, além dos professores participantes possuírem dificuldades na resolução de problemas de contagem, constataram a necessidade de utilização de fórmulas para resolvê-los, sendo resistentes quanto a soluções gráficas por si só, como o uso da árvore de possibilidades, tendo a concepção de que ideias intuitivas possuem um “menor peso”, isto é, não são suficientes para resolvê-los, havendo a indispensabilidade de números e fórmulas para validação dos problemas. O autor afirma, ao longo de seus encontros, a necessidade de olharem o espaço de formação continuada em termos colaborativos, possibilitando o conhecimento das práticas docentes desenvolvidas pelos colegas, oportunizando, dessa maneira, que cada um (re)signifique a sua (TEIXEIRA, 2020). O autor faz duras críticas às formações iniciais, questionando qual tipo de profissional as universidades querem formar, havendo a necessidade de firmar posição em defesa dos programas de formação inicial de professores de matemática de modo a “oferecer condições para que os licenciandos se apropriem dos conceitos e os compreendam plenamente, em detrimento do domínio de técnicas operatórias que privilegiam o ‘paradigma do exercício’” (TEIXEIRA, 2020, p.112).

É inegável a importância das formações continuadas para a formação de profissionais da educação, um espaço que permita a troca de conhecimentos e diálogos entre docentes, atravessando suas histórias e diferentes trajetórias, permitindo que professores e professoras problematizem suas próprias atuações docentes, bem como suas concepções e crenças acerca da Educação Matemática, da escola, do conteúdo matemático e dos cursos de formação inicial. Tardif; Raymond (2000) destacam a importância do tempo quanto à formação dos professores enquanto profissionais, afirmando que esses só constituem suas próprias identidades por meio da socialização frente aos diversos ambientes de formação, como a universidade, a escola, grupos de amigos e família. Fundamentado em Alvarado-Prada; Freitas e Freitas (2010), acreditamos que:

> [...] a formação docente é uma contínua caminhada dos profissionais da educação, em cujo caminhar atuam todas as suas dimensões individuais e coletivas de caráter histórico, biopsicossocial, político, cultural, próprias de seres integrais e autores de sua própria formação. (ALVARADO-PRADA; FREITAS; FREITAS, 2010, p.370)

Sendo assim, não seria justo tampouco condizente com nossas concepções exigir que a formação inicial de professores fosse suficiente para formar completamente os futuros professores, ou seja, que fornecesse todo o tipo de conhecimento necessário para o(a) professor(a) atuar na Educação Básica, dando como finalizada, a partir da certificação, a formação dos(as) profissionais. Até porque, se assumíssemos esse ponto de vista, estaríamos colocando a Universidade como superior à escola — no sentido formativo —, não reconhecendo o conhecimento próprio do professor, que se aprende na prática, sobretudo no ambiente escolar. Além de assumir que os estudantes são iguais, ou seja, que possuem as mesmas vivências e histórias, o que possibilitaria possuírem uma mesma formação acadêmica. Pontuamos que, no contexto da licenciatura, ainda não há tantas experiências emergentes dos licenciados advindas da prática, o que não permite tantos diálogos referentes às próprias experiências dos discentes, cabendo ao docente responsável pela formação promover debates nesse sentido. Esse fator nos indica a possibilidade de termos professores da Educação Básica atuando junto com professores da Universidade nas licenciaturas, como uma *docência compartilhada* no sentido apresentado por Giraldo *et al.* (2018).

Contudo, também não é viável apostarmos em formações continuadas para solucionar eventuais problemas das formações iniciais de professores e professoras de matemática. Isto é, não acreditamos que as formações continuadas devem ter a função de suprir possíveis lacunas, como o conhecimento combinatório, de professores durante a sua graduação, mas permitir que invistam nas necessidades da profissão docente, num processo contínuo e orgânico. Dessa maneira, decidimos focar nosso trabalho na formação inicial de professores e professoras de matemática, tendo como hipótese a de que investir em mudanças nos atuais modelos de formação de professores das universidades brasileiras, sobretudo públicas, pode ser o principal meio de reverter o atual cenário, que, como já apresentado em algumas pesquisas até aqui, apresenta muitas questões. Olharemos, então, para a literatura da formação de professores de matemática, buscando traçar diálogos com a literatura de combinatória, visando relacionar os dois principais eixos dessa pesquisa: a formação de professores de matemática e a Análise Combinatória (conteúdo matemático).

No que se refere ao ensino de análise combinatória na Educação Básica, diante das dificuldades trazidas pela literatura de pesquisa acerca da análise combinatória, Coelho e Dias (2022) apresentam a metodologia da Análise de Erros como uma possibilidade para o processo de ensino-aprendizagem de combinatória no contexto escolar. Nesse modelo, acredita-se na valorização do erro no processo de aprendizagem, porém não o colocando na mesma posição do acerto. É preciso mapear as dificuldades e categorizar os erros para averiguar estratégias que resultem em novas abordagens que possam provocar por parte dos estudantes o questionamento das estratégias tomadas, problematizando-as, ou, possivelmente, evitando com que erros sejam cometidos por novas decisões tomadas. Portanto, essa metodologia permite que os estudantes possam reavaliar suas estratégias, sob orientação do(a) professor(a). Acreditamos que pensar em outras metodologias para o ensino de combinatória é importante e que esta possui elementos que podem contribuir para a melhor compreensão do raciocínio combinatório e das estruturas combinatórias na Educação Básica, tanto por parte dos professores quanto dos estudantes.

3. A FORMAÇÃO DE PROFESSORES E PROFESSORAS QUE ENSINAM MATEMÁTICA

Pesquiso sobre a formação de professores e professoras que ensinam matemática desde 2019, quando ingressei como pesquisador do grupo de pesquisa Laboratório de Práticas Matemáticas do Ensino (LaPraME) vinculado ao PEMAT/UFRJ. Dessa forma, utilizarei algumas pesquisas que selecionei durante minha revisão de literatura na área de Educação (e.g., NÓVOA, 2009; 2019; TARDIF; LESSARD; LAHAYE, 1991; TARDIF, 2013; TARDIF; RAYMOND, 2000; COCHRAN-SMITH; LYTLE, 1999; SHULMAN, 1986), e especificamente na área de Educação Matemática (KNOPP *et al*., 2020; CLARETO; ROTONDO, 2021; FIORENTINI; OLIVEIRA, 2013; MOREIRA, 2012; MOREIRA; FERREIRA, 2013; 2021; DAVIS; RENERT, 2009; 2013; GIRALDO, 2018; 2019).

3.1 A escola e a formação de professores

> A escola assenta num contrato social e político que lhe atribui a responsabilidade pela formação integral das crianças e num modelo organizacional bem estabelecido. No início do século XXI começou a tornar-se claro que este contrato e este modelo precisam de ser profundamente repensados. Já não se trata de melhorias ou de aperfeiçoamentos ou mesmo de inovações, mas de uma verdadeira metamorfose da escola. Fazer esta afirmação é, também, reconhecer as mudanças que, inevitavelmente, atingem os professores e a sua formação. (NÓVOA, 2019, p.3)

António Nóvoa (2019) critica o modelo de escola que possuímos hoje, criado e normalizado por meio das escolas normais, que são pioneiras no reconhecimento da formação de professores como um campo. Em meados do século XIX, a escola era compreendida como um espaço próprio que possui como núcleo estruturante a sala de aula, com arrumação orgânica e rotineira do espaço, com cadeiras enfileiradas voltadas a uma lousa, métodos de avaliações realizados pelos professores, currículos e tempos de aula padronizados.

Destaco que, devido à pandemia da COVID-19, encontramos hoje, em 2024, algumas pequenas modificações quanto a essa estrutura em algumas escolas, principalmente privadas, como salas de aulas invertidas, salas de aulas virtuais, videoaulas como ferramentas para o processo de ensino-aprendizagem e outros ambientes para além da sala de aula tradicional, caracterizada acima. Porém, como as formações iniciais lidaram e lidam com essas mudanças? O autor reconhece que as licenciaturas (formação inicial) e as escolas (formações continuadas, não tão recorrentes no Brasil) não são ambientes propícios para a formação dos professores do século XXI. (NÓVOA, 2019).

Uma das maiores lutas políticas que pesquisadores(as) e professores(as), frente às grandes instituições, possuem é a valorização e o reconhecimento da profissão do professor enquanto um profissional, que, dessa maneira, necessita de uma formação específica, como as profissões de advogado, médico e engenheiro. Costa (2018) nos relata um pouco dessa luta política evidenciando as leis que no Brasil obrigavam que, para atuar em escolas, os professores precisariam de formações específicas, bem como o cumprimento destas. Em 1971, a lei nº 5.692/71 fragiliza a lei nº 5.540/68, possibilitando que uma complementação pedagógica fosse suficiente para que outros profissionais bacharéis pudessem exercer a docência no ensino técnico, devido a um (suposto) número menor de docentes formados do que o necessário na época. “Todas as normativas para regulamentar a docência na EP[13] foram balizadas por medidas paliativas que visavam a suprir, de forma fragilizada e emergencial, a falta de professores devidamente “qualificados” para o exercício da profissão docente na EP” (COSTA, 2018). Segundo a autora, com a nova Lei de Diretrizes e Bases da Educação (LDB) nº 9.394/1996, a formação de professores alcançou um *status* privilegiado, exigindo uma formação específica para a prática docente, mas que a determinação não foi respeitada.[14]

O ponto importante é que, no mundo, recentemente, são disseminados ideias e discursos que desprivilegiam os conhecimentos próprios do professor e o descaracteriza como um profissional (NÓVOA, 2019). Isso ficou evidente, quando, no Brasil, em 2017, o Ministério da Educação (MEC) promulgou a lei 13.415/2017 que permite que profissionais com notório saber reconhecido pelos respectivos sistemas de ensino possam ministrar conteúdos de áreas afins à sua formação ou experiência profissional em cursos técnicos. Assim como Costa (2018), entendemos essa lei como um retrocesso ao século XX, que oprime e abala toda a resistência criada em uma luta para o reconhecimento e a valorização dos professores como profissionais. É recorrente encontrarmos engenheiros dando aulas de matemática em salas de aula, alguns com complementações pedagógicas, outros não, mas fatalmente não é comum encontrarmos professores de matemática construindo edifícios e pontes, uma vez que para isso o profissional deveria ter uma formação própria.

Entendemos que esse pequeno recorte é essencial para discutirmos a formação de professores que se estabelece atualmente nas universidades e institutos brasileiros, (re)afirmando os diversos problemas e incoerências que encontramos nesses espaços.

[13] Abreviação de Educação Profissional.

[14] Como não é foco da pesquisa, decidimos por não detalhar as leis e o avanço, mas que pode ser acessado para pesquisa: COSTA, Maria Adélia. O notório saber e a precarização da formação docente para a educação profissional. **Revista Profissão Docente**, v. 18, n. 39, p. 239-254, 2018.

Devemos reconhecer como a formação de professores se situou historicamente e socialmente, para tentarmos buscar respostas e compreensões, bem como traçar caminhos e sugestões para mudanças efetivas no sentido de reverter o cenário no qual nos encontramos.

Em 2023, comemoramos 30 anos de licenciatura em matemática noturna na Universidade Federal do Rio de Janeiro (UFRJ). Costa-Neto (2019) afirma que na UFRJ até 1983 só existia um único curso chamado Matemática, com as habilitações em licenciatura e bacharelado. Ao analisar as mudanças curriculares ocorridas em 1983, ele nota que a estrutura do curso de licenciatura assemelhava-se com o de bacharelado, com o acréscimo de duas disciplinas oferecidas pelo Instituto de Matemática da UFRJ (IM/UFRJ), denominadas "Matemática no Curso Secundário I e II", algumas disciplinas pedagógicas oferecidas pela Faculdade de Educação da UFRJ (FE/UFRJ) e o estágio obrigatório no Colégio de Aplicação da UFRJ (CAp/UFRJ). O modelo proposto se assemelhava muito aos cursos 3+1, isto é, três anos de conteúdo específico (matemático) e um ano de conteúdo pedagógico. Notoriamente, havia a valorização do conteúdo matemático em detrimento do conteúdo pedagógico, em geral, ensinados de forma separada, quase em posições dicotômicas, sem haver quaisquer articulações entre elas. Referente às disciplinas propostas pelo IM/UFRJ nessa nova grade, o autor aponta que ela não era oferecida como optativa para os estudantes de bacharelado, constatando que elas eram direcionadas para os professores.

> Portanto, era assumida a necessidade de discutir uma matemática voltada especificamente para os futuros professores, mas que era, em nossa interpretação, calcada em uma perspectiva de deficiência, isto é, na intenção de preencher lacunas sobre aquilo que o futuro professor não aprendera antes como aluno da escola básica – e não no reconhecimento de saberes sobre a matemática escolar de um ponto de vista do professor como profissional (COSTA-NETO, 2019, p.68).

Dessa maneira, o conteúdo matemático é prevalecido, como se fosse superior à prática docente e a outros conhecimentos que não somente matemáticos, como aqueles que são advindos da prática docente. Tínhamos, então, à época, um curso de formação de professores pensado por matemáticos, assumindo um viés que pode ser relatado pelo aforismo famoso na área de formação de professores: "quem sabe faz, quem não sabe ensina". Esta perspectiva de que os conhecimentos "sólidos" e "formais", bem como a teoria produzida nas universidades constituem a referência para os professores(as) aprenderem e aplicarem na prática, é denominada, e criticada, por Cochran-Smith e Lytle (1999) como "conhecimento para prática". Por outro lado, as autoras concebem outra concepção sobre formação, no qual nos alinhamos: o "conhecimento da prática". Esta assume uma perspectiva de que os saberes necessários aos(as) professores(as) são aqueles produzidos a partir de um olhar, por parte dos professores, sobre suas escolas e salas de aula como objeto de investigação intencional, também considerando outros conhecimentos e teoria produzido por outros como objetos de investigação, mas, não os tomando como referência, sobretudo como superiores àqueles obtidos a partir de sua prática docente (*ibidem*, 1999).

É claro que, independentemente da maneira como foi inicialmente pensada, a dissociação do curso de bacharelado é uma vitória para a formação de professores de matemática e pode ter relação direta com o nascimento da Educação Matemática no Brasil entre as décadas de 1970 e o início da década de 1980 (FIORENTINI; LORENZATO, 2006).

Em 1988, houve uma outra reforma curricular no curso de licenciatura da UFRJ, incluindo cinco novas disciplinas, sete excluídas e duas com nomes alterados. Nesse ano, a disciplina denominada *matemática combinatória* foi implementada no curso de licenciatura da UFRJ e demarcou o rompimento do modelo 3+1, pelo menos em termos estruturais. Em 1993, 2001 e 2008 ocorreram outras reformas curriculares no curso de licenciatura, como a criação do curso noturno concomitantemente com a criação da especialização de ensino em matemática, possibilidade de realização de estágio supervisionado em outras instituições além do CAp/UFRJ — localizado na zona sul do Rio de Janeiro, sem fácil acesso para grande parte dos estudantes —, a inserção da disciplina de Libras como obrigatória, entre outras, tornando-o cada vez menos elitista e mais plural e reconhecendo o conhecimento da prática, aquele que o professor só assume enquanto profissional atuante.

Costa-Neto (2019) afirma que o curso de Licenciatura em Matemática da UFRJ nasce como um apêndice do bacharelado e migra para “um modelo caracterizado pela junção de blocos disjuntos de disciplinas associadas a diferentes áreas do conhecimento” (*ibidem*, 2019, p.84), e que, embora houvesse algumas modificações, sobretudo em relação ao 3+1 e a inserção de blocos que não se articulam, essa estrutura se perdurou e se perdura até os tempos atuais. Importante destacar que, em 2006, surge a primeira turma de Mestrado em Ensino de Matemática do PEMAT/UFRJ, um marco histórico de resistência e urgência quanto às necessidades de se (re)pensar e (re)significar o ensino de matemática, o ambiente escolar e a formação de professores de matemática.

Optamos por trazer esse recorte quanto à história da Educação Matemática, da Licenciatura em Matemática da UFRJ e do PEMAT, pois acreditamos que é essencial para entendermos as nossas atuais Licenciaturas em Matemática, e, especificamente, qual é a relação dela com alguns conteúdos matemáticos, mais especificamente neste trabalho com a análise combinatória, e também o ensino de matemática na Educação Básica. Pontuo que a escolha pela UFRJ se dá pelo fato de a instituição fazer parte da minha trajetória acadêmico-profissional, uma vez que fui e sou estudante da UFRJ e atuei como professor substituto da Universidade nos anos de 2022 e 2023, no Colégio de Aplicação (CAp/UFRJ), junto a Cleber Dias da Costa Neto, professor efetivo de matemática e orientador deste trabalho. Porém, entendemos que essa análise poderia se alargar para outras universidades e acreditamos, inclusive, que os resultados podem ser bem diferentes, haja vista que a UFRJ foi a primeira universidade do Brasil — cujo nome era Universidade do Brasil —, com cursos de licenciatura antigos, enquanto, em outras regiões brasileiras, as Licenciaturas podem ter sido implementadas somente no final do século XX e início do século XXI.

Como professores pesquisadores da área de formação de professores e atuantes da escola básica é (quase) impossível não associar a formação de professores de matemática com o ensino de matemática no contexto escolar. Afinal, a licenciatura é, ou pelo menos deveria ser, o lugar destinado à formação inicial dos futuros professores, sendo então pensada por ele, para ele e, consequentemente, na escola básica. Qualquer mudança no cenário escolar afeta diretamente os professores e as formações de professores. Nóvoa (2019) nos alerta acerca da necessidade de realizarmos uma verdadeira metamorfose nas escolas e o fato de termos que repensar nossas formações de professores urgentemente. Diante disso, situaremos na seção seguinte alguns aspectos importantes da formação de professores de matemática.

3.2 A formação de professores de matemática e conhecimento profissional docente

Shulman (1986) foi um dos pioneiros a reconhecer um conhecimento próprio do professor, ou seja, um conhecimento que estes obtêm a partir da prática e só pertencem a eles, iniciado pela crítica ao aforismo “quem sabe faz, quem não sabe ensina” (SHULMAN, 1986, p. 4). O seu trabalho nos possibilita visualizar os professores como profissionais e, assim, pensar em uma formação de professores que seja para formar futuros professores, e não matemáticos. Contudo, essa não é a realidade do curso de Licenciatura em Matemática da maioria das universidades, que pelo contrário, questiona-se demasiadamente que tipo de profissional quer se formar, haja vista que as Licenciaturas parecem ainda ser construídas com referência dominante no conhecimento matemático acadêmico, tendo como principal modelo os currículos dos cursos de bacharelado (MATOS, 2019, p.15).

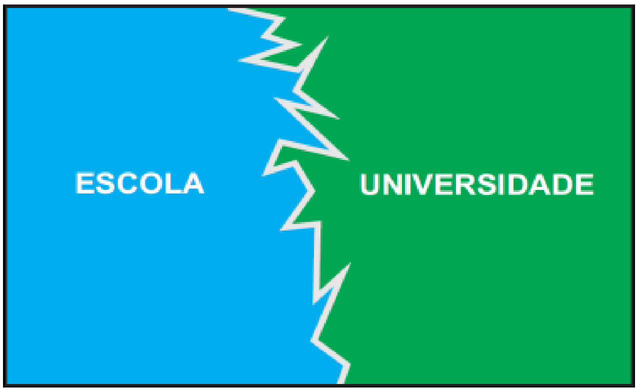
Tardif e Raymond (2000) apontam para uma certa ruptura entre os saberes partilhados no âmbito das universidades em relação aos saberes necessários para a prática dos professores, colocando-os em uma posição de oposição, desqualificando quase por completo a formação docente.

> Em resumo, os saberes que servem como base para o ensino [...] não correspondem, ou pelo menos muito pouco, aos conhecimentos teóricos obtidos na universidade e produzidos pela pesquisa na área da Educação: para os professores de profissão, a experiência de trabalho parece ser a fonte privilegiada de seu saber-ensinar (TARDIF, RAYMOND, 2000).

O matemático alemão Félix Klein (1849-1925) nomeou essa ruptura como *dupla descontinuidade*. Isto é, para Klein [1908] (2009) a primeira descontinuidade se apresenta no início da trajetória acadêmica do futuro professor, quando observa um choque entre a matemática construída na escola básica e aquela vivida como professor em formação. Enquanto a segunda descontinuidade consiste no momento em que o professor, agora licenciado, retorna à escola na figura de professor e nota que a matemática que permeou sua formação universitária não é suficiente para ensinar a matemática da escola (KNOPP *et al.*, 2020), tendo que recorrer muitas vezes aos seus conhecimentos da matemática obtidos na escola enquanto estudante. Tal problemática foi explicitada por Klein (1908) e, embora sua concepção colocasse o conhecimento da matemática da escola como uma subcategoria da matemática científica, buscando a valorização da matemática como ciência, Klein (1908) destaca a importância do protagonismo da escola e já aponta problemas nas formações de professores que, infelizmente, permeiam até hoje, mais de um século após a publicação do trabalho do autor.

Baseado em problemáticas como a dupla descontinuidade de Klein, Matos (2019) propõe um mapa que expõe territórios colocados em oposições, reinterpretando as fronteiras por rachaduras. Para ele, essas rachaduras indicam que esses territórios não são estáticos e expõem lacunas que nos permitem problematizar movimentações que ocorrem no entorno deles, denunciando uma ruptura decorrente do distanciamento entre esses dois territórios. À luz da decolonialidade, rachaduras expõem brechas, e a partir delas é possível “revelar caminhos para novas possibilidades para formação de professores que ensinam matemática(s), de modo a viabilizar a produção de novos espaços que desafiem suas fronteiras" (MATOS, 2019, p.18).

Figura 6: Fronteiras entre escola e universidade reinterpretadas como rachaduras

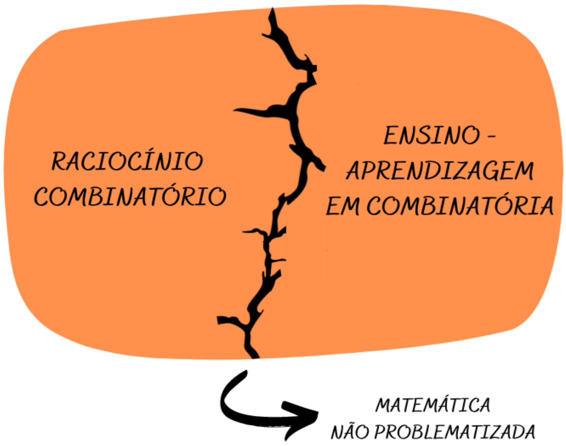


Fonte: Matos (2019)

Em nossa interpretação, essa imagem é muito impactante, possibilitando fazermos analogias, como a um pedaço de vidro por inteiro sem qualquer tipo de alteração (expectativa), considerando que a escola e universidade possuem o papel de formar professores de modo conjunto e articulado. Porém, há a quebra e a exposição de rupturas, que demonstram fissuras das nossas formações de professores, colocando a escola e a universidade em posições dicotômicas (realidade).

A partir dessa figura publicada na tese de Doutorado de Matos (2019), pensamos em caracterizá-la em uma disposição um pouco diferente, mantendo a mesma estrutura, em um olhar acerca do ensino de combinatória na escola básica (figura 7). Em um lado, o raciocínio combinatório e, em oposição, o processo de ensino-aprendizagem em combinatória dos estudantes, marcado por rupturas a partir de abordagens não problematizadas no ensino de matemática, especificamente no ensino de contagem por meio de fórmulas e fluxogramas, numa constante busca de associar elementos que compõem a combinatória em "caixinhas", num contexto em que, para realizar contagens bastaria entender em qual dessas "caixinhas" a situação-problema se adequa e, em seguida, a partir de um cálculo específico para ela, realizar a contagem. Isto é, o raciocínio combinatório deixa de ser estimulado e o aprendizado dos estudantes é prejudicado e dificultado, levando em conta a maneira como docentes trabalharam o conteúdo ao longo de suas trajetórias escolares, quando não deixam para fazê-lo em um período de dois ou três meses durante o Ensino Médio. Essas estratégias vão de encontro com as nossas concepções e crenças acerca do que deveria ser o ensino de contagem no contexto escolar, bem como as abordagens que poderiam ser pensadas, buscando potencializar e explorar o raciocínio combinatório. Considerando essas reflexões, seria justo, todavia, culpar os professores?

Figura 7: Uma interpretação sobre a análise combinatória no contexto escolar



Fonte: o autor.

Nóvoa (2009; 2019; 2022) e Tardif (2013) defendem uma formação de professores que valorize a profissão docente e que seja pensada por dentro da profissão. Também, e não menos importante, alertam-nos sobre necessidade de termos, nas formações iniciais, o constante diálogo com a prática o quanto antes, ou seja, o lugar da prática não deve estar restrito somente ao momento do estágio supervisionado obrigatório, ao contrário, deve permear todos os demais momentos da formação inicial, constituindo um componente curricular.

Infelizmente, ainda vemos muitos problemas nas formações iniciais e uma valorização extrema da dita "matemática pura" nas licenciaturas em matemática, com currículos pensados por matemáticos para matemáticos (MOREIRA, 2012). Em KNOPP *et al.* (2020), resultado da pesquisa de Iniciação Científica desenvolvida em 2019, investigamos as perspectivas dos licenciandos da UFRJ sobre o curso e a profissão. Um dos aspectos que esteve presente em quase todas as falas dos participantes da pesquisa foi a falta de articulação entre a matemática acadêmica e a matemática escolar. Além dessa, percebemos nos discursos dos participantes da pesquisa várias outras dicotomias promovidas na universidade e que são listadas nos trabalhos de Giraldo (2018; 2019), como conteúdo *versus* pedagogia e formação inicial *versus* atuação profissional. Concluímos que, assim como em Giraldo (2019), essas dicotomias promovidas não deveriam existir e os seus supostos polos não precisam ocupar lugares de oposição. A única oposição que se deve reconhecer e discutir ao pensar em abordagens, segundo o autor, tanto no ensino básico quanto no superior, é a que ocorre entre a *matemática problematizada* e a *matemática não problematizada*. Giraldo (2019) define matemática problematizada como:

> uma concepção de possibilidades matemáticas, situadas em diversos contextos e práticas históricos e sociais de produção e de mobilização de saberes e de formas de estar no mundo. Uma abordagem de matemática de forma problematizada privilegia a produção de sentidos e de afetos, em lugar da exposição de fatos, procedimentos e informações (GIRALDO, 2019, p. 8).

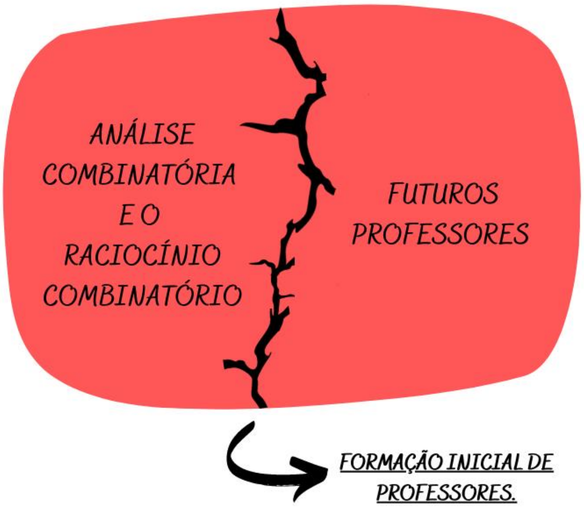
Em contrapartida, Giraldo (2019) refere-se à matemática não problematizada como:

> uma concepção da matemática estabelecida, como um corpo de conhecimentos que sempre foi e sempre será da forma que é hoje, ou que evolui linearmente de um estado "mais atrasado" para um estado "mais avançado", por meio da inspiração isolada de "gênios com talento inato". (GIRALDO, 2019, p. 8)

Pensando na combinatória, é possível que tenhamos abordagens não problematizadas quanto ao seu ensino tanto no ensino básico quanto no ensino superior, isto é, aquelas que não valorizam todo o processo histórico da construção do conteúdo, tomando-a como um produto pronto que somente aqueles que possuem as "regras do jogo" podem entendê-la profundamente, sujeitos esses caracterizados como gênios inatos. Discutiremos ao longo deste trabalho o fato de algumas formações iniciais nem sequer possuírem em suas grades curriculares a análise combinatória, entendendo toda a complexidade presente na construção de um currículo e nos seus processos sociais e políticos, conforme destacado em Costa-Neto (2019). Importante ressaltar que esse olhar não se restringe apenas ao conteúdo matemático *análise combinatória*, isto é, alguns outros conteúdos matemáticos presentes nos currículos das escolas básicas e documentos oficiais — como a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) —, não fazem parte da ementa de disciplinas que definem as grades curriculares das licenciaturas em matemática promovidas pelas universidades. Por exemplo, no curso de Licenciatura em Matemática da UFRJ não temos nenhuma disciplina que verse sobre Matemática Financeira/Educação Financeira. Inegavelmente, a necessidade de algumas discussões que não tive acerca dessa temática enquanto licenciando afetam meu conhecimento e minha prática docente no meu dia a dia.

Nessa perspectiva, buscamos sintetizar nossas principais ideias e situar a tese deste trabalho a partir de uma figura, análoga à figura 5, porém pensada no contexto do ensino superior (figura 8). De um lado a análise combinatória e o raciocínio combinatório e, do outro, os futuros professores e professoras separados por rachaduras que expõem fissuras, caracterizadas pela formação inicial de professores de matemática. Acreditamos que, ainda que não possamos responsabilizá-la integralmente, é no contexto da formação inicial de professores que a análise combinatória deve ser abordada, como um conteúdo matemático e formal, buscando articulá-lo com a realidade do contexto escolar. Discussões acerca de situações de sala de aula, oficinas sobre a temática, leitura de artigos, a compreensão de critérios de validação de problemas de contagem, o raciocínio combinatório e suas potencialidades são aspectos essenciais que podem estar presentes nas licenciaturas em matemática e que poderiam modificar um possível cenário de professores e professoras que recorrentemente possuem dificuldades em análise combinatória, explorando, por vezes, abordagens não problematizadas no contexto escolar.

Figura 8: Uma interpretação sobre a análise combinatória no contexto do ensino superior



Fonte: o autor.

O nosso posicionamento parte de uma perspectiva de que o curso de licenciatura em matemática deve ser pensado principalmente por professores de matemática e educadores matemáticos, e não por matemáticos, entendendo suas necessidades e especificidades. O olhar e o conhecimento próprio do professor de matemática da escola básica são essenciais nesse processo, e esse conhecimento específico do professor atuante da Educação Básica somente é adquirido por ele a partir de sua prática docente. Dessa maneira, optamos por considerar os olhares e vozes de professores e professoras de matemática, visando entender como as suas respectivas formações iniciais de professores de matemática influenciaram (e influenciam) seus conhecimentos sobre combinatória e o ensino de contagem no contexto da Educação Básica.

4. FORMAÇÃO DE PROFESSORES E COMBINATÓRIA: INTERSEÇÕES E IMPLICAÇÕES NO ENSINO BÁSICO

4.1 O ciclo vicioso: Universidades, Professores e Escolas.

Analisando as problemáticas trazidas na literatura de pesquisa referente ao ensino de análise combinatória, identificamos principalmente que os professores possuem muitas dificuldades em combinatória e, consequentemente, os estudantes da Educação Básica também. Este fator pode estar atrelado à formação inicial de professores, que possui problemas, lacunas e/ou é precária nas discussões necessárias ao ensino de combinatória (e.g., ROCHA, 2011; TEIXEIRA, 2020; MARTARELLI, DIAS, 2020; SABO, 2010).

Forma-se, assim, um ciclo, que quase não permite brechas para escapar e é formado por três polos: A Universidade, a Escola e os Professores. Os professores e professoras (em formação) não têm acesso à análise combinatória nas universidades, quando têm costuma ser de caráter matemático e, em raras oportunidades, apresentam discussões para a prática docente. Nesse sentido, ao se formarem, precisam resgatar suas memórias enquanto estudantes da escola básica e o ensino dos seus professores(as), que, em geral, também não são muito boas, para poder lecionar e resolver problemas de contagem, agora como professor(a) – dupla descontinuidade de Klein (1908). Por consequência, o professor que tem dificuldades em ensinar o conteúdo acaba optando por aulas tradicionais, com apresentação de fórmulas e caminhos para identificação dos nomes dados a algumas dessas fórmulas, como arranjos e combinações. O estudante entende alguns casos simples, mas percebe que não consegue resolver todos os problemas com as orientações dos professores, pois eles não seguem todos exatamente da mesma maneira, como o professor(a) apontou, e que alguns parecem ser muito parecidos, todavia possuem soluções completamente diferentes. Este estudante da escola básica, caso opte por fazer licenciatura em matemática, voltará ao início do ciclo.

Este *triângulo de formação* é apresentado por Nóvoa (2019), quando afirma que é necessário haver uma metamorfose na escola e que urgentemente faz-se necessário pensar em um novo modelo de formação de professores, que "implica a criação de um *novo ambiente para a formação profissional docente*" (NÓVOA, 2019). Ele afirma que:

> Fazer essa afirmação é reconhecer, de imediato, que os ambientes que existem nas universidades (no caso das licenciaturas) ou nas escolas (no caso da formação continuada) não são propícios à formação dos professores no século XXI. Precisamos reconstruir esses ambientes, tendo sempre como orientação que o lugar da formação é o lugar da profissão. (*ibidem*, 2019, p.7)

Nesse sentido, ele aponta para a necessidade da interação entre os três polos (vértices) supracitados, além disso afirma que é na interação desses três polos que se encontram as potencialidades transformadoras da formação docente. Não só corroboramos a afirmação do autor, como acreditamos que esse seja exatamente o ciclo que destacamos, referente ao ensino de combinatória, perante os três polos. Este elo deve ser fortificado, a ponto de não ser necessário sair dessas arestas que fazem direta relação entre eles, mas sendo a essência para uma formação inicial eficaz e, de fato, para profissionais da educação (professores). Como sair pela tangente deste ciclo vicioso?

Figura 9: Triângulo de formação

Fonte: Nóvoa (2019).

A literatura também aponta caminhos, com ações em formações continuadas, estágios supervisionados, oficinas e cursos de curta duração que são necessárias para reverter este quadro, e podem ser, de fato, um caminho para transformar alguns(as) professores(as). Mas, devemos reiterar que estas ações são pontuais e não resolvem o problema das formações de professores em um contexto mais amplo.

Sabo (2010) aponta nos seus resultados de pesquisa, que envolve entrevistas com professores de matemática, que a troca de experiência entre os colegas de profissão quanto ao ensino de análise combinatória, favorece e produz saberes (saberes docentes), conforme relataremos, a título de exemplo, com o professor entrevistado no estudo piloto. Observamos então, um tipo de formação continuada, aquela que se dá por meio do tempo e as diversas experiências profissionais dos educandos, caracterizando-se por outra maneira de sair do ciclo.

Buscando resposta para a formação inicial, nos deparamos com alguns obstáculos que constituem a análise combinatória. Quando destacamos o ciclo, por exemplo, trazemos o termo “nomes” para nos referir aos arranjos e combinações, destacando uma problemática importante para a área de ensino de combinatória. Enfatizamos a seguir, diferentes maneiras de se referir a estes nomes, os quais encontramos na literatura de pesquisa e/ou em livros de combinatória, a partir de um quadro.

