



UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO  
INSTITUTO DE MATEMÁTICA - IM/UFRJ  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE MATEMÁTICA

## **O PROBLEMA DOS MAPAS GEOGRÁFICOS (1772 - 1779)**

JOÃO VITOR MATTOS DA SILVA

RIO DE JANEIRO  
JULHO DE 2024

**JOÃO VITOR MATTOS DA SILVA**

**O PROBLEMA DOS MAPAS GEOGRÁFICOS (1772 - 1779)**

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Ensino da Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Gérard Emile Grimberg  
Universidade Federal do Rio de Janeiro - UFRJ

RIO DE JANEIRO  
JULHO DE 2024

## CIP - Catalogação na Publicação

d58p da Silva, João Vitor Mattos  
da Silva, João Vitor Mattos  
O Problema dos mapas geográficos (1772 - 1779) /  
João Vitor Mattos da Silva. -- Rio de Janeiro, 2024.  
132 f.

Orientador: Gérard Emile Grimberg.  
Dissertação (mestrado) - Universidade Federal do  
Rio de Janeiro, Instituto de Matemática, Programa  
de Pós-Graduação em Ensino de Matemática, 2024.

1. Mapas Terrestres. 2. Euler. 3. Lagrange. 4.  
Lambert. I. Grimberg, Gérard Emile, orient. II.  
Título.

# O PROBLEMA DOS MAPAS GEOGRÁFICOS (1772 - 1779)

**JOÃO VITOR MATTOS DA SILVA**

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Ensino da Matemática.

Aprovado em 04 de Julho de 2024

---

Prof. Dr. Gérard Emile Grimberg  
UFRJ (Orientador)

---

Prof. Dr. Thiago Hartz Maia  
UFRJ

---

Prof. Dr. Cleber Haubrichs dos Santos  
IFRJ

---

Prof. Dr. João Bosco Pitombeira Fernandes de  
Carvalho  
UERJ

RIO DE JANEIRO  
JULHO DE 2024

---

# Agradecimentos

Na vida passamos por percalços, ao qual superamos ou simplesmente ao qual aprendemos a lidar, e por bençãos que nos são concedidas. Nesse tempo ao qual estive no mestrado acredito ter vivido um momento de grandes bençãos, ao qual mudaram o rumo da minha vida. Por isso agradeço a Deus e todos que me ajudaram, direta e indiretamente, pelas mudanças as quais tive em minha vida.

À minha família, **Alzira Maria Mattos da Silva, João Dorival da Silva e Vanessa Mattos da Silva**, que sempre me incentivaram e me deram sempre a segurança necessária para continuar me dedicando aos estudos.

Ao meu orientador, **Gérard Emile Grimberg**, que sempre me incentivou acreditando no meu trabalho, ao ponto de me permitir ministrar por uma vez aula em sua ausência. *Merci pour votre confiance!*

À banca que avaliou este trabalho, pelas orientações e sugestões, por ter aceitado a tarefa de ler e de fazer indicações.

Ao grupo de pesquisa sobre geometria do século XIX, liderado pelo professor **Gérard Emile Grimberg**. Aos amigos: **Jansley Alves Chaves, Magno, Daniel, Ana Clara, Leandro, Jonatham e Lucas**, pelas animadas reuniões semanais, muito produtivas, e pelas trocas de informação, muito obrigado.

Ao Camarada, **Pã Montenegro**, que durante o mestrado se tornou, assim como eu, um novo orientando do **Gérard**, dividindo comigo conversas, estágio e a liderança de grupos no projeto **Arquimedes**, idealizado pelo nosso orientador. Obrigado por dividir esse lugar comigo!

Aos **amigos do programa de Pós-graduação em Ensino de Matemática (Pemat)**, muito obrigado pela convivência e pelas trocas de ideias, mesmo que em grande parte remotamente. Aos professores do programa, que contribuíram na minha formação. Aos **colegas e professores do seminário da linha de História da Matemática**, pelas frutíferas discussões e conversas.

# Resumo

No decorrer do século XVIII, discussões sobre a forma da Terra, e a realização de mapas foi uma preocupação constante dos Estados como a França, a Prússia ou a Rússia, e o desenvolvimento do pensamento iniciado por Lambert de fixar certas propriedades, como a preservação de ângulos, juntamente com o desenvolvimento do cálculo diferencial leibniziano vai tornar possível uma abordagem local, e constituir uma virada essencial no tratamento matemático dos mapas terrestres, que irá repercutir até o século XIX nos trabalhos de Möbius e Gauss com as transformações conformes e o início da geometria diferencial.

Essa dissertação pretende determinar o fio histórico que liga a discussão da forma da Terra, às novas formas de resolução de equações diferenciais parciais, e o estudo sobre os mapas feito entre os anos de 1772 e 1782 com os trabalhos de Lambert, Euler e Lagrange. Neste processo de estudo se faz necessário destacar que o desenvolvimento ocorrido no momento da elaboração destes trabalhos só foi obtido por conta do avanço já obtido com o desenvolvimento de técnicas de resolução de equações diferenciais parciais desenvolvido por D'Alambert e Euler entre as durante às décadas de 30 e 50.

Porém cada trabalho tem sua peculiaridade e origem, sendo cada um dos matemáticos responsável por um novo olhar e abordagem do problema. Lambert neste caso teve uma característica mais epistemológica, ao ser inovador pela forma de pensar o problema. Euler por aplicar de forma excepcional seu conhecimento matemático para aperfeiçoar o trabalho de anterior, e Lagrange vendo um trabalho ainda de cunho generalista a ser feito, se propõe a procurar uma lei de formação para o problema. Neste trabalho iremos apresentar e discutir sobre o processo de cada uma dessas etapas.

**Palavras-chave:** Mapas Terrestres. Lagrange. Euler. Lambert.

# Abstract

Throughout the 18th century, discussions about the shape of the Earth and the creation of maps were a constant concern of states such as France, Prussia and Russia, and the development of the thought initiated by Lambert to fix certain properties, such as the preservation of angles, together with the development of the Leibnizian differential calculus, would make a local approach possible and constitute an essential turning point in the mathematical treatment of terrestrial maps, which would have repercussions until the 19th century in the work of Möbius and Gauss with the conformal transformations and the beginnings of differential geometry.

This dissertation aims to determine the historical thread linking the discussion of the shape of the Earth, the new ways of solving partial differential equations, and the study of maps carried out between 1772 and 1782 with the work of Lambert, Euler and Lagrange. In this process of study, it is necessary to point out that the development that took place at the time these works were written was only achieved because of the progress that had already been made with the development of techniques for solving partial differential equations developed by D'Alambert and Euler between the 1730s and 1750s.

However, each work has its own peculiarities and origins, and each mathematician was responsible for a new approach to the problem. Lambert in this case had a more epistemological characteristic, being innovative in the way he thought about the problem. Euler, by applying his mathematical knowledge in an exceptional way to improve on his previous work, and Lagrange, seeing that there was still general work to be done, set out to find a formation law for the problem. In this paper we will present and discuss the process of each of these stages.

**Keywords:**Earth Maps. Lagrange. Euler. Lambert.

---

# Sumário

<b>1 – INTRODUÇÃO . . . . .</b>	<b>1</b>
1.1 Objetivo . . . . .	5
1.2 Metodologia . . . . .	5
1.3 Estrutura da Dissertação . . . . .	6
<b>2 – CONTEXTO HISTÓRICO . . . . .</b>	<b>7</b>
<b>3 – LAMBERT, JOHANN HEINRICH . . . . .</b>	<b>12</b>
3.1 Biografia . . . . .	12
3.2 Anmerkungen und Zusätze zur Entwerfung der Land- und Himmelscharten . .	15
3.2.1 Um método mais geral para a projeção da esfera de tal forma que seus ângulos sejam preservados . . . . .	26
<b>4 – EULER, LEONHARD . . . . .</b>	<b>33</b>
4.1 Biografia . . . . .	33
4.2 Euler e seus trabalhos . . . . .	36
4.2.1 Considerationes de trajectoriis orthogonalibus . . . . .	36
4.2.2 De repraesentatione superficie sphaericae super plano . . . . .	37
4.2.3 De projectione geographica superficie sphaericae . . . . .	63
4.2.4 De projectione geographica Deslisiana in mappa generali imperii russici usitata . . . . .	75
<b>5 – LAGRANGE, JOSEPH LOUIS . . . . .</b>	<b>77</b>
5.1 Biografia . . . . .	77
5.2 Sur la construction des cartes géographiques . . . . .	79
5.2.1 Premier Mémoire . . . . .	79
5.2.2 Second Mémoire . . . . .	95
<b>6 – CONSIDERAÇÕES FINAIS . . . . .</b>	<b>116</b>
<b>CONSIDERAÇÕES FINAIS . . . . .</b>	<b>116</b>
<b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS . . . . .</b>	<b>119</b>

6.1	Fontes primárias . . . . .	119
6.2	Fontes secundárias . . . . .	121

---

## Introdução

Esta dissertação busca analisar as diferentes soluções obtidas, em um intervalo inferior a 10 anos na década de 70 do século XVIII, para os mapas geográficos, por Johann Heinrich Lambert (1728-1777), no *Anmerkungen und Zusätze zur Entwerfung der Land- und Himmelscharten* (Observações e adições ao projeto das cartas terrestres e celestes) (Berlim, 1772), Leonhard Euler (1707-1783) com a publicação de três trabalhos chamados *De repraesentatione superficieis sphaericae super plano* (Sobre a representação de uma superfície esférica no plano) (São Petersburgo, 1778), *De proiectione geographica superficieis sphaericae* (Sobre a projeção geográfica de uma superfície esférica) (São Petersburgo, 1778) e *De proiectione geographica Deslisiana in mappa generali imperii russici usitata* (Sobre a projeção geográfica Delisle e seu uso no mapa geral do Império Russo) (São Petersburgo, 1778), e Joseph-Louis Lagrange (1736-1813) com duas memórias intituladas *Sur la construction des cartes geographiques* (Sobre a construção de mapas geográficos) (Berlim, 1779).

Mapas geográficos são as representações planas da superfície terrestre completa ou de alguma parte. Na melhor das hipóteses nossos mapas seriam como uma planta baixa da Terra, mantendo proporções, distâncias, ângulos e áreas por exemplo; porém, todas essas características não podem ser satisfeitas ao mesmo tempo devido ao formato esférico da Terra. Caso a Terra fosse plana esse impedimento não existiria, contudo, sendo um sólido esferoidal deparamo-nos com a impossibilidade de representa-la de forma perfeita em um plano, sendo deformada em algum de seus aspectos.

Imaginando a confecção de uma planta baixa da Terra teríamos que associar dois tipos de gráficos: um superior e outro de perfil, para dar a localização e altitude de cada um dos pontos, por exemplo. Assim, com a impossibilidade de construir mapas geográficos que representem perfeitamente os diferentes meridianos e paralelos, os geógrafos pensaram em formar uma espécie de tabela, na qual os mesmos pontos formados pela intersecção desses meridianos e paralelos são colocados de acordo com as regras de perspectiva; foi isso que deu origem aos diferentes tipos de projeção geográfica, que diferem apenas na posição do observador e do plano de projeção em relação à Terra.

Como a localização dos diferentes pontos na Terra é determinada pelos meridianos e paralelos que os atravessam, o desafio central reside em suas projeções. É fácil entender que a projeção de um círculo do globo sobre o plano é geralmente uma seção cônica, resultante da interseção do plano de projeção com o cone que tem esse círculo como base e cujo vértice se encontra na posição do observador.

Dentre os diversos tipos de projeções, a *projeção central* se destaca ao considerar um ponto interno à Terra como o ponto de origem, ou ponto do observador. Nesta projeção todos os círculos de meridianos e paralelos são representados por linhas retas, enquanto os demais círculos são projetados como seções cônicas, de acordo com a posição do plano de projeção em relação ao ponto central. Essa técnica é útil em representações onde é necessário destacar a forma dos meridianos e paralelos de maneira direta, como em modelos de visão interna da Terra. A projeção central pode ser aplicada em situações como a construção de mapas para geodésia ou em estudos sobre a estrutura interna da Terra, proporcionando uma visão clara das linhas de longitude e latitude em relação ao centro da esfera terrestre.

Posicionando o observador na superfície da Terra, por exemplo no polo norte, e tomando o plano de projeção perpendicular ao raio visual que vai do observador ao centro, obtém-se a *projeção estereográfica*, concebida inicialmente por Ptolomeu para a criação de astrolábios ou planisférios celestes. Segundo Lagrange, essa projeção foi “adotada pela maioria dos geógrafos modernos para a elaboração de mapas terrestres” (1779, pp.638). Uma das principais características dessa projeção é que todos os círculos na superfície do globo são representados como círculos no plano projetado. Isso permite que, ao determinar a projeção de apenas três pontos de qualquer meridiano ou paralelo, toda a projeção do círculo possa ser facilmente traçada. Essa propriedade torna a projeção estereográfica especialmente valiosa para representar áreas esféricas de forma precisa, preservando ângulos e formas locais, o que a torna amplamente utilizada em mapas celestes e na cartografia de regiões extensas.

Por fim, ao supor que o observador está situado a uma distância infinita da Terra, fazendo com que todos os raios visuais sejam linhas retas paralelas entre si e, ao considerar que o plano de projeção é perpendicular a esses raios, obtemos a *projeção ortográfica*. Nessa projeção, os círculos ou elipses formados na superfície do globo são representados de acordo com a orientação do plano em relação aos raios visuais. Assim, dependendo da orientação do plano de projeção, esses círculos ou elipses podem se apresentar paralelos, perpendiculares ou oblíquos aos raios visuais.

Isto posto, o tipo de projeção utilizado para os fins cartográficos é completamente indefinido, sendo cada modelo utilizado após a definição das características que se pretende obter no mapa.

Nesta dissertação nosso objeto principal de pesquisa é analisar os trabalhos dos matemáticos citados; além disso, outro objetivo é entender como esses trabalhos, que se sucedem em um período muito curto, interagem entre si assim como ressaltou Lagrange em seu trabalho ao dizer que "Primeiro, resolverei o mesmo problema usando um método diferente daquele dos

Srs. Lambert e Euler e, se não me engano, mais simples e mais geral em alguns aspectos"(1779, pp.641-642). De fato, o trabalho de Lagrange não é só estimulado pelos trabalhos anteriores, como também tenta encontrar uma maneira mais geral de colocar o problema.

Mapas geográficos, na antiguidade, além de possuírem uma importância teórica para o avanço do conhecimento, estes eram motivados por questões práticas. Nesse sentido, podemos destacar a usabilidade dos mapas para viajantes, exploradores, comerciantes e navegadores; donos de terra que os usavam para calcular taxas e heranças; conquistadores e generais que precisavam de mapas para planejar suas incursões militares; e estudiosos que os usavam para perceber e mostrar que o mundo não era apenas aquele visto pelos olhos. Podemos como exemplo citar um diálogo do autor romano Cláudio Aelianus (175-235) ao relatar a conversa entre Sócrates e Alcibíades, um ateniense. Nesse trecho Sócrates percebe um orgulho excessivo vindo do ateniense ao falar sobre a extensão de terra que controlava. Nesse mesmo momento Sócrates mostra a Alcibíades o mapa mundi e pede a ele que o olhe e que mostre seu território no mapa ao que Aelianus responde que as suas terras não estão demarcadas no mapa, dando assim a Sócrates a chance de questioná-lo perguntando "como você pode ter tanto orgulho de propriedades que não estão nem mesmo representadas como um ponto na Terra"(2021, apud PAPADOPoulos).

Dentre os estudiosos da antiguidade que contribuíram de alguma forma em temas geográficos citamos Eratóstenes de Cirene (século III a.C.) que tem o nome associado a mensuração dos meridianos da Terra, Hiparco de Niceia (século II a.C.) que foi o primeiro matemático a descobrir fórmulas para a geometria esférica, e Cláudio Ptolomeu que já citamos anteriormente com seu *Traité de géographie* (tratado de geografia). Tratado que é a marca do ápice das contribuições gregas no campo, sendo a compilação dos principais resultados dos seus predecessores com correções, usando todas as ferramentas ao seu dispor para dar as melhores orientações à construção de mapas geográficos precisos do mundo conhecido. Assim podemos ver que mapas são objetos de pesquisa e interesse desde a antiguidade.

Logo, para realizar nossa análise contamos com a ajuda do estudo recente chamado *Mathematical Geography in the Eighteenth Century: Euler, Lagrange and Lambert* (Geografia Matemática no Século XVIII: Euler, Lagrange e Lambert) de 2022 de CADDEO e PAPADOPULOS o qual analisa o mesmo período e tema fazendo um estudo dos aspectos matemáticos dos trabalhos, não levando em conta os conceitos da época, ao transcreverem todos os processos de cálculo utilizando a linguagem e os conceitos atuais.

Nosso propósito é diferente pois tentamos primeiro entender os cálculos no contexto do cálculo diferencial leibniziano da época visando também contextualizar esses trabalhos de Lambert, Euler e Lagrange. Encontramos também o trabalho de Rosenfeld, em *A History of Non-Euclidean Geometry: Evolution of the concept of a Geometric Space* (História da geometria não euclidiana: Evolução do conceito de um espaço geométrico, 1988) que considera esses trabalhos como uma etapa do desenvolvimento do problema dos mapas.

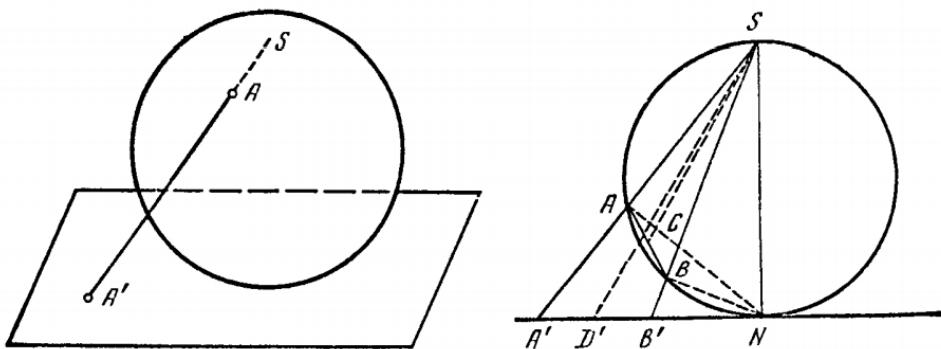
Encontramos informações sobre o envolvimento dessas teorias na resolução deste pro-

blema em Nabonnand (2012), ao analisar o texto posterior de Gauss que acaba por levar o problema dos mapas a um caso ainda mais geral, pois este é visto como a origem das transformações conformes. No início do trabalho de Nabonnand somos informados do desejo de Jean-Gaston Darboux (1842-1917) em escrever um livro sobre "um dos problemas de grande papel no desenvolvimento da geometria diferencial, a construção dos mapas", mostrando que o trabalho dos mapas foi a origem do trabalho de Gauss. Outra informação que encontramos é o da classificação dos trabalhos decorrentes do estudo de Lambert, Euler e Lagrange ao não serem atrelados ao tema dos mapas, como nos diz Nabonnand ao contar sobre uma palestra de Darboux.

Por exemplo, no índice do Repertório Bibliográfico de Ciências Matemáticas<sup>1</sup>, as contribuições para este problema estão dispersas nas classes que listam a geometria infinitesimal em geral ou naquelas dedicadas às curvas no espaço; apenas algumas estão referenciadas na classe "mapas geográficos" sobre geodésia. Da mesma forma, no Jahrbuchüber die Fortschritte der Mathematik, os vários trabalhos que tratam desta questão enquadram-se nas classes relativas à teoria geral das superfícies, representação conformal ou geodésia.(NABONNAND, 2012, pp.2. Tradução nossa.)

Assim fica evidente o papel desempenhado por estes problemas no desenvolvimento de campos matemáticos atuais. Nesta dissertação buscamos realizar um estudo sobre como foi este processo no período, levando em consideração os recursos que eram disponíveis para realização dos trabalhos.

Figura 1.1 – Plano Tangente.



Fonte: Rosenfeld (1988, p. 122)

Além da resolução do problema das transformações envolvidas se percebe a importância de ferramentas utilizadas, com tratamento do problema dos mapas não sendo unicamente encarado de uma forma global. Esse tipo de projeção ainda não envolvia um tratamento local do problema dos mapas, no entanto Lambert, Euler e Lagrange tentam estudá-lo de um ponto de vista local, como é representado na figura (1.1), como um triângulo infinitesimal da Terra

<sup>1</sup> Comissão Permanente do Repertório Bibliográfico de Ciências Matemáticas, Índice do Repertório Bibliográfico de Ciências Matemáticas, Paris: Gauthier-Villars, 1893. Para mais detalhes sobre o Diretório Bibliográfico de Ciências Matemáticas, ver [Rollet e Nabonnand 2002].

se transformando em um triângulo plano no mapa. Esse tipo de tratamento envolve o cálculo diferencial e leva a um sistema de Equações Diferencial Parciais.

Nesse momento a teoria das equações diferenciais parciais já era bem desenvolvida, como apontado na tese de Grimberg (2000), essencialmente por D'Alembert e Euler que utilizaram um tipo de solução envolvendo os números complexos, além disso Euler com seus três volumes intitulados *Institutionum calculi integralis*(Instituições de cálculo integral) publicados em 1768, 1769 e 1770 respectivamente, tornou-se especialista na questão, pois publicou os tratados que resume todos os métodos de resolução de equações diferenciais. São esses métodos que permitem tratar o problema dos mapas de forma local.

## 1.1 Objetivo

Então, podemos resumir os objetivos desta dissertação ao tentar contextualizar o problema dos mapas no século XVIII. Posteriormente, realizar uma análise textual das obras citadas levando em conta os diferentes métodos propostos, assim como as soluções analíticas propostas através de três aspectos:

1. A contextualização do problema dos mapas
2. Análise das memórias sucessivas de Lambert, Euler e Lagrange destacando três aspectos
  - O tipo de abordagem (local e global) que cada um dos autores adota;
  - Os tipos de equações que caracterizam a interpretação analítica do problema por meio de equações;
  - Os diferentes modos de resolução dessas equações.

## 1.2 Metodologia

Como metodologia escolhemos uma pesquisa qualitativa bibliográfica/documental que vai na contramão do tipo de história geral da matemática sobre um tema, como apresentada em *A History of Non-Euclidean Geometry: Evolution of the concept of a Geometric Space* de ROSENFIELD (1988), que apresenta de forma global, diferentes resultados. Fizemos aqui uma análise textual buscando a compreensão dos trabalhos, buscando entender os métodos utilizados nessas memórias, analisando as várias teorias recém-nascidas que aparecem, em particular, a teoria da Equações Diferenciais Parciais.

Diferentemente de Caddeo e Papadopoulos (2022) queremos entender como os autores utilizaram os meios da época. Nesse sentido, aproximamo-nos da metodologia utilizada por Phillippe Nabonnand em *Le problème mathématique des cartes géographiques au 19<sup>e</sup> siècle* (Cordoba, 2012) utilizada justamente para tratar dos problemas dos mapas em Gauss.

Procuramos estabelecer um fio histórico entre os diferentes trabalhos de Lambert, Euler, Lagrange e o seu desdobramento no século XIX. Essa contextualização possibilita que seja realmente uma história no sentido de gênese na qual queremos contribuir, mais do que a questão da herança, ou seja, uma visão atual da matemática sobre textos antigos, mostrando que a matemática propagada atualmente é fruto do esforço dos antepassados, buscando entender as necessidades e etapas da utilização da matemática na resolução desses problemas. Deste modo, queremos evidenciar novas propostas e desafios encontrados no desenvolver destes trabalhos, caracterizando a utilização, talvez, inovadora, de técnicas e propostas de novos métodos/recursos variados na elaboração dos trabalhos, bem como, mostrando a construção da matemática e reforçando o processo de evolução da matemática que conhecemos hoje.

### 1.3 Estrutura da Dissertação

Para desenvolver essa proposta seguimos a seguinte estruturação para a sequência da dissertação.

No capítulo 2 analisamos o problema dos mapas no decorrer do século XVIII que é ligado a constituição e desenvolvimento dos estados nacionais na Europa e a introdução do tema dos mapas para Lambert, Euler e Lagrange.

Os capítulos 3, 4 e 5 são dedicados para a análise das publicações originais e traduções acessíveis dos trabalhos de Lambert, Euler e Lagrange, citados.

Por fim, no capítulo 6 apresentamos as considerações finais do nosso trabalho.

# CAPÍTULO 2

---

## Contexto histórico

No último terço do século XVII físicos, astrônomos e geógrafos começaram a questionar a esfericidade da Terra – um dogma que persistia desde a Grécia antiga, e provavelmente antes. Essa questão envolveu ilustres cientistas em debates, transpassando por aspectos científicos e culturais da Europa, opondo apoiadores das teorias de Newton e de Descartes referentes as ideias sobre a física e a matéria, especialmente, sobre a gravidade. Essas questões geraram também controvérsias em relação a mensuramentos experimentais, reforçando a necessidade de melhores instrumentos. Além disso, com o seguimento do debate e das conclusões, surgiram memórias que originaram o que hoje chamamos de Geometria Diferencial, área com caráter geométrico e político, como as necessidades de mapas. Essa discussão decorreu de tal forma que se estendeu até as três primeiras décadas do século XVIII. Nesse período verifica-se, por exemplo, a pedido de Louis XIV (1638 -1715), em 1669, o projeto francês liderado pelo geógrafo e astrônomo Jean Picard (1620-1682) ao qual se juntou também Jean-Dominique Cassini (1625-1712), baseando-se no método de triangulações<sup>1</sup> para determinação exata de latitudes e longitudes com dados astronômicos. Os mapas resultantes da esfera no plano, pelo método das triangulações, permitiam reduzir grandes cálculos de distâncias a uma série de observações astronômicas que mediam ângulos.

Mapas esses que deveriam mostrar precisamente locais como cidades, estradas, montanhas, rios e pontes. Mapas que eram cada vez mais necessários para a navegação e para otimização das rotas comerciais, valendo citar que existia uma grande competição entre França, Prússia e outros países, pela publicação de mapas cada vez mais precisos.

Nesse estudo os geógrafos franceses chegaram a conclusão de que a Terra não seria esférica e sim esferoidal, fruto da rotação de uma elipse ao redor do eixo, que nesse caso, acreditavam ser sobre o eixo maior da elipse (prolat spheroid) sendo achatada no equador e alongada nos polos. Esse resultado foi formalmente endereçado para a *Royal Academy of Sciences* em 1718 por Jacques Cassini (1677-1756), filho de Jean-Dominique Cassini.

<sup>1</sup> Esse método permite o cálculo de distâncias entre dois pontos distantes na Terra. Esta é uma forma de medir longos arcos geodésicos na superfície. Podendo ler mais sobre o método no *Histoire de l'astronomie moderne* (1821) de Delambre.



Figura 2.1 – A triangulação de uma região "perpendicular ao meridiano de Paris, por César-François Cassini e Jean-Dominique Maraldi.

Fonte: Biblioteca nacional da França, GE C-9987.

Porém, alguns anos depois, Maupertuis (1698-1759) também se torna membro da *Académie Royale de Sciences* tendo em certo momento uma opinião diferente: a Terra é achataada nos polos (oblate spheroid), isso por conta da teoria gravitacional de Newton (1643-1727), juntamente com o experimento de 1672 do francês Jean Richer (1630-1696), um astrônomo que trabalhou no observatório de Paris sendo um dos primeiros membros de *Académie Royale de Sciences*, que com o experimento dos pêndulos percebeu que a performance do pêndulo em Paris e em Cayenne (latitude 5° Norte) para ser a mesma, deveria ter seu comprimento maior na primeira cidade, fato que seria justificado pela força gravitacional ser menor em Cayenne. Consideração essa que foi incluída na primeira versão do *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* (1687) de Newton.

Omitindo algumas partes do percurso desse debate que é sobre a forma da Terra, citamos o trabalho de Christiaan Huygens (1629-1695) o qual endossava o ponto de vista de Maupertuis e Newton, chamado *Discours sur la cause de la pesanteur* (Discurso sobre a causa da gravidade) (t.XXI, p. 427-441) e de Johann I Bernoulli "Essai d'une nouvelle physique céleste, servant à expliquer les principaux phénomènes du ciel, et en particulier la cause physique de l'inclinaison des orbites des planètes par rapport au plan de l'équateur du soleil" (Ensaio sobre uma nova física celeste, usada para explicar os principais fenômenos do céu, e em particular a causa física da inclinação das órbitas dos planetas em relação ao plano do equador do sol) de 1734, que recebeu um prêmio da Académie des Sciences onde confirmava a teoria de Cassini,

evidenciando que diferentes nomes importantes divergiam sobre tais teorias. Nesse aspecto, a maioria dos geógrafos e astrônomos da academia francesa ainda seguiam a teoria de Cassini, por conta dessa teoria ser baseada em medições registradas com equipamentos de medição e não por experimentos baseados na teoria da gravitação. Isso gerou uma competição entre as teorias que culminou em uma nova fase com as expedições que cada um dos lados conseguiu. O projeto de Maupertuis foi aceito e durou 17 meses, entre maio de 1736 e setembro de 1737, na região do ártico da Lapônia Sueca e um ano depois o governo francês enviou uma expedição ao Peru para fazer medições próximas ao equador. Essas expedições foram importantes por consequências de geodésica, mas também pelo ponto de vista acadêmico: as ideias entre Descartes e Newton.

Essa disputa apenas teve fim quando em 1740 César-François Cassini (1714-1784) confirmou os resultados da expedição de Maupertuis, mesmo com as contestações dos resultados apresentados nos anos anteriores, dizendo que agora com os novos equipamentos adquiridos pela *Académie Royale des Sciences* e com sua maior precisão em relação as medições feitas por seu avô e colaboradores, os novos resultados não eram contraditórios aos resultados numéricos da equipe de Maupertuis. Isso ocorreu no mesmo ano em que Maupertuis recebeu o convite de Frederick II da Prússia para ser o presidente da *Académie Royale des Sciences* de Berlim.

Tema esse que Euler também tratou em 1738 publicando em sete partes o artigo intitulado *Von der Gestalt der Erden*(Do formato da Terra) no *Anmerckungen über die Zeintungen*(Notas sobre os jornais), com foco no público geral devido a discussão do tema que deveria ser natural em se tratando do período do Iluminismo. Nesse artigo, Euler comenta com palavras simples as diferentes teorias sobre a forma da Terra, um esferoide achatado nos polos sendo considerada, por ele, como uma laranja e um esferoide alongado nos polos, como um melão. Nesse processo ele comenta sobre as diferenças entre as teorias e, segundo Papadopoulos (2023),

Euler observa que as várias opiniões emitidas sobre esse problema não se basearam apenas em experimentos e medições, mas também em teorias profundas, e que essa questão é importante não apenas para a geografia, mas também para as ciências naturais em geral (CADDEO e PAPADOPoulos, 2022, p. 71. Tradução nossa)

E essa observação faz sentido ao ponto que Euler também tinha outros interesses além do matemático. No segundo artigo da sequência, Euler escreve que tentaria resolver a questão da forma da Terra sem apelar para recursos de experiências, e sim, apenas com a razão pura. Além disso havia seu interesse pelo estudo de tópicos que envolvessem a gravitação.

Porém, ao tratar da forma da Terra, Euler na época da publicação do artigo, apoiava a teoria da Terra achatada nos polos, no caso, na forma de uma laranja. Nesse processo, por exemplo, ao citar as teorias físicas por trás das propostas, Euler apostava que do ponto de vista matemático a superfície da Terra deveria ser lisa, assumindo ser constituída por água, combinado com os resultados ao utilizar o cálculo diferencial para tratar dos vetores perpendiculares que representam a ação da gravidade, gerando assim a superfície lisa necessária. Ainda explicou que se a Terra tivesse a forma de melão, os corpos deveriam ser mais pesados próximos do Equador.

De forma geral os temas que envolviam observações astronômicas – teoria da gravitação e cartografia – estavam ligados, assim como o estudo de trigonometria esférica que seria utilizada

ao considerar a Terra esférica. Vale citar a memória *Élémens de la trigonométrie sphéroïdique tirés de la méthode des plus grands et plus petits* (Elementos de trigonometria esferoidal derivados do método dos maiores e menores valores) de 1755, ao qual Euler desenvolve a teoria matemática por trás das mensurações de graus dos meridianos nas expedições no Peru e Lapônia e discute seus possíveis erros durante essas medições e seus impactos nas discussões sobre a forma da Terra.

Ainda sobre Euler em sua primeira passagem pela *Académie Impériale des Sciences* de São Petersbugo, entre 1727 e 1741, ele teve contato com o famoso geógrafo e astrônomo Joseph-Nicolas Delisle (1688-1768) ao qual se deve grande importância pela introdução de Euler nos temas, ao apresentá-lo ao método que ficou conhecido como *Método de Delisle* que foi utilizado na publicação do *Atlas Ressicus* publicado em 1745 em São Petersburgo e no *Atlas Geographicus*, em Berlim, em 1753 com a direção de Euler. Método esse que gerou um artigo publicado em 1778 por Euler explicando o método, chamado *De proiectione geographica Deslisiana in mappa generali imperii russici usitata*.

A influência de Delisle se deu por sua posição. Ele foi convidado a supervisionar a construção do observatório de São Petersburgo em 1721, pelo Tzar Peter o Grande (1672-1725), que teve como influência para o seu projeto geográfico a recomendação feita por Leibniz (1646-1716) que era um de seus conselheiros, por conta de uma carta trocada entre Leibniz e François Lefort, um general da marinha Russa, onde citava algumas recomendações relativas ao projeto do monarca para introduzir as ciências e artes europeias no Império Russo. Destas as recomendações, em particular a sexta, consistia na avaliação das necessidades exatas do país, especificamente o desenvolvimento geográfico e a arte de desenhar mapas, tendo Delisle papel fundamental nesse projeto.

Porém, Delisle só foi para São Petersburgo em 1726 ao receber a liberação condicionada para continuar trabalhando em temas geográficos do interesse do governo francês, além disso, acabou permanecendo lá por 22 anos onde fundou a escola de astronomia, que anos depois se tornou uma das mais renomadas, supervisionou a construção de um observatório na ilha de Vasilievsky e ao mesmo tempo era responsável pelo departamento de geografia da *Académie Impériale des Sciences* com a principal tarefa de fazer medições precisas e desenhos de novos mapas do Império.

E para o desenvolvimento dos trabalhos, Delisle contava com outros matemáticos que eram necessários para auxiliar no processo, contudo, em 1731 com a volta de Joakob Hermann (1678-1733) para a Basileia, e em 1733 com a partida temporária de Daniel Bernoulli (1700-1782), Euler foi a escolha natural começando sua colaboração em 1735. Entretanto, em 1740, por conflitos entre Delisle e a administração da *Académie Impériale des Sciences* devido ao atraso na entrega do *Atlas Russicus*, a liderança do projeto passa para Euler, tornando-se oficialmente o líder do departamento de Geografia e do projeto, antes liderado por Delisle. Esse atlas foi concluído apenas em 1745, com Euler já estando em Berlim desde 1741, 15 anos após seu início.

Com sua mudança para Berlim até o ano de 1766, Euler manteve sua produção na Aca-

démie Impériale des Sciences e na Académie Royale des Science, sendo presente regularmente no *Actes* da Academia de São Petersburgo e tendo, no período de 1746 a 1771, seus artigos compondo metade das *Mémoires* da Académie Royale des Sciences de Berlim segundo Papadopoulos (2014). Nesse período de Euler, em Berlim, ele recebeu a primeira carta de Lagrange, em 1754, e uma outra em 1755 onde o jovem Lagrange, aos 19 anos, comunicava suas novas ideias descobrindo o Cálculo das Variações, que simplificaram alguns trabalhos de Euler ao evitar argumentos geométricos por analíticos ao que levou mais tarde diretamente para a equação que ficou conhecida como Euler-Lagrange. Essa carta de 1755 foi a carta a qual Euler respondeu, isso por não ter respondido a carta de 1754, no mesmo ano, expressando uma alegria por ter sido informado sobre essa descoberta parabenizando-o por "levar a sua teoria dos máximos e mínimos ao seu mais alto grau de perfeição".

Assim se inicia o relacionamento de Euler e Lagrange, ao qual temos acesso a diversas cartas no *Oeuvres* de Lagrange no tomo 14, assim como no *Opera Ominia* IVA volume V do qual discutiam tópicos como teoria dos números, análise, geometria e física obtendo em muitos desses campos resultados complementares. Nesse período temos por uma proposição de Euler a eleição de Lagrange como membro estrangeiro da Académie Royale des Science de Berlim e em 1766, por recomendação de Euler e d'Alembert, a ocupação de Lagrange como sucessor de Euler na direção de matemática da Académie Royale des Science de Berlim. No mesmo período Euler recomendou Lambert para a posição de professor de astronomia na Académie impériale des sciences de São Petersburgo, o qual viajou para Berlim em 1764 a convite de Euler.

Juntamente a Euler e Lagrange, Lambert também tinha uma variedade de tópicos ao qual se interessava, e com seu *Monatsbuch* (Livro do mês), mantinha um jornal científico desde 1752 escrevendo em latim e alemão sobre os problemas aos quais se dedicava. Nesses trabalhos percebe-se que ela era interessado tanto por problemas com aspectos abstratos, quanto práticos, de natureza matemática, física, astronômica, técnica e filosófica. Dentre eles o tópico de mapas ocorre frequentemente aparecendo já em junho de 1752 ao utilizar as palavras chave "*mappae geograph*". Sendo mais específico em 1755 já tratando a questão de mapas ideais e em 1762 ao estudar a preservação das proporções de áreas em mapas, sendo parte do trabalho que tem seu elemento principal em 1770 apresentando muitas vezes o termo "*mappis geographicis*".

Além do contexto da época, e partindo para os trabalhos específicos que serão tratados, citamos que na introdução da segunda tese de doutorado de Bonnet (1819-1892), a qual trata dos trabalhos de Euler, Lagrange e Gauss sobre cartografia, onde segundo ele, o problema da caracterização dos mapas de uma superfície a nível infinitesimal começou por Lambert, com Euler e Lagrange dando soluções ao se tratar de uma superfície de uma esfera, ou de revolução. Já Gauss, que não trataremos aqui, dá uma solução para superfícies arbitrárias.

# CAPÍTULO 3

## Lambert, Johann Heinrich

### 3.1 Biografia



Figura 3.1 – Lambert.

Lambert, que provavelmente nasceu em 26 de agosto de 1728 em Mulhouse e morreu em 25 de setembro de 1777 aos 49 anos em Berlim, foi um matemático, físico, astrônomo e filósofo que teve o início de sua vida já conturbada com o deslocamento de seus ancestrais por serem calvinistas, mudando-se de Lorraine para Mulhouse. Seu pai e avô sendo alfaiates acabaram por passar os ofícios a ele, sendo ainda órfão de pai em 1747 quando tinha 19 anos tendo mais quatro irmãos e sua mãe. Nesse cenário de circunstâncias improvisadas Lambert deixou a escola aos 12 anos para ser assistente do pai, contudo sua instrução elementar e treinamento em francês e latim acabaram por possibilitar a continuidade de seus estudos sem um tutor, estudando sozinho após seu horário de serviço. Aos 15 anos conseguiu um emprego como escrivão em uma empresa siderúrgica devido a sua bela caligrafia e dois anos depois tornou-se secretário de Johan Rudolf Iselion (1705-1779) que foi editor da *Basles Zuitung* e, posteriormente, professor de Lei na Universidade de Basel, possibilitando assim a continuidade dos seus estudos privados.