Quadro 1: Nomenclaturas de conceitos da combinatória a partir da literatura de pesquisa

- Sabo (2010): O autor traz Arranjos, Combinações e Permutações como agrupamentos, com suas devidas características;
- Rodrigues, Barba e Teixeira (2013): Os autores trazem Arranjos, Combinações e Permutações como agrupamentos, e utilizam a definição do livro didático do autor Dante[15];
- Martarelli e Dias (2020): Os autores trazem Arranjos, Combinações e Permutações como técnicas de contagem;
- Rocha (2011): A autora traz Arranjos, Combinações e Permutações como tipos de problemas de combinatória, e inclui também aqueles do tipo Plano Cartesiano;
- Pessoa e Borba (2010): As autoras trazem Arranjos, Combinações, Permutações e Plano cartesiano como significados associados aos problemas básicos que envolvem o raciocínio combinatório trabalhados no Ensino Fundamental e Médio;
- Lima e Borba (2015): As autoras trazem Arranjos, Combinações e Permutações como tipos de problema de combinatória, e inclui também aqueles do tipo Plano Cartesiano;
- Teixeira (2012): O autor traz Arranjos, Combinações e Permutações como agrupamentos, com suas devidas características;
- Hazzan (1985): O autor traz Arranjos, Combinações e Permutações como agrupamentos, com suas devidas características;
- Cerioli e Viana (2012): Os autores trazem Arranjos, Combinações e Permutações como configurações.
- Batanero *et al* (1996): Os autores trazem Arranjos, Combinações e Permutações como operações combinatórias.

Fonte: O autor.

Com este recorte da literatura da pesquisa, incluindo dois livros didáticos, percebemos que a nomenclatura para arranjos, combinações e permutações não é uniforme,

[15] DANTE, L. R. **Matemática:** Contexto e Aplicações - Volume Único - Ensino Médio. Editora Ática, São Paulo, 2003. 616 p.

variando entre agrupamentos, tipos de problemas, técnicas de contagem, significados e operações combinatórias, entre outros não citados. Na perspectiva dos conceitos matemáticos desenvolvidos na Educação Básica, não é comum termos muitas divergências em relações entre termos e conceitos matemáticos, sobretudo referindo-se a sua nomenclatura. Acreditamos que este é um ponto importante para refletirmos de início e que pode contribuir para o não conhecimento de professores e professoras por alguns termos ou associação direta dos termos às respectivas fórmulas. Neste trabalho, assim como Cerioli e Viana (2012), utilizaremos configurações para nomear arranjos, combinações e permutações, sobretudo pelo fato de que a partir da disciplina Matemática Finita, na UFRJ, ministrada pela professora Márcia Cerioli, a análise combinatória passou a fazer sentido para mim e este era o termo utilizado por ela.

O Grupo de Estudos em Raciocínio Combinatório e Probabilístico do Centro de Educação da UFPE (Geração/UFPE) em muitas pesquisas destacou quatro tipos de problemas de combinatória: produto cartesiano, arranjos, combinações e permutações. Mais recentemente, o termo produto cartesiano foi alterado, uma vez que esse termo já existia dentro da Matemática, alterando-o para *produto de medida*. Borba (2010) defende que todas as situações combinatórias devem ser trabalhadas desde os primeiros anos de escolarização básica, de modo que sejam discutidos os *invariantes de escolha* e de *ordenação de elementos*. Neste sentido, ela destaca que em situações de produtos de medidas, os invariantes de escolha e de ordenação são:

> [...] dois ou mais conjuntos disjuntos que são combinados, a partir da seleção de um elemento de cada um dos conjuntos independentes, gerando um novo conjunto de elementos, de natureza distinta da dos conjuntos disjuntos dados. (BORBA, 2010, p. 2-3).

Um problema de produto de medida conhecido e muito privilegiado pelos livros didáticos é aquele que envolve algumas vestimentas diferentes para escolher um traje. Como exemplo, destacamos a primeira situação problema apresentada no livro didático Matemática Bianchini – 10ª Edição[16], do 6º ano, quando apresentada *outra ideia associada à multiplicação* dos números naturais, conforme destacamos: “Bia tem duas calças de agasalho e quatro camisetas para treinar atletismo. De quantos modos diferentes ela pode se vestir para ir aos treinos?” (BIANCHINI, 2022, p.46)[17]. Como resolução, sobretudo neste contexto, utiliza-se diagramas de árvores, tabelas de duplas-entradas, desenhos ou a

---

[16] Atual livro do Programa Nacional do Livro e do Material Didático (PNLD)

[17] Destacamos que este problema é análogo ao problema 1 (figura 1) proposto por Teixeira (2020) em sua formação continuada.

multiplicação direta entre o número de calças e o número de agasalhos, que é o objetivo do livro ao discutir situações como esta. Porém, é importante salientar que, ainda que resolva o problema por meio do princípio multiplicativo, este não é um problema de princípio multiplicativo, pois o princípio multiplicativo é um procedimento para resolução de problemas de combinatória, que pode se estender a problemas que envolvam arranjos, combinações e/ou permutações (LIMA; BORBA, 2015).

Mantendo um olhar para formação inicial, pensamos em outra possibilidade que pode buscar fortalecer o elo entre a universidade e escola: os estágios supervisionados obrigatórios. Esta é uma experiência que pode ser muito importante para não necessariamente aprender análise combinatória ou entender como ela se situa na Educação Básica, agora com o olhar de professor(a) em formação. Porém, situações como: analisar a multiplicação no contexto do sexto ano como um dos significados para a contagem; analisar uma aula no contexto do oitavo ano que almeja contar subconjuntos de um dado conjunto não vazio; analisar aulas do Ensino Médio que privilegiam o lugar do erro na construção do raciocínio combinatório; possíveis trocas com o(a) professor(a) formador(a) sobre sua formação e experiências no contexto de combinatória; entre outros, podem ser muito importantes para ressignificar o entendimento do processo de ensino-aprendizagem de combinatória na escola básica. Como exemplos, temos a pesquisa de Rodrigues, Dalla e Teixeira (2013) e minha experiência enquanto estagiário que motivou esta pesquisa.

Concluímos esta seção destacando que o triângulo de formação existe e tem potencial para ser um triângulo que conecte de fato os três polos, sobretudo quando olhamos para a combinatória. Apontamos caminhos para “sair” do ciclo vicioso, situados pela literatura de pesquisa, isto é, algumas soluções isoladas para resolver o problema presente na formação inicial de professores, que gera todo o ciclo vicioso ocorrido após a sua licenciatura – experiências profissionais docentes e formações continuadas. Contudo, é necessário pensar em soluções mais amplas, que indicam caminhos durante a formação inicial, como aquelas que afetem diretamente às licenciaturas e a escola neste período, por exemplo, ações de extensão e os estágios supervisionados obrigatórios. Além disso, é essencial que as universidades ofertem disciplinas obrigatórias sobre combinatória e o ensino de combinatória na escola básica, o que não é realidade em muitas licenciaturas, ainda que a BNCC destaque conceitos de contagem desde o 4º ano do Ensino Fundamental.

4.2 Ensino de combinatória na escola básica

Definir o que é combinatória não é uma tarefa fácil, sobretudo devido a sua variedade de aplicações (Batanero *et al*, 1996). Cerioli e Viana (2012) definem a Combinatória, ou a Análise Combinatória, como o ramo da matemática que estuda as estruturas discretas, suas propriedades e interrelações. Tanto Batanero *et al* (1996) como Cerioli e Viana (2012) destacam os principais problemas estudados em combinatória, nos quais evidenciamos os problemas de:

- *Existência*: Trata-se de provar a existência (ou não existência) de um determinado tipo de estrutura discreta, diante dos elementos dados e condições determinadas;

- *Enumeração*: Trata-se de realizar uma listagem de todos os subconjuntos de elementos que satisfazem as condições postas;

- *Contagem*: Trata-se da determinação do número total de soluções, sem necessariamente listar todas;

- *Classificação*: Trata-se da sistematização/classificação dos casos segundo critérios apropriados;

- *Otimização*: Trata-se da busca da melhor condição para a obtenção de determinadas soluções para um problema.

Na Educação Superior, nos cursos de licenciatura em Matemática, em geral, quando previstas disciplinas na grade curricular que envolvam diretamente a análise combinatória, nos deparamos com a combinatória de existência, ao estudar as estruturas dos grafos e suas propriedades, e a combinatória de contagem.

Quando pensamos no ensino de combinatória na Educação Básica, referimos aos problemas de contagem, ou seja, problemas que envolvem contar. Contar desde agrupamentos bem simples, que podem ser inclusive contados a mão, o que Cerioli e Viana (2012) caracterizam como Princípio da Contagem Direta (PCD), ou apenas com conhecimentos prévios das quatro operações básicas, sem nem precisar conhecer arranjos, combinações e permutações, que podem ser vilões quando pensamos no estudo da análise combinatória neste contexto.

De fato, distinguir se um problema dado é um problema de arranjo, combinação ou de permutação não é uma tarefa fácil, pelo contrário, pode ser bem difícil. Segundo Hadar e

Hadass (1981), identificar a operação combinatória a partir do enunciado do problema é uma das principais dificuldades dos problemas de combinatória. Em seus resultados de pesquisa, Rocha (2011) relata que os professores de matemática entrevistados tiveram dificuldades na diferenciação dos problemas de arranjo e combinação. Assis (2014) conclui que a formação continuada proposta por ela promoveu mudanças significativas quanto ao conhecimento de combinatória de uma professora, dos anos iniciais, que participou desse processo, contudo, referente a invariante ordenação, a professora continuou a apresentar dificuldades na diferenciação de problemas de *arranjo* e *combinação* (*ibidem*, 2014). Batanero *et al* (1996), quanto a uma investigação de resolução de problemas de contagem dos estudantes da Educação Básica, concluíram que aqueles que tiveram aulas de combinatória (instruídos) tiveram dificuldades na resolução de problemas, buscando aplicar fórmulas que resolvam o problema, porém identificando incorretamente a operação combinatória envolvida.

Cerioli e Viana (2012) apontam que nem todo problema de contagem envolve essas três configurações e que, por vezes, teremos problemas de contagem que exploram mais de uma destas configurações, ou que precisarão ser resolvidos apenas com o princípio multiplicativo e/ou aditivo, princípios basilares para o estudo da análise combinatória, assim como o princípio da bijeção, o princípio K para 1 e o princípio da Inclusão-Exclusão, quando necessário envolver a união de dois ou mais conjuntos cuja interseção é não nula. Esta é mais uma característica de problemas de contagem, que podem os tornar ainda mais complicados. Resolveremos mais à frente os problemas selecionados para as entrevistas semiestruturadas com os professores e, então, mostraremos exemplos práticos sobre os princípios.

Porém, como a combinatória costuma ser abordada em sala de aula e por que os alunos e alunas possuem tanta dificuldade no processo de aprendizagem? Responder essa pergunta nos levaria a uma nova pesquisa, dada a nova questão proposta. Porém, com base na literatura de pesquisa junto a nossas perspectivas, podemos devolver uma possível resposta. A partir de Souza (2011), Cerioli e Viana (2012) e Batanero *et al* (1996), desenvolvemos uma possível resposta para a pergunta proposta.

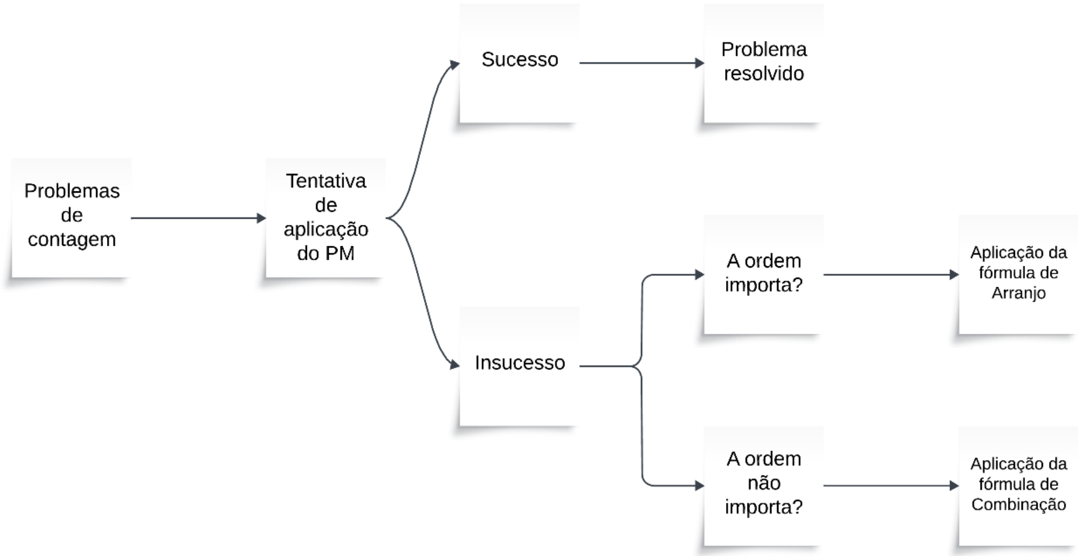
Em geral, a análise combinatória é um tema muito difícil para os alunos e alunas da Educação Básica, "pois geralmente é vista através de 'fórmula-aplicação', deixando lacunas na compreensão dos conceitos de arranjo, permutação e combinação. " (SOUZA, 2011, p.207). Cerioli e Viana (2012) afirmam que a didática usualmente adotada no ensino de análise combinatória é a Didática da Classificação dos Problemas, DCP. Esta é uma metodologia para resolução de problemas de contagem que consiste em aplicar os critérios:

> I- Tentar aplicar o princípio multiplicativo, também chamado de princípio fundamental da contagem;
>
> Se a tentativa for infrutífera, então:
>
> II – Classificar o problema em problema de arranjo, problema de permutação ou problema de combinação;
>
> III- Em seguida, aplicar a fórmula correspondente para resolver o problema. (CERIOLI E VIANA, 2012, p.1)

Os autores afirmam ainda que reconhecer se o problema envolve ou não o princípio multiplicativo é a parte fácil do DCP. A parte mais difícil é determinar se o problema é “de arranjo” ou “de combinação”, utilizando, em seguida, a fórmula corresponde a cada um deles. Nesse sentido, é comum os estudantes de combinatória recorrerem a duas alternativas: “A primeira consiste em analisar os enunciados dos problemas para decidir se o problema é do tipo em que ‘a ordem importa’ ou do tipo em que ‘a ordem não importa’. No primeiro caso, o problema é ‘de arranjo’, no segundo é ‘de combinação’” (*ibidem*, 2012).

Para nós, a DCP é um exemplo explícito de uma abordagem matemática não-problematizada (GIRALDO, 2018; 2019), que não respeita o processo de aprendizagem do estudante, que não participa da construção do conceito matemático, por meio de construções de conjecturas, tentativas de sistematizações e a busca de compreender quais são os agrupamentos em questão e também de estratégias para contá-los, quando em um número grande em que o PCD não é eficiente. Infelizmente, esse tipo de abordagem é muito usual no ensino de combinatória e, inspirados no fluxograma de Batanero et al (1996) (figura 4), criamos um fluxograma com base na DCP, bem como no modo como o ensino de combinatória costuma ser ensinado nas escolas conforme o que encontramos na literatura de pesquisa e no nosso dia a dia, entre conversas e cafés com outros colegas, professores e professoras de matemática, que atuam na escola básica.

Figura 10: A Didática da Classificação de Problemas (DCP)



Fonte: O autor.

Assim como Cerioli e Viana (2012), acreditamos que a aplicação indiscriminada de métodos, análogos ao apresentado acima, não levam em conta o raciocínio combinatório intrínseco aos problemas de contagem, o que é extremamente prejudicial, retirando qualquer potencialidade de desenvolvê-lo naquele momento. Além disso, servem apenas para problemas simples, conforme destacam os autores. Isto é, problemas um pouco mais complexos dos que os iniciais, apresentados como introdutórios em livros didáticos, por exemplo, não são contemplados nesse diagrama, levando a realização de contagens incorretas dos problemas propostos, no caso de se orientar pelas "setas" do fluxograma. Além disso, existem outros tipos de problemas de combinatória simples, que não são contemplados com o diagrama.

Cerioli e Viana (2012) destacam o seguinte problema para demonstrar a metodologia DCP e como ela não é infalível.

Figura 11: Problema de contagem

Quantos números com 4 algarismos distintos podemos formar com os algarismos 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9, de modo que os algarismos estejam em ordem crescente?

Fonte: Cerioli e Viana (2012)

Uma solução, seguindo a DCP, seria: "Como os algarismos devem estar em ordem crescente, podemos formar números como 1234, mas não podemos formar números como 2134. Assim, a ordem importa, portanto este deve ser um problema 'de arranjo'. " (*ibidem*, 2012). Assim, basta utilizar a fórmula de arranjos, $A_{9,4} = \frac{9!}{(9-4)!} = \frac{9!}{5!} = 9.8.7.6 = 3024$. Todavia, esta contagem está errada. Por quê?

Um arranjo simples é uma sequência numérica de p elementos distintos, que pertencem a um conjunto referência, isto é, um conjunto de onde sairão os elementos que formarão os exemplares da configuração. Um exemplar, nesse caso, é uma sequência qualquer, que é um arranjo simples. Em geral, em problemas de contagem que envolvem arranjos simples diretamente, o objetivo é contar quantos exemplares (arranjos simples) possuem a dada configuração.

Nesse sentido, no problema referenciado, o conjunto referência seria o conjunto dos algarismos, com exceção do zero, A = {1,2,3,4,5,6,7,8,9}. As sequências 1234, 1324, 4123, 5678, 8765, 1987, 3612 são exemplos dos 3024 arranjos simples de quatro elementos do conjunto A que existem. Porém, o problema se refere a sequências numéricas de quatro elementos distintos que devem estar em ordem crescente. Assim, dos 7 exemplares apresentados, apenas 1234 faz parte do conjunto pedido, o que indica que a solução está errada, contando muito mais casos do que deveria. Dessa maneira, como poderíamos desenhar a solução corretamente?

Podemos pensar em algumas alternativas. É comum em combinatória, realizarmos contagens excessivas e um dos caminhos para resolvermos essa situação, sem descartá-la, é investigar a configuração ou as configurações presentes no problema para avaliar uma maneira de retirar o que foi contado a mais, obtendo, por consequência, o número desejado inicialmente. Nesse sentido, fixemos quatro elementos do conjunto A, pensando em formar a sequência pedida. Por exemplo, os números 4, 5, 6 e 7. Os arranjos simples que podemos formar com esses elementos são as permutações simples entre eles, sendo elas: **4567**, 4576, 4657, 4675, 4756, 4765, 5467, 5476, 5746, 5764, 5674,5647, 6457, 6475, 6547, 6574, 6745, 6754, 7456, 7465, 7546, 7564, 7645, 7654. No total temos, 4! = 24 permutações, dentre as quais apenas uma delas pertence ao conjunto que queremos, que é o arranjo simples 4567. Assim, das 24 permutações apenas uma delas serve. Caso escolhêssemos, outros quatro algarismos, como 1, 6, 8 e 9, por exemplo, teríamos mais 24 arranjos simples formados com eles e apenas o arranjo simples 1689 atende as condições do problema. Assim, para cada escolha de 4 algarismos formamos 24 arranjos simples e apenas um deles pertence ao conjunto que queremos. Portanto, basta dividir o total de arranjos simples de quatro elementos, por 24 (4!), que obteremos a resposta que desejamos. Logo, 3024 dividido por 24 é igual a 126 exemplares, conforme queríamos (solução 1).

Outra alternativa é “descartar” a solução pela DCP e buscar uma totalmente nova. Por meio da nossa solução anterior, percebemos que para cada quatro algarismos distintos escolhidos do conjunto referência A, temos apenas uma forma de arrumá-los em sequência de modo a obter um elemento do conjunto pedido. Quando escolhemos um subconjunto de 4 elementos distintos de A, temos uma combinação simples de quatro elementos de A. Dessa maneira, podemos definir duas decisões em sequência para resolver o problema.

$D_{1:}$ Escolher um conjunto de quatro elementos distintos de A.

$D_{2:}$ Alocar os elementos escolhidos em sequência, de modo que estejam em ordem crescente.

Na primeira decisão estamos escolhendo uma combinação simples, portanto, basta contar o número de combinações simples de 9 elementos, tomados quatro a quatro, que é $C_{9,4} = \frac{9.8.7.6}{4.3.2.1} = 126$. Para a segunda decisão, temos apenas uma maneira de realizá-la, haja vista que os algarismos escolhidos na primeira decisão são distintos. Logo, pelo Princípio Multiplicativo, temos 126 x 1 = 126 números, conforme queríamos (solução 2).

Uma outra solução, seria aquela que buscamos tentar abrir o problema em casos, na tentativa de contar um a um e/ou buscar algum padrão de formação para fazer a contagem de maneira mais sucinta, utilizando alguma técnica de contagem, ao longo da contagem de cada caso. Por exemplo, fixando o 1 como primeiro algarismo do número a ser formado e o 2 como segundo, quantas possibilidades teríamos de modo que os quatro algarismos estejam em ordem crescente? Esboçamos todos os 21 exemplares possíveis que atendam às condições supracitadas: 1234, 1235, 1236, 1237, 1238, 1239, 1245, 1246, 1247, 1248, 1249, 1256, 1257, 1258, 1259, 1267, 1268, 1269, 1278, 1279, 1289.

A partir daqui teríamos que contar todos os outros casos, primeiramente terminando de contar as possibilidades com o 1 fixado na primeira posição e em seguida fixando os outros algarismos na primeira posição e avaliando as possibilidades. Ao final, utilizamos o princípio aditivo, e somamos a quantidade de cada caso, obtendo os 126 números. Durante o processo de contagem de cada caso, pode-se perceber também que, por exemplo quando fixamos o algarismo 1 na primeira posição e o 2 na segunda posição, bastava escolher dois números entre 3 e 9, incluindo-os, e que para cada um deles só existe uma maneira de colocá-los na terceira e quarta posições, devido à restrição do problema (ordem crescente). Logo, teríamos o número de combinações de 7 elementos tomados dois a dois, $C_{7,2} = \frac{7.6}{2} = 21$, sem precisar contar cada caso, um a um. Possivelmente, expandindo esse raciocínio para outros casos, poderíamos perceber então que bastava num primeiro momento escolher quatro elementos distintos que o problema já estaria resolvido, retornando à solução 2.

Para além da contagem correta, isto é, o número natural encontrado após as devidas operações matemáticas, o que distingue a solução proposta pelo DCP e as outras três soluções propostas por nós? A aplicação do DCP não leva em conta o raciocínio combinatório dos problemas, deixando de lado todo o potencial de um problema de contagem para puramente classificar os tipos de problemas e aplicar fórmulas em seguida, como vemos no fluxograma (figura 10). O DCP é ineficaz, restrito e inadequado para o processo de ensino-aprendizagem em combinatória.

Analisando as três soluções propostas, percebemos por caminhos diferentes, estratégias para resolver problemas de contagem. Elas evidenciam a necessidade de conhecer:

I) O conjunto referência, isto é, aquele que indica quais elementos estarão relacionados na configuração;

II) Qual é o conjunto que desejamos contar, dado o conjunto referência. É uma sequência? Um conjunto? Os elementos se repetem? Possui alguma restrição?

III) Exemplares desta configuração. Escrever alguns exemplares é muito importante para identificarmos o passo seguinte.

IV) Estratégias que nos auxiliem a contar quantos elementos tem o conjunto que queremos investigar, dado o seu conjunto referência e os exemplares desta configuração, que utilizem os princípios básicos da contagem, como o PM e o PA.

Quando temos conhecimento do conjunto referência e do conjunto que desejamos contar, temos então conhecimento de qual é a configuração do problema. Os quatro passos, não necessariamente na ordem prescrita, que destacamos acima são essenciais para resolvermos problemas de combinatória, dos mais simples aos mais complexos e são baseados na Didática dos Princípios da Contagem (DPC), elaborados por Cerioli e Viana (2012).

No livro A Matemática do Ensino Médio – Volume 2, Lima *et al* (2016) definem a estratégia para resolver problemas de combinatória, que é marcada por três características:

> 1) *Postura*: Devemos sempre nos colocar no papel da pessoa que deve fazer a ação solicitada pelo problema e ver que decisões devemos tomar. [...]
>
> 2) *Divisão*: Devemos, sempre que possível, dividir as decisões a serem tomadas em decisões mais simples. [...]

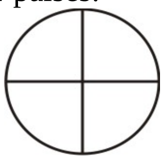
> 3) *Não adiar dificuldades*: Pequenas dificuldades adiadas costumam se transformar em imensas dificuldades. Se uma das decisões a serem tomadas for mais restrita que as demais, essa é a decisão que deve ser tomada em primeiro lugar. [...] (LIMA *ET AL*, 2016, p.82)

Entendemos *estratégias* como todos os meios de se traçar a resolução de um dado problema. No caso de problemas de contagem, são estratégias recorrentes, tanto em livros didáticos quanto na literatura de pesquisa e resoluções de alunas e alunos do ensino básico: listagem de todas as possibilidades; desenhos; criação de árvores de possibilidades; uso de operações aritméticas simples como a adição e multiplicação; utilização de fórmulas; entre outras. Dessa maneira, não acreditamos que a estratégia descrita por Lima *et al* (2016) seja a única estratégia, mas uma estratégia possível para resolução de problemas contagem, que pode ser, inclusive, desenvolvida de forma análoga a partir da experiência e do erro, buscando entender por meio do erro novos caminhos e estratégias para resolução de outros problemas, com (ou sem) a mediação do(a) professor(a). Afirmar que existe uma única estratégia que deve ser seguida se alinha com a ideia da DCP e de uma matemática não problematizada, que deixa de lado o raciocínio combinatório intrínseco aos problemas para seguir uma receita, que se colocada como única invalida qualquer outro meio de pensar (estratégia), o que pode não evidenciar as potencialidades do erro na construção do raciocínio matemático e neste caso do raciocínio combinatório relacionado à problemas de contagem, não valorizando a matemática que se produz na escola. Ademais, privilegia-se uma imagem de uma matemática única, - "a Matemática (com letra maiúscula), aquela que vem dos matemáticos profissionais, mas que pode ser transposta/adaptada para o contexto de ensino e aprendizagem" (FIORENTINI E OLIVEIRA, 2013, p.922) -, e que tudo que não se render a ela, não serve e/ou é inferior. Para nós, a (prática) matemática é uma *prática social* e jamais será hermética e isolada em relação a outros saberes e campos disciplinares. "Não faz sentido falar de uma Matemática (com letra maiúscula), mas de matemática (com letra minúscula) ou então de matemáticas, pois as matemáticas são múltiplas [...]" (*ibidem*, 2013, p.922).

Todavia, analisando as três características elencadas por Lima *et al* (2016), percebemos que a *postura* pode contribuir quando devemos escrever os exemplares de um dado problema. Por exemplo, vamos resolver um problema adaptado de Morgado *et al* (2016) com base na DPC e nas *estratégias* supracitadas.

Figura 12: Problema de contagem

A figura abaixo mostra um mapa com 4 países:



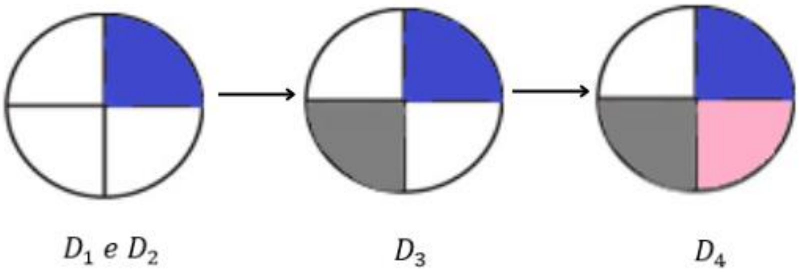
De quantos modos esse mapa pode ser colorido (cada país com uma cor; países com uma linha fronteira comum não podem ter a mesma cor) se dispomos de 7 cores diferentes?

Fonte: Morgado *et al* (2016)

Em primeiro lugar, devemos entender qual é o conjunto referência. Perceba que precisamos colorir as quatro regiões, dispondo de 7 cores diferentes – não foram citadas quais -, de modo que não podemos pintar cada região com mais de uma cor e que regiões adjacentes devem ter necessariamente cores diferentes. Portanto, o conjunto referência são as 7 cores, que iremos supor que sejam azul, branca, cinza, lilás, preto, rosa e verde. Queremos saber quantas são as possibilidades de pintar as quatro regiões com as restrições dadas. Para determinar uma estratégia para contagem, precisamos determinar alguns exemplares, nos colocaremos então na posição de quem faz ação, isto é, pintaremos as regiões de algumas cores (*postura*). Vamos definir uma ordem: pintaremos conforme os quadrantes do círculo trigonométrico, em ordem, primeiro quadrante, segundo quadrante, terceiro quadrante e quarto quadrante.

Assim, *dividiremos* a ação em partes, primeiro pintamos a primeira região, depois a segunda e assim sucessivamente. Criaremos um exemplar, portanto, pintemos a primeira de azul e a segunda de branco, por exemplo – primeira e segunda decisão ($D_1\ e\ D_2$). Para tomarmos a próxima decisão (D_3), repare que podemos repetir a cor azul, pois o primeiro e terceiro quadrante não possuem linha fronteira. Então, das 7 cores, só não podemos utilizar a cor branca, devido à restrição do problema; optamos por escolher a cor cinza. Finalmente, seguindo nossa pintura, devemos pintar a última região (quarto quadrante), o que podemos fazer com qualquer uma das 5 cores restantes, excetuando a cor azul e a cor cinza que são as regiões adjacentes a ela. Decidimos pintar então pela cor rosa (D_4). Ilustramos as decisões tomadas e, consequentemente, o exemplar formado (figura 13). Denominamos este exemplar como ABCR, que são as iniciais das cores que pintamos, na ordem das regiões conforme os quadrantes.

Figura 13: Exemplar ABCR



Fonte: O autor.

Da maneira que optamos por pintar as regiões, a princípio não vemos nenhum problema na realização da contagem, podendo utilizar somente o princípio multiplicativo para resolvê-lo. Portanto, uma das alternativas seria pensar nas possibilidades para cada região, tomando as decisões conforme construímos o exemplar:

$D_{1:}$ Escolher uma cor para pintar a primeira região.

$D_{2:}$ Escolher uma cor para pintar a segunda região, diferente da primeira escolhida.

$D_{3:}$ Escolher uma cor par pintar a terceira região, diferente da segunda escolhida.

$D_{4:}$ Escolher uma cor para pintar a quarta região, diferente da escolhida para terceira região e da primeira região.

Pelo princípio multiplicativo, teríamos 7 x 6 x 6 x 5 = 1260 maneiras. Esta resolução está numericamente errada e é recorrentemente encontrada por estudantes na escola básica[18]. Isso ocorre, pois ainda que estivessem elaborados o raciocínio combinatório de forma coerente, não construíram outros exemplares para perceber se todas as ações de pintar as regiões seguiriam a mesma sequência de decisões que tomaram no exemplo que destacamos. E de fato, a restrição de não poder pintar as regiões com linhas fronteiras comuns, fará com que a última decisão não possa ser definida de modo independente das decisões anteriores. Daí a *importância de não adiar dificuldades*, investigando qual impacto terá a restrição ou as restrições na configuração do problema.

Vejamos, poderíamos obter outros exemplares antes de pensar na estratégia para realização da contagem. Estes poderiam ser ABCL, ABCP, ABCV, ABCB, se alterássemos a última cor, seguindo a ordem que pensamos inicialmente. Contudo, se tivéssemos decidido por pintar a terceira região pela cor azul, ao invés de cinza, teríamos mais opções para última

[18] Essa questão faz parte de umas das listas de exercícios sobre Princípio Multiplicativo e Princípio Aditivo que aplico ano a ano com meus estudantes de 2º e/ou 3º ano do Ensino Médio.

região, pois só não poderíamos pintá-la da cor azul. Assim, os exemplares seriam: ABAB, ABAC, ABAL, ABAP, ABAR, ABAV – uma a mais do que quando fixamos a cor cinza na terceira região. Portanto, quando tomamos a terceira decisão, isso impacta no número de possibilidades da quarta decisão, pois caso a cor seja igual a primeira que escolhemos para primeira região, o número de possibilidades para a última região a se pintar é 6, enquanto quando a cor é diferente, temos apenas 5 possibilidades, pois neste caso temos duas cores adjacentes. Portanto, a primeira solução conta alguns casos a menos do que deveria e uma das maneiras de resolver o problema sem perder o que já foi realizado, seria pensar em acrescentar os exemplares indevidos para realizar a contagem esperada. Esta é uma solução muito interessante, porém nem sempre será uma opção tão fácil de se resolver, como neste caso.

Uma estratégia mais simples seria *dividir* em dois casos diferentes o problema, pois assim, teríamos decisões independentes, podendo aplicar o PM em cada um dos casos. Ao final, juntaríamos as possibilidades por meio de uma soma, utilizando o PA. Logo, temos dois casos:

Caso 1: A primeira região e terceira têm a mesma cor.

Caso 2: A primeira região e terceira têm cores diferentes.

Para os dois casos, podemos pensar nas mesmas ações e nas possibilidades para cada região, com as devidas adaptações. Para o primeiro caso, temos 7 possibilidades para primeira região, 6 possibilidades para a segunda região, uma possibilidade para terceira região e 6 possibilidades para a quarta região, totalizando 7 x 6 x 1 x 6 = 252 possibilidades. No segundo caso, temos 7 possibilidades para a primeira região, 6 possibilidades para a segunda região, 5 possibilidades para terceira região e 5 possibilidades para quarta região, totalizando 7 x 6 x 5 x 5 = 1050 possibilidades. Utilizando o PA, temos no total 1050 + 252 = 1302 possibilidades.

Por meio da resolução deste problema, podemos perceber que utilizar a DPC não indica que o problema será resolvido corretamente, como mostramos na primeira solução. Porém, organiza e sistematiza o raciocínio combinatório, evidenciando a necessidade de conhecer o conjunto referência e o conjunto que precisa ser contado, pois sem o conhecimento destes dois conjuntos dificilmente resolveremos um problema de contagem corretamente. Ademais, as *estratégias* definidas por Lima *et al* (2016) se entrelaçam por vezes com a DPC e podem ser importantes em resoluções de problemas de contagem.

Como de praxe, uma possível resposta para a pergunta que iniciou esta seção seria que não há uma resposta definitiva sobre isso. Contudo, destacamos que a maneira como a combinatória é ensinada, baseada na DCP e/ou no método "fórmula-aplicação" contribui para dificuldades dos estudantes durante a aprendizagem de combinatória. Quando apresentadas estratégias prontas, únicas e infalíveis para resolução de problemas de contagem, privilegiando uma matemática não problematizada, não há a valorização da construção dos conceitos de combinatória, bem como as potencialidades intrínsecas ao raciocínio combinatório. E, sem dúvidas, tudo isto volta ao ciclo vicioso relatado no início deste capítulo, evidenciando a urgência de pensarmos em novos modelos de formações iniciais em matemática, que tornem o ciclo harmônico e fortificado pelos seus elos entre os três polos: universidade, escola e os professores.

4.3 Dificuldades na resolução de problemas de contagem e o papel do erro

Batanero *et al* (1996) identificam dificuldades típicas de estudantes na resolução de problemas de contagem, sobretudo na busca de uma sistematização para enumerar corretamente. A primeira delas é a não identificação do conjunto que se deve contar (enumerar), o que pode levar a contagens errôneas[19]. A segunda é a dificuldade de eleger uma notação apropriada que represente de forma compacta todas as informações e condições dadas para o problema, que pode ser aumentada quando pensamos que alguns elementos da combinatória tem mais de uma notação, como por exemplo as notações para as combinações de m elementos tomados n a n, ora utilizamos $C_{m,n}$, ora utilizamos $\binom{m}{n}$. A terceira é a fixação de uma ou mais variáveis.