Em uma carta vemos seu interesse nos estudos da matemática, astronomia e física por uma certa relação com seus estudos nas áreas humanas e filosóficas:

Comprei alguns livros para aprender os primeiros princípios da filosofia. O primeiro objetivo de meus esforços era os meios para me tornar perfeito e feliz. Entendi que a vontade não poderia ser aprimorada antes que a mente fosse iluminada. Estudei: [Christian] Wolff "Sobre o poder da mente humana"; [Nicolas] Malebranche "Sobre a investigação da verdade"; [John] Locker "Aspectos da mente humana" [Lambert provavelmente se refere ao *Essay Concerning Human Understanding*] As ciências matemáticas, em particular a álgebra e a mecânica, me forneceram exemplos claros e profundos para confirmar as regras que eu havia aprendido. Assim, eu fui capaz de penetrar em outras ciências com mais facilidade e mais profundamente, e a explicá-las aos outros, também. É verdade que eu estava bem ciente da falta de instrução oral, mas tentei substituir isso com ainda mais assiduidade, e agora, graças à ajuda divina, cheguei ao ponto em que posso apresentar ao meu senhor e à minha senhora o que aprendi. (GILLISPIE, *Dictionary of Scientific Biography*, pp.596)

Com isso podemos perceber que a aproximação com a matemática foi uma consequência da caminha de leituras em busca do sentido da vida, onde acabou por encontrar uma compatibilidade entre a matemática e os eventos da vida, como uma possível ferramenta. Assim, temos uma ideia da sua trajetória até o encontro com a matemática. Nesta carta também se percebe que aparentemente Lambert já exercia a profissão de professor, que começou em 1748 em Chur na casa de Reichsgraf Peter von Salis o qual fora embaixador no tribunal inglês, dando aulas a seu neto Anton de 11 anos, seu primo Baptista também com 11 anos e de Johan Ulrich von Salis-Seewis de 7 anos. Permaneceu como tutor por dez anos sendo este um período de desenvolvimento intelectual por conta do acesso a biblioteca da família, proporcionando novas e mais profundas reflexões, além de proporcionar o convívio e contato com os colegas da família a qual servia como tutor. Nesses anos em Chur, Lambert começou a escrever as bases para o seu trabalho científico, seu *Monatsbuch* (1915), um diário que começou em 1752 e foi até sua morte relatando mês a mês suas principais ocupações. Foi neste período também que ele construiu algumas de suas ferramentas para seus trabalhos e observações astronômicas que foram suas preferidas mesmo após ter acesso outras ferramentas. Não obstante ele se tornou membro da Sociedade Literária de Chur e da Sociedade Científica da Suíça com base na Basileia, fazendo observações meteorológicas por pedido desta última. Em 1755 sua primeira de muitas publicações no *Acta Helvetica* apareceu no mesmo ano em dois volumes tratando com a medição do calor calórico.

Em 1756 Lambert embarca com Anton e Baptista em uma série de viagens pela Europa passando por Göttingen estudando, assim, os trabalhos dos Bernoullis e Euler, tendo contato com Abraham Gotterlff Kästner (1719-1800) e com o astrônomo Tobias Mayer (1723-1762), além de ter participado dos encontros da *Learned Society*(Sociedade Científica) de Göttingen até deixar a cidade em 1757, devido a ocupação francesa durante a Guerra dos 7 Anos, indo para Utrecht, onde conheceu o físico Pieter van Musschenbroek (1692-1761); Paris, onde conheceu d'Alambert (1717 - 1783); Marseilles, Nice, Turim e Milão até retornar a família Salis.

Almejando um cargo científico permanente na Universidade de Göttingen, foi convidado a ir para Zurique onde fez observações astronômicas com Gessner (1709-1790), sendo eleito membro da Sociedade física da cidade e publicando o *Die freye Perspektive* (A perspectiva livre - 1759). Posteriormente foi convidado para liderar uma nova academia bávara em Munique,

baseada na *Académie Royale des Sciences* de Berlim, deixando-a em 1762. Retornou a Suíça e trabalhou como geômetra em demarcações de fronteira entre Milão e Chur. Foi convidado para uma posição na *Académie Impériale des Sciences* de São Petersburgo, viajando em 1764 para a capital sendo recebido por Euler e Johan Georg Suizer (1720-1779), onde sofreu por sua aparência, não pela primeira vez, agora com Frederick o Grande (1740-1786) que recusou Lambert ao vê-lo pessoalmente, contudo mudou de ideia após perceber a *immeasurableness of insight* de Lambert, aumentando assim sua remuneração e o tornando membro da nova comissão econômica da academia com Euler, Sulzer e Hans Bernard Merian (1723-1797). Lambert foi também membro da classe de física da academia até a sua morte aos 49 anos, produzindo mais de 150 publicações. Dentre suas publicações, as primeiras filosóficas foram *Neuves Organon* (Novo Organon - 1764) e *Anlage zur Architeconic* (Anexo ao Arquitetônico - 1771) dedicando os últimos 10 anos de sua vida aos problemas matemáticos e físicos. Sendo notável a Immanuel Kant (1724-1804) que iria fazer uma dedicatória aos trabalhos de Lambert em filosofia, em sua crítica da razão pura, porém, Lambert morreu antes disso ocorrer.

Quanto a sua produção relacionada a astronomia e física podemos citar o propósito de inserir a matemática com sua exatidão para garantir seus resultados de pesquisa. Lambert buscou estudar fragmentos de cometas, descobriu um teorema em geometria que carrega seu nome, sugeriu um método de determinar se a distância da Terra ao Sol era maior que da Terra e um cometa. Além disso, fez grandes esforços para uma coalizão de colaboração entre os pesquisadores da época, incentivando trabalhos em colaboração, relacionados com o pensamento de Leibniz (1646-1716), gerando um novo período de colaboração internacional. Ainda propôs uma ideia astronômica da via láctea que, de fato, foi levada a sério por constatações posteriores de que sua teoria era compatível com as observações e não sendo apenas uma ficção científica. Atuou também nas áreas de fotometria, higrometria e pirometria, em física.

Já na matemática a maior parte de seus trabalhos estão no *Beytäge zum Gebrauch der Mathematik und deren Anwendung* (Notas sobre o uso da matemática e sua aplicação, 1765-1772). Alguns dos seus resultados mais marcantes foi a prova da irracionalidade do  $\pi$  com uso de frações contínuas; trabalhos com séries em que o coeficiente 2 só aparece com expoentes primos; também teve interesse pela teoria dos números, desenvolvendo um método para os fatores primos de um determinado número grande de forma simplificada por tabelas. Muitos de seus estudos estavam relacionados a trigonometria, trabalhando com funções hiperbólicas e teoremas na geometria das cônicas.

Seu segundo Livro *Die freye Perspektive, oder Anweisung, jeden perspektivischen Aufriss von freye Stücken und ohne Grundriss zu verfertigen* (Perspectiva livre, ou instrução para fazer todo esboço de perspectiva de peças livres e sem planta baixa) de 1779, também publicado em francês, é considerado uma obra-prima no ramo da geometria descritiva, assemelhando-se ao trabalho de Gaspar Monge (1746-1818) considerado o fundador da geometria descritiva por sua generalidade. Outra contribuição foi a publicação póstuma do *Theorie der parallel-Linien* (Teoria das linhas paralelas) em 1786 onde foi trabalhado novamente a tentativa de provar o quinto

postulado de Euclides. Em seus trabalhos, Lambert chegou a grandes resultados ao perceber que a soma dos ângulos de um triângulo em um dos 3 casos era menor que 180 graus e que no outro seria maior. Nesta primeira ele imaginou a geometria esférica e na segunda pensou em uma geometria "imaginária".

Por último citaremos seus trabalhos na teoria da construção de mapas, sendo o primeiro de seu tempo a dar condições matemáticas para projeções cartográficas com a preservação de ângulos e áreas, dando sugestões de como se fazer as diferentes formas atreladas às condições iniciais que poderiam facilitar o processo.

## 3.2 Anmerkungen und Zusätze zur Entwerfung der Land- und Himmelscharten

A memória de Lambert tratada aqui é parte de uma coleção de nove trabalhos, que compõem o terceiro volume das *Beiträge zum Gebrauch der Mathematik und ihren Anwendungen* (Contribuições para o uso da matemática e suas aplicações). Como fora, desde 1765, membro da *Académie des Sciences* de Berlim, um de seus trabalhos *Anmerkungen und Zusätze zur Entwerfung der Land- und Himmelscharten* (Observações e acréscimos ao projeto das aberturas de terra e céu) envolvia o desenvolvimento de mapas e de calendários astronômicos, porém seu interesse por mapas é anterior a esse período. Antes de propriamente iniciarmos os cometários sobre o trabalho de Lambert, é de interesse explicar que o seu trabalho é dividido em parágrafos, ao qual indicaremos com o símbolo (§) acompanhado de um número, se referindo ao parágrafo ao qual estamos no trabalho de Lambert. Ao tratar do texto, Lambert começa seu trabalho sobre mapas primeiramente sobre partes da esfera, buscando propriedades chaves em suas buscas como, por exemplo, preservação de formas dos países, preservação de proporções de áreas e mapeando geodésicas em retas ou círculos. De forma que o historiador Wangerin comenta sobre Lambert em sua reimpressão do seu trabalho:

“Aqui estão as primeiras investigações gerais sobre projeções cartográficas. Enquanto seus antecessores se limitaram à investigação de certos métodos de projeção, em particular os de perspectiva, Lambert considera o problema da projeção da esfera no plano de um ponto de vista mais geral [...] assim, pode-se falar do início de uma nova era da teoria das projeções.” (WANGERIN, 1894, p. 78. Tradução nossa.)

Corroborando assim com a ideia que o considera como o fundador da cartografia moderna e, provavelmente, sendo o primeiro a tentar descobrir uma caracterização geral de mapas geográficos, apresenta de forma arbitrária a preservação de ângulos da esfera para o plano.

Logo de início, em seu trabalho, Lambert já pontua cinco itens que um mapa perfeito deveria possuir, sendo eles:

1. não desfigurar as formas dos países;
2. que as áreas dos países do mapa tivessem suas verdadeiras proporções em relação aos demais;

3. que as distâncias entre lugares tivessem a mesma proporção que sua verdadeira distância;
4. que lugares sobre uma linha na Terra, ou melhor, sobre um círculo máximo na esfera, também estivessem sempre em uma linha reta no mapa;
5. que as longitudes e latitudes fossem facilmente encontradas no mapa.

E em seguida aponta que por ser tratar de uma esfera, é impossível ter todas as condições satisfeitas ao mesmo tempo em um mapa, sendo necessário considerar uma ou várias condições particulares a serem satisfeitas no mapa.

O seu trabalho de forma geral foi dividido em algumas partes, com foco em diferentes objetivos. Entre os parágrafos §1 e §11 foi dedicado para a introdução, de §12 a §46 trata de analisar as distâncias entre os locais nos mapas (ao considerar as distâncias de forma angular), do §47 ao §57 busca uma método mais geral para a projeção da esfera de tal forma que os ângulos fossem preservados, a partir de 58 busca uma expansão do método indo até o §64, do §65 em diante apresenta o resultado, aplica o método em um caso especial no §80, apresenta um estudo sobre projeções regulares da Terra no §93, projeções da superfície da Terra com respeito as áreas dos países no §100 e apresenta uma projeção esferoidal da superfície da Terra no §111.

Na introdução ele começa uma analogia de como seria um mapa, ao mapear uma montanha, por exemplo, ao passar um plano em sua base e traçar linhas ortogonais em relação a esse plano, oriundos dos pontos da montanha para dar suas alturas. Como exemplo, para fazer um mapa da Europa com três pontos sendo os marcos para a base do plano, utilizando a mesma técnica para determinar a localidade das posições a serem marcadas no mapa, sendo similar ao mapa de uma montanha. Essa projeção conhecida como ortográfica, tem um limitante de poder representar no máximo metade da Terra, porém Lambert aponta que não tem conhecimento da utilização dessa projeção, nem para o mapeamento de países individuais, sendo mais utilizado por astrônomos.

Dessa forma, declinando sobre a ideia associativa do mapa com uma planta baixa, foram escolhidas as ideias de projeções perspectivas para essa finalidade, onde a superfície da Terra seria desenhada a partir de um ponto de vista determinado. Sobre esse tema é apontado que o professor Karsten<sup>1</sup> teria apresentado, recentemente, uma teoria analítica geral no volume 5 do *Bayerische Abhandlungen* (Tratados da Baviera), estendendo o conhecimento sobre a área. E explicando de forma simples, que são inúmeras as possibilidades para se colocar o olho, sendo adotada normalmente três pontos de vistas. Primeiramente colocando o olho infinitamente longe da Terra, resultando a mencionada projeção ortográfica; outra escolha é de colocar o olho na superfície da Terra, sendo chamado esse tipo de projeção de estereográfica; e, por último, colocando o olho no centro da Terra, chamando essa projeção de central.

<sup>1</sup> Wenceslaus Johann Gustav Karsten (1732-1787) foi professor de lógica, matemática e física na Universidade de Bützow, na Prússia, de 1760 a 1778, onde também dirigiu o observatório. Ele também foi membro da Academia de Ciências da Baviera, em Munique.

E comentando, imediatamente após, sobre a projeção estereotopográfica com excelentes propriedades, como a de que todos os círculos da esfera aparecem como linhas retas, ou círculos no plano, preservando assim os ângulos por essa projeção e, por isso, sendo utilizada normalmente para o mapeamento da superfície terrestre e de continentes, assim como da esfera celeste. E citando Hase<sup>2</sup> (1684-1742) que introduziu a chamada projeção estereográfica horizontal, onde o olho é colocado no centro do país a ser mapeado, sendo esse método o oitavo descrito por Verenius<sup>3</sup> (1622-1650) e também tendo uma teoria analítica apresentada por Kästner<sup>4</sup> sobre o método no *Dissert, math, et physicis*. Essa iniciativa de centralizar o local desejado ocorre por conta da característica da projeção estereográfica onde as distâncias, quanto mais longe do centro estiverem, crescem como a tangente da metade de sua distância até o centro.

Sobre a projeção central é mencionada a propriedade de que todos os círculos da esfera aparecem como linhas retas, enquanto os pequenos círculos da esfera são representados por seções cônicas, sendo raramente círculos. A vantagem dessa projeção é que locais situados sobre grandes círculos sempre estariam sobre retas no mapa. No entanto, a utilização deste método na construção de mapas por Lambert é desconhecida, o qual diz que teria a exceção de sua utilização para mapas solares por amadores, porém é útil na construção de mapas celestiais como, citado, o trabalho de Doppelmayr<sup>5</sup> que em suas seis placas mostrou o céu inteiro, embora não com a precisão desejada. A propósito, usando a projeção central, não é possível representar um hemisfério inteiro pois as distâncias do centro aumentam consoante as tangentes dos graus. Isso também implica que os tamanhos dos países são muito diferentes e sua forma é distorcida consideravelmente.

Deste modo, Lambert conclui que nenhuma das três projeções contempla todas as demandas desejadas, mesmo que cada uma delas tenha suas vantagens e desvantagens. Destacamos em particular que a condição da preservação da proporção real das áreas dos países não é atendida por nenhuma das projeções e que a relação sobre as distâncias é parcialmente atendida quando mudanças especiais na projeção são feitas e planejadas para isso. Isso foi tópico de estudo de Richmann<sup>6</sup> no seu artigo *De perficiendis mappis geographicis, imprimis universalibus, per idoneas scalas metiendis inservientes* (Na elaboração de mapas geográficos, especialmente os universais, servindo para medir por escalas adequadas) no Volume 13 do *Commentarii of Petersburg* (Comentários de Petersburgo) de 1751, em que, aos olhos de Lambert, o artigo carece

<sup>2</sup> Johann Matthias Hase foi professor de matemática na universidade de Wittenberg desde 1720 e um cartógrafo eminente. Seu mapa mundi *planiglobii terrestris mappa universalis* foi publicado pela editora Homann, Nürnberg, 1746.

<sup>3</sup> Bernhardus Varenius foi famoso pelo seu trabalho *Geographia generalis*, publicado em 1650 sobre geografia geral sistemática.

<sup>4</sup> Abraham Gotthelf Kästner (1719-1800) ocupou o cargo de professor de filosofia natural e geometria na Universidade de Göttingen desde 1756. Lambert conheceu Kästner lá em 1756 durante suas viagens como tutor particular da família von Salis. Kästner foi o orientador de doutorado de Johann Pfaff (1765-1825), que foi o orientador de doutorado de Carl Friedrich Gauss.

<sup>5</sup> Johann Gabriel Doppelmayr (1677-1750) foi professor de matemática na Universidade de Nürnberg e desde 1710 diretor do observatório de Nürnberg. Ele produziu globos terrestres e globos celestes com Johann Georg Puschner e, em 1742, publicou um atlas celeste.

<sup>6</sup> Georg Wilhelm Richmann (1711-1765) foi professor de física na Academia de Ciências de São Petersburgo.

de um aprimoramento.

Contudo a ideia de utilizar a projeção em perspectiva não pode ser a única a ser levada em consideração já que, por exemplo, na navegação são utilizadas as cartas náuticas que são uma composição especial de mapas, que parece ter chegado a perfeição devido a sua finalidade desde o tempo de Mercator<sup>7</sup> (1512-1594). Porém, a composição de ter um ou mais objetivos a serem satisfeitos, sendo aqui um ponto ao qual Lambert cita o exemplo da proposta cilíndrica de mapa de Bellin<sup>8</sup>, ao qual aponta não satisfazer nenhum objetivo específico.

E ainda na parte de levantamento bibliográfico de seu trabalho, Lambert cita o fato da forma elíptica da Terra, diferente da esférica que foi matéria de estudo de Lowiz<sup>9</sup>, ao qual não entraremos muito no assunto, bastando citar que Lambert chega à conclusão de que não vai gerar um problema no desenho, mas somente uma diferença nos cálculos, fazendo de forma separada ao ver o que pode ser considerado quando adotada uma forma diferente da esférica.

E relembrando entre as propriedades desejadas dos mapas terrestres mencionadas no início, Lambert percebe que nos casos das proporções de distâncias ou áreas têm suas características pouco preservadas ou não, sendo em sua totalidade. Estas últimas podem ser preservadas de diferentes maneiras. Richmann só começou a considerar este aspecto, sendo o primeiro problema das distâncias impossível de resolver ao se utilizar apenas as escalas uniformes habituais, contudo construções para encontrar as distâncias para vários tipos de projeções são suficientemente complicadas e inconvenientes. Ele indica o método mais simples, o qual é habitualmente utilizado para as cartas náuticas de Mercator. Mas, para a trajetória de um navio, só num caso indica o seu comprimento real e isso quando o navio navega direto ao longo do meridiano. Richmann trata o assunto por cálculo e não por uma simples construção e, como Lambert, diz não ter conhecimento de nada mais adequado nesta matéria, pois considera o problema como completamente sem solução, iniciando uma busca acerca do tema.

E assim, com foco em mapas para determinar as distâncias dos locais<sup>10</sup>, Lambert toma  $A, P, B$  como três lugares sobre a esfera e denota suas distâncias, no caso os ângulos correspondentes,

$$AP = \xi, BP = \eta, AB = \zeta.$$

<sup>7</sup> Gheert Cremer, mais conhecido por Gerardus Mercator (1512-1594), desenvolveu mapas para navegação indicando os meridianos como linhas verticais e os paralelos de latitude como linhas horizontais, de modo a que o rumo de um navio que navegasse com um rumo constante pudesse ser representado no mapa por linhas retas e teria o mesmo ângulo com os meridianos que a direção indicada na bússola do marinheiro. Uma vez que este método simplificou consideravelmente a navegação e Mercator conseguiu estabelecer um negócio muito bem-sucedido na impressão e distribuição dos seus mapas.

<sup>8</sup> Jacques-Nicolas Bellin (1703-1772) foi um cartógrafo-chefe da marinha francesa. Dirigiu o Dépôt des cartes et plans de la Marine, cujos mapas eram famosos em toda a Europa. Bellin foi também membro do grupo de enciclopedistas em torno de Diderot e d'Alembert.

<sup>9</sup> Georg Moritz Lowitz (1722-1774) foi um astrônomo e geógrafo. Em 1751 tornou-se professor de matemática e diretor do observatório de Nuremberg, sucedendo a Doppelmayr.