> Devido à sua complexidade, em problemas combinatórios compostos, é necessário fixar uma ou mais variáveis para obter um método de contagem válido para depois generalizar, a fim de obter uma solução válida para qualquer valor da variável que foi definida anteriormente. Isto implica adicionar mais uma restrição imposta pelo problema e é um passo não convencional para alunos, que estão acostumados a usar apenas as hipóteses dadas nos enunciados. (BATANERO *et al*, 1996, p.78 – tradução nossa)

[19] Os autores destacam que os enunciados dos problemas de contagem por vezes apresentam acordos implícitos que não ficam claros para os alunos.

Como exemplo, os autores trazem o problema: “Quantas permutações podemos formar com os dígitos 1, 2, 3, 4 e 5 de modo que os algarismos pares ocupem sempre lugares consecutivos?” (*ibidem*, 1996). Este é um caso em que a maneira mais fácil de resolver o problema é fixando as posições ocupadas pelos dígitos 2 e 4 e em seguida permutando os outros três dígitos nas posições restantes (*ibidem*, 1996).

A quarta dificuldade é perceber um problema dado como um conjunto de enunciados particulares quando os parâmetros são variáveis. Por exemplo, no problema original de Morgado *et al* (2016) (figura 12), o número de cores para pintar as quatro regiões é *lambda* (λ), isto é, uma variável. A partir da adaptação que realizamos com 7 cores, caso particular, conseguimos generalizar o raciocínio combinatório e realizar a contagem para λ cores. A quinta e última consiste no inverso, o estudante consegue resolver um problema para um caso particular, mas falha ao buscar encontrar uma generalização.

A segunda parte das entrevistas semiestruturadas consiste na análise de soluções de problemas de combinatória pelos professores(as) entrevistados(as). Nesta etapa, após a análise, pediremos para os(as) entrevistados(as) avaliarem as soluções a partir de uma nota entre 0 e 10, justificando o porquê. Isto foi pensando, com base em avaliações somativas, que são predominantes na Educação Básica, sendo parte do dia a dia do(a) profissional. Mas, além disso, a principal razão para avaliação com uma nota está atrelada a justificativa do(a) avaliador(a) para esta nota, destacando como devolveria para um aluno o motivo de ter recebido tal nota para determinada solução proposta. Assim como Vaz (2022), entendemos que a maneira em que as soluções dos estudantes são analisadas, em atividades escolares, está relacionada em como o(a) professor(a) interpreta o erro dos estudantes, sendo assim uma tarefa subjetiva. Cada professor(a) tem sua concepção e crença sobre matemática, avaliação matemática e isso perpassa por toda sua construção pessoal-profissional enquanto estudante da escola básica, licenciando(a) e professor(a), além de um aspecto sociocultural, isto é, de onde o(a) professor(a) vem e o que ele(a) almeja enquanto educador(a).

Comumente, quando damos nota para uma solução matemática, avaliamos se a solução está correta, parcialmente correta ou totalmente incorreta, evidenciando o erro como negativo, sem potencial para a aprendizagem, uma vez que a nota para esta solução seria nula ou quase nula.

> Ao interpretarmos o erro como um representante da ‘não aprendizagem, do ‘não saber’ reduzimos as possibilidades de intervenções didáticas. Entretanto, se

> interpretamos como elemento de um processo, de um saber em construção, rompendo a dicotomia do certo e do errado ampliamos as perspectivas da utilização do *erro como um trampolim*. (VAZ, 2022, p.7)

Enquanto tivermos predominantemente avaliações somativas na escola básica, dificilmente o erro matemático será visto de maneira positiva, como um possível trampolim para a aprendizagem, nesta avaliação. Contudo, durante o processo de ensino-aprendizagem, seja na resolução de problemas ao longo das aulas, seja na correção de atividades escolares propostas, seja na intervenção particular como os estudantes, há possibilidades de olhar para o erro de uma forma que privilegie uma matemática problematizada, uma matemática que seja possível e acessível, e tenha enraizada o erro como parte do processo de aprendizagem – concepções atreladas a avaliações formativas.

> A perspectiva de matemática problematizada nos provoca a pensar naquilo comumente rotulado de "erro" como potência de criação, e nas manifestações comumente identificadas por "não-entendimento" como possibilidade de lançar de outros entendimentos. (GIRALDO; ROQUE, 2021, p.18)

Com base nas principais dificuldades elencadas por Batanero *et al* (1996) e dos nossos objetivos neste trabalho, elaboramos soluções fictícias para os problemas selecionados e buscamos entender as principais concepções e crenças dos professores no que tange a avaliação das soluções propostas, sobretudo no que pensam sobre o erro e suas potencialidades, mesmo que indiretamente, isto é, sem perguntar aos entrevistados diretamente o que pensam sobre a temática. Na seção a seguir, destacamos os problemas, as soluções propostas e as (possíveis) soluções pensadas por nós para os problemas selecionados.

4.4 Problemas de contagem selecionados para as entrevistas semiestruturadas

Nesta seção, destacaremos e justificaremos quais problemas selecionamos para as entrevistas semiestruturadas, nossas (possíveis) soluções sobre os problemas selecionados e como pensamos em cada uma das soluções fictícias, baseados na metodologia MathTASKS (Biza *et al*, 2021), nesta ordem.

Buscamos escolher as questões a fim de explorar as principais configurações de contagem: Arranjos, Combinações e Permutações. Nas quatro questões, encontramos problema que envolve o produto de medida e arranjos simples (primeira questão), problema que envolve combinação simples (segunda questão), problema que envolve combinação completa, mesmo que indiretamente (terceira questão), problema que envolve permutação simples – caso particular de arranjos simples - e disposição circular (quarta questão). Além disso, todas necessitam do Princípio Multiplicativo e em algumas, utilizamos o Princípio Aditivo quando dividimos em casos independentes entre si (interseção nula). Dessa maneira, ressaltamos que as questões escolhidas não são simples. As duas últimas questões escolhidas são de provas para professores efetivos do Pedro II (realizada em 2018) e da Fundação de Apoio à Escola Técnica - FAETEC - (realizada em 2020), respectivamente. Nestas duas ocasiões, eu realizei as provas na tentativa de ingresso às instituições e as duas questões muito me marcaram, pois ambas apresentavam variáveis não tão comuns nos problemas de combinatória que eu conhecia à época: bolas *distintas* distribuídas em caixas diferentes e mesa circular com assentos *numerados*, respectivamente. As primeiras duas questões elaborei com base em questões análogas de Morgado *et al* (2016) e da Vunesp – Fundação para o Vestibular da Universidade Estadual Paulista, respectivamente.

Em relação as nossas soluções para cada um dos problemas, no qual apresentamos como *solução proposta*, destacamos que estas são possíveis soluções para os problemas, não impedindo de haver outras. Com base nas MathTasks (BIZA *et al*, 2021), elaboramos soluções fictícias, baseadas em possíveis soluções de estudantes da escola básica, que tinham como principal objetivo analisar como o(a) professor(a) entrevistado(a) lida com as situações-problemas de combinatória, buscando entender o seu entendimento sobre a temática, quais critérios utiliza para validar ou não as soluções propostas, principalmente soluções essencialmente numéricas - que apresentam simplesmente operações numéricas -, e de que maneira o(a) professor(a) devolveria para um estudante as razões que o levaram a não ter êxito em sua solução proposta. Além disso, buscamos elaborar também soluções que se situam nos erros comumente encontrados em soluções de combinatória destacados por Batanero *et al* (1996). No primeiro problema apresentamos duas soluções fictícias, no segundo problema e no terceiro problema apresentamos três soluções fictícias, enquanto no quarto e último problema apresentamos quatro soluções fictícias.

Com o objetivo de facilitar a visualização, destacamos cada um dos quatro problemas em quadros individuais, no qual apresentamos o *enunciado* do problema, nossa *solução proposta* e as *soluções fictícias*, conforme detalhado a seguir.

Quadro 2*:* Problema 1

Enunciado: Numa urna, existem bolinhas numeradas de 1 a 100 e vamos retirar duas sucessivamente. Quantas são as retiradas em que a multiplicação dos números das bolinhas resulta em um número par?

Solução proposta: Primeiramente, devemos buscar o conjunto referência: 100 bolinhas numeradas de 1 a 100. Teremos retiradas de duas sucessivamente, o que implica que retirar os pares (1,2) e (2,1), por exemplo, representam duas retiradas diferentes. Queremos as retiradas em que o produto entre o número das bolinhas seja par. Dessa maneira, temos um problema de paridade. Pensemos em todos os casos de pares ordenados, analisando a primeira saída e a segunda, respectivamente:

Caso 1) (Par, Par)

Caso 2) (Par, Ímpar)

Caso 3) (Ímpar, Par)

Caso 4) (Ímpar, Ímpar)

Em todos esses casos, o único que não contempla exemplares do conjunto que queremos contar é o último. Dessa maneira, a partir desta análise, temos duas opções:

Opção 1) Contar as possibilidades para os casos 1, 2 e 3, e utilizar o PA para realizar a contagem.

Caso 1: Temos duas decisões a tomar:

$D_{1:}$ Escolher um número par para primeira retirada.

$D_{2:}$ Escolher um número par, dos que sobraram, para segunda retirada.

Pelo PM, temos 50.49 = 2450 retiradas.

Caso 2: De forma análoga, escolheremos um número par e um ímpar, nesta ordem. Pelo PM, teremos 50.50 = 2500 retiradas.

Caso 3: De forma análoga, escolheremos um número ímpar e um par, nesta ordem. Pelo PM, teremos 50.50 = 2500 retiradas.

Pelo PA, teremos: 2500 + 2500 + 2450 = 7450 retiradas.

Opção 2) Pelo PA, temos que o total de possibilidades de cada caso somados resultada no total de casos, isto é:

|Caso 1| + |Caso 2| + |Caso 3| + |Caso 4| = Total de retiradas[20]

Portanto, uma solução viável é contar todos os casos possíveis e retirar as possibilidades do caso 4, consequentemente, resultando na soma dos três primeiros casos, que é o que queremos contar. Teremos:

|Caso 1| + |Caso 2| + |Caso 3| = Total de retiradas – |Caso 4|.

Assim, calculando o total de possibilidades temos, pelo PM: 100.99 = 9900. Em relação ao caso 4, temos, pelo PM: 50.49 = 2450.

Logo, 9900 – 2450 = 7450 retiradas.

Soluções fictícias:

Solução 1: "Para a multiplicação dar par, basta que um dos números retirados seja par. Então, como existem 50 números pares e, ao retirar a primeira bolinha, sobram 99 outros números, existem, pelo princípio multiplicativo, $50 \cdot 99$ tais retiradas".

Solução 2: "Para a multiplicação não dar par, ambos os números devem ser ímpares. Então, para a primeira retirada, existem 50 números ímpares e, para a segunda, 49 números ímpares. Logo, existem $50\,.\,49$ retiradas que não queremos. No total, existem $100\,.\,99$ retiradas. Portanto, a resposta é que existem $100 \cdot 99 - 50 \cdot 49$ retiradas em que a multiplicação é par".

Fonte: O autor.

Quadro 3: Problema 2

Enunciado: Um prédio tem 3 andares e 4 apartamentos por andar. De quantas formas diferentes podem ser ocupados 4 apartamentos de modo que cada andar tenha pelo menos um ocupado?

Solução proposta: Primeiramente, devemos buscar o conjunto referência: 12 apartamentos de um prédio, compostos por 4 por andar. O conjunto que desejamos contar é aquele em que escolhemos 4 apartamentos, com a condição de que tenha pelo

[20] Utilizaremos a notação | | para representar o total de possibilidades. Portanto, |Caso 1| significa o total de possibilidades do caso 1.

menos um por andar. Isso significa que na prática devemos apenas escolher qual dos andares terá dois apartamentos, haja vista que os demais terão apenas um.

Podemos então escolher um de cada andar, em seguida, escolher qual andar terá outro apartamento, e por fim escolher no andar escolhido para ter dois apartamentos, outro apartamento daqueles que sobraram (opção 1). Assim, temos a seguinte sequência de decisões:

$D_{1:}$ Escolher um apartamento no primeiro andar.

$D_{2:}$ Escolher um apartamento no segundo andar.

$D_{3:}$ Escolher um apartamento no terceiro andar.

$D_{4:}$ Escolher qual andar terá dois apartamentos.

D_5 : Escolher um apartamento diferente do já escolhido para o andar escolhido na decisão anterior.

Vejamos alguns exemplares com esta sequência.

Denotaremos os apartamentos pelos pares (andar, número), em que o primeiro represente o andar (1, 2 ou 3) e o segundo o número do apartamento (1, 2, 3 ou 4).

Um exemplar, seguindo a sequência: (1,1), (2,1), (3,1), (1,2).

Outro exemplar, seguindo a sequência: (1, 2), (2,1), (3,1), (1,1).

Perceba que nos dois exemplos acima, escolhemos os mesmos apartamentos por caminhos diferentes. No primeiro exemplar, escolhemos os apartamentos de número 1 dos três andares, em seguida escolhemos o primeiro andar para ter apartamentos repetidos e em seguida, optamos pelo segundo apartamento deste andar. Obtendo os apartamentos 11, 21, 31 e 12. No segundo exemplar, obtivemos os mesmos apartamentos, porém na primeira escolha optamos pelo segundo apartamento do primeiro andar e na última escolha pelo primeiro apartamento do primeiro andar.

Assim, caso optemos pelo PM, estaremos contando mais casos do que queremos. Uma opção para não abandonar o raciocínio combinatório até aqui é perceber se é possível retirar o que está sendo contado a mais. Dessa maneira, vamos explorar novamente a sequência e criar outros dois exemplares.

Primeiro exemplar: (1,1), (2,2), (3,3), (3,2).

Segundo exemplar: (1,1), (2,2), (3,2), (3,3).

Novamente, nos dois casos, temos os mesmos apartamentos escolhidos por ordens diferentes: 11, 22, 32 e 33. Devemos perceber que não conseguimos obter mais nenhuma repetição desses quatro apartamentos por outra escolha, o que implica que para cada escolha que realizamos nas três primeiras decisões, ao escolhermos qual andar teremos dois apartamentos na quarta decisão, podemos repeti-la na quinta decisão, dois a dois. Assim, contaremos de maneira duplicada, o conjunto de quatro apartamentos. Portanto, após determinar todos os casos com contagem duplicada, reduziremos o resultado obtido à metade dele, resultando no total de escolhas que queremos. Portanto, pelo PM, temos: 4 x 4 x 4 x 3 x 3 = 576 possibilidades, que é o dobro do que queremos. Concluímos então que o número de maneiras de escolher os quatro apartamentos nas condições dadas é a metade de 576, isto é, 288 possibilidades.

Perceba que na primeira solução proposta acima, adiamos nossa dificuldade, não olhando para restrição desde o início na nossa estratégia para realizar a contagem. Esta escolha nos fez ter que perceber padrões para retirar contagens excessivas. A fim de não ter que retirar casos já contados, tentaremos um outro caminho, começando agora pela condição dada: ter dois apartamentos num mesmo andar (opção 2). Dessa maneira, escolheremos qual andar terá dois apartamentos, em seguida, os dois apartamentos desse andar e, finalmente, os outros dois apartamentos, um em cada andar que sobrou. Teremos, agora, a sequência de decisões:

$D_{1:}$ Escolher um andar para ter dois apartamentos.

$D_{2:}$ Escolher dois apartamentos neste andar.

$D_{3:}$ Escolher um apartamento em um dos andares não escolhidos.

$D_{4:}$ Escolher um apartamento no andar restante.

Vejamos alguns exemplares:

(1,1), (1,2), (2,1), (3,1)

(1,1), (1,2), (2,1), (3,2)

(1,1), (1,2), (2,1), (3,3)

(1,1), (1,2), (2,1), (3,4)

Uma vez escolhido o primeiro andar e os apartamentos 1 e 2 para ele, não conseguimos obter exemplares iguais pelas escolhas seguintes, não contando em excesso as possibilidades de escolha. Se fixarmos outro par de apartamentos na segunda decisão, teríamos o mesmo resultado. Generalizando mais ainda, para qualquer andar escolhido na primeira decisão e para qualquer par de apartamentos escolhidos na segunda decisão, obteremos quatro apartamentos diferentes para cada decisão seguinte.

Isto significa que, se contarmos corretamente as possibilidades para cada decisão, o problema estará resolvido.

Para primeira decisão, temos três possibilidades. Para segunda decisão, temos que escolher um subconjunto com dois elementos distintos de $\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$, em que a representa o andar escolhido. O total de subconjuntos de dois elementos deste conjunto pode ser calculado por $C_{4,2} = \frac{4{,}3}{2} = 6$ subconjuntos. Para terceira e quarta decisões, temos 4 possibilidades. Como as decisões são independentes, pelo PM, temos: 3.6.4.4 = 288 possibilidades.

Soluções fictícias:

Solução 1: “ ____ ____ ____ ____ ”

$4 \ . \ 4 \ . \ 4 \ . \ 9 \quad = 4^3 \,.\, 9$ formas

Solução 2: “Primeiramente, devemos escolher um apartamento do 1° andar para estar ocupado (4 possibilidades). Fazemos o mesmo para o 2° e para o 3° andares. Depois, dos 9 apartamentos restantes, escolhemos um para estar ocupado. Assim, pelo princípio multiplicativo, a resposta é: $4 \,.\, 4 \,.\, 4 \,.\, 9 = 4^3 .\, 9$ formas”.

Solução 3: “Escolhemos qual dos andares vai ter 2 apartamentos ocupados e, depois, escolhemos quais serão os 2 apartamentos ocupados deste andar. Em seguida, escolhemos um apartamento no andar mais alto ainda não ocupado para ocupar e, por fim, escolhemos um apartamento no andar ainda sem apartamentos ocupados para ocupar. Então, pelo princípio multiplicativo, a resposta será: $3 \,.\, \frac{4\,.\,3}{2} \,.\, 4 \,.\, 4 = 3 \,.\, 6 \,.\, 4 \,.\, 4$ formas”.

Fonte: O autor.

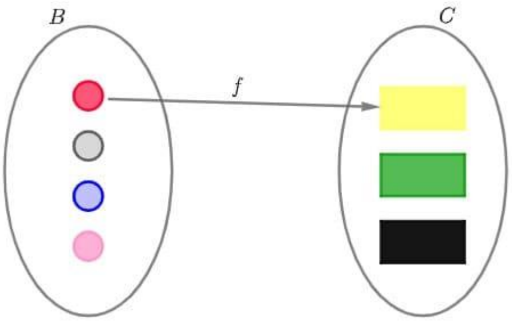
Quadro 4: Problema 3

Enunciado: Em uma sala há 3 caixas, uma amarela, uma verde e uma preta. Nesta mesma sala há também 4 bolas, uma vermelha, uma branca, uma azul e uma rosa, as quais o aluno irá distribuir pelas três caixas. Não há restrição de tamanho (ou seja, em cada caixa há espaço suficiente para conter todas as 4 bolas, se o aluno assim o desejar). De quantos modos diferentes é possível distribuir essas 4 bolas por essas 3 caixas?

Solução proposta: Inicialmente, buscaremos nosso conjunto referência. Neste caso, é a união do conjunto de 3 caixas com o conjunto de 4 bolas, todas diferentes. Queremos saber o total de maneiras de distribuir as bolas nas três caixas, sem restrição quanto ao número de bolas em cada caixa. Portanto, podemos ter uma caixa com quatro bolas, e todas as demais vazias, por exemplo. Se as bolas fossem idênticas, teríamos um problema de combinação completa, onde bastaria nos preocuparmos com a quantidade de bolinhas em cada caixa. Porém, como são distintas, teríamos alguns casos a se analisar. Por exemplo, se tivéssemos três bolinhas na caixa amarela e uma na verde, teríamos que pensar em quais bolinhas podem estar na amarela e na verde, pois há mais de uma possibilidade para isto ocorrer, pois as bolinhas são diferentes. Acreditamos que esse caminho pode ser muito longo e buscaremos outra solução.

Faremos o seguinte: Vamos pensar em colocar cada bolinha em uma caixa, individualmente. Tomando a bolinha vermelha, pensaremos nas possibilidades de colocá-la nas caixas de cor amarela, verde e preta. Como são três caixas, temos três possibilidades para ela. O mesmo ocorre para a bolinha branca, para a bolinha azul e pela bolinha rosa, temos que perceber que a ordem que optamos para colocar as bolinhas na caixa não gera novos exemplares. Estas decisões são independentes e contemplam todas as possibilidades de distribuir as quatro bolas nas quatro caixas. Pelo PM, temos $3^4 = 81$ possibilidades.

Perceba que poderíamos pensar neste problema a partir do conceito de funções, relacionando dois conjuntos não-vazios: Quantas são as funções de B em C, em que B representa o conjunto das bolinhas e C representa o conjunto das caixas?



Soluções fictícias:

Solução 1: “Sejam x o número de bolas na caixa amarela, y o número de bolas na caixa verde e z o número de bolas na caixa preta. Assim, o problema é equivalente a determinar o número de soluções inteiras não negativas de $x + y + z = 4$ e esse número é $CR_4^3 = C_6^4 = \frac{6.5}{2} = 15$ ”.

Solução 2: “ ____ ____ ____ ____ ”

$$3 \quad . \quad 3 \quad . \quad 3 \quad . \quad 3 \qquad = 3^4 = 81 \text{ formas}$$

Solução 3: “Podemos listar as soluções para o problema por meio da seguinte tabela:

Solução / Caixa	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Amarela	4	0	0	3	3	1	1	0	0	2	2	0	2	1	1
Verde	0	4	0	1	0	3	0	3	1	2	0	2	1	2	1
Preta	0	0	4	0	1	0	3	1	3	0	2	2	1	1	2

Logo, existem 15 formas possíveis, que estão listadas acima[21]”.

Fonte: O autor.

Quadro 5: Problema 4

Enunciado: Um restaurante reservou uma mesa circular de seis lugares numerados para a realização de uma confraternização de seis amigos. Sabendo-se que três deles estão com camisa azul, de quantas maneiras esses amigos podem se sentar à mesa a fim de que os três que estão com camisa azul fiquem juntos?

Solução proposta: O conjunto referência desse problema é a união entre o conjunto dos amigos e o conjunto dos bancos numerados em uma mesa circular. Queremos saber o total de possibilidades em colocar os seis amigos nos seis bancos numerados, de modo que os três amigos de blusa azul fiquem juntos, em qualquer ordem. Primeiramente, devemos perceber que como os bancos são numerados, o problema não trata de permutações circulares, pois as seis rotações geram seis novos lugares, uma vez que estes são numerados. Devemos pensar num problema análogo a uma fila, atentando ao fato da mesa

[21] Essa solução é presente no enunciado da questão elaborada pela banca da prova do concurso, em que há a afirmação de que esta solução é apresentada por um estudante e que ela apresentar um raciocínio parcialmente correto, embora a resposta esteja errada. É possível acessar a prova no site do CPII, cujo edital do concurso é 23/2018.

ser circular. Vamos pensar em todos os lugares que os três amigos de blusa azul devem se sentar juntos. Se denotarmos os lugares como 1,2,3,4,5,6 teremos: 123, 234, 345, 456, 561, 612. Assim, para cada um destes lugares definidos, temos que escolher em quais lugares cada amigo de blusa azul ficará, e escolher em quais posições os outros três amigos vão ficar nos lugares remanescentes. Teremos a seguinte sequência de decisões:

$D_{1:}$ Escolher uma das seis posições possíveis para os amigos de blusa azul se sentarem.

$D_{2:}$ Escolher a posição de cada amigo de blusa azul nos lugares definidos na decisão anterior.

$D_{3:}$ Escolher a posição dos amigos restantes nas três cadeiras que sobraram para ser ocupadas.

Portanto, as decisões são independentes, utilizando o PM temos: 6. 3! 3! = 6.6.6 = 216 possibilidades.

Soluções fictícias:

Solução 1: "____ ____

3! . 3! = 36 maneiras ".

Solução 2: "Precisamos colocar os três amigos de blusa azul como se fossem um bloco. Dessa maneira, teríamos em roda 4 "elementos": um bloco, representando os três amigos de azul e os outros três amigos.

Portanto, basta escolhermos uma permutação circular desses 4 elementos e depois permutar os três amigos dentro do bloco.

Logo, temos: $PC_4.3! = 3!.3! = 6.6 = 36$ possibilidades ".

Solução 3: "Enumerando os seis lugares na mesa, de 1 a 6, teríamos 6 possíveis posições para os três amigos, na mesa circular, são elas: 123, 234, 345, 456, 561, 612. Para cada uma dessas formas de sentá-los na mesa, temos que permutar os outros amigos nos três espaços que estão vazios, e ainda permutar os amigos de blusa azul entre si nas posições já definidas.

Portanto, temos 6 maneiras de colocar os amigos juntos na mesa circular e para cada uma delas temos 3!.3! maneiras de construir a mesa.

Logo, pelo princípio multiplicativo temos: 6.3!.3! = 6.6.6 = 216 maneiras".

Solução 4: "Como os 6 lugares na mesa são numerados, não podemos considerar repetições por rotação, como, em geral, fazemos em mesas circulares, associando, assim, o problema a permutações circulares. Pensaremos o problema analogamente como se os 6 lugares estivessem em fila, colocando os três amigos em um bloco. Dessa forma, teremos 4 elementos em fila (o bloco e os outros três amigos). Para fazer a contagem, temos que permutar os 4 elementos entre si e depois permutar os amigos de blusa azul dentro do bloco. Portanto: 4!.3! maneiras".

Fonte: O autor.

Em relação as soluções fictícias, destacamos que todas as soluções apresentam uma resposta correta e que optamos por não informar isso aos professores entrevistados, deixando em aberto se há soluções totalmente assertivas. No que se refere ao primeiro problema, a primeira solução é parcialmente correta, pois esquece de contar o caso em que a primeira bolinha retirada tem um número ímpar e a segunda é par. Em contrapartida, a segunda solução é correta, pois retira apenas o caso que não se interessa em contar, o caso em que o número de ambas as bolinhas retiradas é ímpar. Ambas as soluções foram apresentadas sem resultados numéricos, com a intenção de evidenciar apenas as multiplicações que deveriam ser realizadas. O objetivo foi investigar como os docentes avaliariam essas soluções, uma vez que, de maneira geral, os estudantes costumam realizar os cálculos de forma direta. Essa abordagem, embora não siga um padrão convencional de apresentação, é uma possibilidade viável de contagem no contexto escolar. O segundo problema possui três soluções. A primeira solução simplesmente numérica tem o intuito de entender se o(a) professor(a) entrevistado(a) entende o raciocínio combinatório intrínseco ao problema apenas com as operações destacadas, além de ser uma das principais maneiras encontradas de escrever soluções de problemas de contagem, não só por estudantes, mas em livros didáticos. A segunda solução complementa a primeira, isto é, explica o raciocínio implícito nas decisões tomadas por cada "tracinho" e apresenta o mesmo resultado numérico, que é equivocado. A terceira solução é correta e não apresenta fórmulas em sua resolução propositalmente, com a intenção de avaliar se o professor(a) entrevistado(a) compreende a maneira que o problema foi resolvido sem o auxílio de fórmulas, apenas utilizando os principais princípios de contagem (CERIOLI; VIANA, 2012).

O terceiro problema aparenta ser um problema "clássico" de contagem ao apresentar a configuração combinação completa que é, com as devidas adaptações: De quantas maneiras podemos colocar 4 bolas idênticas em 3 caixas diferentes? Todavia, o problema traz bolas diferentes, o que altera totalmente a solução do problema. A tabela apresentada na solução 3 evidencia todas as possibilidades se levarmos em conta somente a quantidade de bolas, isto é, se as bolas são idênticas. Como exemplo, a solução 13 traz duas bolas na caixa amarela, uma bola na caixa verde e uma bola na caixa preta, contudo não indica quais bolas estão na caixa amarela e quais estão na verde e preta, respectivamente. Na verdade, a solução 13 esconde outras soluções, vejamos:

Quadro 6: Solução(ões) 13

Solução	Caixa Amarela	Caixa Verde	Caixa Preta
13a	Vermelha e branca	Azul	Rosa
13b	Vermelha e branca	Rosa	Azul
13c	Vermelha e azul	Branca	Rosa
13d	Vermelha e azul	Rosa	Branca
13e	Vermelha e rosa	Azul	Branca
13f	Vermelha e rosa	Branca	Azul
13g	Azul e branca	Vermelha	Rosa
13h	Azul e branca	Rosa	Vermelha
13i	Azul e rosa	Vermelha	Branca
13j	Azul e rosa	Branca	Vermelha
13k	Branca e rosa	Vermelha	Azul
13l	Branca e rosa	Azul	Vermelha

Fonte: O autor.

Temos que para cada duas cores escolhidas para caixa amarela, temos duas opções para outras caixas. Portanto, são $\frac{4.3}{2} . 2 = 12$ soluções, conforme listamos no quadro 6. Com isso, a tabela apresenta uma ideia coerente caso as bolas fossem iguais, teríamos então que pensar para cada uma das 15 soluções propostas, quais são as possibilidades uma vez que as bolinhas não são iguais. A solução um resolve, por meio de fórmula, a questão considerando que se trata de combinações completas, resultando nas mesmas 15 soluções da solução 3, porém sem listá-las. Optamos pela fórmula com o intuito de identificar se o(a) professor(a) conhece a notação utilizada, bem como a configuração e a fórmula. Finalmente, a solução dois apresenta a solução correta, mas de maneira simplesmente numérica, a fim de avaliar se o(a) professor(a) entrevistado(a) conseguirá compreender a solução proposta, que, em termos numéricos, é a resposta correta.

O mesmo princípio utilizado para a primeira e segunda solução do segundo problema foi utilizado para elaborar as primeiras soluções do quarto problema: a primeira solução é simplesmente numérica e a segunda solução explica o raciocínio combinatório implícito na primeira. A terceira solução é a correta e a quarta solução muito se aproxima da terceira, contudo ao analisar os lugares em fila desconsidera o fato de que a mesa é circular, ainda que numerada. Com isso, o número de possibilidades de lugares é contado em um número menor. Esperamos que os professores(as) fiquem em dúvida em qual destas soluções é correta, caso descartem as duas primeiras.

5. METODOLOGIA

Nesta seção, apresentamos o percurso metodológico que traçamos para a produção dos dados empíricos, destacando a escolha da natureza da pesquisa, cada etapa que selecionamos para a produção dos dados empíricos e o método escolhido para análise dos dados produzidos. Por se tratar de uma pesquisa envolvendo a escola básica e a universidade, decidimos que os sujeitos de pesquisa serão professores de matemática, buscando investigar como a formação inicial de professores impactou (e impacta) sua atuação docente em relação ao ensino de combinatória na Educação Básica.

Assim sendo, optamos por caracterizar essa pesquisa como de natureza qualitativa, numa espécie de processo indutivo, conforme Creswell (2007, p.142) descreve as ações do pesquisador:

> O pesquisador começa reunindo informações detalhadas dos participantes e separa essas informações em categorias ou temas. Esse tema ou categorias são desenvolvidos em padrões amplos, teorias ou generalizações, que são, então, comparados com experiências pessoais ou com a literatura existente sobre o assunto (CRESWELL, 2007, p.142).

Planejamos o percurso metodológico em três (principais) etapas, que nomeamos como: seleção dos professores (Etapa 1); questionário para os professores selecionados (Etapa 2); e entrevistas individuais e semiestruturadas com os professores (Etapa 3). Inicialmente, pensamos que os sujeitos da pesquisa deste trabalho seriam entre quatro e seis professores(as) de matemática que atuam na escola básica e que a escolha destes seria uma parte entre aqueles que fizeram disciplina(s) diretamente relacionada(s) à análise combinatória, e outra parcela que não.

Martarelli e Dias (2020), Rocha (2011), Souza e Rocha (2020), Sabo (2010), Teixeira (2020) reforçam a necessidade da realização de novas pesquisas qualitativas, com professores, tanto para compreender posturas, concepções e crenças destes profissionais que atuam na escola básica, mas também para investigar de que modo a formação de professores, inicial e/ou continuada, pode ser proposta visando o ensino-aprendizagem no contexto da escola básica, com exemplos reais e práticos do que realmente acontece em sala de aula. Além disso, todas as pesquisas que envolvem ensino de combinatória, citadas nesta pesquisa, apontam para problemas emergentes nas formações iniciais acerca do ensino de combinatória, propondo ações nas licenciaturas e/ou estudos que investiguem o porquê professores e professoras apresentam dificuldades com o referido conteúdo matemático. Nesse sentido, pensamos nessa pesquisa com professores para contribuir com a área de ensino de matemática, pensando também no número baixo de pesquisas que envolvem o raciocínio combinatório em todas as etapas da escola básica (Ensino Infantil, Ensino Fundamental e Ensino Médio), conforme Souza e Rocha (2020) destacam e observamos ao longo da nossa revisão de literatura e na importância do desenvolvimento do raciocínio combinatório na Educação Básica (BORBA, 2010).

A seguir, destacamos as três etapas do percurso metodológico.

5.1 Critérios de seleção dos participantes da pesquisa

A BNCC prevê que problemas de contagem sejam trabalhados desde o 4º ano do Ensino Fundamental, e, portanto, não faria sentido — em nossa percepção — optarmos por escolher algum segmento escolar ou série específica de atuação, ainda que, em geral, a combinatória só seja formalizada na 2ª série do Ensino Médio, ou mesmo só seja ensinada nesse ano de escolaridade. Contudo, como o foco da pesquisa é o contexto da formação inicial de professores de matemática, isto é, do curso de licenciatura em matemática, não visando assim pedagogos e pedagogas — professores que também ensinam matemática —, não incluiremos professores atuantes nos anos iniciais do Ensino Fundamental.

Em um primeiro momento, havíamos pensado em escolher professores condicionados a certas características específicas, com o intuito de ter sujeitos de pesquisa advindos de ambientes distintos, buscando manter o conjunto selecionado não tão homogêneo, e, sim, mais disperso — no sentido estatístico — e plural. Características estas, como: onde atuam - rede privada ou rede pública -, tempo de profissão – professores(as) com pouca experiência e professores(as) com muita experiência -, universidade/ instituição da realização da licenciatura, realização ou não de disciplina(s) que envolva(m) a análise combinatória, entre outras. Contudo, após a qualificação, foi descartada a necessidade de tantas exigências e decidimos dar o enfoque em apenas um critério: professores(as) que realizaram disciplina(s) que envolva diretamente (isto é, sem ser um subtópico ou pré-requisito) a análise combinatória ou não.

Também após a qualificação, optamos por fazer um estudo piloto que nos rendeu alguns resultados importantes para a seleção dos professores e para as demais etapas do percurso metodológico, os quais pontuamos:

- O professor selecionado tinha 78 anos à época e mais de 50 anos de atuação profissional docente, com experiência em diversas escolas públicas e privadas. Percebemos que o professor entrevistado tinha dificuldades de resgatar memórias de sua formação inicial, bem como suas vivências e aprendizados desse período. Suas principais menções e destaques são baseados em seu conhecimento adquirido ao longo de sua atuação docente, como algumas trocas com professores e professoras de matemática e situações que lhe ocorreram em sala de aula. Percebendo na prática o que Nóvoa (2019) destaca, que não é possível tornar-se professor, isto é, aprender a profissão docente, sem a presença, o apoio e a colaboração de outros professores.

- Percebemos que a postura do entrevistador durante as entrevistas, isto é, a maneira que pergunta, que interrompe, que dialoga, e como estes fatores podem ter influenciado de maneira direta as respostas do entrevistado, consequentemente "enviesando" os dados da pesquisa. Observamos esta conduta ao longo da entrevista piloto, o que nos fez refletir e ter mais cuidado para as entrevistas posteriores.
- Percebemos que a disponibilidade pode ser crucial para encontrar professores, haja vista a dificuldade que encontramos com o professor selecionado para o estudo piloto.

Nesse sentido, dado que o enfoque do trabalho é entender como a formação inicial de professores impacta no ensino de combinatória, o fator tempo é essencial para que seja possível resgatar vivências importantes nesse contexto. Nóvoa (1992) destaca que os primeiros anos de profissão docente marcam o momento que os professores estão aprendendo os saberes necessários aos processos de ensinar e aprender, o que mais tarde vai denominar como a produção do conhecimento docente, interior a própria profissão (*idem*, 2022). Assim, decidimos que os sujeitos de pesquisa selecionados deveriam ter uma formação docente não tão distante, mas optamos por não restringir a um intervalo bem definido, haja vista as dificuldades de encontrar professores(as) que tenham interesse e disponibilidade para participar da pesquisa. Todavia, é necessário investigar as experiências vivenciadas no âmbito da licenciatura e para isso, não poderíamos ter professores(as) que atuam há muitos anos na escola básica como sujeitos de pesquisa, pois suas próprias experiências e conhecimentos adquiridos da própria prática poderiam interferir nos dados obtidos, ofuscando os elementos de suas respectivas formações iniciais.

Estabelecemos também como critério de seleção dos professores a universidade que eles se licenciaram. Optamos por escolher quatro professores(as) que tivessem graduados(as) em quatros grandes instituições públicas do Rio de Janeiro, um professor de cada, sendo elas: Universidade Federal do Rio de Janeiro (UFRJ), Universidade Estadual do Rio de Janeiro (UERJ), Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro (UNIRIO) e Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro (UFRRJ). Esta escolha foi motivada por entender que há possibilidades de formações iniciais mais distintas, considerando grades curriculares e currículos diferentes.

Diante disso, uma vez definido os critérios, como selecionamos os professores?

5.2 Etapa 1: Seleção dos professores

A primeira etapa, que rege a tarefa de selecionar professores, não foi tão simples, tendo em vista o interesse e a disponibilidade dos professores para participarem como sujeitos da pesquisa e as dificuldades para correspondência de disponibilidade. Assim, a disponibilidade e o interesse, ainda que não destacado na seção anterior, deve se caracterizar como um critério no momento de fazer a escolha dos professores.

Inicialmente, havíamos pensado na escolha dos participantes por meio de um formulário online, de rápido preenchimento com uma síntese da pesquisa e do que buscamos, divulgando nas principais redes sociais que envolvem pesquisadores e pesquisadoras de Educação Matemática e/ou professores(as) da Educação Básica. Contudo, por meio de pesquisadores do próprio PEMAT, a partir de divulgação interna em nosso grupo de *WhatsApp*, encontramos os sujeitos de pesquisa rapidamente, sem precisar realizar um formulário. Com a escolha de realizar a pesquisa com egressos de universidades distintas, foi necessário o apoio de colegas pesquisadores(as) para a busca de possíveis sujeitos desta pesquisa. Foram três professores selecionados, sendo um graduado e dois mestres, e uma professora selecionada, mestra pelo PEMAT. Decidimos por identificar os professores participantes desta pesquisa com nomes fictícios, sem qualquer relação com a realidade a fim de preservar e manter a privacidade de seus conteúdos. Conforme previsto no cronograma de pesquisa, as entrevistas foram realizadas entre novembro de 2023 e fevereiro de 2024, uma de forma remota e as demais presencialmente, em lugares públicos. Todos os participantes assinaram o Termo de Consentimento Livre e Esclarecido (TCLE) em duas vias, permitindo a gravação de voz de toda a entrevista.

5.3 Etapa 2: Questionário para os professores selecionados

A segunda etapa caracteriza-se como a proposta de um questionário — de preenchimento não tão rápido —, via Google Forms, para os professores selecionados, a partir da etapa 1. Com base no breve recorte da Tese de Doutorado do professor e pesquisador Paulo Jorge Magalhães Teixeira publicado em formato de artigo (TEIXEIRA, 2020), buscamos a Tese de Doutorado por completo para entender com mais profundidade como o autor criou e explorou o questionário que ele realizou em sua pesquisa — também com professores —, que ele cita em seu artigo. Nesse processo, analisando os questionários de sua tese, pudemos perceber algumas semelhanças com as ideias que inicialmente havíamos pensado. Dessa forma, propomos um questionário inspirado no questionário 3 de Teixeira (2012), fazendo as devidas adaptações, pensando em nossos objetivos principais e específicos. Esse questionário contém questionamentos acerca da experiência do profissional, busca da compreensão acerca de facilidades e dificuldades em relação à combinatória e ao seu ensino, estratégias para o ensino de combinatória em diferentes contextos e níveis de ensino, aspectos de sua formação inicial, dentre outros tópicos que nos conduziram a pensar em cada uma das entrevistas a partir dessas respostas, além de caracterizar os sujeitos de pesquisa. Os três professores selecionados e a professora participante estão caracterizados no quadro a seguir:

Quadro 7: Caracterização dos sujeitos de pesquisa

Nome	Formação	Anos de atuação	Atuação	Rede	Realização de disciplina de combinatória	Já lecionou combinatória
Bernardo	UFRJ	10 anos	EF II	Privada	Sim	Sim
Rafael	UNIRIO, Mestre em Matemática	4 anos	EM	Pública	Sim	Sim
Gabriel	UERJ, Mestre pelo PROFMAT	13 anos	EM	Pública e Privada	Sim	Sim

Rita	UFRRJ, Mestra pelo PEMAT	5 anos	EF II	Pública	Não	Sim

Fonte: Dados da pesquisa.

Após a análise deste questionário, encaminhamos para a última etapa da elaboração dos dados empíricos, isto é, as entrevistas semiestruturadas.

5.4 Etapa 3: Entrevistas semiestruturadas

Com base em DiCicco-Bloom e Crabtree (2006), entrevistas semiestruturadas são recorrentemente utilizadas em pesquisas de natureza qualitativa. Elas são organizadas por meio de questões abertas previamente elaboradas em conjunto com outras questões que surgem no diálogo do entrevistado e do entrevistador. Nesse sentido, optamos por utilizar as entrevistas semiestruturadas como instrumento metodológico, com entrevistas individuais com cada um dos professores participantes da pesquisa. Acreditamos que as experiências pessoais do professor, tanto como aluno de licenciatura quanto como professor atuante, são muito ricas e distintas, e que talvez se pensássemos em um modelo "fechado" para as entrevistas, poderíamos deixar de lado alguns aspectos relevantes para a pesquisa e que podem torná-las, inclusive, muito distintas. A partir da concordância dos sujeitos de pesquisa, com o devido Termo de Consentimento Livre e Esclarecido (TCLE) assinado e em duas vias, gravamos os áudios das entrevistas, para posterior transcrição, com duração prevista de 60 a 90 minutos.

Concebemos as entrevistas em dois momentos: Questionamentos acerca da formação inicial e a análise combinatória e análise de soluções de problemas de combinatória, inspirado na metodologia MathTASKS.

5.4.1. Questionamentos acerca da formação inicial e a análise combinatória

Nesta fase, escolhemos inicialmente nove perguntas para nos guiar durante a realização das entrevistas. Pelo fato de as entrevistas não terem uma estrutura bem definida, algumas perguntas não foram executadas com tanta proximidade ao que havíamos pensado e nenhuma das entrevistas seguiu a ordem pré-estabelecida, necessariamente. No quadro abaixo, destacamos as nove perguntas que selecionamos para a primeira parte da entrevista.

Quadro 8: Perguntas norteadoras das entrevistas semiestruturadas

	Perguntas norteadoras
1	Você teve contato com alguma disciplina que tratou da Análise Combinatória, seja diretamente (como uma disciplina para ela, por exemplo), ou indiretamente (como um tópico de alguma disciplina)?
2	Você tem dificuldades com o conteúdo de análise combinatória?
3	Você acredita que a sua resposta à pergunta anterior pode ter alguma relação com a resposta da anterior a ela? Isto é, sua formação inicial pode ter impactado, de alguma maneira, a forma como você lida com a combinatória?
4	Como você definiria a análise combinatória? O que ela representa para você? (Essa resposta não precisa ser formal ou estar ligada diretamente ao conceito matemático).
5	Você já lecionou combinatória para algum ano de ensino, no âmbito do Ensino Fundamental ou do Ensino Médio?
6	Você tem (ou acha que teria) dificuldades para preparar aulas que envolvam o raciocínio combinatório na Educação Básica? Por quê? Quais são suas referências?
7	Você considera importante introduzir conceitos básicos, envolvendo o raciocínio combinatório no Ensino Fundamental? Por quê?
8	Que estratégias um(a) professor(a) poderia utilizar para auxiliar os alunos na compreensão dos fundamentos que norteiam o raciocínio combinatório?
9	Quais critérios você costuma utilizar para validar uma solução de uma avaliação escrita em matemática?

Fonte: Dados da pesquisa.

As questões que elaboramos para a entrevista foram pensadas tendo como referência nosso objetivo principal e os objetivos secundários, que destacamos anteriormente. As únicas questões que respeitaram uma ordem durante as entrevistas, foram a primeira e a última, que tinham o papel de avaliar como foi a formação inicial em relação ao ensino de combinatória e a busca de encadear com a segunda parte da entrevista, que envolve a validação de soluções de problemas de combinatória, respectivamente. Além disso, outras perguntas surgiram ao longo das entrevistas, a depender de como as respostas foram desenvolvidas. As entrevistas tiveram uma duração média total de cerca de 80 minutos, enquanto a primeira parte da entrevista teve duração média de 30 minutos. Das entrevistas realizadas, quatro ocorreram presencialmente, incluindo o projeto piloto, e uma de forma remota, devido a condições de moradia e disponibilidade.

5.4.2. Análise de soluções de problemas de análise combinatória

Assim como Martarelli e Dias (2020), conduzimos as entrevistas inspirados a partir do programa MathTASKS desenvolvido por Biza e colaboradores (e.g. BIZA; NARDI; ZACHARIADES; 2018; BIZA; NARDI, 2019; BIZA *et al.*, 2021). O principal objetivo dessa metodologia é colocar professores em situações reais e desafiadoras a partir das complexidades da escola, que deve envolver a resolução de pelo menos um problema matemático, com base na perspectiva da interação aluno-professor. Até então, existe um foco específico em quatro tipos de questões:

> abordagens diferentes ou potencialmente falhas para o problema matemático, apresentadas por diferentes membros da turma; questões de gerenciamento de turma causadas pelas trocas durante a aula, interferindo com a aprendizagem matemática dos estudantes; tensões, criativas ou não, que surgem do uso de recursos digitais na solução de problemas matemáticos; e inclusão em atividades matemáticas de aprendizes comumente excluídos, tais como aprendizes com alguma deficiência (BIZA *et al*; 2021).

Neste trabalho, optamos por focar no primeiro tipo. Na metodologia, cada professor é convidado a se engajar nessas tarefas matemáticas por meio de reflexões de sua própria prática docente e conhecimentos matemáticos, além de suas concepções, respondendo perguntas a partir das discussões. Um dos objetivos das *MathTasks* é também ajudar professores a transformarem algumas ideias e concepções em estratégias efetivas para sala de aula, podendo ser caracterizada, nesse sentido, como uma atividade formativa para os professores participantes da pesquisa.

Baseado nas *MathTasks*, demarcamos algumas etapas para as entrevistas: (i) apresentação aos professores participantes de problemas matemáticos presentes no cotidiano escolar; (ii) proposta de resolução desses problemas (oralmente e/ou por escrito) por parte dos professores entrevistados; (iii) avaliação de uma ou mais soluções propostas, podendo ser real (produzida por algum estudante) ou fictícia (criada por nós e/ou professores de matemática colaboradores), realizada/pensada no âmbito da escola; (iv) descrição da abordagem que os professores participantes utilizariam em sala de aula para o auxílio no processo de ensino-aprendizagem do conteúdo matemático em questão, com base no item (iii). (Re)afirmarmos que, o que propomos é muito próximo à metodologia proposta pelas autoras do programa MathTASKS, porém não consideramos ser exatamente a mesma metodologia, tendo em vista algumas adaptações que fizemos para este presente trabalho.

Selecionamos quatro problemas de combinatória, que envolvem configurações (Cerioli e Viana, 2012) diferentes, para primeira questão propusemos duas soluções, para a segunda e a terceira propusemos três soluções e a para o último problema, propusemos quatro soluções. A primeira questão, que envolve arranjos e produto de medida, necessita da utilização do princípio aditivo e princípio multiplicativo. A segunda questão não envolve uma configuração conhecida, mas pode ser resolvida a partir dos conhecimentos de Combinação, Arranjos e os princípios multiplicativo, aditivo e o princípio K para 1. A terceira questão também não envolve uma configuração especificamente, apenas indiretamente com a combinação completa, e pode ser resolvida a partir do princípio aditivo e/ou o princípio multiplicativo. A última questão envolve uma configuração de mesa circular, porém numerada, o que nos leva a um problema de permutação, porém não circular. Essas questões foram apresentadas e debatidas no capítulo anterior, na quarta seção, no qual justificamos a escolha das questões e as soluções que foram propostas para os entrevistados.

5.5. Análise dos dados produzidos

Procuraremos apontar possíveis respostas para as questões de pesquisa propostas com base nos dados produzidos na Etapa 2 e, principalmente, na Etapa 3 da pesquisa, em diálogo com a literatura de pesquisa que compõe nosso referencial teórico, tanto na área de formação de professores e na profissionalização docente quanto na área de ensino de análise combinatória. Para tal, utilizaremos como lente teórica, uma perspectiva de matemática baseada na matemática problematizada (GIRALDO, 2018; 2019). Corroborando com Giraldo (2019), acreditamos que a matemática problematizada e matemática não problematizada devem estar em lugar de oposição quanto às concepções do que é matemática, e de como ensinar matemática. E, como hipótese, pensamos que um dos possíveis problemas no ensino de análise combinatória na Educação Básica e Superior pode estar relacionado com as abordagens de matemática não problematizadas, que não trazem sentido e, muitas vezes, escondem os principais conceitos (“as regras do jogo”), possibilitando a interpretação de que quem sabe análise combinatória é um gênio de talento inato. Essa é uma das concepções que queremos romper neste trabalho e buscaremos verificar essa hipótese por meio das entrevistas semiestruturadas.

Para a análise de dados utilizaremos também de nossas experiências, concepções e crenças sobre a análise combinatória e o ensino de combinatória, enviesando, por vezes, nossa análise. Devido a isso, dedicamos uma seção - quarta seção - para versar sobre a análise combinatória, nossas concepções e crenças, considerações e experiências de sala de aula. Diferentemente dos principais trabalhos sobre análise combinatória que destacamos aqui e do que também notamos ao longo da revisão de literatura, não buscaremos traçar categorias quanto aos tipos de conhecimentos dos professores participantes que possivelmente vão emergir durante as etapas 2 e 3. Como, por exemplo, conhecimentos de conteúdo, conhecimentos pedagógicos, conhecimentos da prática, conhecimentos para prática, de autores que são referências na área de formação de professores, como, nesse caso, Shulman (1986) e Cochran-Smith e Lytle (1999). Isso porque acreditamos que categorizar os tipos de conhecimento não irá contribuir para responder nossas questões de pesquisa nesse trabalho, ainda que compreendamos que essa seria uma possibilidade/alternativa. Contudo, nos debruçaremos sobre a crítica de Cochran-Smith e Lytle (1999) acerca da subalternização do conhecimento construído a partir da prática docente (*conhecimento da prática*) em relação ao conhecimento acadêmico que "aplicamos" no contexto escolar (*conhecimento para prática*).

Para organizarmos os dados obtidos na Etapa 3, transcrevemos integralmente todas as entrevistas individuais, utilizamos um recurso de transcrição do Adobe Premiere, software de edição de vídeos. Em seguida, fizemos manualmente a transcrição[22] de cada uma das entrevistas, a partir do documento gerado pelo software – que apresenta algumas imperfeições, sobretudo por sons alheios em alguns momentos da entrevista e possíveis problemas de dicção do entrevistador e entrevistado (a).

Para análise dos dados, optamos pelo modelo metodológico Análise de Conteúdo de Laurence Bardin (2004), que é caracterizado como:

> Um conjunto de técnicas de análise das comunicações visando obter, por procedimentos, sistemáticos e objetivos de descrição do conteúdo das mensagens, indicadores (quantitativos ou não) que permitam a inferência de conhecimentos relativos às condições de produção/recepção (variáveis inferidas) destas mensagens. (*ibidem*, 2004, p.42)

A análise de conteúdo é baseada em três grandes etapas: a organização, a codificação e a categorização. Primeiramente, realizamos a pré-análise, que consistiu na elaboração do roteiro das entrevistas semiestruturadas, a elaboração das etapas do percurso metodológico e os objetivos do trabalho. A partir da organização dos dados obtidos nas entrevistas

---

[22] Caso haja interesse, entre em contato com o autor para obter as transcrições, por meio do endereço eletrônico: victor.quaglia@gmail.com

semiestruturadas, analisamos as transcrições por meio de aspectos que reconhecemos que possuíam interseção entre os participantes da pesquisa, gerando as unidades de registro, que codificamos em seguida. Após sucessivos agrupamentos, construímos as categorias que os relacionam, dada nossa questão de pesquisa e objetivos traçados. Evitamos que uma unidade de registro pertença a mais de uma categoria (regra da exclusão mútua).

Por meio do site *wordclouds.com*, construímos nuvens de palavras, a partir das transcrições integrais das entrevistas semiestruturadas, para cada entrevistado(a), para compará-las, nos auxiliando para identificação das unidades de registro para codificação e, posteriormente, categorização, a partir dos agrupamentos. Durante nossa análise, dado às unidades de contexto, identificamos as unidades de registro, que se tornaram códigos: Formação/graduação, prática, superficial, notar/sentir, dificuldade/difícil, referência(s), escola, estratégia(s), problema(s), solução(ões), ensino, princípio multiplicativo/princípio fundamental da contagem, ordem, erro/errado(a). Estas foram importantes para a construção das categorias. Ressaltamos que durante a elaboração das categorias, tivemos dificuldades em elencar as unidades encontradas em apenas uma delas, fazendo com que repensássemos e retornássemos para as entrevistas para garantir que os critérios utilizados para esta escolha estivessem adequados. Além disso, devido à grande quantidade de categorias construídas, optamos por uni-las a partir de três eixos de análise, que serão descritos na seção seguinte.

5.4.1: Eixos de análise e categorias de análise de dados

Nos referenciamos no triângulo de formação de Nóvoa (2019), que destacamos na seção *Formação de professores e combinatória: interseções e implicações no ensino básico* para construir os eixos temáticos de análise: Universidade, Professores e Escola. No quadro 9, verificamos os eixos e as categorias que compõe cada um deles.

Quadro 9: Os eixos temáticos e as categorias

Eixo	Categorias
Universidade	Sentimentos sobre a formação inicial
	Análise combinatória *versus* currículo
Professores	Perspectivas sobre (ensino de) combinatória

	Referências
Escola	A prática docente e o *conhecimento da prática*
	Critérios de validação na resolução de problemas (combinatórios)
	Análise de soluções de problemas de combinatória baseada na metodologia MathTASKS

Fonte: Dados da pesquisa.

Acreditamos que, assim como Nóvoa (2019), esses três eixos alinhados podem promover transformações importantes para a formação de professores e para a prática docente no contexto da Educação Básica. Na *Universidade* mora a primeira formação, aquela que permite com que o professor se torne professor, impactando diretamente na sua prática profissional, que ocorre na *Escola*. Esta, por sua vez, é um lugar de construção de saberes, em que os *Professores* adquirem conhecimentos próprios, a partir da prática docente. Por meio das vivências dos polos *Universidade* e *Escola*, os *Professores* adquirem suas próprias concepções e crenças e referências que utilizam cotidianamente, tornando-se professores.

Entendemos que esses três eixos e as setes categorias construídas são pertinentes quanto aos objetivos desta pesquisa, possuem coerência e contemplam todas as unidades de registro elencadas. Não negamos que, outro(a) pesquisador(a), poderia propor uma outra organização dos dados obtidos, com outros eixos temáticos e categorias. Mais à frente, em resultados da pesquisa, buscamos dar sentido às relações que observamos nas categorias.

6. EIXOS TEMÁTICOS E ANÁLISE DAS ENTREVISTAS SEMIESTRUTURADAS

6.1. Universidade

6.1.1. Sentimentos sobre a formação inicial

Esta categoria foi construída a partir do objetivo principal do trabalho, que tem interesse em olhar para a formação inicial de professores e professoras de matemática. Objetivamos com esta categoria analisar quais são os sentimentos das respectivas licenciaturas de matemática dos participantes da pesquisa, sobretudo no que se refere à análise combinatória.

As entrevistas tiverem intuito de incentivar os professores e professora participantes a trazer possíveis memórias da sua formação inicial que de alguma maneira dialogue com sua prática docente, tendo em vista que todos estes selecionados são atuantes na Educação Básica. Ao longo da entrevista, percebemos que em relação ao ensino de matemática, de modo geral, poucos participantes referenciam a graduação para algum aprendizado impactante ou alguma experiência que tenha os marcados de forma positiva. Pelo contrário, quando fazem, referenciam de forma negativa. Quando perguntado (por mim), se houve algum curso na graduação em que foi exclusivamente para licenciatura em matemática e/ou que foi pensado para professores, Gabriel resgatou memórias acerca da sua formação.

> **Gabriel:** Inclusive uma das minhas lamentações da graduação foi que eu acho que... não me preparou para... para lecionar. Eu acho que ela me ensinou matemática, não a licenciatura. [...] Pouquíssimas focaram no dar aula. E como falar em como ensinar, como ver o aluno. Até licenciatura em matemática eram focadas em matemática. [...] Em ambos achei que faltou um pouco disso porque **eu senti muito**. Eu acho que a maioria das pessoas de professores **sente** isso. Tu aprende dando cabeçada. Você entra em sala e começa a ver como funciona de verdade na prática.

Quando se refere a "ambos", compara os dois andares que tinha aula, o sexto andar referente a disciplinas de Matemática e o décimo segundo referente a disciplinas de Educação, afirmando que estas disciplinas eram teóricas demais, sem diálogo com a prática docente. A percepção do professor dialoga com Fiorentini e Oliveira (2013) que, por sua vez, relatam que os cursos de licenciatura de modo geral, não somente matemática, têm recebido muitas críticas por parte de professores formadores, egressos e licenciandos no que se refere aos currículos.

> Essas críticas referem-se aos currículos, sobretudo às disciplinas específicas, às metodologias de ensino das aulas, ao distanciamento ou desconexão entre as práticas de formação e as práticas de ensinar e aprender na escola básica, à falta de diálogo ou interrelação entre as disciplinas específicas e as de formação didático-pedagógica, ao isolamento do estágio, entre outras. (FIORENTINI, OLIVEIRA, 2013, p. 919)

Assim como Gabriel, quando perguntada sobre uma disciplina em específico que trouxe no questionário – Fundamentos Teóricos Metodológicos de Matemática – acerca das contribuições para ela enquanto professora, Rita afirma que: *"Pra mim foi pouca coisa. Sendo muito sincera, eu sim,* ***eu senti muita*** *falta na minha vida profissional [...] Têm muitos tópicos que* ***eu sinto*** *a falta"*. Rita relata que esta disciplina foi pensada a partir de diversos tópicos de assuntos da matemática escolar, trazendo discussões sobre o ensino de matemática. Gabriel e Rita compartilham o mesmo sentimento da ausência de discussões importantes e significativas que, em tese, deveriam ser introduzidas no contexto da formação inicial de professores, quando o curso de licenciatura é voltado para formar profissionais que atuarão na Educação Básica. Ainda que de forma pontual, ambos relatam que tiveram disciplinas com este objetivo, mas todas elas de forma superficial.

O professor Rafael relata que teve um curso que majoritariamente foi exclusivo para estudantes da licenciatura (disciplinas de matemática e educação matemática), uma vez que a UNIRIO não oferece curso de bacharelado e que, além da licenciatura em matemática, disciplinas do campo de "exatas" são oferecidas para Engenharia de Produção e Sistemas de Informação, que possuem aulas separadas da matemática. Apenas as aulas referentes a disciplinas de Pedagogia envolviam outras licenciaturas. Durante a entrevista, não notamos nenhum aspecto negativo e nem positivo quanto às contribuições da sua formação inicial para prática docente de modo geral, ainda que tenha gostado do curso. Em contrapartida, o entrevistado cita muitas vezes sua prática docente, destacando experiências de sala de aula e da sala dos professores, por exemplo.

O professor Bernardo realizou graduação sanduíche em Portugal, onde teve disciplinas mais marcantes quanto a discussões sobre ensino de matemática, por exemplo, sobretudo o ensino de combinatória. O professor não cita outros fatores de sua graduação, mas assim como Rafael, por diversas vezes, traz aspectos de sua prática profissional docente.

É possível perceber um sentimento de falta durante a análise dos dados produzidos nas entrevistas com os participantes desta pesquisa. Esta falta não se refere a ausência de conteúdo matemático, especificamente. Isto também, mas há o sentimento de falta de sentir-se num curso de licenciatura em matemática, há o sentimento de falta de preparo efetivo para atuação profissional, há o sentimento de falta de problematizações importantes sobre o ensino de matemática que possam, inclusive, conflitar com o ensino que tiveram durante a Educação Básica enquanto estudantes daquele contexto. As universidades são diferentes, mas (infelizmente) o sentimento é o mesmo.

6.1.2 Análise combinatória *versus* currículo

Esta categoria foi pensada com intuito de buscar olhar para o conteúdo matemático análise combinatória no currículo das quatro universidades escolhidas (UFRJ, UFRRJ, UNIRIO, UERJ) a partir do olhar dos professores da Educação Básica que participaram da pesquisa enquanto sujeitos da mesma[23]. Afinal, nosso objetivo principal de pesquisa é entender os possíveis impactos da formação de professores no conhecimento e ensino de combinatória por parte dos docentes.

É verdade que todas as entrevistas tiveram rumos diferentes, ainda que possuíssem um roteiro previamente definido, até pela estrutura escolhida (semiestruturada). Contudo, todas elas começaram com a pergunta disparadora (em versões diferentes): *Durante sua graduação, você teve alguma disciplina que tratou da análise combinatória, seja diretamente, como uma disciplina propriamente dita, ou indiretamente, como tópico de alguma disciplina?* As respostas não demonstraram uma convergência significativa entre si. Em seguida, buscamos entender como foi(foram) a(s) disciplina(s) que tiveram que envolviam a combinatória: *foi um curso de matemática "pura"? Teve relação com a Educação Básica? Foi bom? Foi significativo para você?* A seguir apresentamos as respostas destas perguntas para cada um dos professores separadamente por cada professor(a).

O professor Gabriel teve ambas, disciplina específica de combinatória (Matemática Discreta) e tópicos de outras, e disse *"só que infelizmente não foi bem trabalhado"*. Segundo ele, o curso de Discreta teve foco maior em grafos, por opção do professor e proximidade com a temática. Gabriel também afirmou que o curso era pensado para a matemática, não havendo diferenciação entre licenciatura e bacharelado, com foco na matemática aplicada, sem dialogar com a Educação Básica. Ao final do curso de licenciatura, Gabriel teve uma

---

[23] Esclarecemos que, nas análises e conclusões deste estudo, não será objetivo generalizar as licenciaturas em matemática das quatro universidades mencionadas. Nosso foco está nas experiências vividas pelos sujeitos da pesquisa durante suas formações iniciais nas respectivas instituições

disciplina para professores em formação que, de acordo com ele, *"pincelou um pouquinho"* combinatória e teve muito foco em função quadrática, dentre outros assuntos.

Durante nossa conversa, perguntei: "Mas mais especificamente, combinatória, como é que você acha que essa as aulas que você mal teve podem ter influenciado de alguma forma? Zero?". Gabriel respondeu:

> **Gabriel:** Zero que é a área para a combinatória, que é o foco aqui, não vou dizer zero, mas muito pouco. Uma escala de zero a dez o que a faculdade me ajudou em combinatória, eu diria...Vamos botar aí dois de 0 a 10, acho que dois. A combinatória eu tive que ralar por mim mesmo [...] foi difícil, foi um tropeço mesmo que acho que a faculdade deixou a desejar nesse ponto.

O professor afirma que o início de sua carreira docente foi muito complicado, enquanto monitor em escolas particulares, percebeu que em combinatória *"(eu) não ia dar conta"*. Pegou a apostila utilizada na escola que trabalhava à época e fez ela toda para estar preparado. Gabriel diz ter *"destruído tudo"* e então ter se sentido confiante: *"aí eu me senti mais confiante. E aí, lógico, ao longo dos anos, você dando aula, você vai aprimorando, vai pegando novas técnicas e tal. Isso é normal".* Ele afirma que foi com a prática, ano após ano ensinando combinatória, que desenvolveu seu próprio método. Ele lembra que nesta época de iniciante, assistia todas as aulas possíveis para observar as didáticas dos professores, até mesmo aqueles que não eram de matemática propriamente dito. Gabriel tinha seu pai como referência naquele momento, professor de matemática, que apontava os caminhos para ele quando tinha dúvida acerca do conteúdo. Ele traz em um momento oportuno de nossa entrevista, que os professores de outras áreas estranharam quando ele pedia para assistir suas respectivas aulas, mas ele alega que *"o conteúdo eu sabia que eu me virava. Se eu não souber vou perguntar para o meu pai ou perguntar pra algum amigo, dá para desenrolar, a didática que é difícil. Como é que ensino isso?".*

"*Como é que ensino isso?"* "*Eu tive que ralar por mim mesmo".* Estes trechos nos fazem refletir sobre a sua formação inicial que não conseguiu possibilitar ao estudante meios para se tornar um professor preparado. Nos alinhamos com uma perspectiva de prática pedagógica de matemática como prática social, "sendo constituída de saberes e relações complexas que necessitam ser estudadas, analisadas, problematizadas, compreendidas e continuamente transformadas" (FIORENTINI, OLIVEIRA, 2013, p. 921). Dessa maneira, pensamos que conteúdo matemático não é o suficiente para ensinar, atuar na escola não se resume em aplicar conhecimentos adquiridos, muito pelo contrário, requer conhecimentos específicos previstos em uma formação inicial pensada para professores. Quanto à combinatória, somente a partir de sua prática docente que o professor conseguiu adquirir conhecimentos necessários para lecionar. Isto nos faz pensar sobre qual é o papel da licenciatura de matemática nas universidades? E ainda, qual é o lugar da(s) matemática(s) na licenciatura?

O professor Rafael teve apenas uma disciplina específica de Análise Combinatória e Introdução à Probabilidade e se recorda de em alguns raros momentos aparecer alguma conta que envolvia conceitos da combinatória, como a combinação. Sobre o curso, ele afirma que: *"Sim, foi legal, tanto pelo professor como pela turma. A turma reunia o pessoal que estava no terceiro ou quarto, sétimo, décimo período e muitas vezes discutia em cima das questões".* Ele relata que o curso foi baseado no livro do Morgado *et al* (2016), seguindo-o em ordem, conforme os capítulos do livro e que as aulas eram baseadas em exercícios e que a *"impressão que tinha era como se a turma inteira estivesse ali encarando o desafio. Como é que resolve esse quebra cabeça?"*.

Quando perguntado se tinha dificuldade com a análise combinatória, ele relata uma experiência enquanto professor da escola básica:

> **Rafael**: quando eu trabalhei no CAP/UFRJ, teve um professor lá substituto, que nem eu, [...] que me ajudou bastante a entender um pouco mais de análise combinatória e sendo bem sincero, ele foi um divisor pra mim de entendimento do conteúdo da disciplina. Antes eu tinha um medo ou até mesmo um receio ali de entender as questões. Depois dessas conversas eu tentei trilhar um caminho que você me indicou um pouco mais de pensar em tirar aquela ideia de arranjo ser quando a ordem importa, combinação quando a ordem não importa. Tentar pensar em problemas sequenciais, problemas de criar subconjuntos que acaba entrando bastante em combinação simples. E eu replico isso às minhas turmas. Então tentar tirar aquele excesso de fórmulas.

Percebemos que a partir da troca de experiências com um professor da Educação Básica que fez com que ele olhasse para combinatória com outro olhar, valorizando o raciocínio combinatório intrínseco aos problemas de contagem, consequentemente, refletindo sobre sua prática docente. Interessante destacar que o professor elogiou a disciplina realizada durante a graduação, trazendo memórias marcantes para ele durante a entrevista desta disciplina, mas, ao mesmo tempo, afirma que tinha medo de entender as questões no contexto escolar.

A professora Rita não teve disciplina de combinatória diretamente, apenas em três disciplinas teve a combinatória como tópico: em Fundamentos Teóricos Metodológicos da

Matemática, Introdução à Estatística e Laboratório de Matemática para o Ensino e Educação Básica II. Ela relata que:

> **Rita:** Eu lembro que inclusive na época da faculdade, eu acabei me envolvendo em algumas discussões, até em relação a colegiado de curso, departamento e uma das discussões que a gente, nós estudantes da época, tínhamos era a questão de não ter uma disciplina de análise combinatória. Não ter uma, não ter uma compartimentação, uma separação em algumas disciplinas que a gente julgava muito importante, principalmente para nossa prática pedagógica no futuro, porque não tinha análise combinatória. Tinha uma disciplina de probabilidade, mas era uma probabilidade voltada mais para a inferência estatística. Era uma probabilidade voltada mais pra universidade, pra academia. Então, naquela época a gente discutiu bastante, reclamou bastante que era um incômodo, porque a análise combinatória, sendo muito sincera, pra gente é um calcanhar de Aquiles do caramba. E não ter na graduação uma única disciplina pra trabalhar esse tipo de problema...

Em apenas uma destas disciplinas ela teve alguma discussão que envolvesse o ensino de combinatória, mas como envolvia o debate de muitos tópicos, sendo uma disciplina de quatro créditos, não tiveram a oportunidade de se aprofundar muito. Nas outras disciplinas, Rita traz que foi bastante superficial, quase como um pré-requisito, como em Estatística, por exemplo: *"vamos relembrar o que é combinação para fazer essas contas aqui".* Quando perguntada se as disciplinas que ela realizou foram significativas para ela, afirma que muito pouco e que sentiu falta durante sua carreira docente.

Durante a entrevista, Rita revisitou algumas experiências enquanto professora:

> **Rita**: Na época, eu estava numa escola que um dos professores de matemática é um amigo meu, formado em matemática pela rural também, e ele me ajudou e me explicou alguns conceitos, me explicou alguns conteúdos, a gente trocou algumas figurinhas. Eu cheguei a dar aula de análise combinatória, mas antes de dar aula de análise combinatória, eu não estava me sentindo nem um pouco segura. Eu tive uma amiga também do PEMAT do mestrado, que a gente acabou sentando, conversando. Ela me explicou algumas coisas e com essas explicações desses meus amigos atreladas às explicações que eu tive na época da faculdade, nas disciplinas mais superficiais né? eu consegui unir algumas coisas, saberes e montar aulas e dar aulas sobre isso. Então, se eu falar pra você que eu me sinto superconfortável em dar análise combinatória, lecionar análise combinatória, eu não me sinto. Eu não me sinto confortável às vezes fazendo exercícios, mas eu sei que se eu tiver que dar uma aula de análise combinatória, eu vou dar. Eu vou procurar estruturar melhor a aula possível com os melhores exemplos possíveis. E baseado nessas minhas vivências e trocas. Porque às vezes a gente acha que... a gente acha não. Às vezes o lecionar é uma, é uma prática, é um trabalho muito solitário. Mas quando a gente tem alguns amigos que a gente troca figurinha, que a gente conversa, puxa, a gente cresce à beça na minha concepção.