<sup>10</sup> Entenderemos locais como os pontos na superfície estudada, sendo esferas ou elipsoides

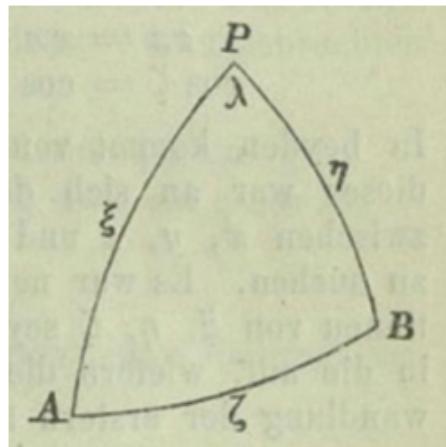


Figura 3.2 – Triângulo esférico.

E tomado  $APB = \lambda$  o ângulo do triângulo esférico. Onde  $P$  pode ser o polo e assim  $\lambda$  seria a diferença de longitude entre os lugares  $A$  e  $B$ .

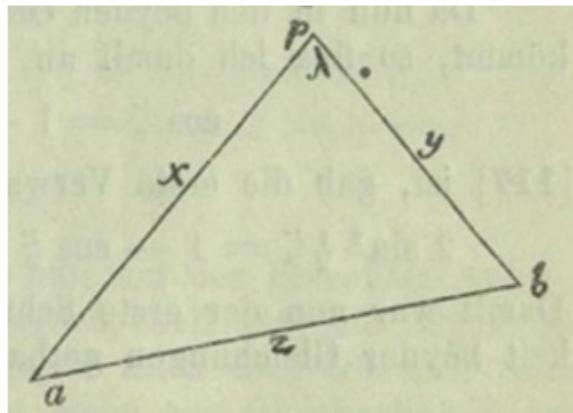


Figura 3.3 – triângulo plano associado ao triângulo esférico.

Agora tomando  $a$ ,  $p$  e  $b$  os lugares correspondentes aos locais que serão mapeados, adotando as distâncias

$$ap = x, bp = y, ab = z.$$

Do qual se chega que os ângulos dos dois triângulos não podem ser comparados a uma proporção razoável, pelo fato da soma dos ângulos dos vértices  $A$ ,  $P$  e  $B$  ser maior que  $180^\circ$  e dos ângulos dos vértices  $a$ ,  $p$  e  $b$  igual a  $180^\circ$ . Assim, considera-se que o ângulo  $apb = APB = \lambda$  faz com que o ponto  $P$  assuma uma função no mapa que não pode ser assumida por outros dois pontos  $A$ ,  $B$ , do qual todos os lugares a serem desenhados no mapa tem uma relação com o ponto  $P$ . Ademais, Lambert continuou a investigação por ainda ver a possibilidade de fazer suposições adicionais, caso algo corresse de uma forma que ele não esperava.

Assim, ao escrever a lei dos cossenos para os dois triângulos, o cartesiano e o esférico, chegou nas duas equações

$$z^2 = x^2 + y^2 - 2xy \cos \lambda \quad (1)$$

$$\cos \zeta = \cos \xi \cos \eta + \sin \xi \sin \eta \cos \lambda. \quad (2)$$

Sendo que estas duas equações contêm o cosseno do ângulo  $\lambda$ , fazendo com que a busca por analogias entre  $x, y, z$  e  $\xi, \eta, \zeta$  se iniciasse, procurando uma forma dos primeiros serem funções dos últimos, podendo responder a essa questão buscando uma forma de transformar a segunda equação na primeira através de transformações adequadas, a fim de comparar os triângulos.

Então como nas duas equações (1) e (2) aparecem em um termo os elementos  $\zeta$  e  $z$ , ele observou que

$$\cos \zeta = 1 - 2 \sin^2 \frac{1}{2} \zeta \quad (3)$$

leva a transformação ao ser substituída (3) em (2), obtendo

$$2 \sin^2 \frac{1}{2} \zeta = 1 - \cos \xi \cos \eta - \sin \xi \sin \eta \cos \lambda \quad (4)$$

Partindo para a próxima etapa ao definir

$$\cos \xi = 1 - 2 \sin^2 \frac{1}{2} \xi \quad (5)$$

$$\cos \eta = 1 - 2 \sin^2 \frac{1}{2} \eta \quad (6)$$

e obtendo ao substituir (5) e (6) em (4)

$$2 \sin^2 \frac{1}{2} \zeta = 2 \sin^2 \frac{1}{2} \xi + 2 \sin^2 \frac{1}{2} \eta - 4 \sin^2 \frac{1}{2} \xi \sin^2 \frac{1}{2} \eta - \sin \xi \sin \eta \cos \lambda \quad (7)$$

ou de forma equivalente

$$\sin^2 \frac{1}{2} \zeta = \sin^2 \frac{1}{2} \xi + \sin^2 \frac{1}{2} \eta - 2 \sin^2 \frac{1}{2} \xi \sin^2 \frac{1}{2} \eta - \frac{1}{2} \sin \xi \sin \eta \cos \lambda. \quad (8)$$

Do qual Lambert percebeu que era possível definir

$$\sin \frac{1}{2} \zeta = z, \quad (9)$$

mas impossível definir

$$\sin \frac{1}{2} \xi = x \quad (10)$$

$$\sin \frac{1}{2} \eta = y \quad (11)$$

a fim de fazer com que as equações fossem semelhantes. A única forma, portanto, era descobrir se a última equação (8)

$$\sin^2 \frac{1}{2} \zeta = \sin^2 \frac{1}{2} \xi + \sin^2 \frac{1}{2} \eta - 2 \sin^2 \frac{1}{2} \xi \sin^2 \frac{1}{2} \eta - \frac{1}{2} \sin \xi \sin \eta \cos \lambda.$$

poderia ter um de seus termos eliminados, no caso

$$2 \sin^2 \frac{1}{2}\xi \sin^2 \frac{1}{2}\eta. \quad (12)$$

Sendo possível por

$$\sin^2 \frac{1}{2}\xi - \sin^2 \frac{1}{2}\xi \sin^2 \frac{1}{2}\eta = \sin^2 \frac{1}{2}\xi \cos^2 \frac{1}{2}\eta, \quad (13)$$

$$\sin^2 \frac{1}{2}\eta - \sin^2 \frac{1}{2}\eta \sin^2 \frac{1}{2}\xi = \sin^2 \frac{1}{2}\eta \cos^2 \frac{1}{2}\xi. \quad (14)$$

Do qual se obteve ao substituir (13) e (14) em (8)

$$\sin^2 \frac{1}{2}\zeta = \sin^2 \frac{1}{2}\xi \cos^2 \frac{1}{2}\eta + \sin^2 \frac{1}{2}\eta \cos^2 \frac{1}{2}\xi - \frac{1}{2} \sin \xi \sin \eta \cos \lambda. \quad (15)$$

Entretanto, Lambert percebe que a semelhança desejada está se afastando ao passo que os arcos  $\xi$  e  $\eta$  estão ficando mais envolvidos nos termos da equação que no início<sup>11</sup>. E para buscar a proximidade, propõe a substituição nos últimos termos

$$\sin \xi = 2 \sin \frac{1}{2}\xi \cos \frac{1}{2}\xi \quad (16)$$

$$\sin \eta = 2 \sin \frac{1}{2}\eta \cos \frac{1}{2}\eta, \quad (17)$$

obtendo

$$\sin^2 \frac{1}{2}\zeta = \sin^2 \frac{1}{2}\xi \cos^2 \frac{1}{2}\eta + \sin^2 \frac{1}{2}\eta \cos^2 \frac{1}{2}\xi - 2 \sin \frac{1}{2}\xi \cos \frac{1}{2}\xi \sin \frac{1}{2}\eta \cos \frac{1}{2}\eta \cos \lambda. \quad (18)$$

Tomando então a equação e dividindo por  $\cos^2 \frac{1}{2}\xi \cos^2 \frac{1}{2}\eta$  chega-se a sua nova forma

$$\frac{\sin^2 \frac{1}{2}\zeta}{\cos^2 \frac{1}{2}\xi \cos^2 \frac{1}{2}\eta} = \tan^2 \frac{1}{2}\xi + \tan^2 \frac{1}{2}\eta - 2 \tan \frac{1}{2}\xi \tan \frac{1}{2}\eta \cos \lambda \quad (19)$$

a qual, depois de todas essas manipulações e troca de relações Lambert, pode comparar a equação (19) acima, com a equação (1) abaixo (19)

$$z^2 = x^2 + y^2 - 2xy \cos \lambda.$$

De tal maneira que a comparação se seguiu associando as relações

$$x = \tan \frac{1}{2}\xi \quad (20)$$

$$y = \tan \frac{1}{2}\eta \quad (21)$$

$$z = \frac{\sin \frac{1}{2}\zeta}{\cos^2 \frac{1}{2}\xi \cos^2 \frac{1}{2}\eta} = \sin \frac{1}{2}\zeta \sec \frac{1}{2}\xi \sec \frac{1}{2}\eta. \quad (22)$$

<sup>11</sup> No início Lambert buscava uma analogia entre fazendo com que a busca por analogias entre  $x$ ,  $y$ ,  $z$  e  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$  ao comparar os triângulos cartesianos e esférico, afim de conseguir uma relação de correspondência

Então  $x, y$  se tornam funções de  $\xi, \eta$ , contudo  $z$  não se caracteriza como função de  $\zeta$  apenas, mas sim de  $\zeta, \xi$  e  $\eta$ . De toda forma ainda tem a vantagem de ser independente do ângulo  $\lambda$ , desde que apenas ele mude, podendo ver o divisor  $\cos \frac{1}{2}\xi \cos \frac{1}{2}\eta$  como um coeficiente de valor constante. Além disso  $z$  depende de  $\xi$  tanto quanto de  $\eta$ .

Então  $2 \sin \frac{1}{2}\zeta$  sendo a corda do arco  $AB$ , a distância entre dois locais A e B. Se apenas  $\lambda$  for a variável e  $z$  crescer proporcionalmente a essa corda, então isso faz possível determinar a proporção entre a corda e  $z$ . De forma que se o ângulo  $\lambda = 0$ , então  $\zeta = \xi - \eta$ . Assumindo que  $\xi$  e  $\eta$  são dados, a corda de  $\xi - \eta$  também é dada e podendo ser comparada com  $z = x - y = \tan \frac{1}{2}\eta$ .

Sendo a mesma observação aplicada para  $\lambda = 180^\circ$ , onde

$$\zeta = \xi + \eta \quad (23)$$

$$z = x + y = \tan \frac{1}{2}\xi + \tan \frac{1}{2}\eta, \quad (24)$$

e  $z$  proporcional a corda de  $(\xi + \eta)$ .

Donde entre as duas figuras se encontra a relação

$$(x - y) : \text{corda}(\xi - \eta) = z : \text{corda}(\zeta) \quad (25)$$

$$(x + y) : \text{corda}(\xi + \eta) = z : \text{corda}(\zeta) \quad (26)$$

Portanto Lambert diz que se o setor<sup>12</sup> for proporcional com a linha da corda<sup>13</sup>, poderia encontrar a distância  $\zeta$  com um dos caminhos a seguir. Primeiro, transferindo a distância  $x - y$  entre os graus  $\xi - \eta$  marcados sobre a corda para dar o setor proporcional ao ângulo de abertura. Atribuindo a distância  $z$  até encontrar o grau  $\zeta$ . Ou como segunda opção obtendo a abertura do ângulo proporcional ao setor e transferindo a distância  $x + y$  para os graus  $\xi + \eta$ . Produzindo assim um processo mais preciso, donde  $x - y$  pode ser muito pequeno, se aproximando de  $= 0$ .

Então com esses cálculos os ângulos  $P$  e  $p$  preservam seus tamanhos e têm suas distâncias escolhidas por

$$x = \tan \frac{1}{2}\xi \quad (27)$$

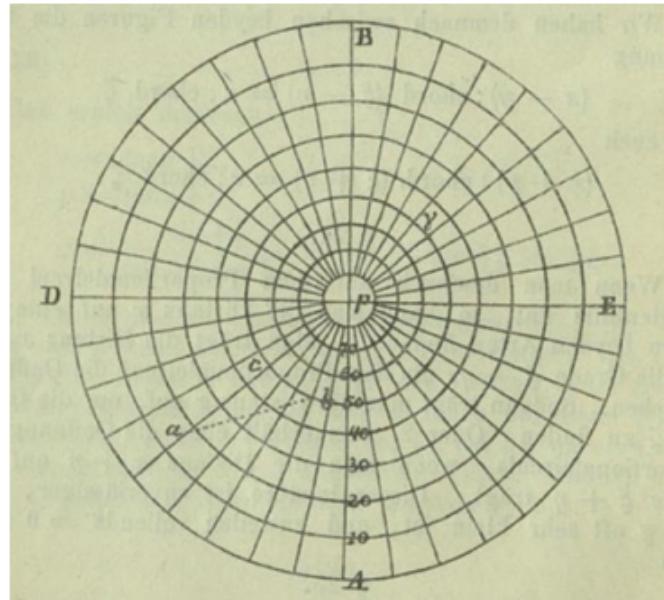
$$y = \tan \frac{1}{2}\eta \quad (28)$$

resultando no mapa estereográfico, do qual é adequado, já que segundo Lambert, existem vários mapas que são desenhados dessa forma, sendo celestes ou terrestres com o polo em seu centro. Assim, as distâncias podem ser encontradas ao utilizar linhas de corda de um setor proporcional.

Adotando, como na Figura 3.4,  $p$  como polo e  $a, b$  dois locais do qual a distância é procurada. O círculo de latitude de  $b$  passa por  $c, \gamma$  e se encontra que  $ac = 30^\circ$ , e  $a\gamma = 110^\circ$ . Assim a linha de corda proporcional ao setor  $ac$  é definido sobre  $30^\circ$ , ou  $a\gamma$  sobre  $110^\circ$  para

<sup>12</sup> Aqui Lambert se refere ao setor de Galileu. Essa é uma ferramenta que consiste em duas réguas de igual comprimento unidas por uma dobradiça. Nas réguas há várias escalas, e ela pode ser usada para aumentar ou reduzir comprimentos proporcionalmente e para resolver outros problemas aritméticos e geométricos.

<sup>13</sup> A linha de cordas foi subdividida de acordo com os valores da função de corda e rotulada com os ângulos correspondentes.

Figura 3.4 –  $p$  polo e dois pontos  $a, b$ .

determinar o ângulo de abertura. Atribuindo  $ab$  e encontrando  $35\frac{1}{2}^\circ$  para a distância dos locais  $a, b$ .

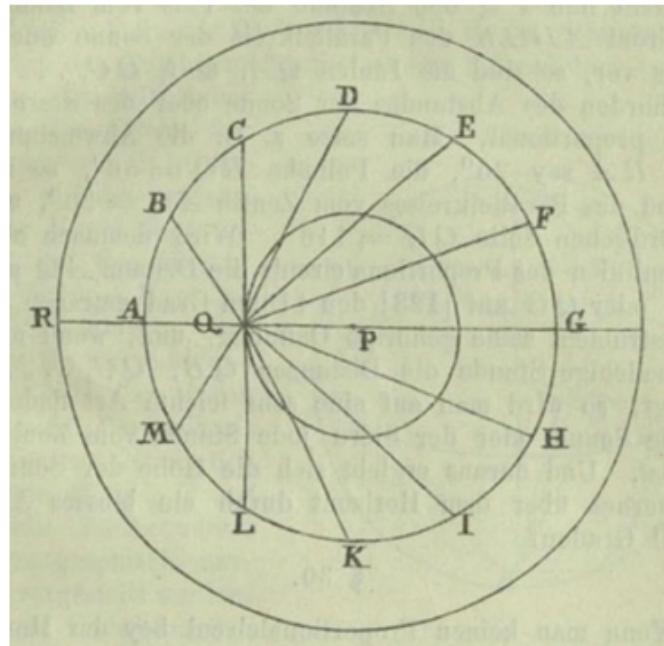


Figura 3.5 – Pontos distribuídos no mesmo círculo.

Com essa forma de projeção, se toma  $Q$  como um local e  $A, B, C, D, \dots, M$  locais sobre o mesmo círculo de latitude. Assim os segmentos  $QA, QB, QC, \dots, QM$  são proporcionais as cordas de distâncias entre os locais  $A, B, C, D, \dots, M$  para  $Q$ .

Se os locais ou pontos  $A, B, C, D, \dots, M$  são todos distribuídos sobre um mesmo círculo, configura-se como teorema de Cotesian<sup>14</sup>. Nomeando os segmento  $QA, QB, QC, \dots, QM$  como

<sup>14</sup> Este teorema deve-se a Roger Cotes (1682-1716). Foi professor de astronomia na Universidade de Cambridge

fatores de uma expressão binomial

$$a^m \pm b^m.$$

Donde os segmentos estão em proporção com as cordas de distância dos locais  $A, B, C, D, \dots, M$  para  $Q$  do qual se percebe que o Teorema de Cotes também pode ser aplicado, com pequenas adaptações, ao caso esférico em que o ponto  $Q$  não se encontra no plano da circunferência em que os pontos  $A, B, C, D, \dots, M$  estão distribuídos uniformemente.

Ao obter esses resultados de forma analítica, Lambert se questiona se a obtenção desses resultados também não seria simples de forma sintética. Para isso mapeou a esfera ortogonalmente, como na Figura 3.6, onde colocou o ponto de vista entre o polo e o equador. Aqui  $DABA$  representa o plano do equador.  $P$  é o polo da parte da frente da esfera e  $p$  do lado oposto.  $Fpfp$ ,  $EPep$  são dois meridianos,  $M, N$  são dois lugares neles,  $NR$  é o círculo de latitude através de  $N$ . Agora assumindo que os pontos  $M, N, R$  sejam projetados de forma estereográficas sobre o plano do equador. Para isso, foi desenhado  $CE, CF$  para representar a projeção dos meridianos  $PEp, PFP$  respectivamente. Além disso,  $pM, pN, pR$  dão os pontos  $m, n, r$  como imagens estereográficas dos pontos  $M, N, R$ .

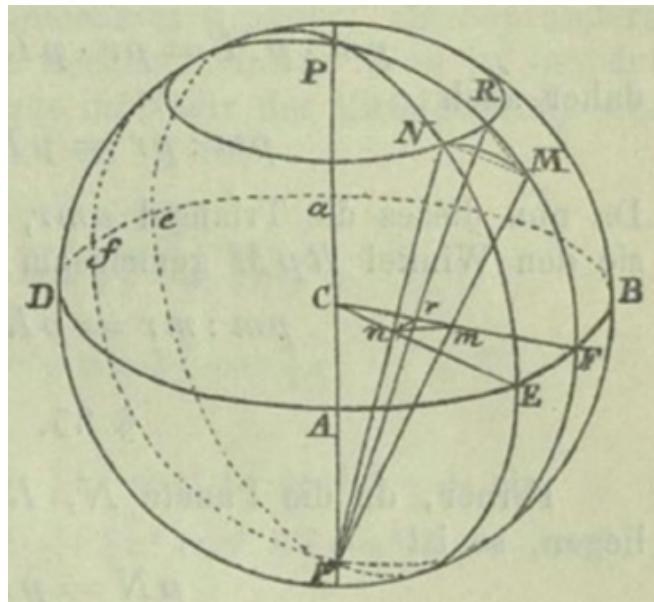


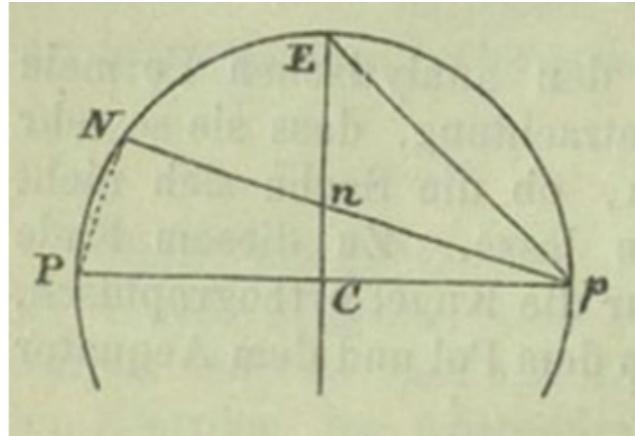
Figura 3.6 – Mapeamento da esfera.

Agora tendo que provar que

$$mn : rm = \text{corda}(NM) : \text{corda}(RM). \quad (29)$$

Para provar foi utilizado o teorema conhecido proposto por Pappus no qual o círculo  $PEp$  com diâmetro  $Pp$  e  $CE$  ortogonal, traça o segmento  $pE$  e de  $p$  uma corda arbitrária  $pN$ , do qual

$$pP : pN = pn : pC. \quad (30)$$

Figura 3.7 – Segmento  $pE$  e uma corda qualquer  $PN$ .

Que se segue diretamente da semelhança entre os triângulos retângulos  $pCn$  e  $pNP$ , onde

$$pN \cdot pn = pP \cdot pC = (pE)^2. \quad (31)$$

Que significa que o produto de  $pN$  e  $pn$  permanece constante mesmo alterando o ângulo  $PpN$ .

Por esse teorema, Lambert chega nas seguintes relações ao analisar a Figura 3.7

$$pm \cdot pM = pr \cdot pR = pn \cdot pN, \quad (32)$$

e, portanto,

$$pm : pr = pR : pM. \quad (33)$$

Implicando que os triângulos  $pmr$  e  $pRM$  são semelhantes, donde eles tem o ângulo  $RpM$  em comum e, por consequência,

$$pm : mr = pR : RM. \quad (34)$$

tornando em

$$pm : pn = pN : pM. \quad (35)$$

Portanto os triângulos  $pnm$  e  $pMN$  com o ângulo comum em  $p$  são também semelhantes, e assim

$$pm : mn = pN : NM. \quad (36)$$

Contudo

$$pm : mn = pR : nM. \quad (37)$$

onde já se tem que

$$pm : mr = pR : RM, \quad (38)$$

---

desde 1706 e um colaborador próximo de Isaac Newton.

com essas relações se chega que

$$pm : pR = mn : NM = mr : RM, \quad (39)$$

e, assim,

$$mn : mr = NM : RM. \quad (40)$$

Seguindo o trabalho, Lambert faz as mesmas considerações sobre a projeção estereográfica horizontal, central e ortográfica.

### 3.2.1 Um método mais geral para a projeção da esfera de tal forma que seus ângulos sejam preservados

Aqui, neste momento, discutiremos sobre as presavações de ângulos, tópico que motivou os trabalhos de Euler e Lagrange posteriormente.

Nestas discussões Lambert "origina" a questão da preservação de ângulos na planificação da esfera, formando assim, posteriormente, uma família de projeções da esfera onde todos os ângulos fossem preservados, com exceção, em alguns casos, nos polos, e tendo assim os casos da projeção estereográfica e de Mercator, como os casos extremos. Esses tipos de mapas chamados de projeções cônicas conformes, de Lambert, foram o início da cartografia moderna, de forma que Lambert encontra Equações Diferenciais Parciais fundamentais para a caracterização da preservação de ângulos de parte da esfera para o plano.

E assim Lambert se encaminha para uma nova questão: a de encontrar novas formas de projeções que preservem ângulos. Portanto, ele inicia lembrando que projeções estereográficas, bem como as cartas náuticas de Mercator, têm a propriedade de preservar os ângulos, propriedade essa que gera a maior similaridade que as figuras planas podem ter com figuras na esfera. Disso advém o questionamento sobre a existência de outra forma, diferentemente das projeções citadas, pois mesmo sendo tão diferentes, tem uma propriedade em comum. haveria, portanto, uma forma de juntar as projeções formando uma projeção intermediária que tivesse essa propriedade? Esse é o questionamento feito.

Ao se referir (§47) as cartas náuticas de Mercator observa-se seus meridianos como linhas paralelas que intersectam o equador ortogonalmente e são todos divididos pelo logaritmo da cotangente da metade da altura do equador<sup>15</sup>, já o equador sendo dividido em 360 partes iguais como graus, tendo assim o ângulo de intersecção dos meridianos como zero, pois são paralelos. Contudo, para a projeção estereográfica de um polo, os meridianos são todos novamente representados como linhas, que se intersectam sobre seu verdadeiro ângulo, como na Figura 3.4. Logo, se existir uma outra forma de projeção entre essas duas projeções, ela deve ser encontrada ao diminuir ou aumentar o ângulo de intersecção dos meridianos em uma proporção arbitrária em relação a seu ângulo na esfera. Sendo esse o pensamento norteador assumido por Lambert.

<sup>15</sup> Lambert refere-se aqui ao ângulo medido contra o eixo que passa pelo polo norte. Assim, o polo norte tem altura 0° e o equador tem altura 90°.

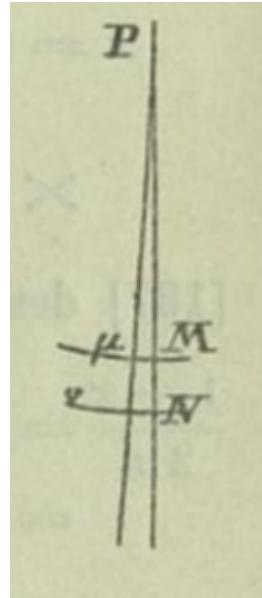


Figura 3.8 – Quadrilátero infinitesimal na esfera.

Tomando  $P$  como polo;  $PM, P\mu$  como dois meridianos com ângulo  $MP\mu$  infinitesimalmente pequeno. Sendo o ponto  $M$  como a altura do equador  $\epsilon^{16}$  e o ponto  $N$  com altura do equador  $\epsilon + d\epsilon$ . Definindo o ângulo  $MP\mu$  igual a  $md\lambda$ , onde  $d\lambda$  denota a diferença de longitude e  $m$  a proporção em que o ângulo  $MP\mu$  é maior ou menor que o ângulo verdadeiro, como na figura 3.8. Então impondo a condição de que

$$\mu M : MN = d\lambda \sin \epsilon : d\epsilon \quad (41)$$

de tal forma que o trapezoide  $\mu MNv$  sobre o mapa se torna similar ao da esfera que ele representa. Se, contudo, for definido

$$PM = x, MN = dx, \quad (42)$$

então,

$$M\mu = xmd\lambda \quad (43)$$

e, por consequência,

$$mx d\lambda : dx = d\lambda \sin \epsilon : d\epsilon. \quad (44)$$

Implicando que

$$\frac{dx}{x} = \frac{m d\epsilon}{\sin \epsilon} \quad (45)$$

e

$$\log x = m \log \tan \frac{1}{2}\epsilon. \quad (46)$$

A constante de integração pode ser omitida, tendo  $x = 1$ , se  $\epsilon = 90^\circ$  para qualquer que seja o valor de  $m$ . Donde

$$x = (\tan \frac{1}{2}\epsilon)^m. \quad (47)$$

<sup>16</sup> Também aqui Lambert se refere ao ângulo em relação ao eixo que passa pelo polo  $P$ , ou seja, a colatitude.

onde para  $m = 1$  se tem a projeção estereográfica e  $m = 0$  a projeção de Mercator.

Nas próximas etapas, (§58) Lambert supõe que meridianos são arcos que se encontram no polo mantendo a preservação do ângulo, chegando assim na projeção estereográfica os paralelos também sendo arcos.

Na continuidade do capítulo, Lambert faz o estudo computacional sobre a projeção de todo o globo sobre um disco, onde os ângulos entre os meridianos nos polos tenham uma razão de  $1 : m$  para sua verdadeira distâncias angulares, de forma que ao calcular os meridianos seguidos que distam  $10^\circ$ , um do outro resultam no seguinte mapa

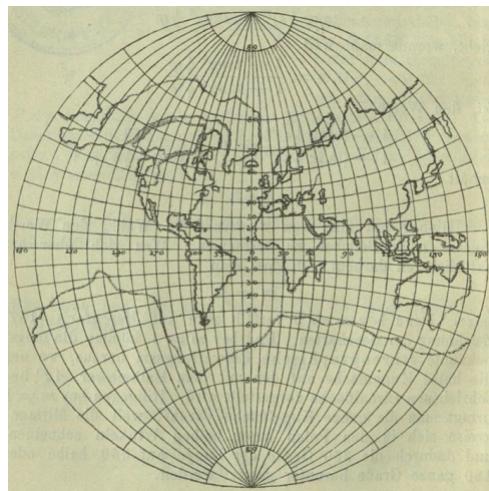


Figura 3.9 – Globo no disco.

Porém, ao chegar em (§65) comenta que esse caso é um particular, do qual teria ainda muitos outros casos de curvas que poderiam ser utilizadas, desde que respeitem as condições impostas, ao qual cita o problema de trajetórias recíprocas de Nicolaus Bernoulli.

Assim, adotando  $CA$  como a linha das abscissas e  $CE$  como a linha vertical paralela às ordenadas,  $EM$  um círculo de latitude  $p$  e  $LM$  um meridiano de longitude  $\lambda$ , é desenhada a ordenada  $nMQ$  do qual se tem  $CQ = x$  e  $QM = y$ .

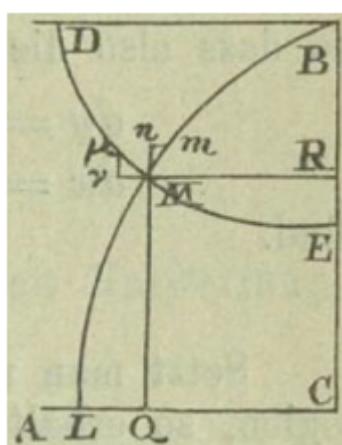


Figura 3.10 – Quadrilátero infinitesimal no plano.

Após isso considerando  $m$  como um ponto de meridiano com latitude igual a  $p + dp$  e  $\mu$  um ponto sobre o círculo de latitude da longitude  $\lambda + d\lambda$ , assim como  $nm$ ,  $vM$  paralelos a  $AC$  e  $\mu v$  paralelo a  $CE$ , gerando a condição necessária de que o ângulo  $\mu Mm = 90^\circ = vMn$  e os triângulos  $vM\mu$ ,  $nMm$  que tem um ângulo reto em  $v$  e  $n$ , respectivamente, similares. Assim algumas relações são encontradas como por exemplo a proporção entre os graus de longitude e latitude

$$\mu M : Mm = \cos p \, d\lambda : dp. \quad (48)$$

Deste modo, por conta da similaridade dos triângulos, as duas relações ainda podem ser escritas

$$\mu M : Mn = \cos p \, d\lambda : dp \quad (49)$$

$$v\mu : mn = \cos p \, d\lambda : dp. \quad (50)$$

Por outro lado, sendo  $x$  e  $y$  como funções de  $p$  e  $\lambda$  simultaneamente, visto que  $CQ = x$  e  $QM = y$ , tal que ao se diferenciar ambos, cada uma das diferenciais terão termos multiplicados por  $dp$  e outro por  $d\lambda$ , podendo ser vistos como

$$dy = Mdp + m \, d\lambda \quad (51)$$

$$dx = Ndp + n \, d\lambda, \quad (52)$$

sendo  $M$ ,  $m$ ,  $N$  e  $n$  como funções de  $p$  e  $\lambda$ . Dado um meridiano  $LM$  com longitude  $\lambda$  fixa, onde  $d\lambda = 0$  se tem que

$$+dy' = Mn = Mdp \quad (53)$$

$$-dx' = -mn = Ndp. \quad (54)$$

Assim como um dado círculo de latitude  $EM$  com latitude fixa  $p$ , onde  $dp = 0$  se tem que

$$+dy'' = \mu\nu = md\lambda \quad (55)$$

$$+dx'' = \nu M = nd\lambda \quad (56)$$

podendo ainda aplicar os valores encontrados em (53), (54), (55) e (56) nas equações (51) e (52) para ter

$$dy = dy' + dy'' = Mn + \mu\nu \quad (57)$$

$$dx = -dx' + dx'' = -mn + M\nu. \quad (58)$$

Mas, ao substituir nas equações (49) e (50) os resultados encontrados, chega-se nas relações

$$+nd\lambda : +Mdp = \cos pd\lambda : dp \quad (59)$$

$$+md\lambda - Ndp = \cos pd\lambda : dp. \quad (60)$$

Onde

$$+M \cos p = n \quad (61)$$

$$-N \cos p = m. \quad (62)$$

Do qual se pode eliminar duas das quatro funções  $M, m, N, n$  das equações (51) e (52) obtendo, por exemplo, ao eliminar  $M$  e  $m$

$$dy = \frac{ndp}{\cos p} - N \cos pd\lambda \quad (63)$$

onde  $y$  é expresso como função de  $n$  e  $N$  vindo de  $x$ , portanto sendo função de  $x$ .

Na sequência<sup>17</sup> ao analisar os casos particulares da estereográfica e do mapa de Mercator, fazendo algumas suposições no processo de encontrar uma equação para  $y$ , Lambert encontra a relação que diz que  $\frac{-m}{\cos p}$  seja dependente apenas de  $\lambda$  e que  $m \cos p$  apenas de  $p$ , iria gerar a partir de algumas substituições em

$$dy = \frac{n dp}{\cos p} + m d\lambda \quad (64)$$

$$dx = -\frac{m dp}{\cos p} + n d\lambda. \quad (65)$$

Lambert, é assim, o primeiro a tentar aplicar o cálculo diferencial leibniziano ao problema dos mapas. Com efeito, Lambert trata o problema infinitesimalmente, considerando triângulo esférico e triângulo do plano do mapa infinitesimais. Assim, o tratamento analítico é local e não global como poderia ser, por exemplo, a projeção de Mercator. Lambert chega assim à expressão de duas formas diferenciais que ele não sabe integrar.

Sendo que, ambos os termos observados por ele, têm a vantagem de apenas um dos termos conter  $dp$  e  $\cos p$ , motivando-o a escrever para Lagrange o qual o respondeu por uma mudança de variável  $d\mu = \frac{dp}{\cos p}$

que permite ver exatamente a relação das duas formas diferenciais:

$$dy = +nd\mu + md\lambda \quad (66)$$

$$dx = -md\mu + nd\lambda \quad (67)$$

que equivale a um sistema de duas equações diferenciais parciais,

$$\frac{\partial y}{\partial \mu} = \frac{\partial x}{\partial \lambda} \quad (68)$$

$$\frac{\partial y}{\partial \lambda} = -\frac{\partial x}{\partial \mu} \quad (69)$$

---

<sup>17</sup> Omitindo essa parte.

onde  $x$  e  $y$  são funções de  $\mu$  e  $\lambda$ , variáveis ligadas às coordenadas de um ponto da Terra.

$$dx + idy = n(d\lambda + id\mu) + mi(d\lambda + id\mu) \quad (70)$$

$$dx - idy = n(d\lambda - id\mu) + m(d\mu - id\lambda) \quad (71)$$

Lagrange sabe resolver, mediante um método inaugurado por d' Alembert, o qual é apenas citado no tratado de Bougainville. Lagrange introduz – como veremos na parte dedicada a ele – as funções complexas e consegue, mediante outra mudança de variáveis, integrar  $x$  e  $y$ .

$$dx + dy\sqrt{-1} = (m\sqrt{-1} + n) \cdot (d\mu\sqrt{-1} + d\lambda) \quad (72)$$

$$dx - dy\sqrt{-1} = (m\sqrt{-1} - n) \cdot (d\mu\sqrt{-1} - d\lambda) \quad (73)$$

Por conseguinte, Lambert diz que esse processo pode ser mais ou menos bem sucedido dependendo do caso analisado. Sugerindo em alguns casos seguir por séries infinitas.

Porém é interessante notar que a saída comunicada por Lagrange é um método de integração de formas diferenciais bem conhecido por d'Alembert, Euler e Lagrange nos anos 1770. Foram d'Alembert e Euler que elaboraram essa teoria em estudos durante duas décadas – entre 1730 e 1750 – como, por exemplo, no trabalho sobre os ventos que d'Alembert enviou a Berlim para o prêmio de 1746 recebendo o prêmio. Depois esse método foi aplicado a outros dois artigos que tratavam do problema das cordas vibrantes tendo os seguintes nomes *Recherches sur la courbe que forme une corde tendue, mise en vibration* (Pesquisa sobre a curva formada por uma corda esticada colocada em vibração) e *Suite des recherches sur la courbe que forme une corde tendue, mise en vibration* (Pesquisa adicional sobre a curva formada por uma corda esticada colocada em vibração), ambos enviados em 1747 para *Académie des Sciences* de Berlim, e ao problema do escoamento estacionário do fluido chamado de *Theoria resistiae quam patitur corpus in fluidomotum, ex principiis omninò novis et simplissims deducta, habitâ ratione tum velocitatis, figurae, et massae corporis moti, tum densitatis & Compressionis partim fluidi* (Uma teoria da resistência que um corpo sofre no movimento de um fluido, deduzida de princípios inteiramente novos e muito simples, baseada tanto na velocidade, forma e massa do corpo em movimento, quanto na densidade e compressão do fluido em parte) de 1749. O método do trabalho premiado teve enunciado seu princípio quando o trabalho duplamente publicado pela *Académie* de Berlim, em latim, e pela *Académie* de Paris, em francês. Nesta memória sobre os ventos chamada de *Réflexions sur la cause générale des vents* (Reflexões sobre a causa geral dos ventos) de 1747, d'Alembert chega a um método genérico para a resolução de equações diferenciais parciais, que ia representar um modelo para os vinte anos seguintes segundo GRIMBERG(2000, pp.219).

Esse enunciado de d'Alembert é o seguinte:

Sejam dadas duas quantidades  $\alpha ds + \beta du$  e  $p\alpha du + v\beta ds + \Delta(u,s)du + \Gamma(u,s)ds$ . Na qual  $p$  e  $v$  denotam constantes e  $\Delta$  e  $\Gamma$  são quaisquer funções de  $u$  e  $s$ ; suponha ainda que essas duas quantidades sejam diferenciais exatas

e completas de alguma função de  $u$  e  $s$ ; solicitamos um método para determinar  $\alpha$  e  $\beta$  e, consequentemente, a integração das duas diferenciais propostas. (D'ALEMBERT, 1746, p. 164. Tradução nossa.)

Esse método trata de uma forma de resolver o sistema

$$dz = \alpha ds + \beta du \quad (74)$$

$$dv = p\alpha ds + v\beta du + \Delta(u,s)du + \Gamma(u,s)ds \quad (75)$$

Buscando primeiro determinar  $\alpha$  e  $\beta$ , para depois  $dz$  e  $dv$ . Nesse método, ao fazer as mudanças de variáveis, que se chega ao dividir  $dv$  por  $p$  e chama

$$\frac{v}{p} = n, \quad (76)$$

obtendo o sistema

$$dz = \beta \sqrt{n} \frac{du}{\sqrt{n}} + \alpha ds \quad (77)$$

$$\frac{dv}{p\sqrt{n}} = \alpha \frac{du}{p\sqrt{n}} + \beta \sqrt{n} ds + \frac{\Delta(u,s)du}{p\sqrt{n}} + \frac{\Gamma(u,s)ds}{p\sqrt{n}}. \quad (78)$$

O interessante é o caráter linear das formas diferenciais, permitindo a combinação entre as formas tornando possível a resolução por meio das mudança de variável, pois a adição e a diferença das duas formas dão imediatamente a transformação de variáveis  $\alpha + \beta\sqrt{n} = m$  e  $\frac{u}{\sqrt{n}} + s = t$  de forma a permitir que as funções  $m$  e  $n$  sejam diretamente integráveis (GRIMBERG, 2000, pp. 221). Assim, para determinar  $\alpha$  e  $\beta$  basta resolver um sistema de duas equações com duas incógnitas. Na continuidade do trabalho, d'Alembert propõe um sistema mais complexo, generalizando o método a uma classe mais vasta de sistemas de equações diferenciais parciais, respeitando os mesmos processos, com uma mudança de variável que permite determinar uma combinação entre as formas diferenciais a fim de anular um de seus coeficientes parciais, sendo possível fazer a integração.