A professora Rita conta a importância de seu amigo de graduação e sua amiga da pós-graduação, mais especificamente o Mestrado, para elaboração de aulas de combinatória e de uma melhor compreensão do assunto, haja vista seu sentimento de insegurança e de falta, conforme destacamos na seção anterior. Novamente, a partir do contato com professores da Educação Básica possibilitou aprendizados e o sentimento de maior segurança para pensar em aulas de combinatória.

Finalmente, o professor Bernardo teve ambas, específica (Matemática Finita) e indireta (Introdução à Estatística), além de Probabilidade e Estatística em uma universidade em Portugal, na qual fez intercâmbio durante sua graduação. Ele relata que a disciplina de Matemática Finita foi formal, sem diálogo com a Educação Básica, que teve como referência o livro do Morgado *et al* (2016) e o ajudou a desmistificar o seu pensamento sobre o que é a análise combinatória.

> **Bernardo**: [...] eu notei que a base de combinatória da turma de maneira geral era uma base fraca, porque eu acho que isso é um problema de Educação Básica mesmo, da nossa formação de professores, que quando a gente aprende combinatória, pelo menos como eu aprendi, aprendi só no Ensino Médio. E quando eu aprendi era muito focado no ensino de fórmulas e decorebas, encaixar fórmulas a determinados tipos de problemas de combinatória. Então, era essa cabeça que eu tinha quando eu fui fazer o curso e quando eu cheguei lá, eu desmistifiquei um pouco isso. Isso porque eu vi que na verdade não era bem por aí que passava o raciocínio, na verdade as fórmulas, eram o resumo de um pensamento combinatório. E eu acho que esse curso de início foi focado assim. Depois eu acho que ele se perdeu devido à grande defasagem da turma, eu incluso, tá?! Que aí a gente acabou tendo que mais que tapar alguns buracos que foram... foram sendo deixados no Ensino Médio para, para... e acabamos não entrando muito mais de maneira profunda nos conceitos mais complexos da combinatória.

Percebemos que esta disciplina de Bernardo foi a única que se preocupou com o desenvolvimento do raciocínio combinatório dos estudantes, buscando mostrar de onde vêm as fórmulas que foram apresentadas para ele no Ensino Médio. Ainda que, na perspectiva dele, as aulas não tivessem diálogo com a Educação Básica, acreditamos que a abordagem utilizada na disciplina é pautada numa matemática problematizada, o que fez com que ele refletisse enquanto estudante sobre o conteúdo da combinatória e, consequentemente, o fez (re)pensar sobre o ensino de combinatória. Destacamos que o conteúdo elencado no livro do Morgado *et al* (2016) acerca da combinatória de contagem não se distancia muito do conteúdo previsto pela BNCC sobre combinatória para a Educação Básica. Logo, olhar de maneira formal, entendendo os princípios e teoremas, assim como as configurações, mesmo numa abordagem mais teórica, da combinatória pode contribuir para a prática docente.

Contudo, ainda que ele valorize, em alguns momentos, a disciplina de combinatória que teve pois *"não sabia o que era combinatória"*, ele acreditava que *"combinatória eram problemas, que você encaixava fórmulas"*, afirmando que: *"Eu acho que eu realmente* *aprendi mais combinatória na minha prática, na minha própria prática, e também um pouco com a troca com outros colegas, fazendo alguns cursos mais focado em problemas de combinatória”*. Isto é, a formação inicial foi um “*start*”, mas somente num contexto de atuação profissional e com a experiência de outros colegas professores que, de fato, aprendeu combinatória.

6.2 Professores

Dividimos este eixo em duas categorias, a primeira refere-se às perspectivas dos professores(a) entrevistados(a) sobre a combinatória (conteúdo) e o ensino de combinatória, enquanto a segunda busca compreender quais são as referências dos professores(a) quando planejam suas aulas de combinatória. Neste sentido, procederemos à avaliação de elementos que remetem à formação inicial dos professores(a) participantes desta pesquisa, analisando suas declarações e reflexões ao longo das entrevistas.

6.2.1 Perspectivas sobre (ensino de) combinatória

Em todas as entrevistas, levando em conta possíveis variações, procuramos avaliar se os participantes enfrentavam dificuldades com o conteúdo da análise combinatória e/ou se consideravam o tema difícil. Quando perguntado, Gabriel respondeu: *“Cara, eu gosto muito de combinatória, apesar de achar difícil para professores, para alunos no geral, eu acho. Acho que é um conteúdo difícil. Tem que tomar cuidado. [...] combinatória, cada questão, é uma forma de pensar diferente”*. Em seguida, resgata memórias do início de sua carreira docente quando afirma que naquele contexto percebeu que “*o meu ensino da escola tinha sido fraquíssimo e na faculdade quase não vi, foi quase inexistente”.*

Já Rita, ao longo de uma de suas respostas, sobre o quão significativo foi para ela a disciplina que ela fez que tinha como tópico a combinatória, ela confessa que: *“[...]no Ensino Médio eu tive um professor muito bom, mas ainda assim eu tinha muita dificuldade, porque análise combinatória você interpreta os problemas e eu tenho dificuldade com isso, mas não nego as minhas dificuldades”*. Em seguida, reforça como foi e é prejudicial para ela o fato de não ter tido uma disciplina de análise combinatória, mesmo que teórica, e que seria para ela como *“subir um degrau (da escada)”.*

O professor Rafael, ao ser perguntado se tem dificuldade respondeu que: *“depende do assunto”* e traz à tona o fato de um professor da Educação Básica, que trabalhava junto com ele, foi um divisor de águas para ele. Segundo o professor, *"a maior dificuldade (em combinatória) é você interpretar corretamente o enunciado, entender o que ele quer, às vezes uma vírgula ou um entendimento diferente, uma palavrinha muda completamente a questão",* afirmando que algumas questões podem ser ambíguas e complicadas de interpretar.

O professor Bernardo ao ser perguntado se tinha dificuldades e achava difícil o conteúdo referido, afirmou que: *"Acho. Acho um dos mais difíceis do ensino básico".* Retomei a pergunta acerca da dificuldade em seguida: "Mas você tem dificuldades? Assim, você já deu aula de combinatória no contexto da Educação Básica?" e ele respondeu "*já*"., evitando responder à pergunta quanto às dificuldades.

Queremos salientar que de todos os entrevistados apenas a professora Rita assumiu que tem dificuldades em combinatória. Todos os demais entrevistados buscaram responder à pergunta por outros caminhos, não respondendo diretamente o que foi perguntado: "Você tem dificuldade no conteúdo da análise combinatória?". Este cenário nos chama atenção pois parece (re)forçar uma concepção de que quanto mais conhecimento matemático o professor tem, melhor professor ele é, colocando o saber matemático acima do saber do professor, reverenciando, assim, a matemática acadêmica no lugar da matemática escolar. E, portanto, assumir ter dificuldades poderia significar fraqueza, ou que eles não fossem bons professores por isso. Assim como Giraldo (2019), acreditamos que essas dicotomias entre os saberes advindos da matemática "pura" e da escola devem ser combatidas e nem mesmo deveriam existir, uma vez que elas pressupõem hierarquias, como se um "lado" fosse melhor que o outro. Para isso, é necessário estabelecer uma relação entre elas, ressignificando esta perspectiva de oposição. Além disso, esta ideia corrobora a concepção de "conhecimento para a prática", criticada em Cochran-Smith e Lytle (1999) e nos reforça o fato de que estes conhecimentos (matemáticos da academia) não correspondem aos conhecimentos que servem de base para o ensino (TARDIF, REYMOND, 2000).

Embora não seja o foco principal deste estudo, é necessário ressaltar que Rita é a única professora do gênero feminino entrevistada nesta pesquisa e a única que se mostrou disposta a admitir, colocando-se vulnerável, ter dificuldades em um dos tópicos mais complexos abordados na Educação Básica. Ademais, a seguir, apresentamos uma de suas declarações durante a entrevista que sintetiza de maneira eficaz a discussão abordada.

> **Rita:** E eu acho que às vezes a gente precisa descer de um pedestal que a gente é colocado, porque você sabe matemática, então você é "brabão". Não, não sou brabona. Eu não sei tudo, estou longe de saber tudo e nunca vou saber tudo, porque é impossível, humanamente impossível, saber tudo de matemática, de uma única área. Então é descer mesmo do pedestal, conversar, falar, mandar mensagem para a colega e falar olha, não sei, me ajuda, me explica. Eu acho que isso é fundamental para mim.

A fala de Rita corrobora as ideias de Nóvoa (2019) e Sabo (2010) acerca da relevância e necessidade da troca de saberes entre docentes, colegas e profissionais da educação para a produção de conhecimentos. Essa abordagem valoriza o "conhecimento da prática" e o saber escolar, em contraposição ao saber matemático oriundo da academia. Rita expressa um discurso que, embora reconhecido nas universidades e, em certa medida, nas escolas e na sociedade (senso comum), associa o saber matemático a uma forma de superioridade, caracterizando aqueles que o dominam como "brilhantes" ou superiores, e vinculando o conhecimento matemático a uma suposta genialidade. Ela desafia essa concepção ao afirmar que não se identifica com o estereótipo frequentemente associado a essa imagem, mas, ao contrário, se apresenta como uma pessoa, com dificuldades, suscetível a erros e aberta à busca de ajuda de outros profissionais quando necessário.

Notamos que Gabriel, Rafael e Rita, durante a elaboração de uma resposta, buscaram como referência algumas memórias relacionadas a dois contextos específicos: ao ensino básico, nas posições de professores e/ou estudantes e na universidade, olhando sua formação inicial. Eles, junto ao professor Bernardo, têm um consenso sobre o fato de a análise combinatória ser um conteúdo difícil, talvez um dos mais difíceis da Educação Básica. Valorizamos e destacamos as falas *"combinatória, cada questão é uma maneira de pensar diferente", "análise combinatória você interpreta os problemas", "uma vírgula ou um entendimento diferente, uma palavrinha diferente muda completamente a questão",* supracitadas, característica elencada por Lockwood, Wasserman e Tillema (2020), quando se referem as oportunidades de *pensamento rico* da combinatória. Acreditamos que elas nos fazem refletir sobre como abordagens não-problematizadas podem ser desfavoráveis para o processo de ensino-aprendizagem em combinatória, uma vez que a interpretação dos problemas e os diferentes conceitos que podemos atribuir a problemas que possuem a mesma estrutura, mas com alterações quase imperceptíveis, podem trazer complexidade a resolução do problema. Neste sentido, Cerioli e Viana (2012) afirmam que muitos problemas estão enunciados de maneira que a identificação das palavras relevantes é um pouco confusa e que a ambiguidade é um fator que dificulta a resolução de problemas de contagem.

Como exemplo, ao examinarmos as avaliações dos docentes sobre as duas soluções propostas para o **problema 1 -** segunda parte das entrevistas **-**, observamos que houve dificuldades em determinar a relevância da ordem das retiradas. Ou seja, se retirar, por exemplo, a bolinha 4 e a bolinha 2 é equivalente a retirar a bolinha 2 e a bolinha 4. Essa questão gerou diferentes interpretações entre os professores. Além disso, a professora Rita expressou incerteza quanto à presença de reposição das bolinhas na urna, considerando que o enunciado não esclareceu essa informação de maneira explícita, segundo ela. O professor Rafael salientou que: "para esse problema a modelagem correta para entre aspas, né? Seria considerar a ordem ou não? Se essa questão não deixa claro, se a ordem importa, então depende de como interpreta".

Pensando especificamente em possíveis situações promovidas em sala de aula e no ensino de combinatória, perguntei aos professores entrevistados quais estratégias poderiam utilizar para auxiliar os estudantes na compreensão dos fundamentos norteadores do raciocínio combinatório. Alguns professores tiveram dificuldades em responder à pergunta, admitindo não conhecer muitas estratégias e apresentaram elementos de sua própria atuação profissional docente.

O professor Gabriel respondeu rapidamente:

> **Gabriel:** Já grita direto o erro. Eu acho que mais importante que uma lista de exercício, por exemplo, é o erro. Em que sentido? O aluno...Eu cobro muito do aluno, me diz o que você fez e me diz passo a passo. Não é só o resultado, passo a passo mesmo, você fez isso, isso e aquilo. E aí deu errado, porque eu preciso entender o porquê o seu deu errado pra te explicar e o que você não considerou. Porque combinatória é muito comum a gente pô, fiz, tá lindo, ué, mas não deu isso deu dez, sei lá, eu achei 20. A resposta é 30, porque eu esqueci de considerar dez casos. Então por que eu esqueci de considerar dez casos? Por que a minha resolução não considerou aqueles dez casos? Ou então pode ser o contrário, o sentido de eu achei 30, mas deram 20. Então contei alguns repetidos talvez, ou errados ou repetidos [...] por que minha resolução considerou alguns repetidos ou algo assim?

Conforme indicamos na subseção 4.3 que destaca *dificuldades na resolução de problemas de contagem e o papel do erro*, corroborando com Vaz (2022), e alinhados com a perspectiva de Gabriel, acreditamos que o erro pode ser um trampolim para o conhecimento e alinha-se a uma perspectiva de uma matemática problematizada, optando-se por construir o conhecimento a partir de uma oportunidade (o erro). Coelho e Dias (2022) apontam como a metodologia Análise de Erro pode contribuir para o ensino e aprendizagem da análise combinatória, “na medida em que abre espaço para o aluno rever a sua resolução, refletir sobre ela com a orientação do professor e rever suas estratégias” (*ibidem*, 2022, p.246).

O professor Rafael e a professora Rita acreditam que a experimentação é um caminho. Ele cita uma experiência que corriqueiramente apresenta em sala de aula, que é tomar os estudantes como exemplares para formar permutações e arranjos, por exemplo, trocando-os de lugar para tentar sistematizar uma maneira de calcular os arranjos e permutações. Destacamos a resposta de Rita:

> **Rita:** Eu acho que a experimentação, o experimentar, às vezes a gente pensa em exercícios muito bons. [...] Então a questão de eles experimentarem, tentarem, por exemplo, ah... uma permutação das letras da palavra uva e aí ele botar U-V-A, U-A-V, entendeu? E ir trocando, ir mexendo e trabalhando com algo concreto. Eu acho que facilitaria a aprendizagem do conhecimento mais abstrato antes de partir para fórmula.

Acreditamos que essa estratégia desempenha um papel crucial na resolução de problemas de contagem, constituindo um dos 'passos' da DPC (CERIOLI e VIANA, 2012). Esta abordagem visa identificar exemplares que permitam o desenvolvimento de outras estratégias eficazes para a contagem. A professora citou uma atividade que aprendeu em visita guiada ao Instituto Nacional de Educação de Surdos (INES), que a partir de copos plásticos e colagens, criam-se possíveis roupas para vestir uma pessoa e a partir da experimentação, alterando a posição dos copinhos, cria-se outras maneiras de se vestir.

O professor Bernardo acredita que é um desafio ensinar combinatória. Para ele, devemos utilizar problemas disparadores que estão no nosso dia a dia, como número de telefone, número de placas e exemplos que os estudantes mesmo vão demandar. Ele afirma que: *“geralmente boto uns problemas disparadores para a gente começar a aula e a formalização do conteúdo”.* Conforme destacamos, esta proposta se alinha a uma metodologia de Resolução de Problemas, mais especificamente a Resolução de Problemas como um ponto de partida (MENDONÇA, 1999).

Em um momento anterior, quando exploramos suas experiências e práticas docentes, Bernardo afirma que: “*Eu acho que uma das maneiras de justificar a própria multiplicação é pela combinatória”.* Segundo ele, na perspectiva do Ensino Fundamental, utilizar jargões pode não ser interessante, mas explorar a multiplicação desde cedo e a formalização dos conceitos combinatórios ao longo da evolução escolar, associando as operações realizadas aos princípios, como o princípio multiplicativo, pode ser uma estratégia interessante para o processo de ensino aprendizagem de combinatória. Ideia esta análoga a defendida por Lima e Borba (2015).

6.2.2 Referências

Teixeira (2020) indica que os professores e professoras, por vezes, reproduzem aulas que tiveram na Educação Básica, enquanto estudantes, ou se debruçam totalmente em livros didáticos como base para as aulas de combinatória, haja vista que as formações de professores não são assertivas quanto ao ensino de combinatória e as discussões necessárias sobre o conteúdo, o que dialoga com a dupla descontinuidade de Klein (1908). Assim, considerando um dos objetivos (secundários) desta pesquisa, que visa compreender as referências utilizadas pelos docentes na elaboração de aulas sobre combinatória, indaguei aos professores e professora entrevistados(a) acerca das dificuldades enfrentadas ao planejar atividades envolvendo raciocínio combinatório na Educação Básica. Além disso, questionei sobre as principais fontes de referência que eles empregam para tal planejamento.

O professor Gabriel retoma seu início de carreira e lembra que tinha como grande referência seu pai, professor de matemática, quanto a conteúdos matemáticos. Sua grande preocupação era *"Mas, como eu vou ensinar?"*. Decidiu, então, assistir aulas de professores de disciplinas distintas, nas instituições que trabalhava, visando entender a didática deles para construir a sua própria didática. Conta que para preparar suas aulas, de modo geral, *"eu pegava assim dois, três livros, pegava sempre o livro, apostila do local que eu tava trabalhando e pegava mais uns dois, três que eu tinha em casa, abria todos na mesma página"*. A partir disso, criava um quadro *"bem metódico mesmo, bem matemático",* com exercícios selecionados a partir dessas diferentes fontes. Com a prática, foi desenvolvendo suas aulas ano a ano, uma vez que sempre atuou na 2ª série do Ensino Médio, e a partir de erros e acertos, possui hoje um modelo próprio para ensinar combinatória.

> **Gabriel:** Hoje em dia eu já tenho uma sequência de exercícios num arquivo no computador, que eu acho que se a pessoa fizer essa sequência, ela pega o básico para começar, não para dizer que está garantido, porque combinatória tem muitas variações, mas é uma sequência que eu já montei e cara, se esse cara faz essas dez, 20 questões aqui, ele está bem para desenrolar muitas outras.

Percebemos que, em nenhum momento, Gabriel faz menção a sua vivência na graduação. Na verdade, suas respostas evidenciam o espaço escolar. Assim como Gabriel, o professor Rafael acredita que *"a lista acaba sendo uma ferramenta, porque eu acho que se você não trabalhar com uma seção problema para instigar o raciocínio fica complicado* *ensinar esse conteúdo”*, afirmando que costuma utilizar uma lista com problemas iniciais mais simples, que vão aumentando de nível ao decorrer da mesma.

Como resposta à pergunta, Rafael afirma que: *“Acaba sendo um pouquinho a experiência que eu tive e essa acaba sendo a principal referência”.* Para preparar suas aulas utiliza questões de vestibular, questões do livro do Morgado *et al* (2016) e apostilas de uma rede privada que trabalhou anteriormente, organizada por tipos de problemas de combinatória (arranjos, combinações, permutações). Diferente de Gabriel, mesmo que não mencione diretamente sua formação inicial, Rafael tem como uma de suas referências o livro do Morgado *et al* (2016), que conheceu durante a disciplina de combinatória na universidade. Ademais, em momentos anteriores da entrevista, destaca que as aulas eram baseadas no livro e que, em sua percepção, essa estratégia foi interessante pois eram desafios que eles deveriam buscar soluções aula a aula.

A professora Rita responde que procuraria na internet, pegaria livros e recorreria a materiais didáticos que ela tem quando deu aulas preparatórias para o ENEM em escola privada que trabalhava. Indaguei se existia alguma referência mais específica quando se refere à internet e aos livros. Quanto à internet ela afirma que não, é totalmente aleatório. Quantos aos livros, afirma que existem livros brilhantes, contudo, afirma que:

> **Rita:** Não, não é livro que nem as pessoas falam: “Ah, é o Morgado, vou pegar o Elon, vou pegar o livro do Impa”. Não! livro didático, livro didático, o livro da escola, o livro de escola. Não vou, não vou dar uma de maluco e achar que "Ah não, eu entendo 100% de livros do IMPA". Não entendo. Tenho dificuldade para entender.

Achamos interessante destacar a fala de Rita, pois concordamos que, de fato, existem livros da SBM, vinculados ao IMPA, muito reconhecidos e utilizados por professores(as) que pouco dialogam com a realidade da Educação Básica, elencada em documentos normativos como a BNCC. Contudo, pensamos que é papel da universidade apresentar tais livros para os futuros professores, explorando-os e pensando em possibilidades para sua utilização na escola básica. O livro do professor Morgado *et al* (2016), referente a combinatória e probabilidade, por exemplo, traz diversas questões que dialogam com a escola básica, com os livros didáticos e com os exames de acesso à universidade no fim do Ensino Médio. A professora não teve oportunidade de conhecê-lo durante sua formação inicial, uma vez que não teve disciplina que tratasse da análise combinatória.

O professor Bernardo cita referências bibliográficas, trocas com professores e principalmente sua própria prática docente, aperfeiçoando ao longo dos anos. Quando perguntado se tinha algum livro específico que utilizava, citou o livro do Morgado *et al* (2016), que conheceu quando realizou a disciplina de Matemática Finita enquanto licenciando. Em momentos anteriores, o professor havia apresentado contribuições significativas da disciplina, ao esclarecer sua compreensão sobre combinatória e seus componentes. Contudo, apesar dessas contribuições, ele reiterou em diversas ocasiões que a prática docente foi o fator essencial para o seu aprimoramento na análise combinatória. A seguir, destacamos sua resposta.

> **Bernardo:** muitas referências bibliográficas que eu tinha, como trocas que eu tive com professores, muito da minha própria prática, que eu fui aperfeiçoando, coisas que eu achava que davam certo com a minha própria experiência. Acho que foi mais pela minha própria prática mesmo. [...] Eu conheço poucas referências significativas ao meu... ao meu ver, de combinatória, ou seja, que cumpram um papel de ensinar combinatória a partir do raciocínio combinatório. Morgado faz isso bem, embora eu tenho algumas críticas, mas eu acho que ainda é uma grande referência.

Notamos que, de forma unânime, a troca de experiências com outros professores e professoras de matemática esteve presente na fala de todos os professores entrevistados, evidenciando os saberes produzidos pelos professores colegas, conforme vimos em Sabo (2010). Além disso, percebemos que em todos eles, alguns de forma indireta, tomam a própria prática docente como primordial no que tange o ensino de combinatória, sendo a principal referência deles. Reconhecemos na fala dos professores Rafael e Bernardo traços de suas formações iniciais, quando remetem o livro do professor Morgado *et al* (2016) como uma de suas referências, livro este que conheceram e trabalharam durante as respectivas disciplinas de combinatória enquanto graduandos em licenciatura de matemática. Nenhum deles cita professores(as) que tiveram na Educação Básica como referência para planejar aulas de combinatória, no entanto, a maioria destaca a importância dos livros didáticos e/ou apostilas didáticas nesse contexto.

6.3 Escola

O eixo *Escola* refere-se a todos os conhecimentos construídos e mobilizados na Escola, perante a todos os elementos que a compõem. Analisaremos a perspectiva dos professores entrevistados no que se refere a sua atuação em sala de aula e o ensino de combinatória, destacando principalmente a análise de soluções de estudantes a partir de possíveis cenários reais de sala de aula, pensadas a partir da metodologia MathTASKS (BIZA *et al*, 2021) e a validação de resolução de problemas de combinatória.

6.3.1. A prática docente e o *conhecimento da prática*

Inicialmente, perguntei aos entrevistados se eles já haviam lecionado combinatória em algum ano de escolaridade, seja no Ensino Fundamental ou no Ensino Médio. O professor Gabriel nos trouxe que leciona combinatória ano a ano, tanto no 2º ano do Ensino Médio, quanto no 3º ano do Ensino Médio. Ele também afirma que atua no Ensino Fundamental, mas que é muito raro trazer conceitos da combinatória neste contexto, no máximo comenta sobre o Princípio Fundamental da Contagem (PFC) no 6º ano. Também durante sua fala, ele afirma que no âmbito do ensino público, ele atua em *"uma das piores escolas do Rio de Janeiro, que é classificada como a pior de rendimento"*, compartilhando as dificuldades que eles carregam quando chegam no Ensino Médio, *"mas a combinatória eu sempre faço questão de ensinar, porque uma coisa que eles veem uma utilidade muito fácil, você não precisa se preocupar em contextualizar"*. O professor afirma que o conteúdo prévio é básico e *acessível* a eles, que são as quatro operações básicas e que curiosamente, apesar de achar a combinatória um dos assuntos mais difíceis da Matemática na Educação Básica, ele faz questão de ensiná-la.

O professor Rafael lecionou durante três anos seguidos - 2021, 2022 e 2023 - no 2º ano e no 3º ano do Ensino Médio. Imediatamente após, perguntei se ele abordou a combinatória da mesma maneira em ambos os contextos. Ele respondeu que:

> **Rafael:** Então foi diferente, porque na época do segundo ano estava ainda seguindo aquele padrão de simplesmente trabalhar mais as fórmulas. Não tinha um entendimento bom, na minha opinião, de combinatória, mas se fosse hoje em dia, eu acho que a abordagem seria praticamente a mesma. A diferença é o cronograma. Eu preciso adaptar o meu cronograma para o vestibular.

A professora Rita já lecionou combinatória no 3º ano do Ensino Médio, mas admite que a abordagem era bastante superficial, pois o foco era a revisão dos conteúdos previamente abordados. Atualmente, ela atua exclusivamente na rede pública, com turmas dos anos finais do Ensino Fundamental, e afirma que integra conceitos de combinatória em suas aulas desde o 6º ano, citando dois exemplos que incorpora em suas aulas.

> **Rita:** Por exemplo, no sexto ano. O que eu trago de exemplo para eles é o exemplo da combinação de roupas. [...] Então, eu tenho duas calças para vir a escola de

> cores diferentes e duas camisas... três camisas, três camisas. Então, a gente tem que montar pra mim as possíveis combinações. [...] e tinha a questão também do lanche. Assim você vai ali na tia comprar o lanche e você pode comprar. Lá não é joelho, é italianinho. Você tem opção de comprar italianinho, coxinha, quibe ou compra suco e refrigerante. Só que aí você tem que escolher uma bebida. Tem que escolher um salgado. E aí, quantas possibilidades tem?

O professor Bernardo relata que já lecionou combinatória em diversos contextos, incluindo pré-vestibular, cursos preparatórios, Ensino Médio e Ensino Fundamental. Ele observa que, após a formalização da combinatória pela BNCC, com sua inclusão de forma mais sistemática ao longo do Ensino Fundamental, surgiu um desafio adicional no ensino desse tópico, conforme destacamos.

> **Bernardo:** [...] antes falava de uma combinatória, assim, pelo que eu me lembro do que o que o que eu falava era muito pouco e eu falava muito mais de curioso mesmo. Depois, quando entrou para a BNCC, eu acho que veio daí um desafio maior, porque entrou como conteúdo diluído nos anos do Ensino Fundamental II.

Esse desafio decorre do fato de que a combinatória não está mais restrita ao 2º ano do Ensino Médio. Atualmente, o professor leciona exclusivamente no 8º ano do Ensino Fundamental e afirma que, nesse contexto, aborda a combinatória principalmente por meio de problemas disparadores, permitindo que os alunos sistematizem o conteúdo sem a apresentação prévia de fórmulas e raciocínios prontos.

Pensando ainda no contexto do ensino de combinatória, com base em Pessoa e Borba (2010; 2012), indagamos os professores e professora entrevistada se consideram importante introduzir conceitos básicos, envolvendo o raciocínio combinatório no Ensino Fundamental e o porquê. Dentre todas as respostas, apenas um professor acredita que não seja relevante. Traremos integralmente (ou recortes) a resposta dos professores(a) entrevistados(a).

> **Gabriel**: Cara. eu vejo utilidade, eu vejo a importância disso. Mas se eu pudesse escolher, não falaria. Deixaria lá para o Ensino Médio. Porque...Porque eu acho que a gente soca muito conteúdo e eu acho que falta tempo para você fazer outras atividades, porque acho que a escola foca muito em ensinar conteúdo voltado para o vestibular e isso eu acho que não é ideal para educação. Aliás, acho que a gente tem que fazer mais atividades lúdicas, trabalhar com outras inteligências, inteligência motora, inteligência visual, auditiva, tudo.

> **Rafael:** Eu não fiz isso ainda, então não sei dizer 100% certeza, mas eu acho que seria interessante sim. [...] Eu considero, para pensar agora, interessante porque se você deixar isso para o Ensino Médio no segundo ano, você está ali no momento em que o conteúdo é mais formal, é mais delicado e você introduzir do zero, eu acho que fica muito corrido e para o aluno vai embolar a cabeça dele.

> **Rita:** Considero tanto que eu trago desde o sexto ano. [...] Todos esses exercícios que a gente acha que, ah não só dá pra dar no Ensino Médio, porque no fundamental eles não vão entender. Eles entendem! [...] Chega no Ensino Médio com uma base.
>
> **Bernardo:** Sim, eu acho importante. Eu acho que uma das maneiras de justificar a própria multiplicação é pela combinatória. Não acho que o fundamental seja talvez o lugar de você utilizar jargões combinatórios, porque acho que dificulta a ideia do que é a combinatória. Porque a combinatória no começo é contar, contar conjuntos pequenos e contar conjuntos grandes e formular estratégias para que você possa fazer essas contagens. [...] Pra mim, o meu papel é ensinar eles a pensar a combinatória. Se eles forem eles por eles mesmos, chegam na conclusão que "poxa, eu já entendi como funciona isso. Eu posso buscar um atalho?!" Tudo bem, contanto que você entenda o que você faça, entendeu? Eu só tento muito não apresentar de cara essas fórmulas para eles, porque eu acho que isso vicia.

Notamos que os professores que atuam exclusivamente no Ensino Fundamental acreditam na importância e valorizam o ensino de combinatória neste contexto, partindo, principalmente, do princípio multiplicativo. O professor Gabriel, que tem uma atuação majoritária no Ensino Médio, acredita em outras inteligências e estímulos que poderiam estar naquele contexto, em detrimento de mais conteúdo. Já o professor Rafael, com pouca experiência no Ensino Fundamental, foi pego de surpresa naquele momento, mas, pensando superficialmente, parece estar alinhado com a ideia que pode ser relevante o ensino de combinatória previamente ao Ensino Médio.

6.3.2 Critérios de validação na resolução de problemas (combinatórios)

Decidimos por encerrar a primeira parte da entrevista de todos os participantes com uma pergunta que possibilitasse a transição entre esta primeira parte, que visava uma (auto)reflexão dos docentes sobre os três eixos (universidade, professores e escola), para a segunda parte da entrevista, que se caracteriza como uma etapa que faz parte da prática docente, e que, no contexto da Educação Básica, ocorre exclusivamente na escola, a partir da análise de soluções de estudantes, estabelecendo uma nota a partir de critérios de validação e avaliação dos argumentos apresentados e da forma que foi realizada.

Dessa maneira, perguntamos aos(a) professores(a) quais critérios eles costumam utilizar para validar uma solução de uma avaliação escrita em matemática, sobretudo no que se refere à análise combinatória. Notamos uma convergência nas(a) respostas(a) dos(a) professores(a) entrevistados(a) quanto a busca da valorização do raciocínio nas resoluções, não importando apenas a resposta final do problema/exercício proposto.

O professor Gabriel afirma que se tratando de uma avaliação escrita é complexo pois ele não tem a oportunidade de perguntar ao estudante como ele pensou na solução. A prova escrita *"É uma maneira de qualquer pessoa, qualquer corretor, leia e entenda"*., de acordo com o participante. Ele acredita que se a avaliação é escrita, ela deve ser literalmente escrita e, portanto, não caberia chamar o estudante para explicar oralmente o que pôs no papel. Gabriel comenta que em situações de sala de aula, costuma fazer esse diálogo com os estudantes constantemente por não entender a solução proposta, e quando acha necessário, traz um erro promovido por algum estudante para classe, a fim de explorar suas potencialidades.

> **Gabriel:** Às vezes, na combinatória, a criança acha a resposta certa, mas por um caminho errado, o caminho que não condiz com a solução do problema. E aí... E normalmente, nesse tipo de situação, eu dou errado. Se fosse uma prova, por exemplo, daria errado, porque não importa o resultado em si, a solução. O que importa é o desenvolvimento. Então, se na correção da prova em sala ele vai debater sobre isso, aí não, beleza, mas você fez assim, assim, está errado. E aí, se ele argumentar e eu ver que: "não, de repente eu não entendi o que ele fez". Na hora: "não, você tem razão" e dou certo para ele. E eu acho que é legal se manter aberto, não só na combinatória, na verdade em qualquer coisa, mas a combinatória tem que ter um cuidado maior.

O professor Rafael afirma que quando há erros de conta por falta de atenção, há uma penalização muito pequena e que, em contrapartida, quando o erro é conceitual, é algo mais grave, uma vez que a maior preocupação dele é avaliar qual foi a estratégia utilizada.

> **Rafael:** Então a estratégia dele foi coerente? Foi dentro do conteúdo? Foi parecido que eu já dei em sala de aula? Bom, foi diferente e tem uma ideia fora da caixinha que funciona? Perfeito. Tem uma ideia fora da caixinha que funciona parcialmente, mas teve um detalhe que não funcionou? Eu acho interessante também e acho que vale a pena você colocar na prova dele ou então falar com ele depois: "Eu gostei dessa ideia, mas aqui que você ficou equivocado"; Eu considero a correção tanto em prova, tanto quanto sala de aula, ou quando o aluno dá ali o palpite dele na correção durante a aula mesmo, tentar valorizar o raciocínio dele, o que ele pensou de correto, ou então, mesmo falado quase tudo errado no pior dos casos. Mas teve alguma coisa ali que foi interessante, ou então o erro dele, supostamente o erro dele é um erro que vai despertar muita discussão que a gente vai abordar um assunto...eu acho válido, mas eu acho que é importante. Agora corrigindo prova mesmo, avaliar, acaba tentando enxergar até onde ele foi.

A professora Rita busca valorizar o raciocínio do estudante, avaliar se está na direção certa, afirmando que retira pouquíssimos pontos no que se refere a erros simples de conta e/ou erros "de atenção", com o objetivo de destacar o erro cometido para evitar ocorrências similares. Ela cita como exemplo, uma das questões que ela realizou para ingresso no PEMAT (figura 14), sobre combinatória, que existem duas formas possíveis de pensar em estratégias para resolução, tendo em vista que depende da concepção (ideológica) de cada pessoa sobre o que é um casal. Ela daria certo para as duas soluções propostas, afirmando que há duas possibilidades de se pensar na resolução do problema e que estão corretas, a partir desse ponto de vista.

Figura 14: Questão do exame de seleção para o Mestrado em Ensino de Matemática - UFRJ – 2019

Uma professora de matemática propôs aos aprendizes em uma turma de ensino médio de uma escola pública o seguinte problema de contagem:

Em uma festa há 13 mulheres e 13 homens. Para uma dança entre pares de pessoas, quantos casais diferentes podem ser formados?

Em seguida, a professora pediu aos aprendizes que apresentem à turma pelo menos duas soluções diferentes para o problema. Dois aprendizes, Flávio e Tainá, se ofereceram para ir ao quadro e propuseram as seguintes resoluções:

Flávio:

Cada um dos 13 homens pode dançar com cada uma das 13 mulheres. Então, cada homem pode fazer parte de 13 casais diferentes. Como há 13 homens, o total de casais possíveis é de 13 x 13 = 169.

Tainá:

Há 26 pessoas na festa. Cada uma delas pode dançar com cada uma das outras 25. Para determinar o total de casais possíveis, devemos multiplicar 26 por 25 e depois dividir por 2, para descartar os casais repetidos. Então, o total de casais diferentes possíveis é de $\frac{26.25}{2} = 325$.