Lambert inicia um método que consiste em analisar localmente a relação entre a esfera e o plano, e por via de uma integração chegar as expressões das coordenadas do plano do mapa em função das latitudes e longitudes. O trabalho de Lambert representa a primeira tentativa de tratar localmente o problema de um mapa, através de elementos diferenciais, os quais ele consegue integrar com a ajuda de Lagrange.

# CAPÍTULO 4

## Euler, Leonhard

### 4.1 Biografia



Figura 4.1 – Euler 1753, por Jakob Emanuel Handmann.

Leonhard Euler nascido em Basel, na Suíça em 1707 morrendo em São Petersburgo, na Russia em 1783, sendo um dos mais brilhantes e produtivos cientistas de sua época. Com origem em uma família de avô artesão e pai ministro protestante que foi o responsável pela formação inicial de Euler, inclusive em matemática elementar por ter participado de conferências de Jakob Bernoulli (1655 - 1705) na época de sua graduação em teologia. Estudando matemática pela Álgebra de Christoff Ridolf (1499 - 1543), sendo talvez uma edição de Stifel de 1553, que só alguém com forte dote matemático poderia estudar e posteriormente indo morar com sua avó materna na Basileia para fazer o ginásio, onde acabou por estudar matemática com um matemático amador chamado Johann Burckhardt até que próximo aos 14 anos em 1720, Euler entra no departamento de artes da Universidade da Basileia. Com a entrada na Universidade, o ainda jovem Euler tem contato com Johann I Bernoulli (1667 - 1748), irmão de Jakob, que dava diariamente palestras públicas de matemática elementar e aulas de matemática e física superior para aqueles que desejavam pagar, sendo esse o início de uma troca que renderia frutos à Euler, como ele mesmo diz:

... Logo encontrei uma oportunidade de ser apresentado a um famoso professor, Johann Bernoulli. ... É verdade que ele estava muito ocupado e se recusou terminantemente a me dar aulas particulares; mas ele me deu um conselho muito mais valioso para começar a ler livros de matemática mais difíceis por conta própria e estudá-los o mais diligentemente possível; se eu encontrasse algum obstáculo ou dificuldade, eu tinha permissão para visitá-lo livremente todos os sábados à tarde e ele gentilmente me explicava tudo o que eu não conseguia entender, e esse, sem dúvida, é o melhor método para ter sucesso nas matérias matemáticas. (EULER, *The work* pp. 20)

Nesta citação de uma autobiografia de Euler podemos perceber que Johann foi de importância categórica para seu desenvolvimento, desde auxílios com questões não compreendidas até orientações de como estudar, sendo essa a primeira e crucial ajuda, atrelada a uma possível orientação de material para estudo. Em 1722 recebeu seu grau correspondente a bacharel em artes, atuou também como adversário em uma tese de lógica e outra de história em direito e acabou por receber seu mestrado em filosofia em 1723, mesmo ano em que entrou para o departamento de teologia, como o pai queria, iniciando sua jornada para se tornar um ministro protestante, coisa que foi deixada de lado para se dedicar a matemática, contudo não abandonando sua fé.

Aos 18 anos de idade Euler começou sua jornada de investigações, trabalhando sobre construções de curvas isócronas num meio resistente aparecendo no *Acta eruditorum* (1726) e o problema das trajetórias recíprocas. Participou também da competição da *Académie des Sciences* de Paris sobre a disposição de mastros de um navio, não ganhando desta vez porém ganhando outras 12 vezes o prêmio entre 1738 e 1772. Tendo começado sua jornada de pesquisas era natural procurar alguma vaga como professor, entretanto na Suíça as cadeiras para matemática eram escassas, sendo aceito apenas na recém organizada *Académie impériale des Sciences* de São Petersburgo (1725) em 1726 como adjunto da cadeira de filosofia, por intermédio de Nikolaus II (1695 - 1726) e Daniel Bernoulli (1700 - 1782), filhos de Johann I, que intercederam pelo jovem amigo.

Em 1726 começou os estudos de preparação para ir a São Petersburgo tentando aplicar métodos matemáticos e mecânicos na disciplina, e ainda almejando entrar na Universidade da Basileia com o surgimento de uma cadeira em matemática, que por sua vez, não foi dada a ele possibilitando sua ida para São Peterburgo que ocorreu em 1727. Lá rapidamente teve a oportunidade de trabalhar em seu campo de atuação como membro adjunto da Academia na seção matemática e se tornando professor de física em 1731 com a saída de Daniel Bernoulli que retornou para Basel em 1733 para ser professor de matemática. Mesmo com as dificuldades passadas na nova Academia, Euler pode ter um fecundo lar para construir e trocar experiências com o grupo de cientistas como Jakob Hermann (1678 - 1733), Daniel Bernoulli, Christian Goldbach (1690 - 1764), F. Maier e J.-N. Delisie (1688 - 1768). Já começando a produzir no mesmo ano de sua chegada publicou no *Commentarii Academiae scientiarum imperialis Petropolitanae* (Comentários da Academia Imperial Petropolitana de Ciências, 1729), sendo uma ferramenta muito importante para Euler com suas publicações. Além disso suas pesquisas também eram a favor do Império Russo, que desejava formar e treinar uma comunidade de

cientistas russos e também solucionar problemas do próprio território esperando a resolução de demandas internas. Tivemos a participação de Euler em 1733 nos trabalhos de mapas no departamento de geografia, posteriormente estudando problemas de navegação e construção de embarcações que foram muito importantes para a origem do grande poder marítimo russo, entre outros temas.

Euler mantinha uma correspondência constante com diversos outros colegas cientistas, possibilitando assim que suas publicações fossem, em diversas vezes, discutidas antes mesmo da publicação fazendo assim ser muito reconhecido em toda a sociedade acadêmica. Isso fez com que ele se tornasse membro da *Académie Royale des Sciences* de Berlim e da *Académie impériale* São Petersburgo concomitantemente, eleito membro da *Royal Society* de Londres (1749), da *Académie des Sciences* de Paris(1755) e da Society of Physics and Mathematics de Basel (1753). Essa época de trabalho concomitante em Berlim e São Petersburgo teve início em 1741 quando se mudou para Berlim, após 14 anos de trabalhos em São Petersburgo, vivendo lá pelos próximo 25 anos ajudando a tornar a antiga Society of Sciences de Berlim em uma grande academia, fundada oficialmente em 1744 como Académie Royale des Sciences et des Belles Lettres de Berlim isso devido a preferência da língua francesa acima do latim e alemão pelo monarca Frederick, o Grande. Lá assumiu a cadeira de matemática, chegando a substituir o presidente Maupertuis (1698 - 1759) quando se ausentou; supervisionou o observatório, o jardim botânico, fazia seleção de pessoal, as finanças da academia, geriu publicações de calendários e mapas que eram vendidos e retornados como fundos para a academia.

Nesse época, Euler era imparável com seu rendimento, mantendo contato com as duas academia desde o início, parando apenas durante a guerra dos sete anos e sendo crucial para a reconciliação futura entre as duas academias. Vale citar suas competições com d'Alembert e Daniel Bernoulli nas pesquisa sobre as fundações da matemática e da física, e a rivalidade com A. Clairaut (1713 - 1765) e d'Alembert nos avanços da teoria dos movimentos lunares e planetários; estudando ao mesmo tempo a teoria dos movimentos sólidos, hidrodinâmica, desenvolvimento da geometria diferencial de superfícies, fractais e a teoria das engrenagens entre outros, totalizando aproximadamente 380 trabalhos produzidos nesse período, publicando 275.

Sua estadia em Berlim durou até 1766 ano que deixou a cidade e a academia para retornar a São Petersburgo após longo desgaste com Frederick, por discordâncias financeiras decorrentes da guerra dos sete anos. Neste processo Euler conseguiu levar também seus filhos com Johann Albrechat (1734 - 1800) assumindo a cadeira de física em 1766 e se tornando secretário permanente da academia em 1769 e Christoph (1743 - 1808), que era oficial da Prússia conseguindo retornar ao serviço militar de carreia como Major-General da artilharia. Em seu retorno a Rússia até sua morte, Euler ficou cego e teve ajuda de seus filhos e de outros companheiros para continuar suas produções, que não cessaram até que em 18 de setembro de 1783 com a metade do dia seguindo de forma normal dando aula a seus netos até que ao chegar as 17 horas ele sofre uma hemorragia cerebral e antes de perder sua consciência diz "estou morrendo", morrendo apos às 23 horas.

## 4.2 Euler e seus trabalhos

Destacamos que durante o texto irão existir marcações assim como no capítulo anterior de Lambert com o simbolo (§) que significam o parágrafo ao qual estamos lidando, isso durante toda a obra de Euler. Também fizemos algumas alterações em relação aos símbolos matemáticos usados no trabalho original, sendo eles:

- Uso de "ln" no lugar de "l" para logaritmo;
- Uso do "arcsin" e "arccos" no lugar de "A sin" e "A cos" para função inversa;
- Uso de "cos<sup>2</sup> u" no lugar de "cos u<sup>2</sup>" para denotar quadrado do cosseno.

### 4.2.1 Considerationes de trajectoriis orthogonalibus

Tratado de 1770 onde Euler busca famílias de trajetórias que são ortogonais. Famílias essas que seriam fundamentais para o trabalho posterior sobre o mapas, já que todos os pontos no mapa cartesiano vem de uma localização referente a paralelos e meridianos, que são por definição trajetórias ortogonais.

Esse tópico já discutido e sendo de interesse de outros matemáticos como nas correspondências entre Leibniz e Bernoulli em 1698, foi retomada por Euler em 1738. Uma das diferenças do trabalho de Euler é a busca pelas condições para que duas famílias de curvas fossem ortogonais e na utilização do números complexos para a determinação dessas condições.

Inicialmente em (§8) Euler considera duas famílias de curvas parametrizadas por  $p$  e outra por  $q$ , sendo

$$Ldp + Mdx + Ndy = 0, \quad (79)$$

$$Kdq + Ndx - Mdy = 0, \quad (80)$$

no qual existem dois fatores integrantes  $M$  e  $N$  que satisfazem

$$dp = M(Pdx + Qdy) \quad (81)$$

$$dq = N(Qdx - Pdy). \quad (82)$$

Na sequência em (§9) as diferenciais das coordenadas são dadas em função dos parâmetros

$$dx + \frac{LMdp + KMNdq}{MM + NN} = 0, \quad (83)$$

$$dy + \frac{LNdp - KMDq}{MM + NN} = 0 \quad (84)$$

escrevendo o sistema da forma

$$dx = PRdp + QSdq = 0, \quad (85)$$

$$dy = PSdp - QRdq = 0 \quad (86)$$

onde  $P, Q, R$  são funções de  $p$  e  $q$  de modo que sejam integráveis, donde deduz a expressão

$$\left( \frac{dx}{dp} \right) \left( \frac{dy}{dq} \right) + \left( \frac{dx}{dp} \right) \left( \frac{dy}{dq} \right) = 0 \quad (87)$$

ao qual formarão duas famílias de curvas que se cruzam a um ângulo reto.

E para a integração, Euler usa inicialmente as formas apresentadas usando os números imaginários, considerando o sistema

$$dx + dy\sqrt{-1} = (R + S\sqrt{-1})(Pdp - Qdq\sqrt{-1}), \quad (88)$$

$$dx - dy\sqrt{-1} = (R - S\sqrt{-1})(Pdp + Qdq\sqrt{-1}) \quad (89)$$

tendo sempre um fator integrando  $M$  da forma  $M(Pdp \pm Qdq\sqrt{-1}) = T \pm V\sqrt{-1}$ .

Assim as expressões podem ser assumidas como

$$x + y\sqrt{-1} = \text{func.}(T + V\sqrt{-1}), \quad (90)$$

$$x - y\sqrt{-1} = \text{func.}(T - V\sqrt{-1}), \quad (91)$$

onde *func* designa uma função arbitrária de variável complexa e seu conjugado. Com o desenvolvimento do trabalho, Euler chega a considerar a forma

$$T + V\sqrt{-1} = \frac{f + g(t + u\sqrt{-1})}{h + k(t + u\sqrt{-1})}, \quad (92)$$

e completa em (§24) dizendo que essa forma gera círculos que são da mesma forma que os paralelos e meridianos representados nos mapas. Sendo essa a forma ao qual irá utilizar no seu trabalho.

#### 4.2.2 De repraesentatione superficiei sphaericae super plano

Ao iniciar seu tratado Euler deixa claro que iria apenas considerar projeções ópticas, onde diferentes pontos seriam apenas projetados em um plano de acordo com o ponto de vista de um observador, no caso respeitando as regras de perspectiva. Ele utiliza o termo *Mapear* no sentido mais amplo possível dizendo que qualquer ponto da superfície esférica pode ser representado no plano por qualquer regra desejada, de tal forma que exista uma correspondência entre os pontos da esfera com o plano, e o inverso. Chega ainda a dizer que se essa correspondência não existir, então a imagem do ponto da esfera é imaginário<sup>1</sup>.

Dada essa primeira observação, já se inicia a caracterização da esfera e de suas partes para o início do trabalho. Assim, como mostra a Figura 4.2, temos que na esfera *abc* representa uma porção da superfície da esfera, com *b* sendo polo, o equador representado pelo círculo com

<sup>1</sup> Isso significa que alguns pontos da esfera podem não ter uma imagem a uma distância finita. A terminologia "ponto imaginário", que foi usada no século XVIII, tem origem na geometria projetiva. Os pontos imaginários foram introduzidos para que os teoremas sobre pontos de interseção de curvas ou superfícies algébricas sejam universalmente verdadeiros.

arco  $alc$  e considerando  $ab$  como o primeiro meridiano para determinar a longitude. Dessa forma ao considerar um ponto qualquer  $p$ , que forma o meridiano  $tpl$ , temos que esse último meridiano e o primeiro formam um ângulo  $abl$  que é igual ao arco equatorial  $al = t$ . E já tendo a longitude  $t$ , obtemos a latitude do ponto  $p$  com o arco  $lp = u$ , se o raio da esfera for unitário.

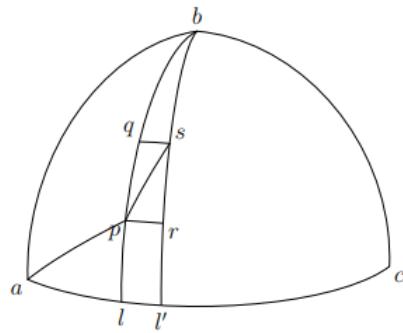


Figura 4.2 – Primeira figura do trabalho de Euler.

Fazendo assim uma correspondência com uma representação no plano, na Figura 4.3, do qual o ponto  $P$  corresponde ao ponto  $p$  da esfera. De  $P$  é feito a perpendicular  $PX$  ao eixo das abscissas  $EF$ , que pode ter sua posição livremente escolhida, e com o ponto  $E$  como origem, e tomando a abscissa  $EX = x$  e a ordenada  $XP = y$ . Assim a posição do ponto  $P$  é determinada pela posição do ponto  $p$  da esfera de acordo com alguma regra, porém a coordenada de  $p$  são determinadas por duas variáveis  $t$  e  $u$ , de tal forma que as coordenadas  $x$  e  $y$  são funções dessas duas variáveis  $t$  e  $u$ , sendo essa pesquisa sobre análise que trata de funções de duas variáveis.

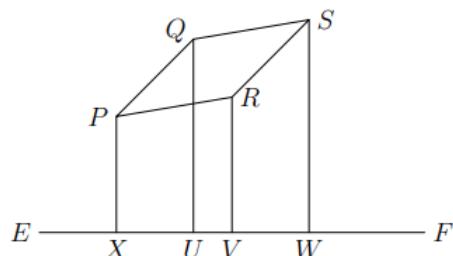


Figura 4.3 – Segunda figura do trabalho de Euler.

E nos induzindo a levar em conta variações das quantidade  $t$  e  $u$  em (3) para dar as coordenadas dos demais pontos, Euler nos dá que o ponto  $q$  tem longitude  $t$  e latitude  $u + du$ ,  $r$  o ponto com longitude  $t + dt$  e latitude  $u$  e completando o paralelogramo  $pqrds$ ,  $s$  com longitude  $t + dt$  e latitude  $u + du$ , e tal forma que  $pr = dt \cos u$ . E como o Paralelogramo citado é retângulo, sua diagonal seria da forma  $ps = \sqrt{du^2 + dt^2 \cos^2 u}$ .

Supondo a correspondência entre os pontos  $p, q, r$  e  $s$  da esfera com os pontos  $P, Q, R$  e  $S$  do plano e construindo as perpendiculares  $PX, QU, RV$  e  $SW$  sobre o eixo  $EF$ , Euler nos leva a uma reflexão sobre as coordenadas da esfera e do plano, partindo dessas novas construções. Como  $P$  é associado ao ponto  $p$  ele é ligado as coordenadas  $x$  e  $y$  que dependem diretamente de

$t$  e  $u$ , porém  $Q$  que representa  $q$ , ao ser comparado com  $p$ , tem apenas uma variação em  $u$ , no caso um incremento  $du$ . Logo suas coordenadas serão dadas por

$$EU = x + du \left( \frac{dx}{du} \right), \quad (93)$$

$$UQ = y + du \left( \frac{dy}{du} \right). \quad (94)$$

De forma análoga entre  $P$  e  $R$  apenas a variável  $t$  muda, logo suas coordenadas serão

$$EV = x + dt \left( \frac{dx}{dt} \right), \quad (95)$$

$$VR = y + dt \left( \frac{dy}{dt} \right). \quad (96)$$

Já o ponto  $S$  tem variação tanto em  $t$  quanto em  $u$ , assim suas coordenadas serão

$$EW = x + du \left( \frac{dx}{du} \right) + dt \left( \frac{dx}{dt} \right), \quad (97)$$

$$WS = y + du \left( \frac{dy}{du} \right) + dt \left( \frac{dx}{dt} \right). \quad (98)$$

Disso se encontra que

$$XU = du \left( \frac{dx}{du} \right) \quad (99)$$

que é igual a distância

$$VW = du \left( \frac{dx}{du} \right). \quad (100)$$

Por esse caminho se chega que

$$WS - VR = UQ - XP = du \left( \frac{dy}{du} \right). \quad (101)$$

Disso é concluído que  $RS = PQ$ , da mesma forma que  $PR = QS$ , de forma que o quadrilátero  $PQRS$  seja de fato um paralelogramo.