Responda às perguntas a seguir como se você estivesse no lugar da professora da turma.

a) Como você avaliaria as soluções propostas por Flávio e por Tainá?
b) Como você conduziria a discussão sobre essas soluções coletivamente com a turma?
c) Discuta a importância da discussão em sala de aula para a educação de aprendizes, estabelecendo uma interlocução com a frase de Paulo Freire: “Não existe educação neutra. Toda neutralidade afirmada é uma opção escondida.”

Fonte: Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática – UFRJ
(http://www.pg.im.ufrj.br/pemat/mest_publico.htm)

Acreditamos que qualquer atitude adotada na situação descrita se configura como um ato político e ideológico. Tal questão propicia uma reflexão sobre o viés ideológico com o qual nos alinhamos e oferece a oportunidade para debates em sala de aula acerca de questões de gênero e inclusão. O aluno Flávio concebe o termo "casal" exclusivamente para casais heteronormativos, enquanto Tainá adota uma definição mais inclusiva, que abrange casais homoafetivos. Em termos de contagem, ambas as soluções são corretas, dado o contexto conceitual adotado, isto é, a concepção de “casal”. No entanto, a questão que se impõe é: quais concepções desejamos promover e valorizar? Qual cidadão que queremos formar? Entendemos que avaliar as respostas de Flávio e Tainá em certo ou errado não é o foco do problema, uma vez que do aspecto da contagem, ambas estão corretas. Esta questão promove possibilidades de o professor ou professora regente trazer discussões importantes sobre as relações sociais que são construídas no ambiente escolar e a maneira como olhamos para elas, alinhando-se com uma perspectiva de matemática problematizada.

O professor Bernardo acredita em dois pilares para avaliar, que se complementam.

> **Bernardo:** Então, para avaliar uma questão, primeiro eu penso quais...O que? Qual o meu objetivo com ela? O que eu estou avaliando com ela? E aí eu defino meus critérios. A partir disso, eu avalio se esses critérios foram preenchidos de maneira mais óbvia, que às vezes dá para ser e de maneira não tão óbvia quando eu penso no raciocínio dele. Então, pra mim são duas vertentes. Tenho a formalização como a parte mais dura da matemática, como contas, como conceitos, fórmulas, às vezes. E a outra parte, a parte de raciocínio. Então eu avalio essas duas partes que eu acho que se complementam.

Ficamos felizes com as respostas dos professores(a), uma vez que há uma grande preocupação nossa com o desenvolvimento do raciocínio combinatório pelos estudantes da escola básica, que, muitas vezes, não são impulsionados devido a abordagens não problematizadas no ensino de combinatória e a concepções e crenças que buscam valorizar o resultado correto, independentemente do raciocínio intrínseco aos problemas. Ademais, Gabriel e Rafael valorizam o erro no processo de ensino-aprendizagem de combinatória, que, como já apontamos, acreditamos que pode ser um dos caminhos para metodologia de ensino de combinatória, de forma problematizada.

6.3.3 Análise de soluções de problemas de combinatória baseada na metodologia MathTASKS

Esta categoria caracteriza-se pela parte prática da entrevista semiestruturada, em que os professores e professora analisaram soluções de problemas de combinatória, baseados na metodologia MathTASKS (BIZA et al, 2021). Acreditamos que esta categoria pertence ao eixo *Escola* uma vez que os saberes produzidos durante a avaliação ocorrem no ambiente escolar e que analisar e avaliar soluções constitui um dos papeis fundamentais do professor da Educação Básica.

Inicialmente, tínhamos como objetivo secundário entender qual é o conhecimento dos professores acerca do conteúdo da análise combinatória. Contudo, após a qualificação e durante a elaboração do roteiro das entrevistas, pudemos refletir e entender que não temos como objetivo avaliar o conhecimento de combinatória dos sujeitos de pesquisa, ainda que as entrevistas possibilitassem inferirmos sobre alguns aspectos do conhecimento. Ademais, se fosse nosso objetivo, talvez deveríamos mudar a questão de pesquisa proposta. Dessa maneira, diferentemente de Martarelli e Dias (2020), artigo que inspirou a utilização desta abordagem, não oportunizamos um tempo para os entrevistados resolverem os problemas selecionados, previamente à apresentação das soluções propostas. Logo, os entrevistados receberam as questões, incluindo as soluções que criamos, analisando uma a uma, em ordem, e separadamente.

Para todas as quatro questões, solicitamos aos professores, após a análise das soluções, qual notas eles dariam para resolução dos estudantes. Mesmo que o eixo temático principal desta pesquisa não seja avaliação *per se*, acreditamos que com a nota conseguimos organizar os dados para uma visualização geral das avaliações dos sujeitos de pesquisa. E que, além disso, aferir uma nota (ou conceito) faz parte do dia a dia do professor de matemática, independentemente do tipo de avaliação implementada na escola (somativa, formativa, etc.), nos interessando, sobretudo, a possível devolutiva que este professor daria ao estudante para justificar o conceito que ele definiu para sua resolução.

Nesse sentido, criamos um quadro com as notas finais[24] dadas pelos professores e professora participantes para uma visualização prévia das justificativas e diálogos construídos nas entrevistas, em que $P_m S_n$ representa o problema m e a solução n (1$\leq m, n \leq 4$), separadas em cores para melhor visualização.

Quadro 10: Notas finais dos professores(a) para as soluções propostas

Professores(a)	P1 S1	P1 S2	P2 S1	P2 S2	P2 S3	P3 S1	P3 S2	P3 S3	P4 S1	P4 S2	P4 S3	P4 S4
Gabriel	7	10	7/8	7/8	10	8	5/10	8	3/5	8	?	10
Rafael	8	10	10	10	10	7	10	3	2	4	10	8
Rita	10	10	9	10	10	9	0	10	7	7	10	7
Bernardo	7	7	8	8	10	6	10	6	6	6	10	4

Fonte: Dados da pesquisa.

A seguir, veremos as análises dos problemas de forma qualitativa, buscando entender as justificativas para as notas dadas, os diálogos produzidos durante as análises e qual(is) solução(ões) estão corretas, na percepção dos(a) entrevistados(a). Optamos por seguir em ordem com as entrevistas realizadas, com a análise dos professores(a) Gabriel, Rafael, Rita e Bernardo.

Análise do problema 1

Inicialmente, o professor Gabriel teve dificuldade em compreender o enunciado. Durante a análise, buscou dialogar com sua própria prática docente, comentando que quando ensina combinatória sempre orienta com três dicas: verificar se a ordem importa ou não importa, fazer exemplos e tentar utilizar anagramas. Contudo, por meio delas, concluiu: *"Então, considerando que a ordem importa, a primeira solução para mim, é correta. E a segunda aí pega aquela história do erro. Na segunda, ele considerou o... Ah, não. Calma aí, dá uma pausa de novo, porque agora que eu vi uma paradinha aqui"*. Durante a sua análise, percebeu que poderia estar errado. Por meio de uma calculadora, verificou se as duas contas geram o mesmo número e percebeu que não. Novamente, busca sua prática, afirmando que

[24] Alguns professores alteraram suas notas ao longo da análise das resoluções. Isto é, inicialmente pensavam que uma das soluções estava correta e pouco tempo depois mudaram de ideia.

a primeira utiliza o método *“construtivo”* e a segunda o método *“destrutivo”,* e que também costuma ensinar ambos para seus estudantes. Consegue perceber, então, que a primeira solução exclui um caso, começando com ímpar, afirmando então que a segunda solução está correta uma vez que a ordem importa, isto é, *“tirar o dois e o três e três e o dois na minha visão é diferente”*. Por este motivo, aferiu nota 7 para a primeira solução.

> **Gabriel:** E aí que o que que eu acho legal numa sala de aula é fazer as duas, mostrar as duas soluções no quadro e depois fazer essa diferença das duas. Na primeira solução, e se fosse um ímpar na primeira parte e um par na segunda? Aí vai dar um resultado, soma com o que você fez, aí bate certinho com a segunda solução. Isso eu acho maneiro, porque aí mostra que o aluno que é assim, cara, eu posso fazer qualquer caminho. Tem alguns caminhos “construtivo” ou “destrutivo”, alguns vão ser mais fáceis ou mais difíceis, mas dá para fazer de todas as maneiras.

O professor Rafael seguiu como estratégia para todas as soluções, a leitura em voz alta, bem como suas concepções iniciais. Nesse caminho, inicialmente, acreditou que ambas as soluções são coerentes.

> **Rafael:** Ué! É estranho que inicialmente os dois, pra mim pareciam coerentes, mas quando eu tentei abrir a conta ou se eu errei, eu posso ter errado conta também, né? Os valores são diferentes. Uma boa pergunta, agora não sei se tem alguma solução certa, se as duas tão erradas ou eu tô errado! [risos]. Isso é curioso na combinatória, porque, por exemplo, eu tenho os meus, assim, os pontos que eu não tenho facilidade, tenho dificuldade mesmo. Então aqui tô tendo dificuldade de avaliar a resposta do cara se está errado ou não. Isso porque, pelo raciocínio das duas eu daria como as duas corretas. Então, assim, de uma nota de 0 a 10, por enquanto, estou dando 10 para as duas.

Após quase ter desistido de avaliar qual delas está correta, uma vez que o número encontrado por cada uma delas é diferente, tentou buscar caminhos. O primeiro foi verificar se tinham 101 bolinhas, por meio da numeração, o que alteraria a quantidade de bolas pares e ímpares, verificando que eram 100, realmente. Em seguida, buscou compreender se a ordem importa ou não. Verificando que *“a primeira solução está induzindo você tirar primeiro uma par e depois uma ímpar, quer dizer, tirar uma par e depois outra qualquer e não se pode tirar uma ímpar primeiro.”*., concluindo que isto explicaria a inconsistência numérica entre as soluções. Refaz as contas e analisa que coincide, concluindo que a primeira solução está faltando um caso enquanto a solução dois está correta.

Conforme observado no *eixo* "Professores", o docente Rafael levanta uma indagação pertinente acerca da resolução do problema, ressaltando que a interpretação do mesmo pode influenciar significativamente a solução proposta. Em particular, ele questiona se a ordem de retirada dos elementos resulta em novos exemplares, argumentando que o enunciado não fornece clareza suficiente nesse aspecto. Pelas soluções, alinha-se à ideia de que a ordem é relevante, neste caso, alterando a nota da primeira solução para 8, tendo em vista que faltou um caso.

Após sua conclusão, afirma que estas soluções nos mostram que temos que ter cuidado ao analisar soluções de combinatória, uma vez que, como a redação das duas é bem-feita, se não é realizada uma análise numérica, é possível achar que a resposta da primeira solução é correta. Perguntei a ele se esse tipo de redação é comum, e ele respondeu:

> **Rafael:** Não é incomum. Não vou dizer que é incomum, mas talvez no universo de cem alunos, talvez uns sete ou uns dez vão ter uma redação com esse, com esse modelo. Muitos vão só fazer os números soltos, no máximo a indicação do que que é um número e o outro e dá um resultado. E muitos vão fazer um carnaval ali de contas aleatórias. Você no meio vai tentar identificar o que cara fez ali...e você identifica algum raciocínio.

Inicialmente, a professora Rita afirma não saber resolver o problema, mas segue para fazer a análise. Ela fica em dúvida sobre a reposição das bolinhas na urna, uma vez que o enunciado não afirma se há ou não. Após a leitura de ambas, afirma: *"Eu acho que a solução dois me parece mais certa do que a solução um, mas eu não sei dizer qual é certo".* Ela faz as contas para avaliar se a resposta numérica é a mesma, pois ambas parecem corretas. Ainda que encontre resultados diferentes, conclui que: *"Mas partindo do pressuposto que eu não sei o resultado, eu daria certo para as duas questões. Eu não sei. Eu sou nem capaz de resolver isso".* Atribuindo, assim, nota 10 para ambas as soluções.

Perguntei à Rita se ela costumava ver esse tipo de resolução e a opinião dela sobre esse formato.

> **Rita:** Escrita, né? Explicando a solução. Assim, na Educação Básica, os alunos têm a maior criatividade possível, né? Não é... não é raridade eles apresentarem alguma solução explicando até mesmo porque eu sou o tipo de pessoa que fala: não sabe a questão, tenta explicar o que você sabe. De repente eu consigo te dar um meio ponto, um décimo, dois décimos só pelo que, o que você sabe. E aí eles explicam. Então eles costumam explicar sim.

O professor Bernardo avalia inicialmente se a ordem importa ou não, isto é, se ela gera novos exemplares.

> **Bernardo**: Estou vendo se a ordem que a retirada de bolas vai fazer...não faz diferença com a multiplicação. Como é uma retirada sucessiva, então é em pares. Geralmente quando eu pego um problema como esse, eu tento reduzir ele para um problema menor. Então ao invés de fazer de 1 a 100, você pode fazer de 1 a 10 que a ideia permanece a mesma. *Entonces*, na verdade, a gente está focando aqui nas duplas. Então é a multiplicação, ah então não faz diferença a ordem.

Ele concluiu que, como o problema se refere ao resultado da multiplicação, é indiferente retirar a bola 2 na primeira retirada e 4 na segunda retirada ou vice-versa, uma vez que o produto é o mesmo. Nesse sentido, ele entende que ambos os raciocínios, da solução um e dois são interessantes e que entendem o princípio multiplicativo, porém elas não consideram que a ordem não importa, que seria uma restrição. Dessa maneira, atribui a nota sete para ambas.

A pesquisa de Rocha (2011) revela que, apesar das diferentes formações dos professores(as) participantes de sua pesquisa, estes apresentaram dificuldades na leitura de enunciados e na correção de estratégia de aluno, denotando desconhecimento de situações nas quais o invariante do conceito de *ordenação* implica ou não, em possibilidades distintas. Analogamente, nos chama atenção o fato dos quatro professores terem dificuldades para entender se a ordem das retiradas gera novos exemplares ou não, além da professora ficar em dúvida se há reposição ou não das bolinhas, o que geraria mais possibilidades. O professor Bernardo concluiu que retirar duas bolinhas sucessivamente implica retirar em pares, uma vez que o problema se refere à multiplicação dos respectivos números das bolinhas. Se os professores(as) têm dificuldades no reconhecimento das configurações e na compreensão dos enunciados, como os estudantes lidam com problemas de combinatória?

Os professores Gabriel e Rafael entenderam que a ordem de retirada das bolinhas é relevante, por meio das soluções, alterando ao longo da análise suas notas para ambas as soluções. A professora Rita assume não saber resolver a questão e, por isso, atribui nota máxima para ambas. Finalmente, o professor Bernardo confunde o fato de as bolinhas serem retiradas de forma sucessiva com o interesse do problema, que é a multiplicação dos números das bolinhas serem números pares, atribuindo sete para ambos, pois estariam erradas pelo mesmo motivo.

Diferentemente do enunciado, todos os professores conseguiram entender as estratégias propostas nas soluções. O professor Rafael e a professora Rita respondem de forma muito diferente quanto ao formato da solução apresentada, por meio de uma redação organizando o raciocínio combinatório. O professor quase não vê esse tipo de resolução, enquanto a professora já tem mais costume. Acreditamos que este fato pode estar alinhado com a maneira com o qual a resolução de problemas, sobretudo de combinatória, é apresentada aos estudantes. Os perfis destes dois professores são totalmente distintos, ele com raízes mais voltadas para o vestibular e o Ensino Médio, o que necessita soluções mais rápidas e mais sistemáticas, enquanto a professora, atuante do Ensino Fundamental, alinha-se com uma concepção mais ampla, acreditando que todo tipo de solução é válida, reconhecendo e estimulando a criatividade, nesse sentido.

Análise do problema 2

Em um primeiro momento, o professor Gabriel não compreendeu a notação utilizada na primeira solução, bem como a estratégia utilizada. Mas, em pouco tempo, compreendeu que é uma variação da notação comum de “tracinhos”. Ele confessa que, no contexto de uma avaliação, demora para corrigi-las e que:

> **Gabriel:** É, eu se fosse uma prova, a primeira coisa ia ver se bateu com a resposta. Se bater, eu falei “pô, pera aí, de repente ele fez um esquema que eu não conheço ou eu não entendi”. ” Aí eu ia me dedicar a entender isso aqui. Se se não batesse com a resposta, eu não daria zero de cara. Eu ia tentar entender, mas com menos afinco, porque quando bate na resposta certa, pô, pode ser que seja coincidência, ou pode ser que eu não tenha entendido mesmo.

Afirma que demora para corrigir pois dedica um tempo para tentar entender a solução do estudante. Depois de um tempo pensando, conclui que a primeira e segunda solução estão erradas, uma vez que elas são idênticas.

> **Gabriel:** A única diferença que a segunda solução explicou, é... o que é lindo pra gente que está analisando, mas eu acho raríssimas. Raríssimos os alunos que fazem questões assim, pelo menos no nicho que eu trabalho, raríssimo alguém explicar o que fez. Só põe a conta. Tipo a solução um, a maioria faz como a solução um, só faz uma conta e beleza.

Interrompo a fala dele e indago.

> **Pesquisador:** Mas desculpa me meter, me intrometer no teu raciocínio, mas você inicialmente falou que não entendeu a solução um.

Ele responde que:

> **Gabriel**: É que na verdade eu iria pensar mais nela, falei vou pular, vou ler as outras, depois eu volto nela. Como eu vi que a segunda é praticamente idêntica a um, só explicou mais... Aí beleza agora eu entendi a um, mas se não tivesse a solução dois, eu ia ter que parar, pensar, analisar e aí, se eu ia conseguir entender ou não, eu não sei, mas eu me esforçaria para entender com certeza.

O professor compreende que a solução dois explica o raciocínio (combinatório) da primeira e segue sua fala retomando vivências de sua formação continuada, no mestrado.

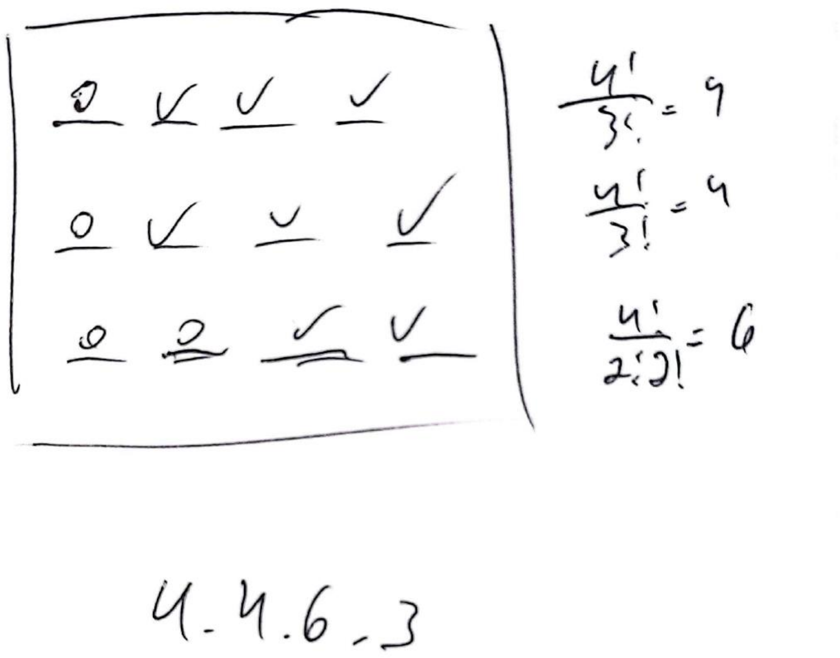
> **Gabriel:** [...] no mestrado, quando eu tive aula de combinatória no mestrado, diferente da graduação, eu tive aula de combinatória mesmo. E ali o professor, ele, ele resolvia as questões escrevendo, tipo a solução, dois e três, fazendo isso, isso e aquilo. Aí ele ia fazer o cálculo e escrevia. Agora isso, isso e aquilo e fazia o cálculo. E eu achei assim, muito legal. Por questões de organização e de entendimento do aluno por ele rever depois que o moleque às vezes entendeu na hora mais ou menos, chega em casa, vai estudar…tem um monte de números aqui, o que foi feito mesmo? Então eu acho muito legal esse tipo de solução, mas admito que eu não faço. Eu explico tudo, mas eu só coloco os números e faço a conta. [...] parecido com a primeira.

Em seguida, quando perguntei se as explicações eram apenas orais, e ele respondeu que sim, ele fica intrigado e comenta:

> **Gabriel:** Agora você botou uma pulga atrás da minha orelha que eu pensei aqui agora. Por que que eu não escrevo? Ao meu ver, pelo tempo, o colégio é sempre corrido, tem que dar matéria, tem época de prova e tal e análise combinatória, acho importante fazer muitas questões, eu estou focado em quantidade nesse ponto aí. Mas agora eu vou tentar isso, ano que vem eu vou tentar essa parada. De repente fazer menos escrevendo, pode ser que renda melhor [...]

O professor traçou sua própria solução no papel (figura 15), a partir das três dicas que ensina a seus alunos, realizou um anagrama para cada andar em que V representa vazio e O representa ocupado. Dessa maneira, acrescentou outra dica *(“macetinho”*, como disse*)* que costuma ensinar que se refere aos conectivos *e* e *ou*, quando se fala *e,* é uma multiplicação e quando se fala *ou*, é uma soma. Portanto, ele realizou um exemplo em que tinham dois apartamentos ocupados no primeiro andar, um apartamento ocupado no segundo andar e um ocupado no terceiro andar. Utilizou a fórmula de permutação com repetição para cada andar, por meio dos V’s e O’s, e multiplicou os resultados, pois devem ter dois apartamentos no primeiro andar *e* um apartamento no segundo andar *e* um apartamento no terceiro andar. Como não necessariamente precisa ser o primeiro andar com dois ocupados, ele considerou três casos, uma vez que pode ser o primeiro andar com dois apartamentos ocupados *ou* o segundo andar *ou* o terceiro andar. Para cada caso, o resultado é o mesmo, e então multiplicou o resultado encontrado no exemplo por três. Comparando com a terceira solução, ele percebe que o resultado é o mesmo e, então, conclui que a terceira está correta, feito por outro caminho.

Figura 15: Solução do professor Gabriel (Problema 2)



Fonte: Dados da pesquisa.

Apesar de não ser estritamente necessário o uso de anagramas, ele optaria por explicá-los dessa forma com o intuito de moldar o estudante a adotar essa abordagem, pois com exemplos, bastaria mudar os apartamentos de posição, *"pelo menos para mim, me dá a sensação de que ele está muito consciente do que está acontecendo"*. Conclui que: *"Eu tenho um apartamento ocupado nesse andar. É só trocar de posição, trocar de posição é trocar letra de lugar: anagrama"*.

Ele observa por meio da fatoração, que a primeira e a segunda são numericamente o dobro da terceira. Em busca de entender o porquê, afirma que, uma vez que já tem um apartamento ocupado naquele andar, ele não teria quatro opções de escolha inicialmente, como se ele estivesse colocando um apartamento em cima do outro, o que explicaria a maior quantidade de casos. O professor acredita que esta questão é mais difícil que a primeira, e que atribuiria 7 ou 8 para a primeira e segunda solução, enquanto 10 para a terceira.

O professor Rafael segue a mesma estratégia, primeiramente faz uma análise após a leitura, antes mesmo de pensar nas soluções.

> **Rafael:** [...] a solução um é bem comum, em que você coloca somente os números, indica com tracinho. Uma forma que a gente também acaba usando muito para

> resolver as questões em sala de aula, então algo bem comum. A solução dois é a primeira questão, a princípio, a primeira solução, só que com redação escrita. Talvez fosse as duas soluções fossem parte de uma só. Eu penso em, por exemplo, eu falar a solução dois oralmente, enquanto no quadro ou no papel eu coloco a solução um, uma coisa precisa da outra. A três é a mais diferente de todas, em que ele primeiro vai atacar qual é o lugar que tem dois apartamentos, qual é o andar que é a sua restrição, então essa condição diferenciada da modelagem. Só que depois ele falou do andar mais alto e vai para o mais baixo. Eu acho que nesse caminho, na cabeça do aluno, ficou uma estratégia pouco confusa, né? Não necessariamente, eu estou avaliando se no final está certo ou errado, mas acho que é uma solução mais confusa para interpretar. E uma solução confusa talvez ilustra um raciocínio confuso do aluno.

Ao analisar as soluções um e dois, acredita que estas são coerentes, uma vez que depois de escolher três apartamentos por andar, faltariam nove do total para escolher. Quanto a terceira solução, pensa que:

> **Rafael**: eu escolhi o terceiro andar para ser ocupado com dois. Então aqui neste andar eu vou ter dentre quatro, eu vou escolher dois. Vai ser uma combinação de quatro 2 a 2, né? Não importa. Estou pensando aqui que não importa a ordem da minha escolha, não estou preocupado se eu vou colocar o Victor no 101 e o *Rafael* no 102 ou o contrário. Estou pensando quais que vão ter inquilinos e depois que eu faço isso. Mas é o seguinte: falta ainda três pessoas, né? Faltam três pessoas... não, faltam duas.

Neste sentido, ele busca fazer sua própria conta, utilizando fórmula para combinação, uma vez que parece não reconhecer a maneira que a solução três propôs o cálculo. Ele percebe que o resultado da conta dele não bate com a solução três, indicando que a solução três propôs um arranjo e não uma combinação, fazendo diferença se o inquilino ocuparia o 101 ou o 102.

> **Rafael:** Ou seja, tem uma diferenciação aqui. Se ele escolhe primeiro o apartamento um, depois o dois e depois o um, né? Enquanto as primeiras e segundas soluções não tem essa preocupação. A princípio, pelo eu estou vendo que vai justificar o resultado final tá diferente, né? Aí volto a pergunta: eu considero a ordem ou não nesse caso? Porque aqui é muda um pouquinho o entendimento do problema, porque é o seguinte: de quantas formas diferentes eu posso ocupar quatro apartamentos?

Novamente, há um questionamento acerca do enunciado, afirmando que poderia ter duas interpretações diferentes para ela:

> **Rafael:** Vamos pensar...sou proprietário de um prédio. Eu tô interessado em quais que estão ocupados me dando renda ou se eu estou interessado em, por exemplo, distribuir pessoas em um alojamento. Vamos supor que agora eu sou.... Eu estou gerenciando o dormitório de estudantes. Eu tô preocupado aonde vou colocar cada um, porque eventualmente um não quer ficar no último andar. Ou dois no mesmo andar dar um problema, brigam muito, né? Então eu diria que tem duas situações diferentes.

Concluindo que as três soluções estão corretas, em que as duas primeiras não consideram onde cada pessoa vai ficar e a terceira tem a preocupação de saber onde cada pessoa vai ficar alocada. Ainda que as duas estejam com respostas numéricas diferentes, para ele, a depender da interpretação do problema de cada um, ambas estão corretas.

A professora Rita afirma não entender a primeira solução. Quando lê a segunda solução, diz que já consegue compreender melhor. Segundo ela, com a segunda solução, a primeira faz sentido, afirmando que “[...] daria um dez na primeira porque eu não ligaria de receber uma solução assim se eu entendesse qual é o contexto do problema”. ” Eu indago, em seguida:

> **Pesquisador:** Se você entende você, beleza?! O problema é se você não entender, né?
>
> **Rita**: Exatamente.

Quanto à solução três ela não entende a solução, mas percebe que o valor numérico é metade das duas primeiras, concluindo que elas seguem a mesma lógica, contudo a terceira retira o que está sendo contado de forma duplicada, por algum motivo. Finalmente, ela atribuiu nota 9 para a primeira e 10 para as duas últimas.

O professor Bernardo julga as três soluções como interessantes, admitindo que inicialmente desenharia uma solução análoga à primeira. Todavia, percebeu que a terceira solução conta a metade em relação às duas primeiras, investigando o porquê ele estaria contando duplicado, que é um dos erros da combinatória, segundo ele, contar a mais, como nesse caso, ou contar a menos.

> **Bernardo:** E aí eu pensei cara, eu acho que eu não considerei a priori a solução de eu escolher, no apartamento... no andar onde eu tenho dois apartamentos, eles trocarem de...se... Primeiro fizer uma escolha e depois fazer a outra, é…. ser a mesma coisa. Então, isso a solução três retira dessa possibilidade. Então, na minha visão, a solução mais correta seria a solução três.

Embora a primeira solução seja mais sucinta que a segunda, o professor acredita que ambas possuem o mesmo raciocínio combinatório e, portanto, atribui nota 8 para ambas. Enquanto a terceira solução recebe nota máxima. Quando perguntado se costumava encontrar os dois tipos de solução quando atuava no Ensino Médio, afirmou que sim.

Destacamos então alguns pontos importantes sobre as falas dos(a) professores(a), em relação às análises da segunda solução. O professor Gabriel, ao se deparar com uma solução que não compreendia, afirma que, em uma prova, verificaria se o cálculo está correto para avaliar quanto tempo investiria buscando compreender a solução proposta. Em combinatória, por vezes, é difícil entender o porquê que uma solução está correta ou errada, sobretudo quando o raciocínio combinatório intrínseco à solução não é explicitado, e, assim, acreditamos que essa estratégia pode ser interessante. Em seguida, ele afirma que a segunda solução é raríssima, em que os estudantes privilegiam soluções como a primeira, resoluções apenas numéricas. Assim como Rafael, o professor Gabriel tem um perfil que busca preparar estudantes para o vestibular, com dicas e "macetes" que indicam caminhos para resolução de problemas, o que nos faz pensar o porquê de as soluções propostas pelos seus estudantes se alinharem com a primeira proposta. Conforme comenta, ele busca privilegiar o excesso de questões durante o tempo que tem. Curiosamente, durante sua análise, reflete sobre sua própria prática docente e seu mestrado, o que permite uma (auto)reflexão sobre a maneira que ele ensina combinatória no contexto escolar, pensando na possibilidade de resolver problemas estimulando uma redação para justificar as escolhas. Biza *et al* (2021) indicam que o uso das MathTasks oportuniza aos professores entrevistados a revisitarem e ajustarem as respostas iniciais à tarefa após o fim da discussão e que "Diferentes respostas antes e depois da discussão podem indicar possíveis mudanças no discurso dos professores quanto à matemática e à pedagogia" (*ibidem*, 2021, p.11), conforme observamos na (auto)reflexão de Gabriel.

Notamos que ele não compreende bem a terceira solução proposta, mas como o resultado numérico é equivalente ao encontrado em sua solução, acredita que é assertiva. Confessamos que não compreendemos quando ele tenta explicar o porquê que as duas primeiras soluções apresentam o dobro de resultados do que a terceira, uma vez que não faria sentido a não possibilidade de escolha de quatro apartamentos inicialmente.

O professor Rafael novamente apresenta dificuldades na compreensão do enunciado, admitindo a possibilidade de mais de uma interpretação para o problema. Contudo, ele confunde a notação utilizada, acreditando que a terceira solução utiliza arranjos e não combinações – um dos erros mais comuns, referente a notação, destacado por *Batanero et al* (1996). Por meio de uma analogia com proprietários e inquilinos, busca uma justificativa para que todas as soluções estejam corretas. Contudo, acreditamos que o professor comete um equívoco quando acredita que as duas primeiras soluções não consideram a ordem da seleção dos apartamentos do mesmo andar, enquanto a terceira solução leva. Pelo contrário, as soluções apresentam o raciocínio oposto ao apresentado por ele. Ele destaca que as soluções um e dois se complementam, a primeira é a que escreve, enquanto a segunda é a que oraliza, afirmando que a primeira solução é muito comum, que é utilizada em sala de aula, por meio de "tracinhos".

A professora Rita não compreende a primeira solução inicialmente, mas a leitura da segunda possibilita que ela entenda. Ela destaca que quando ela entende o contexto, não há obstáculos para compreensão da solução totalmente numérica proposta e que a dificuldade se encontra quando ela não compreende.

O professor Bernardo entendeu corretamente o porquê da terceira solução estar correta. Quando perguntado sobre com que frequência via os dois formatos de solução privilegiados na primeira e segunda solução, ele afirma que identificava as duas. Acreditamos que este fato pode estar alinhado com o entendimento do professor de combinatória e o fato dele buscar privilegiar em suas aulas o raciocínio combinatório durante a elaboração de uma solução de um problema de contagem.

Análise do problema 3

O professor Gabriel percebeu rapidamente que as soluções 1 e 3 não estão corretas, justificando que elas estão incompletas uma vez que ela considera a quantidade de bolas em cada caixa e, não, a cor de cada bola. Afirma que atribuiria no mínimo 80% da pontuação para questão, pois *"ele entendeu muito de combinatória, na minha visão"*. Compara a primeira e a terceira solução, e embora tenham encontrado o mesmo resultado, sobretudo pensando numa preparação para o vestibular:

> **Gabriel:** Mas então não é legal a terceira solução, porque está fazendo caso a caso. É demorado e assim considerando a quantidade de caixas e bolas aqui, se fosse uma quantidade de um número maior, daria mais casos, daria muito mais casos. Então não é legal isso pensando na preparação para o vestibular, mas fez na prova, ok, eu daria 80% da questão aí. A primeira solução o moleque mostrou que entende muito bem aqui.

Na tentativa de resolver a questão, o professor buscou novamente os anagramas, utilizando a letra *b* para representar as bolas e a letra *t* para "tracinho", que representaria a separação das bolas nas caixas e fez um exemplo (*btbtbb)* que possuía uma bola na caixa um, uma bola na caixa dois e duas bolas na terceira caixa. Utilizou a fórmula para permutações com repetição e encontrou o mesmo valor do que a primeira e terceira, que estão incompletas. Em seguida, buscou permutar as quatro bolinhas entre si, mas percebeu que: *"[...] gerou um outro problema, porque se uma caixa tem mais de uma bola, quando eu considero um quatro fatorial, eu estou considerando a ordem, então eu teria que descontar a troca nas caixas que têm mais de uma bola"*. Dessa maneira, contou mais do que deveria.

Indica um caminho ("destrutivo") tentando retirar o que contou a mais, mas não consegue resolver o problema, ainda que seja um número maior que 15 e menor que 15.4!. Não consegue afirmar que a segunda solução está correta, que precisaria de mais tempo para pensar, e, portanto, não consegue atribuir uma nota, afirmando que mesmo errada, avaliaria em no mínimo 50%, que não daria zero, pois entendeu o raciocínio, isto é, para cada bola há três opções de caixas.

O professor Rafael, após a leitura, imediatamente analisou a terceira solução afirmando que estão considerando bolas distintas, o que não está correto. Como, numericamente, ela é idêntica à primeira, que utiliza combinações completas, ele afirma que ela também está errada. Quando compara as duas, imaginando um cenário que as duas bolas são idênticas, ele afirma que a primeira solução é melhor que a terceira solução.

> **Rafael:** Então, solução um vou dar uma nota sete e a três uma nota três. Por que tão baixo assim? ele resolveu na força bruta, caso a caso. Ao todo foram 15 casos que ele abriu, mas se fossem muitos casos no raciocínio dele, fosse 30, 60 casos, ia fazer todos na mão? Fazer na mão só funciona com número pequeno. [...] Então a um eu vejo encaixar em algum tipo de solução de combinatória, a três eu enxergo uma pessoa que não tem uma ideia de com que resolve e vai ficar abrindo ali se eu tentar na mão, porque é a estratégia mais simples.

Analisando a segunda solução, ele percebe que está a pensar em colocar as bolas nas caixas e não na quantidade de bolas. Afirma ser "simples e efetiva", atribuindo nota dez para ela.