Assim o retângulo elementar  $pqrs$  da esfera está sendo representado pelo paralelogramo cartesiano  $PQRS$ , se inicia a comparação entre os lados das respectivas figuras. Sobre a esfera se tem

$$pq = du, \quad (102)$$

$$pr = dt \cos u \quad (103)$$

enquanto no plano se tem

$$PQ = du \sqrt{\left( \frac{dx}{du} \right)^2 + \left( \frac{dy}{du} \right)^2}, \quad (104)$$

$$PR = dt \sqrt{\left( \frac{dx}{dt} \right)^2 + \left( \frac{dy}{dt} \right)^2} \quad (105)$$

sendo assim evidenciado que  $PQ$  corresponde a um pequeno incremento  $du$  na direção do meridiano, enquanto  $PR$  corresponde como um pequeno incremento  $dt \cos u$  em direção do paralelo. Se  $x$  e  $y$  puderem ser obtidas, satisfazendo as igualdades entre (102) com (104), e (103) com(4.2.2)

$$du = du \sqrt{\left(\frac{dx}{du}\right)^2 + \left(\frac{dy}{du}\right)^2}, \quad (106)$$

$$dt \cos u = dt \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} \quad (107)$$

então os comprimentos dos meridianos e dos paralelos teriam o mesmo tamanho no plano como na esfera. Por outro lado, infelizmente, quanto mais os ângulos no plano forem diferentes de ângulos retos, maior será a diferença. Então com esse apontamento se incia a busca pelas direções do meridiano  $PQ$  e do paralelo  $PR$  com respeito a suas coordenadas  $x$  e  $y$ . Analisando a Figura 4.2 o meridiano  $PQ$  é inclinado ao eixo  $EF$  formando um ângulo com tangente

$$\left(\frac{dy}{du}\right) : \left(\frac{dx}{du}\right). \quad (108)$$

Da mesma forma a direção do paralelo  $PR$  é inclinado com  $EF$  formando um ângulo com tangente

$$\left(\frac{dy}{dt}\right) : \left(\frac{dx}{dt}\right). \quad (109)$$

E a diferença entre esse ângulos forma o ângulo  $QPR$ , que tem aplicando a diferença das tangentes com os ângulos (108) e (109) tem sua tangente

$$\frac{\left(\frac{dx}{dt}\right)\left(\frac{dy}{du}\right) - \left(\frac{dx}{du}\right)\left(\frac{dy}{dt}\right)}{\left(\frac{dx}{du}\right)\left(\frac{dx}{dt}\right) + \left(\frac{dy}{du}\right)\left(\frac{dy}{dt}\right)}. \quad (110)$$

Afim de que esse ângulos seja reto, como na esfera, é necessário que

$$\left(\frac{dx}{du}\right)\left(\frac{dx}{dt}\right) + \left(\frac{dy}{du}\right)\left(\frac{dy}{dt}\right) = 0, \text{ ou } \left(\frac{dy}{du}\right) : \left(\frac{dx}{du}\right) = -\left(\frac{dx}{dt}\right) : \left(\frac{dy}{dt}\right) \quad (111)$$

Então em (§7), se isso for requisitado, a figura  $PQRS$  será congruente a  $pqrs$ , seguindo três condições a serem satisfeitas:

1.  $PQ = pq,$
2.  $PR = pr,$
3.  $QPR = qpr = 90^\circ.$

Com esse fim, as seguintes igualdade são requisitadas:

- I.  $\sqrt{\left(\frac{dx}{du}\right)^2 + \left(\frac{dy}{du}\right)^2} = 1$ , ou  $\left(\frac{dx}{du}\right)^2 + \left(\frac{dy}{du}\right)^2 = 1$ ,
- II.  $\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} = \cos u$ , ou  $\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = \cos^2 u$ ,
- III.  $\left(\frac{dy}{du}\right) : \left(\frac{dx}{du}\right) = - \left(\frac{dx}{dt}\right) : \left(\frac{dy}{dt}\right)$ .

Então Euler define que

$$\left(\frac{dy}{du}\right) : \left(\frac{dx}{du}\right) = \tan \phi, \quad (112)$$

então por (III) obrigaría que

$$\left(\frac{dx}{dt}\right) : \left(\frac{dy}{dt}\right) = - \cot \phi, \quad (113)$$

tal que ao multiplicar pelo divisor das primeiras parcelas se tem

$$\left(\frac{dy}{du}\right) = \left(\frac{dx}{du}\right) \tan \phi, \quad (114)$$

$$\left(\frac{dy}{dt}\right) = - \left(\frac{dx}{dt}\right) \cot \phi. \quad (115)$$

Substituindo esses valores nas duas igualdades (I) e (II) dadas, se obtém

$$\left(\frac{dx}{du}\right)^2 = \cos^2 \phi \quad (116)$$

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = \sin^2 \phi \cos^2 \phi. \quad (117)$$

Mas evidentemente não existe circunstâncias sob a qual as três condições sejam satisfeitas ao mesmo tempo, dado que é de conhecimento que não existe maneira de que a superfície da esfera seja representada de forma exata no plano.

Com a intenção de remover as expressões diferenciais dos cálculos, são feitas as seguintes substituições

$$\left(\frac{dx}{du}\right) = p, \quad \left(\frac{dx}{dt}\right) = q, \quad \left(\frac{dy}{du}\right) = r, \quad \left(\frac{dy}{dt}\right) = s,$$

tal que

$$dx = pdu + qdt, \quad (118)$$

$$dy = rdu + sdt, \quad (119)$$

ao considerar que essas expressões sejam simultaneamente integráveis, que ocorre se  $p, q, r$  e  $s$  forem funções de  $t$  e  $u$ , tal que

$$\left(\frac{dp}{dt}\right) = \left(\frac{dq}{du}\right) e \left(\frac{dr}{dt}\right) = \left(\frac{ds}{du}\right). \quad (120)$$

Além disso as novas expressões para o comprimento que se pode escrever com as mudanças de variáveis alterando as igualdades (I) e (II) ficando da seguinte forma

$$PQ = du\sqrt{pp + rr}, \quad (121)$$

$$PR = dt\sqrt{qq + ss}. \quad (122)$$

Assim a tangente do ângulo formado pela inclinação de  $PQ$  e o eixo é  $\frac{r}{p}$  ao fazer as alterações em (108), e o formado pela inclinação de  $PQ$  com o eixo é  $\frac{s}{q}$  em (109), de tal forma que a tangente do ângulo  $QPR$  (110) se torna

$$\frac{qr - ps}{pq + rs}. \quad (123)$$

Usando essa notação, as condições para o mapeamento perfeito podem ser escritas da seguinte forma

I.  $pp + rr = 1,$

II.  $qq + ss = \cos^2 u,$

III.  $\frac{r}{p} = -\frac{q}{s}.$

Ao considerar  $\frac{r}{p} = \tan \phi$ , se tem  $\frac{s}{q} = -\cot \phi$ ; que é  $r = p \tan \phi$  e  $s = -q \cot \phi$ , e com as duas primeiras condições se encontra

$$pp = \cos^2 \phi, \quad (124)$$

$$qq = \sin^2 \phi \cos^2 u \quad (125)$$

do que se deduz

$$p = \cos \phi, q = -\sin \phi \cos u, r = \sin \phi \text{ e } s = \cos \phi \cos u$$

Substituindo esse valores nas expressões (118) e (119) que deve ser integrada,

$$dx = du \cos \phi - dt \sin \phi \cos u, \quad (126)$$

$$dy = du \sin \phi + dt \cos \phi \cos u; \quad (127)$$

Com as exigências de que

$$\left( \frac{dp}{dt} \right) = \left( \frac{dq}{du} \right) \text{ e } \left( \frac{dr}{dt} \right) = \left( \frac{ds}{du} \right). \quad (128)$$

são encontradas as seguinte igualdade

I.  $-\left( \frac{d\phi}{dt} \right) \sin \phi = \sin u \sin \phi - \left( \frac{d\phi}{du} \right) \cos u \cos \phi,$

$$\text{II. } \left( \frac{d\phi}{dt} \right) \cos \phi = -\sin u \cos \phi - \left( \frac{d\phi}{du} \right) \cos u \sin \phi.$$

Combinando esses dois (I.)  $\times$  ( $\sin \phi$ ) + (II.)  $\times$  ( $\cos \phi$ ) resulta que

$$0 = \left( \frac{d\phi}{du} \right) \cos u, \text{ e } \left( \frac{d\phi}{du} \right) = 0, \quad (129)$$

de tal forma que  $\phi$  depende apenas da variável  $t$ . Porém a combinação (II.)  $\times$  ( $\cos \phi$ ) – (I.)  $\times$  ( $\sin \phi$ ) da que

$$\left( \frac{d\phi}{dt} \right) = -\sin u, \quad (130)$$

que depende de  $u$ , contradizendo o resultado anterior. Portanto é demonstrado através de computação que o mapeamento perfeito da Esfera no Plano não é possível.

Assim a questão no trabalho de Euler trata de procurar uma representação que terá divergências ao real, seguindo com suposições que o levem a imagem mais adequada para sua proposta. Sendo a imagem que possa beneficiar e satisfazer as necessidades de diferentes modos. Dado assim a infinidade de possibilidades, é assumido que os ângulos entre meridianos e paralelos sejam todos retos, sendo uma representação inconveniente, segundo Euler, caso fossem obtusos ou agudos. Assim se segue que o ângulo  $QPR$  será sempre reto, de forma que

$$\frac{r}{p} = -\frac{q}{s}. \quad (131)$$

Para continuar com essa questão mais geral que todos os meridianos e paralelos sejam cortados em um ângulo reto, Euler retorna a introduzir o ângulo  $\phi$ , de forma a escrever  $r = p \tan \phi$  e  $s = -q \cot \phi$ . Ao substituir esses valores nas expressões das duas fórmulas diferenciais que devem ser integradas (118) e (119) se tornam

$$dx = pdu + qdt, \quad (132)$$

$$dy = pdu \tan \phi - qdt \cot \phi. \quad (133)$$

e para tornar as duas expressões da mesma forma uma nova variável é introduzida, fazendo com que  $p = m \cos \phi$  e  $q = n \sin \phi$ , alterando assim  $r = m \sin \phi$  e  $s = -m \cos \phi$ , que transformam as equações (118) e (119) para

$$dx = mdu \cos \phi + ndt \sin \phi \quad (134)$$

$$dy = mdu \sin \phi - ndt \cos \phi. \quad (135)$$

Assim toda a questão se reduz a encontrar quem devem ser as funções  $m$  e  $n$  a serem escolhidas, de tal forma que as expressões sejam integráveis. Sem esquecer das condições pressupostas no início.

## PRIMEIRA HIPÓTESE

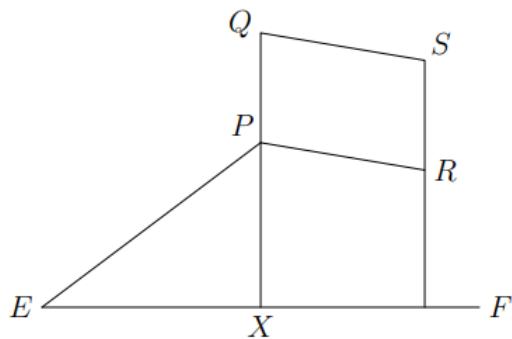


Figura 4.4 – Terceira figura do trabalho de Euler.

Nessa direção Euler começa a fazer algumas hipóteses , sendo a primeira (§13) de que todos os meridianos sejam definidos como normais ao eixo  $EF$ , enquanto todos os paralelos sejam paralelos entre eles.

Como foi suposto que  $\tan \phi = \frac{r}{p}$ , o ângulo  $\phi$  sendo a mensuração da inclinação de  $PQ$  com respeito ao eixo  $EF$ ; logo sendo  $PQ$  um meridiano, pela hipótese,  $\phi$  deve ser um ângulo reto, de tal forma que as formulas diferenciais se tornam

$$dx=ndt, dy=mdu.$$

E para serem integráveis, se tem infinitas formas, bastando apenas que  $m$  seja tomado como uma função arbitrária apenas de  $u$ , e  $n$  apenas de  $t$ . Por essa razão, Euler admite condições adicionais para essa hipótese.

Em primeiro lugar, todos os graus de longitude podem ser feitos com o mesmo tamanho; não há razão para estabelecer desigualdade entre eles. Assim, se o eixo  $EF$  representa o Equador, para que a abcissa  $EX$  corresponda ao arco equatorial  $al = t$ , é então possível tomar  $x = t$ , por outras palavras, definir a função  $n$  à unidade, ou a qualquer constante, enquanto para a ordenada se pode assumir uma função arbitrária de  $u$ .

Sob tal hipótese, não só o paralelogramo  $PQRS$  se torna um retângulo, como na esfera, mas também o ponto  $Q$  estará na ordenada  $XP$ , de modo que  $PQ = dy$  e  $PR = dx = dt$ . E além disso se definido  $y = u$ , onde  $u$  denota a latitude do local, então, se  $dx = dt$  corresponde a um grau de longitude e  $dy = du$  a um grau de latitude, se teria que  $dy = dx$ ; no entanto, tal representação seria bastante inutilizável e todas as regiões da Terra mostrariam graves distorções.

Com essa problemática Euler acha melhor tomar a ordenada  $y$  igual a alguma função  $u$  da latitude, adequada ao propósito que o mapa é suposto a servir. Uma condição é proposta, que o paralelogramo  $PQRS$  no plano seja semelhante ao paralelogramo  $pqr s$  na esfera, para então as partes mais pequenas da superfície esférica serem semelhante às suas imagens no plano. É exatamente esta condição em que as cartas marítimas, com o nome do seu inventor Mercator, são baseadas.

E assim se inicia o que seria o estudo de suas equações levando em direção ao Mapa marítimo de Mercator (§16a)<sup>2</sup>, que requisita que o retângulo  $PQRS$  seja semelhante ao  $pqrs$ , tal que  $pq = du$ ,  $pr = \cos u dt$ , tal que  $dy : dt = du : \cos u dt$ ; Com  $dx = dt$ , e  $dy = \frac{du}{\cos u}$ , que ao ser integrado da  $y = \ln \tan(45^\circ + \frac{1}{2}u)$ .

Sendo assim a latitude mensurada sobre a esfera pelo ângulo  $u$ , que corresponde a  $y$ , igual ao logaritmo hiperbólico da tangente do ângulo  $45^\circ + \frac{1}{2}u$ . Com essa fórmula, Euler diz que tabelas são construídas com específicos valores de  $u$  registrando assim os correspondentes valores de  $y$ .

Dado ainda que no mapa, todos os paralelos são iguais ao equador, enquanto na esfera eles se tornam menores e menores. Nessa representação segue que os graus dos meridianos, que são iguais na esfera, devem se tornar maiores na mesma medida em que os incrementos são colocados em cada novo grau dos paralelos, em relação a esfera. Assim os graus de latitude sobre um meridiano se incrementam constantemente com o aumento da latitude e a uma mesma razão que o cosseno do decréscimo da latitude. Portanto, de  $du$  denota os graus de um meridiano sobre a esfera, então no Mapa, o comprimento do mesmo grau sera  $\frac{du}{\cos u}$ . Euler ainda dá o exemplo que com a latitude de  $60^\circ$  um grau no meridiano teria o dobro do comprimento que sobre a esfera e o polo seria infinitamente longe. De forma que nesse tipo de mapa nunca possa ser estendido até os polos.

Euler ainda se dá o trabalho de mostrar a vantagem que esse tipo de mapa dá aos viajantes do mar, que são as curvas de Loxodromic, que na esfera cortam todos os meridianos a um mesmo ângulo, aqui representado por uma linha reta. Essa reta que corta todos os meridianos, que são paralelos entre si, a um mesmo ângulo.

## II. Sobre Mapas em que toda área da superfície é representado em sua verdadeira dimensão.

Partindo para esse novo requisito (§22), Euler continua a admitir que todos os meridianos são paralelos entre si, e que todos os graus são iguais aos do Equador. Os graus de longitude, calculados ao longo de qualquer paralelo, tem a mesma magnitude como no Equador, tomando assim  $x = t$ . Agora é requerido que a área do retângulo  $PQRS = dx dy$  seja igual ao do retângulo  $pqrs$  sobre a esfera  $= dudt \cos u$ . Para isso é apenas necessário que  $dy = \cos u du$ , de qual é obtido por integração que  $y = \sin u$ . Sendo dito então que assim a construção do mapa se tornaria fácil, fazendo as ordenadas iguais aos senos das correspondentes latitudes. Os graus de latitude ao longo dos meridianos se tornariam menores e menores como a distância do Equador crescendo, e desaparecendo inteiramente no polo. Sendo o polo representado por uma linha reta, paralela ao equador  $EF$ , a distância igual a 1, que seria o raio da esfera.

Se toda a superfície da esfera fosse representada desta forma, o Mapa teria a forma de um retângulo, com comprimento igual a circunferência do Equador=  $2\pi$ , com a distância do Equador a cada um dos polos sendo 1, fazendo com que a área deste Mapa fosse  $4\pi$ , igual a

<sup>2</sup> Euler usou em seu trabalho duas vezes o parágrafo 16, sendo esse o segundo

área de toda a superfície da esfera. Neste Mapa todos os países da Terra são representados em seu verdadeiro tamanho, tendo sua forma sofrendo uma grande variação da realidade, porém preservando a área das regiões.

### SEGUNDA HIPÓTESE

*Que as pequenas regiões da Terra fossem representadas por figuras semelhantes no plano*

Para isso, Euler aponta (§24) que para essa característica ser obtida, seria necessário o princípio que todo meridiano e paralelo fossem perpendiculares. Assim ele trás novamente as fórmulas apresentadas anteriormente, que ao serem integradas devem ser as mesmas vistas em (134) e (135)

$$dx = mdu \cos \phi + ndt \sin \phi$$

$$dy = mdu \sin \phi - ndt \cos \phi.$$

E das relações apresentadas em (121) e (122)

$$PQ = du \sqrt{pp + rr} = mdu$$

$$PR = dt \sqrt{qq + ss} = ndt,$$

sendo assim  $QPR$  um ângulo reto, de acordo com o que já havia sido estabelecido.

Dessa forma, ao considerar o retângulo  $PQRS$  semelhante ao  $pqrs$ , é necessário que  $PQ : PR = pq : pr$ , tal que,  $m : n = 1 : \cos u$ , fazendo com que as fórmulas diferencias se tornem

$$dx = mdu \cos \phi + mdt \cos u \sin \phi, \quad (136)$$

$$dy = mdu \sin \phi - mdt \cos u \cos \phi. \quad (137)$$

Dessa forma o problema que se mostra a Euler é o de quais seriam as funções de  $t$  e  $u$  a serem escolhidas, para que as diferenças de  $m$  e  $\phi$  sejam integráveis? Para isso são introduzidas novamente  $p$  e  $r$ , no lugar de  $m$  e  $\phi$ , da seguinte forma

$$p = m \cos \phi, \quad (138)$$

$$r = m \sin \phi; \quad (139)$$

que com essa troca de variáveis se obtém assim as equações

$$dx = pdu + rdt \cos u, \quad (140)$$

$$dy = rdu - pdt \cos u, \quad (141)$$

de tal forma que a questão passa para funções de  $t$  e  $u$  que tornam as equações de  $p$  e  $r$  integráveis. E uma das soluções desse problema é encontrada, de forma fácil por Euler, no caso das Cartas Náuticas, onde seriam necessário tomar  $p = o$ , e  $r = \frac{1}{\cos u}$ . Outras soluções, contudo, não são facilmente encontradas, segundo Euler.

Das condições conhecidas para a integrabilidade, é requerido que:

$$\left( \frac{dp}{dt} \right) = \left( \frac{dr \cos u}{du} \right) = -r \sin u + \cos u \left( \frac{dr}{du} \right), \quad (142)$$

$$\left( \frac{dr}{dt} \right) = \left( \frac{dp \cos u}{du} \right) = p \sin u - \cos u \left( \frac{dp}{du} \right). \quad (143)$$

Que ao isolar  $(\frac{dp}{du})$  de (143)

$$\left( \frac{dp}{du} \right) = p \tan u - \left( \frac{dr}{dt} \right) \frac{1}{\cos u}, \quad (144)$$

e levando em conta a identidade

$$dp = du \left( \frac{dp}{du} \right) + dt \left( \frac{dp}{dt} \right), \quad (145)$$

e seguindo esse nova condições se origina que

$$dp = pdu \tan u - \left( \frac{dr}{dt} \right) \frac{du}{\cos u} - rdt \sin u + \left( \frac{dr}{du} \right) dt \cos u. \quad (146)$$

Multiplicando por  $\cos u$  e trazendo o termo  $p$  para o lado esquerdo, se encontra

$$dp \cos u - pdu \sin u = -rdt \sin u \cos u + \left( \frac{dr}{du} \right) dt \cos^2 u - \left( \frac{dr}{dt} \right) du. \quad (147)$$

De tal forma que para o lado esquerdo ser integrado, o lado direito também deve ser, logo para  $r$  se deve encontrar uma função adequada de  $t$  e  $u$ .

Assim se torna necessário encontrar uma maneira de resolver as fórmulas obtidas. E após considerar toda a dificuldade, Euler encontra duas maneiras diferentes de resolver o problema.

Uma das formas iria dar infinitas soluções particulares, enquanto a outra levaria a uma resolução mais geral. Assim apresentaremos aqui as duas formas encontradas por Euler, que resultaria segundo ele, em possíveis avanços significativos na Análise de funções de duas variáveis.