Ao analisar a segunda solução, Rita afirma que não a entende. Na primeira solução ela diz não entender o que significa a notação utilizada - referente ao número de combinações com repetição- e, consequentemente, *"por que a combinação de seis elementos tomados quatro a quatro? Não entendi"*. Embora não entenda o desenvolvimento da solução, ela concorda com a resposta numérica. Ela afirma que entende a terceira solução, *"é a solução que eu, Rita, faria, que seria tentando, experimentando fazendo as possíveis combinações"*. Dessa maneira, ela concluiu com nota zero para segunda, dez para a terceira e nove para primeira.

Finalmente, o professor Bernardo em um primeiro momento pensa que o problema proposto é um clássico de combinação completa, que ele já conhecia. Contudo, percebe que as bolas são distintas, que possuem cores distintas, o que muda a ideia inicial dele. O professor afirma que adorou a terceira solução - *"muito mais lúdica e interessante"* e que gostou da solução um, que o erro delas foi considerar que as bolas são idênticas, mas que ambas entenderam o raciocínio combinatório envolvido na questão. Para ele, a segunda solução é correta, *"[...] eu vejo são quatro bolas e cada bola tem três possibilidades de caixas e cada uma é distinta uma da outra".* Ele avalia a primeira e a última em 6, enquanto a segunda solução com 10.

Notamos que o professor Gabriel não consegue afirmar que a segunda solução está correta, pois não conseguiu desenvolver um raciocínio que resultasse no mesmo número encontrado na segunda solução. Isto é, ainda que entendesse o raciocínio combinatório envolvido na questão, não consegue acreditar realmente que a contagem foi realizada corretamente. O fato se confirma quando, na análise anterior (referente ao segundo problema), ele afirma que a contagem é correta uma vez que "bate" com o resultado encontrado por ele. Ressaltamos que o professor seguiu as "dicas" que ele costuma ensinar aos alunos na busca de resolver o problema, mas não teve êxito e optou por não seguir tentando. O que nos faz pensar que: o que ocorre quando as "dicas" não resolvem o problema? Trata-se de um problema particular?

Além disso, Gabriel e Rafael possuem a mesma ideia quanto a solução três, demandam muito tempo e não são eficazes, em caso de uma quantidade maior de casos a serem contados. A busca de uma maneira mais simples e rápida para solução do problema tem relação direta com as provas de vestibulares, como o ENEM e os exames de qualificação da UERJ, especificamente no Rio de Janeiro, que possuem uma quantidade grande de questões para serem realizadas em um pouco tempo. Isso contribui diretamente para a não valorização de estratégias de solução que, como nesse caso, possuem o mesmo raciocínio combinatório, mas não são aquelas pensadas pelos professores(as), associando-as como aquelas que não são apropriadas para o contexto. Acreditamos que essa concepção se alinha à matemática não problematizada e que, esse tipo de abordagem pode dificultar a aprendizagem de combinatória.

Diferentemente do que ocorre na questão anterior, a professora Rita não consegue compreender a segunda solução, que é essencialmente numérica. Ressaltamos que na questão anterior, a solução dois explica, por meio de uma redação, as contas realizadas na solução um, o que permite a compreensão da primeira solução. Percebemos que, em linhas gerais, quando há uma solução totalmente numérica em que os professores conseguem compreender o raciocínio proposto, em geral, esta solução é aquela pensada por eles e assim, fazem uma suposição que a mesma lógica proposta é a utilizada por eles, classificando-a como correta. O problema surge quando a solução numérica não segue o raciocínio combinatório pensado por eles.

O professor Bernardo nos mostra que uma simples mudança no enunciado do clássico problema de combinação completa muda totalmente a configuração atrelada ao problema, uma vez que, deixa de envolver combinações completas pelo fato das bolinhas serem distintas. Ele e Rita gostam da solução três, que promove uma solução por meio de uma tabela, permitindo uma visualização ampla a partir de casa caso. Alinhados com a DPC (CERIOLI, VIANA, 2012), acreditamos que, mesmo que o número de bolinhas, e possivelmente, número de caixas fossem maiores, a tabela ajuda a elaborar uma estratégia mais simples para resolver o problema, tendo em vista que ela explora os exemplares da configuração do problema. Ademais, toda estratégia empregada para resolução de problemas de contagem deve ser valorizada, pois a partir delas é possível construir outras, a partir de conceitos de combinatória, que permitem que o problema proposto seja solucionado de forma mais simples.

Análise do problema 4

O professor Gabriel elogia as quatro soluções e afirma que inicialmente pensou em agrupar os três amigos em um bloco, considerando quatro amigos em uma permutação circular. Porém, percebeu que as cadeiras são numeradas, descaracterizando um problema de permutação circular. Em seguida, avaliou a primeira solução como errada, para ele*: "A primeira solução considerou simplesmente permutar três, permutar três. Colocou três amigos, por exemplo, três amigos de azul no início, três. Depois trocou só entre os azuis, só entre os não azuis".* Ou seja, na interpretação dele, calculou-se o número de permutações dos três amigos que estariam dentro do bloco, e o número de permutações dos três amigos que estariam fora do bloco. Atribuiu nota 3 para a solução um, uma vez que *"entendeu a ideia de um bloco"*, o que mostra que *"aprendeu bastante coisa de combinatória"*.

Ele também avaliou a segunda solução como errada.

> **Gabriel:** [...] a segunda tem um textinho e é muito legal, considerou.... Então, permutou essas quatro pessoas de forma circular e permutou dentro do bloco das azuis, a solução tá linda, se não fosse o problema de cadeiras numeradas, então para essa solução dois daria 80% feliz, porque essa parte de cadeiras numeradas numa mesa circular é questão de vestibular, pra dar aquela rasteirinha de eliminar muita gente.

Diferentemente da análise do segundo problema, o professor Gabriel compara as duas primeiras soluções, que possuem o mesmo resultado numérico:

> **Gabriel**: E aí gera um problema para a solução um. Porque é a mesma solução de três fatorial vezes três fatorial. Só que pra mim, a primeira solução não pensou em permutação circular. Pra mim, ele pensou só nos blocos separados e aí já era um problema, porque se ele pensou nisso mesmo na circular e já colocou direto permutação circular de quatro, sendo três fatorial e estaria certo, mas eu não daria a resposta, não daria mais ponto como eu dei na segunda, porque aquela coisa que comentei antes: é uma prova, é algo escrito. Eu não tenho que entender quando ele me explicar, eu tenho que entender quando eu ler. Então o que eu li não expressa o que ele pensou, então eu daria menos ponto do que na segunda, se ele me falasse depois que ele pensou nisso, eu daria parabéns. Muito bom, mas não daria o ponto igual a segunda solução.

O professor utilizou a mesma estratégia durante a análise dos quatro problemas propostos, buscando resolver antes de avaliar a questão correta, pensando sobretudo no número obtido. Nesse momento, ele compartilha que costuma ensinar o conceito de permutação circular para os seus estudantes a partir de um cenário de um restaurante com uma mesa circular com pessoas sentadas nela e pela perspectiva do garçom sobre a mesa, que se altera dependendo de como ele olha para mesma. E, a partir desta analogia, entende que, como as cadeiras são numeradas, rotações geram novas formas de se sentar na mesa, o que não caracteriza uma permutação circular. Com isso, pensa em colocá-los em uma fila, com os três amigos de blusa azul em um bloco, e outros três amigos na fila, indicando como estratégia permutar os quatro elementos em fila e permutar os amigos dentro do bloco. Dessa maneira, percebeu que sua solução gera a mesma contagem que a solução quatro, que possui um raciocínio análogo, atribuindo nota máxima para ela.

Quanto à terceira solução, ele afirma que:

> **Gabriel:** a três me deixou pensativo, porque sinceramente me deu uma "bugada" aqui, porque me fez questionar a minha solução. O que que ele errou aqui, que está

> a mais que a minha solução, que a minha deu menos que a resposta três aqui? Então eu terei que sentar e pensar o que que ele fez a mais aqui, caso a minha realmente estaria certa.

Dessa maneira, não consegue concluir se a terceira solução está correta, que precisaria de mais tempo para pensar. Ele diz que caso tivesse com um bloco de provas corrigindo e encontrasse essa solução, pararia tudo e começava a rabiscar novamente e pediria ajuda para um(a) colega (professor(a) de matemática), pois a solução faz sentido para ele. Portanto, o professor não atribuiu nota para a terceira solução.

O professor Rafael após as leituras de cada solução comenta, em ordem: (1) *"Não sei";* (2) *"Solução interessante. Só não sei se essa questão aqui, envolvendo os lugares serem numerados, se essa permutação de quatro elementos, estaria correto ou não. Tem que pensar um pouco mais''"*; (3) *"A solução três parece a mais correta";* (4) *"Faz sentido. Se dá botando números, botar como uma fila".* Em seguida, faz contas para poder compará-las.

Quanto à primeira solução afirma que *"eu não entendi inicialmente qual é a solução da pessoa, o que ela pensou"*. Na segunda, ele considera que não está correta pois considera um bloco e a permutação circular, que não se adequa. Como a primeira solução possui o mesmo resultado numérico, conclui que ambas estão erradas.

> **Rafael:** Eu diria que a um é a pior de todas, não colocando como pejorativa necessariamente o que a pessoa pensou, mas ela não consegue explicar pra mim o que ela pensou. Eu não sei o raciocínio dela, então vai ser a nota mais baixa. A dois eu acho que eu enxergo uma possível solução explicada dá um.

O professor acredita que a terceira solução é a correta, achando interessante a maneira como foi proposta, abrindo em casos, pensando nas possibilidades das posições consecutivas na mesa. Compara com sua última análise, do terceiro problema proposto, afirmando que nesse problema, como são poucos casos, é válido explicitá-los para não esquecer de contar algum deles.

Analisando a última solução, ele acredita também ser interessante buscar a fila para romper a ideia de permutação circular, porém, com isso, não considera que a cadeira sucessiva da cadeira de número seis, é a número um, fechando o ciclo e, como não considerou um caso, atribuiu nota 8 para esta solução. Ele atribuiu nota 4 para a solução dois, pois, na perspectiva dele, *"ela ficou presa diante daquela forma de trabalhar com a circular"*, parecendo mais querer encaixar em fórmulas do que pensar no problema propriamente dito. A solução um, como não apresenta nenhum raciocínio, ele atribuiu, metade da nota referente a solução dois, nota 2.

Ao final de sua avaliação, indaguei sobre a possibilidade de encontrar a solução três, sem a redação, como foi proposta para análise. Observemos o diálogo:

> **Pesquisador:** Mas por exemplo, você achou que a solução três é correta, se a solução um fosse seis vezes três fatorial vezes três fatorial.
> **Rafael:** Só tem isso na prova do aluno?
> **Pesquisador:** Igual a 216.
> **Rafael:** Então eu não ia conseguir ainda saber exatamente como ele pensou, mas sendo uma questão em que eu propus ou que foi proposta numa prova e eu estou corrigindo, por acaso eu vou ter o gabarito desta forma. Eu vou fazer uma correção pró-réu, né? Para o aluno. Eu vou supor que ele pensou corretamente e representou o cálculo que está batendo, né? [...], mas talvez dependesse...dependesse do momento que eu estou ali com a turma. Se dependesse talvez de qual objetivo daquela, dessa avaliação. [...]
> **Pesquisador:** Certo. Então você não necessariamente daria a solução completa?
> **Rafael:** Não necessariamente. Depende do que eu quero com essa solução.
> **Pesquisador:** Mas dependendo do contexto, poderia?
> **Rafael:** Poderia.

A professora Rita afirma que a primeira solução faz sentido para ela.

> **Rita:** Tá, permutação circular. Se eu não estou enganada na fórmula, né? É (n-1)!... na solução um eu quero que três camisas azuis fiquem juntas. Eu permutaria os três amigos entre si de camisa azul. Então seria azul um, azul dois, azul três. A permutação deles três, de fato, dá três fatorial, e aí a conjugação deles com o que resta, com o que tá na mesa. Mas aí não seria três menos um fatorial, por que é permutação circular? Não sei. Mas, a solução um faz sentido pra mim. Primeira solução que tá retinha assim ó. Tá que nem professor de Ensino Médio ensina, porque eu aprendi desse jeito e faz sentido. Mas esse problema eu acho que entendi melhor.

Quanto à segunda solução, ela percebe que é a explicação da primeira solução, fazendo com que ela entenda o porquê aparece o outro três fatorial, que são quatro elementos em uma mesa circular, os três amigos e o bloco. Inicialmente, ela concordou com as soluções e atribuiu nota 10 para ambas.

Ao analisar a solução três, ela acredita que os números são muito grandes, o que não faria sentido, sobretudo pelo fato de os três amigos estarem juntos, atribuindo nota zero para ela. Contudo, quando fez a leitura da solução quatro, percebeu que os lugares estão numerados, e que *"Agora [...] considerar as repetições por rotação como geralmente fazem nesse plano funciona sem problemas*", ficando em dúvida entre a solução três e a solução quatro. Ela faz algumas contas para compará-las e muda de ideia quanto à terceira solução, afirmando que esta é a correta, atribuindo nota dez para ela. Todas as outras ela atribuiu nota sete pois “*conseguiram me pegar”,* no sentido de que trouxeram dúvida para ela, fazendo-a pensar acerca das soluções propostas.

O professor Bernardo acredita que como professores possuímos vícios e que um deles é imaginar que já conhecemos a questão proposta, bem como sua solução, mas que, quando avaliamos com calma, o problema tem uma restrição que difere daquele “clássico”, o que faz toda diferença. Ele elogia o problema, afirmando que o fez repensar diversas vezes. Depois de um certo tempo, sente-se pronto para avaliar, mas confessa que foi a que mais se sentiu inseguro.

Ainda que as duas primeiras soluções propostas possuam o mesmo resultado, ele afirma que teve mais dificuldade de compreender o raciocínio proposto da primeira, pois ela é muito resumida. Afirma que poderíamos até inferir, mas não dá para saber ao certo o que realmente foi pensado. Em contrapartida, a segunda solução possui uma explicação sobre o raciocínio utilizado. Para ele, ambas estão erradas, seguiram o vício dele, e não consideraram que os lugares na roda estão numerados.

Quanto à terceira solução e quarta solução, Bernardo conclui que:

> **Bernardo:** E na minha visão, a *solução três* é a correta, tá? Porque ele está... primeira coisa. Ele está considerando a posição que os três amigos de camisa azul podem ocupar. Ele entendeu que é uma permutação circular, mas além do… do… qual foi o passo que ele esteve além da solução um e a solução dois? Ele entendeu também a numeração. Então ele fez a permutação primeiro, entendeu de quantas maneiras é, eu primeiro boto a minha restrição, que é muito interessante como estratégia de combinatória. E aí depois ele basicamente só permutou os outros, permutou um grupo e o outro ele só botou nos que faltavam. A *solução quatro,* na minha visão, ela está incorreta porque sim, eu acho que o aluno entendeu a ideia da numeração, só que não entendeu a ideia do circular, porque assim, qual é a restrição da fila? A restrição da fila aqui, assim você aqui, ele tá contando de menos o conjunto, porque dá para você fazer essa circular.

O professor pensa que a solução busca avaliar dois conceitos: o princípio multiplicativo e, principalmente, a permutação circular. Para ele a solução um e dois não percebem a restrição da numeração, mas entendem a ideia de circular, que representa 60% da questão. Já a solução quatro -*“é a que mais peca”*-, não compreende a ideia da permutação circular, porém entende a restrição referente a numeração das cadeiras. Com isso, o professor avalia as questões um e dois com nota 6, a solução três com nota máxima e a solução quatro com a nota 4.

Ao final, indaguei o professor sobre o fato de ter avaliado as duas primeiras soluções com a mesma nota, dado que relatou, anteriormente, não ter certeza do que a primeira solução propôs, caracterizando-a como muito resumida.

> **Pesquisador:** Você daria a mesma nota para solução um e para solução dois?
> **Bernardo:** Tendo a achar que a solução um peca no excesso de detalhe, de raciocínio. Mas, mas na prática, sendo coerente, eu acho que mesmo dando os mesmos resultados dá pra inferir que ele entendeu o que é a combinatória. Eu daria, sim.
> **Pesquisador:** Você entenderia a solução um, sem a solução dois? Você acha que entenderia o que foi pensado?
> **Bernardo:** Sim! Sim!

Em nossa primeira análise, a primeira solução proposta gerou problemas na interpretação do raciocínio intrínseco à resolução, haja vista que ela é essencialmente numérica. O professor Gabriel, por exemplo, não acredita que o raciocínio proposto na solução dois é o mesmo que a solução um. O professor Rafael afirma não compreender a resolução proposta e que, supõe que a solução dois busca trazer explicação da solução um. A professora Rita entende parcialmente a solução um, uma vez que se assemelha à sua maneira de pensar, mas só entende realmente a solução proposta por meio da solução dois. O professor Bernardo afirma inicialmente que não consegue compreender o que foi proposto pela primeira solução, mas, de forma contraditória, declara ao final de sua análise que conseguiria entender o raciocínio sem a leitura da segunda solução.

O professor Gabriel resolveu a questão e percebeu que a resposta era a mesma da solução quatro, porém confessa não compreender qual é o erro da solução três, não conseguindo concluir qual é a solução correta, de fato. Interessante quando o professor se coloca num cenário cotidiano em que encontra dificuldade em analisar a solução de um estudante, fazendo com ele mesmo refletisse sobre a solução pensada por ele, e que pediria ajuda de outro(a) professor(a) para ajudá-lo. Afinal, conforme Sabo (2010) investigou, a troca de experiências entre professores(as) produz saberes docentes.

Ao final da análise do professor Rafael, quando indagamos sobre um cenário hipotético, em que a solução que ele acreditava estar correta fosse apenas numérica, ele afirma, inicialmente, que atribuiria a pontuação máxima para o(a) estudante. Porém, ao refletir um pouco sobre sua própria resposta, acredita que essa avaliação dependeria do objetivo da mesma, como uma preparação para algum concurso ou apenas uma avaliação comum de sala de aula, por exemplo.

Passou despercebido para a professora Rita que os lugares eram numerados, num primeiro momento, o que levou ela a uma primeira análise. Ao decorrer da leitura das soluções seguintes, percebeu a restrição do problema, fazendo com que mudasse de ideia sobre suas avaliações iniciais. Por outro lado, o professor Bernardo compreendeu a restrição antes de começar a avaliá-las, ainda que tenha afirmado que as duas primeiras seguiram seu pensamento inicial, sem perceber que as cadeiras eram numeradas. Contudo, o professor estabelece dois critérios para avaliar, incluindo, principalmente, a permutação circular. Embora tenha realizado a análise corretamente, isto é, tenha identificado a solução correta e o que torna as demais incompletas, o problema não se trata de permutação circular, sobretudo pelo fato de os lugares serem numerados. Salientamos que prevíamos que os professores(a) tivessem(e) dificuldades em avaliar se a terceira ou quarta soluções são corretas, considerando a hipótese de que teriam desconsiderado as duas primeiras. Entendemos que a dificuldade da questão se apresenta em encontrar quais posições das cadeiras é possível sentar os amigos de blusa azul. A solução um e dois não consideram a restrição do problema, enquanto a solução quatro pensa em uma estratégia para romper a ideia da permutação circular, porém esquece que a mesa é circular, consequentemente, contando casos a menos.

7. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Nessa seção, nos encarregaremos de traçar as conclusões finais referentes a este trabalho de Dissertação de Mestrado, que teve como principal objetivo buscar entender quais são os possíveis impactos da formação inicial de professores de matemática no conhecimento e no ensino de combinatória dos professores no contexto escolar. Para isso, optamos por uma abordagem qualitativa, por meio de entrevistas semiestruturadas que realizamos com quatro professores e uma professora, sendo um deles um estudo-piloto, que não participou de nossa análise, uma vez que entendemos que a entrevista possui elementos e formato diferentes das demais entrevistas. Para realizar a análise, nos debruçamos da Análise de Conteúdo (BARDIN, 2004), elencando três eixos temáticos: Universidade, Professores e Escola. Cada eixo, por sua vez, contém categorias que construímos a partir das unidades de registro encontradas nas transcrições, na íntegra, das entrevistas realizadas.

O que motivou o trabalho e justificou a pesquisa elaborada? Durante a introdução deste trabalho, situei minha trajetória de formação docente, remetendo memórias do meu ensino básico, características da minha formação inicial e episódios da minha formação continuada (em andamento). Este relato trouxe angústias, fatos e problemáticas que eu possuía o desejo de explorar para além da minha experiência, nos quais destaco:

- Ensino básico marcado por um ensino de combinatória a partir de uma abordagem tecnicista (não-problematizada), a partir da “fórmula-aplicação” (SOUZA, 2010). Bastava “encaixar” a fórmula no problema, a depender de suas características. Não entendia e tinha dificuldades em resolver problemas de combinatória, pois nem sempre aplicar a fórmula resolvia o problema corretamente.
- Uma disciplina de combinatória (Matemática Finita) transformadora, que, por mais que não possuísse claro intuito de formar professores, buscava explicar os princípios da combinatória de contagem (PA, PM, PB, PK1, PIE); o que são as configurações e como se calcula a quantidade de exemplares a partir dos princípios, gerando uma fórmula que se associava às configurações; resolução de problemas disparadores por caminhos distintos; trazer discussões acerca de soluções que não estavam corretas, explicitando o porquê; e, principalmente, havia a preocupação com o desenvolvimento do

raciocínio combinatório e a maneira com que registrávamos as soluções, sendo possível tanto quem a realizou, quanto a professora, identificarem as estratégias tomadas para realização da contagem, no referido problema.

- Uma experiência no estágio supervisionado, enquanto licenciando, que me motivou a escrever o pré-projeto para o PEMAT que resultou neste presente trabalho. O fato da professora regente não ter experienciado, durante a sua formação inicial, uma disciplina que dialogasse com a análise combinatória impactou sua prática profissional docente, de forma negativa.
- Uma experiência de *docência compartilhada* a partir de um estágio de docência no PEMAT. Esta me permitiu liderar um grupo de estudantes com dificuldade em combinatória, na disciplina de Laboratório de Instrumentação para o Ensino da Matemática (LIEM), sob orientação do professor Agnaldo. Cada estudante deveria apresentar uma aula da temática do seu respectivo grupo, a partir da utilização de um recurso didático, meu papel era orientá-los e fazer esse encaminhamento junto com eles. Durante a experiência pude perceber, muitas vezes, quando eu propunha algum problema de contagem e eles conseguiam resolver, isso se dava por meio da utilização de fórmulas, porém eles não sabiam explicar o porquê. Ademais, como o grupo possuía integrantes que haviam realizado a disciplina de Matemática Finita e outros que não, pudemos perceber que não havia uma diferença nítida entre esses dois grupos, o que nos fez concluir que a oferta de uma disciplina de combinatória não é suficiente para que os estudantes aprendam os conteúdos da disciplina, dependendo de muitos aspectos, sendo o principal deles, qual é a concepção do(a) professor(a) formador(a).

Após a qualificação, conseguimos perceber que o principal motivo para a realização desta pesquisa é a preocupação com o desenvolvimento do raciocínio combinatório pelos estudantes da Educação Básica e do Ensino Superior. E que, (quase) todas as problemáticas trazidas, tanto a partir da minha experiência acadêmica-profissional, mas como também pela literatura de pesquisa, são interseção dos polos Universidade, Professores e Escola. Dessa maneira, trouxemos a importância de se desenvolver o raciocínio combinatória da Educação Básica e o fato de estarmos contribuindo para uma área que necessita de mais pesquisas.

Buscamos então na literatura de pesquisa, trabalhos que envolvessem professores e formações iniciais de professores.

Ao longo da nossa revisão de literatura, notamos que minhas experiências enquanto aluno da Educação Básica é muito recorrente, enquanto aquela que tive enquanto licenciando não é tão comum assim. Destacamos que:

- Os licenciandos não aprendem combinatória na maioria das licenciaturas e há o sentimento de insegurança do(a) futuro(a) professor(a) quanto ao ensino de combinatória no contexto escolar. (MARTARELLI; DIAS, 2020, DA SILVA RODRIGUES; RODRIGUES, 2019).
- Há a necessidade de melhor preparo na formação Matemática e Didática dos professores que apresentam dificuldades em explicitar as suas práticas possuindo uma relação insatisfatória com as propriedades de combinatória. Sendo, muitas vezes, a licenciatura em matemática não assertiva quanto ao ensino de combinatória e seus principais conceitos. (COSTA, 2003, TEIXEIRA, 2020).
- Professores e professoras possuem a constante valorização do uso de fórmulas, em detrimento do uso do PM, na resolução de problemas de contagem, sendo resistentes a soluções gráficas por si só, tendo a concepção de que ideias intuitivas possuem um "menor peso", havendo a indispensabilidade de números, fórmulas, para validação dos problemas. (ROCHA, 2011, TEIXEIRA, 2020).
- O desconhecimento dos professores sobre conceitos de combinatória pode estar diretamente relacionado com a sua formação inicial, consequentemente, fazendo com que professores(as) tenham como referência livros didáticos e memórias que possuem enquanto estudantes da Educação Básica (MARTARELLI; DIAS, 2020, TEIXEIRA, 2020).
- No contexto escolar, estudantes se debruçam constantemente em fórmulas para resolução de problemas de contagem, buscando uma sistematização. Porém, as utilizam de forma errônea, o que pode indicar que a formalização das estruturas combinatórias não esteja ocorrendo de forma adequada, uma vez que esta formalização deveria auxiliar o estudante a pensar sobre a lógica

implícita em cada *configuração* (PESSOA; BORBA, 2010, BATANERO *et al*, 1996, CERIOLI; VIANA, 2012).

- As dificuldades dos estudantes da Educação Básica estão associadas ao não entendimento efetivo dos professores acerca da combinatória e que as dificuldades dos professores têm direta relação com as formações iniciais (ROCHA, 2011).
- Falta de justificativas na resolução de problemas de contagem, tanto por professores quanto estudantes, valorizando soluções essencialmente numéricas.
- Uma gama de termos distintos para designar-se aos arranjos, combinações, permutações e produto de medida, como agrupamentos, significados, configurações e operações combinatórias.

A partir do triângulo de formação de Nóvoa (2019), apresentamos o *ciclo vicioso* que sintetiza as problemáticas da pesquisa, de forma global, destacando as interações existentes entre a Universidade, Professores e a Escola. Por outro lado, as figuras 7 e 8, por sua vez, caracterizam nossas teses acerca da análise combinatória no contexto escolar e no contexto universitário, respectivamente, que buscamos investigar na literatura de pesquisa, mas também na nossa produção de dados empíricos, por meio das entrevistas semiestruturadas. Com a identificação dos três eixos temáticos e as suas respectivas categorias, a partir da Análise Conteúdo (BARDIN, 2004), analisamos cada um deles, separadamente.

Nos baseamos na metodologia MathTASKS (BIZA *et al*, 2021) para realização das entrevistas, construindo soluções fictícias, mas que possivelmente encontraríamos por estudante no contexto escolar. Para tal, buscamos apresentar erros comuns na resolução de problemas de contagem, conforme Batanero *et al (*1996). Sob a ótica de Cerioli e Viana (2012) apresentamos (e criticamos) a DCP, que privilegia a "fórmula-aplicação", e (de outro lado) a DPC, que busca construir o raciocínio combinatório a partir dos princípios da combinatória, como o PM e o PA. Com base na DPC, na qual entendemos como uma abordagem de uma matemática problematizada, elaboramos nossas soluções acerca dos problemas escolhidos para a análise dos sujeitos de pesquisa.

No que se refere a *Universidade*, percebemos que todos os professores tiveram um sentimento de falta em relação ao curso de licenciatura em Matemática, falta de sentir-se em um curso de licenciatura em matemática, que de fato os prepare para a atuação enquanto profissional. Quanto a combinatória nos currículos nas respectivas universidades e nas suas formações docentes, com exceção de Rita, todos os professores entrevistados tiveram uma disciplina de combinatória (diretamente) e alguma(s) que possuía(m) como tópico – essas em geral, muito superficiais na perspectiva deles. Dos quatro professores entrevistados, apenas dois deles apontam para contribuições das disciplinas que realizaram, o professor Rafael, com um foco na resolução de problemas, e o professor Bernardo, com uma disciplina que desmistificou seu olhar sobre o que é a combinatória.

A professora Rita relata que à época participou de discussões importantes junto ao colegiado do curso acerca do fato de não ter a análise combinatória em sua grade curricular, sendo um incômodo para os estudantes de licenciatura em matemática. Ela afirma que a combinatória é um *"calcanhar de Aquiles do caramba",* e que não ter uma disciplina com foco no ensino-aprendizagem em combinatória é muito prejudicial para os estudantes, afirmando que sentiu muito falta durante sua atuação profissional. Quando precisou ensinar combinatória no contexto escolar, debruçou-se em seu amigo, professor de matemática e colega de graduação, para auxiliá-la. Mais à frente, em sua formação continuada, contou com a colaboração de uma colega de Mestrado, que também partilhou saberes com ela.

A colaboração e a troca de saberes entre colegas de profissão foram características comuns relatadas por todos os professores e professora entrevistada, em que todos afirmam que apenas na sua própria prática pedagógica que aprenderam, de fato, a análise combinatória. Identificamos apenas na fala do professor Bernardo, uma disciplina cuja abordagem foi pautada na matemática problematizada, que possibilitou o professor em formação a contrastar o seu ensino de combinatória no contexto escolar, mudando a maneira com o qual ele enxergava o conteúdo: de fórmulas e decorebas, associando a problemas específicos, para o entendimento que há um pensamento combinatório sendo desenvolvido.

Quanto ao eixo *professores*, começamos por investigar quanto às dificuldades dos professores(a) em relação a combinatória. Com exceção de Rita, nenhum professor afirmou ter dificuldades com o conteúdo, mas todos, incluindo Rita, afirmaram que a análise combinatória é um conteúdo muito difícil, situando-o com um dos mais complexos da Educação Básica. Associamos o fato de não admitirem ter dificuldades com o enaltecimento de uma concepção de que o bom professor é aquele que tem muito conhecimento matemática, sendo aquele que tem dificuldade mais fraco. Acreditamos, como Giraldo

(2019), que estas dicotomias não deveriam existir, e que assumir as dificuldades assume uma perspectiva humana e de uma matemática problematizada, haja vista que esta pode ser acessível para outros sujeitos além dos gênios inatos.

Notamos na fala dos professores dois tópicos situados por Lockwood, Wasserman e Tillema (2020), a combinatória é *acessível* e que cada problema possui uma maneira de pensar diferente, o que possibilita o pensamento ser tão *rico*, mas também muito difícil, conforme relatam os professores. Essa é uma das poucas matérias que com inserção de uma vírgula ou a alteração de um pequeno fragmento, torna a solução do problema completamente diferente. Nesse sentido, Cerioli e Viana (2012) assumem que alguns problemas de combinatória podem ser confusos e que a ambiguidade é um fator que dificulta a resolução de problemas de contagem. Este obstáculo referente a interpretação de problemas de contagem ocorreu na análise da primeira questão proposta, por quase todos os professores e na segunda questão proposta, pelo professor Rafael.

Quando perguntados acerca de possíveis estratégias que podem auxiliar o processo de ensino-aprendizagem dos estudantes da escola básica, os professores tiveram um pouco de dificuldade em responder inicialmente, de modo geral. Porém, apontaram para a análise do erro, para a experimentação e para utilização do PM para construção das configurações. Estratégias estas também indicadas pela literatura de pesquisa (e.g., COELHO; DIAS, 2022, RODRIGUES; DALLA; TEIXEIRA, 2013, LIMA; BORBA, 2015).

Diferentemente do que apontam Teixeira (2020) e Martarelli e Dias (2020), não identificamos na fala dos professores um "espelho" quanto às práticas docentes de seus professores na Educação Básica, quando perguntamos sobre suas referências no que tange o planejamento de aulas de combinatória e materiais para consulta. Mas, ao mesmo tempo, percebemos pouquíssimos traços de sua graduação, apenas com Rafael e Bernardo quando citam o livro do professor Morgado *et al* (2016) que conheceram e utilizaram nas respectivas disciplinas de combinatória da licenciatura em matemática.

Quanto ao eixo *escola*, investigamos se os professores e a professora acreditam na importância de introduzir conceitos básicos, envolvendo o raciocínio combinatório no Ensino Fundamental. Como resultado, com exceção de Gabriel, todos os docentes acreditam na importância, em que aqueles que atuam no Ensino Fundamental já fazem isso na sua prática docente. O professor Rafael foi pego de surpresa, uma vez que atua majoritariamente no Ensino Médio, mas rapidamente indicou que acredita que seria interessante, não ficando apenas para o 2º ano do Ensino Médio. Já o professor Gabriel acredita que já existem muitos conteúdos previstos e que seria mais benéfico investir em outros tipos de inteligências, como inteligência motora e visual, por exemplo.

Antes de fazerem a análise das questões e soluções propostas com base nas MathTASKS (Biza *et al*, 2021), encaminhamos uma pergunta para fazer a transição que consistia em buscar entender os critérios de validação na resolução de problemas de matemática, sobretudo de combinatória. Identificamos, em todas as respostas, a busca pela valorização do raciocínio combinatório, não dependendo apenas de a resposta final estar correta ou não, sendo mais importante o desenvolvimento do que o número, propriamente dito.

Em relação a análise da primeira questão, verificamos que, assim como a literatura de pesquisa aponta (e.g., HADAR, HADASS, 1981; ROCHA, 2011; ASSIS, 2014 etc.), todos os professores tiveram dificuldade na compreensão da ordenação quanto às retiradas das bolinhas, isto é, se a ordem das retiradas gera (ou não) novos exemplares. Além disso, perguntamos ao professor Rafael e a professora Rita se eles estavam acostumados a encontrar soluções como as propostas, por meio de uma redação. Rafael não costuma ver com tanta frequência, enquanto Rita já costuma verificar com mais frequência. Acreditamos que isto pode estar relacionado com a maneira com o qual as soluções são apresentadas e estimuladas dentro de sala de aula, o que faz sentido quando analisamos o perfil dos dois professores, de um lado professor do Ensino Médio, que atua no 3º ano e costuma preparar os estudantes para o vestibular, do outro lado professora do Ensino Fundamental, que frequentemente atua no 6º e/ou 7º ano, promovendo a criatividade e a pluralidade.

É possível identificar o mesmo ocorrendo com o professor Gabriel na análise da segunda questão, quando afirma ser "raríssimo" soluções com a segunda proposta, que explicita a ideia da primeira que é essencialmente numérica, mais recorrente, segundo ele. O professor inicialmente não havia entendido a primeira solução proposta, apenas com a segunda solução conseguiu ter a compreensão da mesma. Na análise de Rafael, assim como Gabriel, nota-se que a primeira solução é muito comum. Percebemos que a terceira solução proposta o incomodou, afirmando que ela é uma solução mais "confusa" para interpretação, o que ilustra um raciocínio confuso do aluno.

No terceiro problema, o perfil dos professores e a maneira com o qual eles avaliam fica ainda mais evidente. Na terceira solução proposta - uma tabela que explicita os casos - tanto Gabriel quanto Rafael acreditam que não seja uma solução interessante, pois exige muito tempo, sendo uma estratégia muito simples, e ineficaz para um grande número de exemplares, atribuindo um “menor peso” para elas. Em contrapartida, Rita e Bernardo gostaram da terceira solução, “*muito mais lúdica e interessante*” (Bernardo), valorizando o raciocínio combinatório intrínseco ao problema. Acreditamos que a postura de Gabriel e Rafael está alinhada com uma perspectiva de uma matemática não problematizada (GIRALDO, 2018; 2019), uma vez que, quando apresentada uma solução que é distinta da pensada por eles, não possui tanta relevância ou não se pode afirmar se está correta, ainda que o raciocínio combinatório seja prevalecido.

Identificamos por parte de todos os docentes, em pelo menos algum momento da entrevista, dificuldades para compreensão do raciocínio combinatório intrínseco a solução quando elas são essencialmente numéricas. Concluímos que, quando a solução é numérica, sem nenhuma outra justificativa, mas as operações explicitadas são as mesmas que os professores esboçaram para a solução, eles subentendem que o raciocínio combinatório é o mesmo pensado por eles e, se tratando de uma avaliação, associam a solução a uma resposta correta. O problema mora quando a operação indicada não é a mesma que eles esboçaram, em que, muitas vezes, não conseguem compreender a solução proposta, associando a uma solução incorreta, ou mesmo não conseguindo fazer uma avaliação.

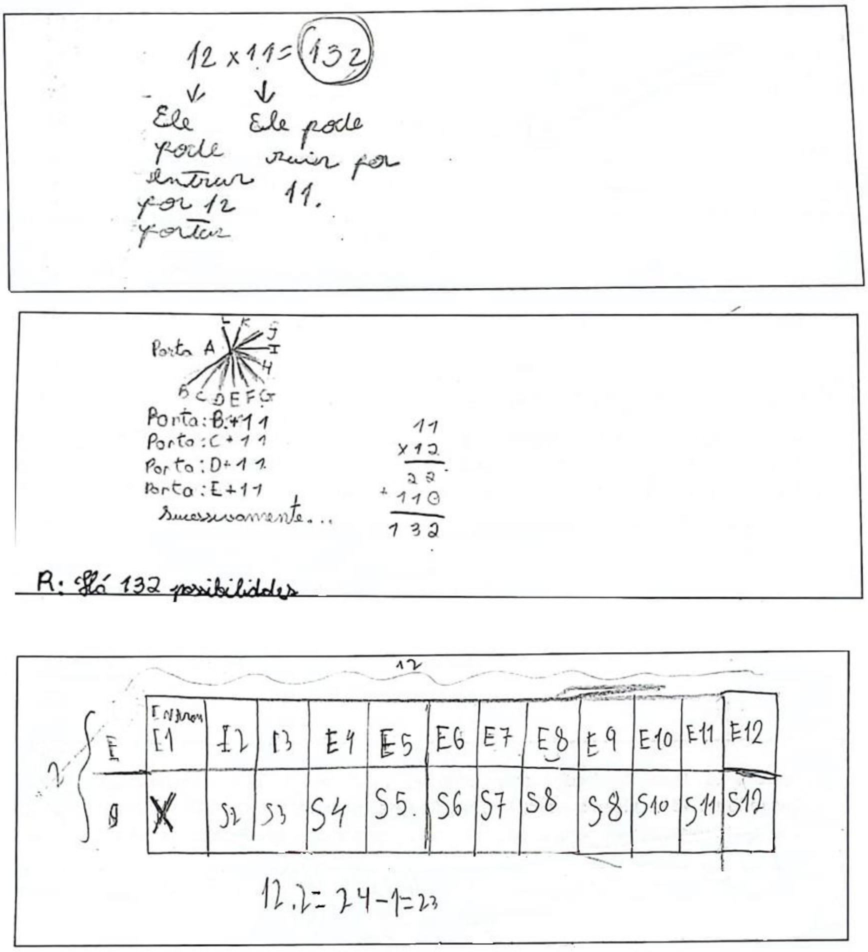
E ainda há um terceiro caso, como ocorrido pelo professor Gabriel, na quarta questão proposta. Conforme relatamos na subseção 4.4, a primeira solução e a segunda solução foram pensadas da mesma maneira, porém descritas de duas formas distintas, por meio de números com “tracinhos” e uma redação, respectivamente. Curiosamente, o professor Gabriel acredita que quem propôs a primeira solução não teve o mesmo raciocínio da segunda solução, mesmo possuindo o mesmo resultado (numérico). Outros professores inferiram que a segunda solução explica a primeira, considerando essa hipótese, uma vez que não é compreensível por si só, para avaliá-la, o que nos mostra a necessidade de alguma outra representação ou indicação para avaliação/análise do raciocínio proposto. Como saber se o caminho escolhido é análogo ao que Gabriel pensou para ela ou se é realmente o que a segunda solução explicita? Impossível concluir.

Pensando que há direta relação da maneira como a combinatória é ensinada e as respostas dos estudantes são prevalecidas, apontamos para necessidade de professores e professoras discutirem diversas maneiras de resolver problemas, que não envolvam apenas o uso de registros numéricos ou aplicações de fórmulas, como metodologias e abordagens não problematizadas, análogas a DCP e a "fórmula-aplicação". E isso não deve ser feito apenas durante um curto período no Ensino Médio, em geral no 2º ano. Precisamos explorar o raciocínio combinatório na Educação Básica desde os anos iniciais do Ensino Fundamental, quiçá na Educação Infantil. Obviamente, essa introdução deve ser realizada de forma compatível ao nível de ensino e aos recursos e habilidades plausíveis para os estudantes. Portanto, devemos explorar a listagem de possibilidades, a utilização das árvores de possibilidades, tabelas de dupla-entrada, desenhos, setas, notações para as configurações, dentre outras estratégias. A formalização e sistematização dos conceitos e propriedades combinatórias deve ser realizada de forma gradual, aumentando o nível de dificuldade dos problemas, bem como suas exigências, conforme seu crescimento e amadurecimento. Não há dúvidas, a representação por "tracinhos" é hegemônica, ao menos no Brasil, mas essa representação não é suficiente. Podemos explorar, até mesmo por meio dos "tracinhos", outras possibilidades para representação da solução proposta, por meio de indicações, por exemplo, do que representa cada "tracinho". Mas, é muito importante, tanto para o estudante numa visualização posterior, quanto para um avaliador, ter registros que possibilitem o entendimento do raciocínio combinatório, que afinal, são as diferentes possibilidades de raciocínio que levam a combinatória a ser tão desafiadora, e ao mesmo tempo, tão brilhante.

Ao logo deste trabalho, mostramos algumas variações de soluções, tanto trazida por nós, como presente na literatura de pesquisa, tal qual as diferentes soluções apontadas por Rodrigues, Dalla e Teixeira (2013) – a figura 5 indica uma delas. Entretanto, queremos ilustrar com outras soluções de estudantes que observamos em nossa própria prática docente. Em 2023, lecionei no 6º ano do EF do CAp/UFRJ, em que explorei os significados da multiplicação, sendo um deles o princípio multiplicativo. Dessa maneira, desenvolvemos a solução de diferentes problemas de contagem que envolvam o PM, explorando inclusive problemas que necessitam do princípio aditivo, quando a árvore de possibilidades não é simétrica. Em uma das avaliações somativas à época, inclui um problema de contagem, em que coletei as resoluções dos estudantes para utilizar estes dados para fins acadêmicos, como o presente trabalho. Nesse sentido, destacarei, a seguir, o problema, bem como três soluções realizadas por estudantes (figura 16), que exploram diferentes estratégias para resolver o mesmo problema.

O problema tinha como enunciado: "Num estádio há 12 portas de entrada e saída. Quantas possibilidades tem de uma pessoa entrar em uma porta e sair por outra diferente? ". A primeira solução apresenta uma proposta análoga ao dos "tracinhos", mas com setas que indicam o que cada um deles representa. Na segunda solução é realizada uma árvore de possibilidades a partir da fixação de uma porta qualquer, no qual foi denominada A, percebendo-se que existem 11 portas possíveis para saída (B-L), desde que entre na porta A. Abaixo é indicado que isto ocorre para qualquer porta que seja fixada, e como são 12 portas ao total, o(a) estudante realizou a multiplicação entre 12 e 11, obtendo a resposta correta. Na última solução é realizada uma tabela de dupla entrada que indica as possibilidades para entrada (E) e para saída (S), sendo 12 possibilidades para cada. O(a) estudante indica que uma porta foi selecionada para entrada, o que impede de sair por essa porta (S1). Portanto, entende que são 24 possibilidades ao todo e que não pode escolher uma delas, totalizando 23 possibilidades. A solução não está correta, pois não compreende que a cada porta escolhida para entrada, terão 11 portas para saída, conforme indica a segunda solução, por exemplo.

Figura 16: Resoluções de um problema de contagem



Fonte: Os autores.

Destaco que a minha atuação no 6º ano fez com que eu tivesse que refletir sobre meus conhecimentos e minha própria prática pedagógica, tendo em vista minhas concepções e crenças que construí ao longo das minhas experiências enquanto professor do Ensino Médio, os conhecimentos que obtive com a disciplina de Matemática Finita, bem como minha atuação como monitor da disciplina, incluindo as diversas oportunidades em que lecionei no âmbito universitário. Diante disso, durante os anos letivos de 2022 e 2023, em que atuei pela primeira vez nos anos finais do Ensino Fundamental, especificamente no 6º ano, encontrei-me diante da necessidade de repensar minha abordagem quanto ao ensino da combinatória, buscando valorizar as diversas estratégias de solução possíveis que podemos explorar, condizentes com o nível de ensino dos estudantes.

Com base na metodologia da Análise de Erro, em uma perspectiva do erro como uma oportunidade para a construção do conhecimento, podemos analisar, junto ao estudante, a última solução proposta (interação professor-aluno), por exemplo. Isso envolve compreender as razões que levaram à escolha dessa estratégia e refletir sobre outras abordagens possíveis, avaliando se devemos manter (aproveitando a solução) ou descartar a solução adotada. Se debruçar na referida metodologia permite, portanto, revisar, problematizar e evitar novos erros, a partir do entendimento das devidas implicações acerca das estratégias escolhidas. Acreditamos que esta abordagem está vinculada a uma matemática problematizada e que pode contribuir para o processo de ensino-aprendizagem dos estudantes do ensino básico, mas também dos professores em formação inicial (e continuada).

Finalmente, com o objetivo de finalizar nossas considerações finais retomaremos à questão de pesquisa de nosso trabalho: *Quais são os possíveis impactos da formação inicial de professores de matemática no conhecimento e ensino de combinatória dos docentes no âmbito da Educação Básica?*

Considerando os diálogos, reflexões e problematizações durante a análise das entrevistas, bem como os tópicos abordados nas conclusões finais deste trabalho, entendemos que há um impacto (negativo) e direto das formações iniciais no conhecimento de combinatória e na prática profissional docente dos egressos das respectivas universidades. Todos os participantes da pesquisa indicam que só realmente aprenderam combinatória e desenvolveram seus próprios métodos de ensino, a partir de sua própria prática pedagógica. Mostrando que, mesmo aqueles que tiveram disciplinas de combinatória, ela não foi suficiente e não deram conta de preparar os futuros professores para sua própria prática. E, portanto, independentemente de terem realizado ou não uma ou mais disciplinas que versem sobre a análise combinatória, todos mostraram ter dificuldades e inseguranças em relação ao conteúdo, mesmo que, com exceção da professora, não tenham relatado quando foram perguntados, mas demonstraram ao longo das entrevistas. Em todas as entrevistas, buscamos incentivar o resgate de memórias que pudessem olhar para a formação inicial, com a busca de entender se ela influencia sua prática pedagógica de forma explícita, a partir desse reconhecimento. Contudo, foram pouquíssimos os momentos que conseguimos identificar essas associações.

Nesse sentido, as referências dos professores, de modo geral, não se baseiam na sua formação inicial, destacando importantes discussões, professores e professoras, aulas específicas ou palestras, livros adotados, rodas de conversas, dentre outras possibilidades que a Universidade pode oferecer. Identificamos, principalmente, como referência dos professores(a) entrevistados(a), livros didáticos e apostilas didáticas, problemas de vestibulares, materiais disponibilizados pela internet, troca de saberes entre colegas de profissão e elementos da própria prática pedagógica. Apenas reconhecemos traços das respectivas formações iniciais com Bernardo e Rafael, quando afirmam que o livro do professor Morgado *et al* (2016), que foi utilizado e conhecido na graduação por eles, é uma das referências deles.

Dessa maneira, faz-se necessário fincar a análise combinatória como uma disciplina obrigatória de cursos de licenciatura de matemática, que não foque apenas no conteúdo matemático (acadêmico), mas que possibilite discussões importantes que devem ser promovidas no contexto escolar. Acreditamos numa disciplina que valorize a construção do desenvolvimento do raciocínio combinatório e, consequentemente, em diversas estratégias para resolução de problemas de contagem, que possibilitem uma sistematização e formalização que faça sentido, e não simplifique a combinatória como diversas fórmulas que devem ser aplicadas, como sugere a DCP.

Apostamos na *docência compartilhada* para viabilizar a atuação de professores da escola básica em conjunto como o(a) professor universitário, apropriando-se dos conhecimentos emergentes da prática e integrando-os à formação inicial de professores, essa abordagem se solidifica principalmente por meio da construção colaborativa de uma cultura de formação profissional, fundamentada na conexão entre escola e universidade. (GIRALDO *et al.*, 2018). Além disso, o estágio supervisionado obrigatório e as ações de extensão, componentes curriculares, também podem ser caminhos para fortalecer o elo entre a escola e a universidade, e, entres eles, os futuros professores.

No contexto da Educação Básica, assim como a DPC, é possível optar por metodologias que valorizem o desenvolvimento do raciocínio combinatório e possibilitem ao estudante pensar em diversos problemas de contagem, sem restrições. Nesse sentido, alinhados com uma perspectiva de matemática problematizada (GIRALDO, 2019), salientamos a importância de incentivarmos os estudantes a registrarem o raciocínio combinatório de modo organizado, permitindo com que professores(as) e estudantes da Educação Básica, como uma via de mão-dupla, possam reconhecer as estratégias escolhidas para resolução de problemas de contagem.

Portanto, o atual cenário das formações de professores e as disciplinas de combinatória, ou que envolvem combinatória, não é favorável a uma prática profissional docente, no sentido que professores e professoras não se sentem seguros e possuem dificuldades no conteúdo. Desde o momento inicial deste trabalho, relacionamos os polos Universidade, Professores e Escola, e acreditamos que devemos fortalecer esses elos para "quebrar" o *ciclo vicioso* apresentado e possibilitar, assim, o desenvolvimento do raciocínio combinatório no contexto escolar e universitário.

Entendemos que o caminho para reverter o atual quadro é investir na Universidade, possibilitando que professores tenham melhores formações e, consequentemente, os estudantes da Educação Básica também. Salientamos, contudo, que não romantizamos a universidade, e não acreditamos que os conhecimentos adquiridos neste contexto sejam superiores àqueles desenvolvidos na escola, tanto que apontamos para *docência compartilhada*. Pelo contrário, corroborando com Nóvoa (1992; 2019), entendemos que é impossível se tornar professor sem a própria prática docente e a colaboração de outros professores(as), com trocas que legitimam e produzem saberes emergidos da escola. Todavia, ainda que não possa ser totalmente responsável, é na Universidade que deveria se formar o profissional professor, possibilitando que este atue na Educação Básica.

Espera-se que o trabalho tenha importantes contribuições para os educadores matemáticos, articulando a combinatória (conteúdo matemático) e a formação de professores e professoras (que ensinam matemática), os dois eixos centrais dessa pesquisa e possa contribuir também para professores e professoras de matemática que atuam na escola.

Olhando para o futuro, tenho o desejo de expandir as pesquisas acerca do ensino de combinatória, mas como enfoque na Educação Básica, pensando nas possíveis contribuições da metodologia da Análise do Erro para a construção do raciocínio combinatório. Sendo assim, buscarei seguir a pesquisar na área de Educação Matemática, buscando um doutoramento em breve.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ALVARADO-PRADA, L.E.; FREITAS, T.C.; FREITAS, C.A. Formação continuada de professores: alguns conceitos, interesses, necessidades e propostas. **Revista Diálogo Educacional**, Paraná, v. 10, n. 30, p. 367-387, 2010.

ASSIS, A. **Conhecimentos de combinatória e seu ensino em um processo de formação continuada**: reflexões e prática de uma professora. 2014. 169 f. Dissertação (Mestrado) - Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica. Universidade Federal de Pernambuco. Recife. 2014.

BARDIN, Laurence. **Análise de conteúdo**. 3ª. Lisboa: Edições, v. 70, 2004.

BATANERO, M.C.; GODINO, J.D. & NAVARRO-PELAYO, V. **Razonamiento combinatorio**. Madrid: Síntesis, 1996.

BIANCHINI, Edwaldo. **Matemática Bianchini**. 10ª Edição. São Paulo: Moderna, 2022.

BIZA, Irene *et al*. Afinando o foco em matemática: Desenho, implementação e avaliação de atividades MathTASK para a formação de professores de matemática. **Perspectivas da Educação Matemática**, Mato Grosso do Sul, v. 14, n. 35, p. 1-41, 2021.

BIZA, I.; NARDI, E.; ZACHARIADES, T. Competences of mathematics teachers in diagnosing teaching situations and offering feedback to students: Specificity, consistency and reification of pedagogical and mathematical discourses. In: LEUDERS, Timo; Philipp, Kathleen; LEUDERS, Juliane. (Org.). **Diagnostic Competence of Mathematics Teachers.** Cham: Springer, 2018. p. 55-78.

BORBA, Rute. O raciocínio combinatório na educação básica. In: Encontro Nacional de Educação Matemática, X, Salvador. **Anais do X ENEM**. Salvador: SBEM, 2010, p.1-16.

BORBA, Rute Elizabete de Souza Rosa; ROCHA, Cristiane de Arimatéa; AZEVEDO, Juliana. Estudos em Raciocínio Combinatório: investigações e práticas de ensino na Educação Básica. **Bolema: Boletim de Educação Matemática**, Rio Claro, v. 29, n. 53, p. 1348-1368, 2015.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, 2018.

CERIOLI, Márcia; VIANA, Petrucio. Minicurso de Combinatória de Contagem. In: COLÓQUIO DE MATEMÁTICA DA REGIÃO SUL, II, 2012. **II Colóquio de Matemática da Região Sul**. Londrina: UEL, 2012. p. 1-141.

CLARETO, S. M.; ROTONDO, M. A. S. O que Torna uma Matemática Digna de Ocupar Lugar em um Currículo de Licenciatura em Matemática? **Perspectivas da Educação Matemática**, Mato Grosso do Sul, v. 14, n. 35, p. 1-15, 2021.

COCHRAN-SMITH, M.; LYTLE, S. Chapter 8: Relationships of knowledge and practice: Teacher learning in communities. **Review of research in education**, v. 24, n. 1, p. 249-305, 1999.

COELHO, Levy; DIAS, Mônica Souto. Contribuições da metodologia análise de erro para o ensino e aprendizagem da análise combinatória no ensino médio. **Em Teia: Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana**, Pernambuco, v. 13, n. 2, p. 6, 2022.

COSTA, Maria Adélia. O notório saber e a precarização da formação docente para a educação profissional. **Revista Profissão Docente**, Uberaba, v. 18, n. 39, p. 239-254, 2018.

COSTA NETO, Cleber Dias da. **O currículo do curso de formação inicial de professores de matemática da UFRJ:** narrativas possíveis. 2019. 169f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Instituto de Matemática. Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro. 2019.

COSTA NETO, C.; GIRALDO, V. Diálogos sobre o currículo da formação inicial de professores de matemática: narrativas discentes. **Ensino em revista**, Uberlândia, v. 27, n. 3, p. 1029 - 1054, 2020.

CRESWELL, John W. **Projeto de pesquisa: métodos qualitativos, quantitativos e misto.** Luciana de Oliveira da Rocha (Trad.). 2 ed. Porto Alegre: ARTMED, 2007.

DA SILVA KNOPP, I., *et al*. Formação inicial de professores de matemática(s): um olhar decolonial sobre as mudanças de perspectivas dos estudantes. **Revista Paranaense de Educação Matemática**, Paraná, 2020, 9.19: 74-94.

DA SILVA RODRIGUES, R.S.; RODRIGUES, M.U. Conhecimentos de análise combinatória dos futuros professores de matemática. **CoInspiração-Revista dos Professores que Ensinam Matemática**, Mato Grosso, v. 2, n. 1, p. 95-112, 2019.

DAVIS, Brent; RENERT, Moshe. Mathematics-for-teaching as shared dynamic participation. **For the learning of mathematics**, v. 29, n. 3, p. 37-43, 2009.

DAVIS, B.; RENERT, M. Profound understanding of emergent mathematics: broadening the construct of teachers' disciplinary knowledge. **Educational Studies in Mathematics**, v. 82, n. 2, p. 245-265, 2013.

FIORENTINI, Dario; LORENZATO, Sergio. **Investigação em Educação Matemática.** Campinas: Autores associados, 2006.

FIORENTINI, D.; OLIVEIRA, A. O lugar das matemáticas na Licenciatura em Matemática: que matemáticas e que práticas formativas? **Bolema: Boletim de Educação Matemática**, Rio Claro, v. 27, n. 47, p. 917-938, 2013.

FREIRE, Paulo. **Pedagogia da autonomia:** saberes necessários à prática Educativa. São Paulo: Paz e Terra, 1996.

GIRALDO, V. Formação de professores de matemática: para uma abordagem problematizada. Brasil: **Ciência & Cultura**, v.70, n.1, p. 37 – 42, 2018.

GIRALDO, Victor *et al*. Práticas docentes compartilhadas: integrando saberes emergentes da prática na formação inicial de professores de matemática. In: CYRINO, Márcia. (Org.). **Temáticas emergentes de pesquisas sobre a formação de professores que ensinam matemática: desafios e perspectivas**. Brasília, DF: SBEM, 2018, p.216-239

GIRALDO, Victor. Que Matemática para a Formação de Professores? Por uma Matemática Problematizada. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, XIII, 2019, Cuiabá. **Anais do XIII ENEM.** Cuiabá: SBEM, 2019, p. 1-12.

GIRALDO, Victor; ROQUE, Tatiana. Por uma matemática problematizada: As ordens de (re) invenção. **Perspectivas da Educação Matemática**, Mato Grosso do Sul, v. 14, n. 35, p. 1-21, 2021.

HADAR, Nitza; HADASS, Rina. The road to solving a combinatorial problem is strewn with pitfalls. **Educational Studies in Mathematics**, v. 12, n. 4, p. 435-443, 1981.

HAZZAN, Samuel. **Fundamentos de matemática elementar 5***:* combinatória, probabilidade. São Paulo: Atual, 1993.

KLEIN, Felix. **Matemática elementar de um ponto de vista superior -volumes 1 e 2.** Lisboa: SPM, 2009 (edição do original: 1908).

LIMA, Ana Paula; BORBA, Rute. Reconhecendo o princípio fundamental da contagem como estratégia na resolução de problemas combinatórios. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v. 17, n. 4, 2015.

LIMA, E.L; CARVALHO, P.C.P; WAGNER, E.; MORGADO; A.C. **A Matemática do Ensino Médio:** Volume *2*. 11 ed. Rio de Janeiro: Editora SBM, 2016.

LOCKWOOD, Elise; WASSERMAN, Nicholas H.; TILLEMA, Erik S. A case for combinatorics: A research commentary. **The Journal of Mathematical Behavior**, v. 59, p. 100783, 2020.

MARTARELLI, L. da C. T..; SILVA, U. D. da . Compreendendo critérios de validação de problemas de contagem utilizados por professores da Educação Básica. **Ensino em Re-Vista.** Uberlândia, v. 27, n. Especial, p. 1542–1564, 2020.

MATOS, Diego. **Experiências com Matemática(s) na escola e na formação inicial de professores:** desvelando tensões em relações de colonialidade. 2019. 171f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Instituto de Matemática, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro. 2019.

MENDONÇA, M. C. D. Resolução de Problemas pede (re)formulação. In: ABRANTES, P.; PONTE, J. P. da. (Org.). **Investigação Matemática na sala de aula e no currículo**. 1.ed. Lisboa: Associação dos Professores de Matemática-APM, 1999, v. 1, p. 15-34.

MOREIRA, P.C. 3+ 1 e suas (In) Variantes (Reflexões sobre as possibilidades de uma nova estrutura curricular na Licenciatura em Matemática). **Bolema: Boletim de Educação Matemática**, Rio Claro, v. 26, p. 1137-1150, 2012.

MOREIRA, P.C. FERREIRA, A.C. A formação matemática do professor da Educação Básica: das concepções historicamente dominantes às possibilidades alternativas atuais. **Perspectivas da Educação Matemática**, Mato Grosso do Sul, v. 14, n. 35, p. 1-30, 2021.

MOREIRA, P.C.; FERREIRA, A.C. O lugar da matemática na licenciatura em matemática. **Bolema: Boletim de Educação Matemática**, Rio Claro, v. 27, n. 47, p. 981-1005, 2013.

MORGADO, A.C.; CARVALHO, J.B.P.; CARVALHO, P.C.P.; FERNANDEZ, P. **Análise Combinatória e Probabilidade:** com as soluções dos exercícios. 9 ed. Rio de Janeiro: Editora SBM, 2006.

NARDI, Elena. Where form and substance meet: Using the narrative approach of re-storying to generate research findings and community rapprochement in (university) mathematics education. **Educational Studies in Mathematics**, v. 3, n. 92, p. 361 - 377, 2016.

NAVARRO-PELAYO, Virginia; BATANERO, Carmem; GODINO, Juan Díaz. Razonamiento combinatorio en alumnos de secundaria. **Educación matemática**, v. 8, n. 1, p. 26-39, 1996.

NÓVOA, António. Conhecimento profissional docente e formação de professores. **Revista Brasileira de Educação**, v. 27, p. e270129, 2022.

NÓVOA, António. **Imagens do futuro presente**. Lisboa: Educa, 2009.

NÓVOA, António. Os Professores e a sua Formação num Tempo de Metamorfose da Escola. **Educação e Realidade**, Rio Grande do Sul, v. 44, n. 3, 2019.

NÓVOA, António. **Os professores e sua formação**. Lisboa: **Publicações Dom Quixote**, 1992.

PESSOA, Cristiane; BORBA, Rute. Do young children notice what combinatorial situations require? In: **Proceedings…36th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education**, v. 1, p. 261. Taipei, Taiwan: PME. 2012.

PESSOA, Cristiane Azevêdo dos Santos; BORBA, Rute Elizabete de Souza Rosa. O desenvolvimento do raciocínio combinatório na escolarização básica. **Em Teia| Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana**, Pernambuco, v. 1, n. 1, 2010.

POWELL, Arthur B.; FRANCISCO, John M.; MAHER, Carolyn A. Uma abordagem à análise de dados de vídeo para investigar o desenvolvimento de ideias e raciocínios matemáticos de estudantes. **Bolema**, Rio Claro. v. 17, n. 21, p. 81-140, 2004.

ROCHA, C.A. **Formação docente e o ensino de problemas combinatórios:** diversos olhares, diferentes conhecimentos. 2011. 191f. Dissertação (Mestrado). Universidade Federal de Pernambuco - Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica. Universidade Federal de Pernambuco. Recife. 2011.

RODRIGUES, Paulo; DALLA, Alessandra; TEIXEIRA, Bruno Rodrigo. Análise Combinatória e Resolução de Problemas: uma experiência em um contexto de Estágio Supervisionado. **Revista Paranaense de Educação Matemática**, Paraná, v. 2, n. 2, p. 203-229, 2013.

SABO, R. D. **Saberes docentes: a análise combinatória no ensino médio**. 2010. 208f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. São Paulo. 2010.

SHULMAN, L. Those who understand: Knowledge growth in teaching. **Educational researcher**, v. 15, n. 2, p. 4-14, 1986.

SKOVSMOSE, Ole. Cenários para investigação. **Bolema: Boletim de Educação Matemática**, Rio Claro, v. 13, n. 14, p. 66-91, 2000.

SOUZA, A. L. C. P. **Análise combinatória no ensino médio apoiada na metodologia de ensino-aprendizagem-avaliação de matemática através da resolução de problemas.** 2010. 343 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, São Paulo. 2010.

SOUZA, A.C.; ROCHA, C.A. Pesquisas Brasileiras Sobre Combinatória: uma investigação em periódicos na última década. In: CAMPOS, Celso Ribeiro; Perin, Andréa Pavan. (Org.). **Investigações Hispano-Brasileiras em Educação Estatística**. Taubaté: Editora Akademy, 2020. p.41-46.

TARDIF, Maurice. A profissionalização do ensino passados trinta anos: dois passos para a frente, três para trás. **Educação & Sociedade**, v. 34, p. 551-571, 2013.

TARDIF, M.; LESSARD, C.; LAHAYE, L. Os professores face ao saber: esboço de uma problemática do saber docente. **Teoria e educação**, v. 4, p. 215-233, 1991.

TARDIF, M.; RAYMOND, D. Saberes, tempo e aprendizagem do trabalho no magistério. **Educação & Sociedade**, Campinas, v. 21, n. 73, dez. 2000.

TEIXEIRA, P.J.M. Práticas de professores do ensino fundamental durante a resolução de problemas de contagem. **Educação Matemática Pesquisa: Revista do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática**, São Paulo, v. 22, n. 2, p. 081-113, 2020.

TEIXEIRA, Paulo Jorge Magalhães. **Um estudo sobre os conhecimentos necessários ao professor de matemática para a exploração de problemas de contagem no ensino fundamental.** 2012. 459f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Programa de Pós-graduação Stricto sensu em Educação Matemática. Universidade Bandeirante de São Paulo. São Paulo. 2012.

VAZ, Rafael Filipe Novôa. Por que errar ainda é tão errado? Algumas reflexões sobre o papel do erro no ensino e na avaliação de matemática. **Revemop**, Ouro Preto, v. 4, p. e202215-e202215, 2022.

APÊNDICES

APÊNDICE A – TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

Prezado(a) professor(a),

Você está sendo convidado(a) a participar da pesquisa "Impactos da combinatória no contexto da formação inicial de professores de matemática na prática profissional docente", sob responsabilidade do aluno de Mestrado, do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro (PEMAT/UFRJ), Victor Hugo Quaglia de Araujo. Este termo de consentimento livre e esclarecido tem o objetivo de apresentar todos os procedimentos que serão realizados durante a pesquisa "Impactos da combinatória no contexto da formação inicial de professores de matemática na prática profissional docente", cujo objetivo principal é responder a seguinte questão de pesquisa:

Quais são os possíveis impactos da formação inicial de professores de matemática no conhecimento e ensino de combinatória dos docentes no âmbito da educação básica?

Sua participação neste estudo permitirá que a pesquisadora responsável faça a coleta dos dados necessários para sua pesquisa. Os dados da pesquisa serão coletados por meio do preenchimento de formulário online constituído de dados pessoais do professor e entrevista semiestruturada, por meio da gravação de áudio. É necessário esclarecer que:

1) Sua participação é voluntária.

2) Este termo de consentimento livre e esclarecido não tem prazo de validade estabelecido. Ele pode ser revogado por ambas as partes a qualquer momento.

3) A pesquisa não prevê nenhuma compensação financeira para os voluntários, nem custos em sua participação.

4) As informações prestadas nunca serão divulgadas em associação ao seu nome ou de sua família. Todas as análises levarão em consideração os dados agregados.

5) Seu nome nunca será apresentado em nenhuma publicação realizada pela equipe de pesquisa.

6) Você pode, a qualquer momento, solicitar aos pesquisadores quaisquer informações sobre o andamento da pesquisa.

7) O **sigilo** com relação aos dados é garantido. Nenhum dado pessoal será divulgado.

8) Sua participação não envolve riscos significativos. O principal risco é o da exposição dos sujeitos entrevistados que se comprometem a apresentar dados pessoais e de suas experiências que são imprescindíveis para a realização dessa pesquisa. Também é esperado desconforto dos sujeitos ao compartilhar informações pessoais ou confidenciais, ou em alguns tópicos que ele possa se sentir incomodado em falar. Outro risco seria a divulgação indevida de dados, mas nossa equipe está preparada para armazenar os dados mantendo total sigilo.

9) Os benefícios esperados se materializam na contribuição para a formação pessoal, profissional e acadêmica dos participantes da pesquisa, a partir das reflexões apresentadas durante sua realização, além de contribuições para a literatura de pesquisa sobre formação de professores e para a construção de um ensino de matemática de qualidade na educação básica.

10) Os procedimentos adotados nesta pesquisa obedecem aos Critérios da Ética em Pesquisa com Seres Humanos, conforme Resolução n°466 de 2012 do Conselho Nacional de Saúde. Este termo é o seu documento que comprova que me comprometo a preservar seus dados e a sua integridade durante a pesquisa. Você terá garantido o seu direito a buscar indenização por danos decorrentes da pesquisa (Resolução CNS nº 466 de 2012, itens IV.3 e V.7; e Código Civil, Lei 10.406 de 2002, artigos 927 a 954, Capítulos I, "Da Obrigação de Indenizar", e II, "Da Indenização", Título IX, "Da Responsabilidade Civil").

Procedimentos de pesquisa: Caso concorde, você deverá preencher o formulário disponibilizado, realizado por meio do Google Forms, antes de realizar a entrevista.

Formalização: Declaro que fui devidamente informado de todos os procedimentos da pesquisa “Impactos da combinatória no contexto da formação inicial de professores de matemática na prática profissional docente” e concordo em participar da pesquisa.

Rio de Janeiro, / / 202

Nome do professor(a) entrevistado:

____

Assinatura do(a) professor(a) entrevistado(a)

Nome do pesquisador responsável: Victor Hugo Quaglia de Araujo

____

Assinatura do pesquisador responsável

Caso você tenha dúvidas ou necessite de maiores esclarecimentos, você pode nos contatar. Em qualquer etapa do estudo, você terá acesso ao pesquisador responsável (Victor Quaglia) através do telefone (21) 985384760, do endereço eletrônico (victor.quaglia@gmail.com). Se você tiver alguma consideração ou dúvida sobre a ética da pesquisa, entre em contato com o Comitê de Ética em Pesquisa (CEP) do Hospital Universitário Clementino Fraga Filho/HUCFF/UFRJ – R. Prof. Rodolpho Paulo Rocco, n.° 255 – Cidade Universitária/Ilha do Fundão – 7º andar, Ala E – pelo telefone 3938-2480, de segunda a sexta-feira, das 8 às 16 horas, ou por meio do e-mail: cep@hucff.ufrj.br . Este Termo de Consentimento Livre e Esclarecido é emitido em duas vias, que serão rubricadas e assinadas por você, participante da pesquisa, e por mim, pesquisador responsável, sendo que uma destas cópias permanecerá com você. Enfatizo que por se tratar de uma pesquisa com entrevista e produção de dados, se torna importante que você guarde em seus arquivos uma cópia deste documento.

APÊNDICE B – ETAPA 2: QUESTIONÁRIO PARA OS PROFESSORES SELECIONADOS

1. Nome:

2. Idade:

3. Contato:

4. E-mail:

5. Universidade de formação:

6. Período de realização da graduação:

7. Você teve contato com alguma disciplina que tratou da Análise Combinatória, seja diretamente (como uma disciplina para ela, por exemplo), ou indiretamente (como um tópico de alguma disciplina)?

8. Possui especialização? Se sim, em que?

9. Possui Mestrado? Se sim, em que?

10. Possui Doutorado? Se sim, em que?

11. Você se considera pesquisador em Matemática ou Educação Matemática? Se sim, qual é a área de interesse?

12. Atua na escola básica? Se sim, em escola privada ou pública?

13. Atua no Ensino Médio? Se sim, em qual(is) séries?

14. Atua no Ensino Fundamental? Se sim, em qual(is) séries?

15. Você possui preferência em relação a algum nível de ensino para atuação: Ensino Médio ou Fundamental? Por quê?

16. Qual sua carga horário semanal (contando apenas os tempos de sala de aula)?

17. Já atuou no âmbito privado e âmbito público? Em quais períodos isso ocorreu (por exemplo: entre 2000 e 2005 atuei na FAETEC)?

18. Quanto tempo você tem de atuação na Educação Básica?

19. Você já trabalhou em outro ramo que não seja a Educação? Se sim, por quê?