Assim entraremos agora no *Método de localização de soluções particulares para a equação diferencial*

$$dx = p du + r dt \cos u \quad (148)$$

$$dy = r du - p dt \cos u \quad (149)$$

E no processo, Euler nos lembra que cada uma destas funções  $p$  e  $r$  envolvem as duas variáveis  $u$  e  $t$ , e a partir daí, considera que  $p$  e  $r$  são formadas por uma certa multiplicação entre as outras variáveis, da seguinte forma

$$p = UT, \quad (150)$$

$$r = V\Theta, \quad (151)$$

sendo  $U$  e  $V$  como funções apenas de  $u$ , e  $T$  e  $\Theta$  de  $t$  apenas. De tal forma que a apresentação das duas equações diferenciais (148) e (149) mudam, se tornando:

- I.  $dx = UTdu + V\Theta dt \cos u$
- II.  $dy = V\Theta du - UTdt \cos u.$

Disso é possível produzir duas representações de  $x$  e  $y$  na forma de integral. Primeiro se considerado  $t$  como constante, resultando que os segundos termos desapareceriam, obtendo:

$$x = T \int Udu, \quad (152)$$

$$y = \Theta \int vdu. \quad (153)$$

Se por outro lado,  $u$  for tomado como constante, então se teria

$$x = V \cos u \int \Theta dt, \quad (154)$$

$$y = -U \cos u \int Tdt. \quad (155)$$

Além disso, cada uma das expressões de  $x$  devem ser igualadas, assim como as de  $y$

$$T \int Udu = V \cos u \int \Theta dt, \text{ ou} \quad (156)$$

$$\frac{\int Udu}{V \cos u} = \frac{\int \Theta dt}{T} \quad (157)$$

$$\Theta \int Vdu = -U \cos u \int Tdt, \text{ ou} \quad (158)$$

$$\frac{\int Vdu}{U \cos u} = -\frac{\int Tdt}{\Theta}. \quad (159)$$

Sendo dessas expressões que serão retiradas e determinadas as funções  $U$ ,  $V$ ,  $T$  e  $\Theta$ .

Então é observado que se deve ser assim, tomando (157)

$$\frac{\int Udu}{V \cos u} = \frac{\int \Theta dt}{T},$$

as duas frações devem ser iguais a uma fixada quantidade, além de lembrar que  $t$  e  $u$  são independentes. Dessa forma, denotando essa constante por  $\alpha$  se tem que em (156)

$$\int Udu = \alpha V \cos u, \quad (160)$$

$$\int \Theta dt = \alpha T. \quad (161)$$

Valendo o mesmo para a segunda igualdade (159),

$$\frac{\int V du}{U \cos u} = -\frac{\int T dt}{\Theta}$$

e considerando a constante como  $\beta$  se tem que

$$\int V du = \beta U \cos u, e \quad (162)$$

$$\int T dt = -\beta \Theta. \quad (163)$$

Assim as integrais das fórmulas são reduzidas a magnitudes absolutas e os valores de  $x$  e  $y$  podem ser expressos sem os símbolos de Integral da forma

$$x = \alpha TV \cos u, \quad (164)$$

$$y = \beta \Theta U \cos u. \quad (165)$$

A fim de abreviar, Euler faz as seguintes substituições  $U \cos u = P$  e  $V \cos u = Q$ , ou ainda  $U = \frac{P}{\cos u}$  e  $V = \frac{Q}{\cos u}$ .

Alterando as antigas fórmulas para as seguintes configurações: sendo as duas primeiras (161) e (163), e as duas últimas (160) e (162)

$$\int \Theta dt = \alpha Te \quad (166)$$

$$\int T dt = -\beta \Theta, \quad (167)$$

$$\int \frac{P du}{\cos u} = \alpha Q e \quad (168)$$

$$\int \frac{Q du}{\cos u} = \beta P. \quad (169)$$

Tomando as derivadas das duas primeiras expressões, sendo (166) e (168) dadas

$$\Theta = \alpha \frac{dT}{dt}, \quad (170)$$

$$P = \frac{\alpha dQ \cos u}{du} \quad (171)$$

e substituindo esses resultados nas equações (167) e (169)

$$\int T dt = -\frac{\alpha \beta dT}{dt}, \quad (172)$$

$$\int \frac{Q du}{\cos u} = \frac{\alpha \beta dQ \cos u}{du}. \quad (173)$$

Novamente tomando as derivadas desses expressões, considerando  $dt$  e  $du$  como constantes se tem respectivamente

$$T = -\frac{\alpha\beta ddT}{dt^2} \quad (174)$$

$$Q = \frac{\alpha\beta ddQ \cos^2 u}{du^2} - \frac{\alpha\beta dQ \sin u \cos u}{du}. \quad (175)$$

Estabelecendo assim duas equações diferenciais de segunda ordem, sobre as quais a integração depende da solução do problema.

Tomando a equação (174), multiplicando por  $2dT$  e integrando se chega que

$$TT = -\frac{\alpha\beta dT^2}{dt^2} + A; \quad (176)$$

que pode se deduz

$$dt^2 = \frac{\alpha\beta dT^2}{A - TT}. \quad (177)$$

Procedendo de mesma forma com a equação (175), só que multiplicando por  $2dQ$  se tem que

$$QQ = \frac{\alpha\beta dQ^2 \cos^2 u}{du^2} + B; \quad (178)$$

que pode ser escrito da forma

$$\frac{du^2}{\cos^2 u} = \frac{\alpha\beta dQ^2}{QQ - B}. \quad (179)$$

Tal que para a integração final, Euler aponta que se deve distinguir entre dois casos, de acordo como a quantidade  $\alpha\beta$  seja positiva ou negativa.

#### *Primeiro Caso*

quando  $\alpha\beta = +\lambda\lambda$ , e portando  $\beta = +\frac{\lambda\lambda}{\alpha}$ .

Neste caso se tem a equação (177) escrita da forma

$$dt^2 = \frac{\lambda\lambda dT^2}{A - TT}, \quad (180)$$

e, uma vez que  $A$  deve ser uma quantidade positiva, a escrita  $A = aa$  é válida, e portanto

$$dt = \frac{\lambda dT}{\sqrt{aa - TT}}, \quad (181)$$

cuja a integral é

$$t + \delta = \lambda \arcsin \left( \frac{T}{a} \right) \quad (182)$$

tal que invertendo a relação se chega

$$T = a \sin \left( \frac{t + \delta}{\lambda} \right), \quad (183)$$

onde

$$dT = \frac{a dt}{\lambda} \cos \left( \frac{t + \delta}{\lambda} \right). \quad (184)$$

Com a substituição a seguir  $\Theta = \alpha \frac{dT}{dt}$  em (184) é seguido que

$$\Theta = \frac{\alpha a}{\lambda} \cos\left(\frac{t + \delta}{\lambda}\right). \quad (185)$$

A outra equação a ser integrada, se torna, no caso (179) com a substituição  $\alpha\beta = \lambda\lambda$  em

$$\frac{du}{\cos u} = \frac{\lambda dQ}{\sqrt{QQ - B}}; \quad (186)$$

que sendo integrada em relação a  $du$  em encontra

$$\ln \tan\left(45^\circ + \frac{1}{2}u\right) + \lambda \ln \epsilon = \lambda \ln(Q + \sqrt{QQ - B}). \quad (187)$$

E para prosseguimento, Euler faz a seguinte substituição para tentar estudar a fórmula de forma mais fácil

$$\tan\left(45^\circ + \frac{1}{2}u\right) = s, \quad (188)$$

onde aplicando (188) na relação  $\ln(45^\circ + \frac{1}{2}u) = \ln s$ , se tem que

$$\ln s = \int \frac{du}{\cos u} \quad (189)$$

que quando derivado

$$\frac{ds}{s} = \frac{du}{\cos u}, \quad (190)$$

e portanto

$$ds = \frac{s du}{\cos u}. \quad (191)$$

Portanto, substituindo (188) em (187) e aplicando propriedades logarítmicas chega que

$$\ln(\epsilon^\lambda s) = \lambda \ln(Q + \sqrt{QQ - B}), \quad (192)$$

do qual se segue

$$\epsilon^\lambda s = (Q + \sqrt{QQ - B})^\lambda, \quad (193)$$

e portanto

$$Q + \sqrt{QQ - B} = \epsilon s^{\frac{1}{\lambda}}. \quad (194)$$

Ao qual Euler ao abbreviar  $\frac{1}{\lambda} = \nu$  e usando a relação (191) se tem

$$Q = \frac{1}{2} \epsilon s^\nu + \frac{Bs^{-\nu}}{2\epsilon}, \quad (195)$$

e derivando em relação a  $s$

$$dQ = \frac{1}{2} \nu \epsilon s^{\nu-1} ds - \frac{\nu \beta}{2\epsilon} s^{-\nu-1} ds; \quad (196)$$

que com a igualdade  $ds = \frac{s du}{\cos u}$ , se chega

$$dQ = \frac{\frac{1}{2} \nu \epsilon s^\nu du}{\cos u} - \frac{\nu \beta}{2\epsilon} s^{-\nu} \frac{du}{\cos u}. \quad (197)$$

Donde com a expressão de  $\frac{dQ}{du}$  e tendo a igualdade de (171)

$$P = \frac{\alpha dQ \cos u}{du} \Rightarrow \frac{P du}{\cos u \alpha} = dQ \quad (198)$$

se tem agora ao substituir (198) em (197)

$$P = \frac{1}{2} \alpha \nu \epsilon s^\nu - \frac{\alpha \nu \beta s^{-\nu}}{2\epsilon}. \quad (199)$$

E dos valores encontrados para  $P$  (199) e  $Q$  (195), segue pelas relações anteriores  $U = \frac{P}{\cos u}$  e  $V = \frac{Q}{\cos u}$  que

$$U = \frac{\alpha \nu \epsilon s^\nu}{2 \cos u} - \frac{\alpha \nu \beta s^{-\nu}}{2\epsilon \cos u}, \quad (200)$$

$$V = \frac{\epsilon s^\nu}{2 \cos u} + \frac{\beta s^{-\nu}}{2\epsilon \cos u}; \quad (201)$$

do qual, finalmente Euler obtém as coordenadas de  $x$  (164) ao substituir os valores encontrado em (183) e (195):

$$x = \frac{1}{2} \alpha a \sin \left( \frac{t + \delta}{\lambda} \right) \left( \epsilon s^\nu + \frac{\beta}{\epsilon} s^{-\nu} \right), \quad (202)$$

e os valores de  $y$  (165) ao substituir os valores encontrado em (185) e (199):

$$y = \frac{1}{2} \alpha \nu \lambda a \cos \left( \frac{t + \delta}{\lambda} \right) \left( \epsilon s^\nu - \frac{\beta}{\epsilon} s^{-\nu} \right), \quad (203)$$

relembrando que

$$\nu = \frac{1}{\lambda} es = \tan \left( 45^\circ + \frac{1}{2} u \right). \quad (204)$$

Ainda para deixar as fórmulas de forma mais elegante, Euler substitui  $B = \epsilon^2 b$ , chegando a

$$x = \frac{1}{2} \alpha \epsilon a \sin \left( \frac{t + \delta}{\lambda} \right) \left( s^{\frac{1}{\lambda}} + b s^{-\frac{1}{\lambda}} \right), \quad (205)$$

$$y = \frac{1}{2} \alpha \epsilon a \cos \left( \frac{t + \delta}{\lambda} \right) \left( s^{\frac{1}{\lambda}} - b s^{-\frac{1}{\lambda}} \right). \quad (206)$$

*Segundo caso*

onde  $\alpha \beta = -\mu \mu$ , e portando  $\beta = -\frac{\mu \mu}{\alpha}$ .

Neste caso, portanto a equação (177) é escrita da forma

$$dt^2 = \frac{-\mu \mu dT^2}{A - TT}, \quad (207)$$

e disso

$$dt = \frac{-\mu dT}{\sqrt{TT - A}}. \quad (208)$$

E ao integrar

$$t + \delta = \mu \ln(T + \sqrt{TT - A}), \quad (209)$$

e disso, se  $e$  denotar o numero ao qual um logaritmo hiperbólico for 1,<sup>3</sup>

$$e^{(r+\delta)/\mu} = T + \sqrt{TT - A}. \quad (210)$$

E afim de fazer uma abreviação, se substitui  $\frac{t+\delta}{\mu} = \theta$ , de tal forma que  $d\theta = \frac{dt}{\mu}$ ; então

$$e^\theta - T = \sqrt{TT - A}, \quad (211)$$

onde elevando ambos os membros ao quadrado e isolando  $T$  se chega

$$T = \frac{e^{2\theta} + A}{2e^\theta} = \frac{1}{2}e^\theta + \frac{1}{2}Ae^{-\theta}. \quad (212)$$

Porém disso,

$$dT = \frac{dt}{2\mu}e^\theta - \frac{A dt}{2\mu}e^{-\theta}, \quad (213)$$

tal que,

$$\Theta = \frac{\alpha}{2\mu}(e^\theta - Ae^{-\theta}) \quad (214)$$

Contudo, neste caso, se chega da igualdade  $ds = \frac{du}{\cos u}$

$$\frac{du^2}{\cos^2 u} = \frac{-\mu\mu dQ^2}{QQ - B} = \frac{\mu\mu dQ^2}{B - QQ}. \quad (215)$$

Donde a quantidade  $B$  deve ser positiva, se substitui  $B = bb$ , tal que

$$\frac{du}{\cos u} = \frac{\mu dQ}{\sqrt{bb - QQ}}, \quad (216)$$

e integrando,

$$\ln \tan(45^\circ + \frac{1}{2}u) + \ln \epsilon = \mu \cdot \arcsin\left(\frac{Q}{b}\right); \quad (217)$$

onde se substituirmos que  $\tan(45^\circ + \frac{1}{2}u) = s$ , então

$$\frac{\ln(\epsilon s)}{\mu} = \arcsin\left(\frac{Q}{b}\right), \quad (218)$$

do qual se deduz ao inverter a relação

$$Q = b \sin\left(\frac{\ln(\epsilon s)}{\mu}\right), \quad (219)$$

e disso que

$$dQ = \frac{b}{\mu} \cdot \frac{ds}{s} \cos\left(\frac{\ln(\epsilon s)}{\mu}\right) = \frac{b}{\mu} \cdot \frac{du}{\cos u} \cos\left(\frac{\ln(\epsilon s)}{\mu}\right), \quad (220)$$

<sup>3</sup> Euler usa aqui a letra  $e$  para denotar o número cujo logaritmo natural (ou hiperbólico) é igual a 1. Parece que foi Leibniz quem usou pela primeira vez uma letra especial para denotar a base do logaritmo natural. Veja os comentários sobre a carta de Euler a Christian Goldbach, datada de 25 de dezembro de 1731, no volume de Euler volume da Opera Omnia de Euler, dedicado à sua correspondência com Goldbach (Ser. IV A, Vol. 4, Parte 1)

de tal forma que, ao substituir (220) em (171)

$$P = \frac{\alpha b}{\mu} \cos \left( \frac{\ln(\epsilon s)}{\mu} \right). \quad (221)$$

E com isso

$$x = \alpha TV \cos u = \alpha TQ, \quad (222)$$

$$y = \beta \Theta P = -\frac{\mu \mu}{\alpha} \Theta P \quad (223)$$

que, ao substituir os valores descobertos para  $Q$  e  $P$  nas equações para  $x$  (164) e para  $y$  (??),

$$x = \frac{1}{2} \alpha b \sin \frac{\ln(\epsilon s)}{\mu} (e^\theta + Ae^{-\theta}) \quad (224)$$

e

$$y = -\frac{1}{2} \alpha b \cos \frac{\ln(\epsilon s)}{\mu} (e^\theta - Ae^{-\theta}) \quad (225)$$

do qual se é lembrado que

$$\theta = \frac{t + \delta}{\mu} es = \tan(45^\circ + \frac{1}{2}u). \quad (226)$$

Assim, Euler conclui que essas fórmulas contém uma quantidade completamente arbitrária de soluções, de tal forma que podem ser estendidas para inúmeros casos especiais. Contudo, obtendo uma solução mais geral se fizer a composição de suas, ou muitas soluções da forma encontrada. Isso quer dizer que, se tomado primeiramente os valores de  $x = M$ ,  $y = N$ , e depois  $x = M'$ ,  $y = N'$ , e depois  $x = M''$ ,  $y = N''$  e assim sucessivamente, poderia se construir uma solução com um alto grau de generalidade:

$$\begin{aligned} x &= \mathfrak{A}M + \mathfrak{B}M'' + \mathfrak{C}M''' + \mathfrak{D}M''''..., \\ y &= \mathfrak{A}N + \mathfrak{B}N' + \mathfrak{C}N'' + \mathfrak{D}N''''..., \end{aligned}$$

de tal forma que esse método é tão geral que contém todas as possíveis soluções.

Terminando assim o método particular, Euler inicia o desenvolvimento do *Método Geral de resolver equações diferenciais*

$$dx = p du + r dt \cos u, \quad (227)$$

$$dy = r du - p dt \cos u \quad (228)$$

Euler incia (§42) dizendo que o que se procura é alguma combinação das duas fórmulas que admita uma resolução em dois fatores. E para isso multiplica a primeira equação por  $\alpha$ , a segunda por  $\beta$ , e com sua adição

$$\alpha dx + \beta dy = p(\alpha du - \beta dt \cos u) + r(\beta du + \alpha dt \cos u); \quad (229)$$

e para reduzir os dois fatores diferenciáveis por expressões semelhantes, faz deixa  $\alpha$  e  $\beta$  em evidencia

$$\alpha dx + \beta dy = \alpha p(du - \frac{\beta}{\alpha} dt \cos u) + \beta r(du + \frac{\alpha}{\beta} dt \cos u). \quad (230)$$

Agora tomando

$$\frac{\alpha}{\beta} = -\frac{\beta}{\alpha}, \text{ ou } \alpha\alpha + \beta\beta = 0, \text{ ou } \beta = \alpha\sqrt{-1}$$

a combinação inicial se torna

$$dx + dy\sqrt{-1} = (p + r\sqrt{-1})(du - \sqrt{-1}dt\cos u). \quad (231)$$

E para que a expressão tenha seus fatores diferenciáveis se tornando integráveis, Euler o representa da seguinte forma

$$dx + dy\sqrt{-1} = \cos u(p + r\sqrt{-1})\left(\frac{du}{\cos u} - \sqrt{-1}dt\right). \quad (232)$$

Assim, estabelecendo que

$$\frac{du}{\cos u} - dt\sqrt{-1} = dz \quad (233)$$

tal que

$$z = \ln \tan(45^\circ + \frac{1}{2}u) - t\sqrt{-1}, \quad (234)$$

e

$$dx + dy\sqrt{-1} = \cos u(p + r\sqrt{-1})dz. \quad (235)$$

Então Euler observa que é clara a não integrabilidade da equação, a não ser que  $\cos u(p + r\sqrt{-1})$ , fosse uma função de  $z$  apenas; e qualquer que fosse a função, poderia ser integrada. Disso se segue que a integral, também é uma função de  $z$ , tal que a expressão  $x + y\sqrt{-1}$  equivale a uma função arbitrária de  $z$ , que é da quantidade

$$\ln \tan(45^\circ + \frac{1}{2}u) - t\sqrt{-1}. \quad (236)$$

A fim de escrever de forma simplificada e mais elegante, a seguinte substituição é feita

$$\tan(45^\circ + \frac{1}{2}u) = s \quad (237)$$

de forma que,

$$\frac{ds}{s} = \frac{du}{\cos u}, \text{ e } z = \ln s - t\sqrt{-1}.$$

Denotando ainda por  $\Gamma$ , como era de costume<sup>4</sup>, uma função arbitrária da variável da expressão posterior

$$x + y\sqrt{-1} = \Gamma : (\ln s - t\sqrt{-1}), \quad (238)$$

ou ainda como

$$x + y\sqrt{-1} = 2\Gamma : (\ln s - t\sqrt{-1}). \quad (239)$$

<sup>4</sup> Assim, a notação  $x = \Gamma : (y)$  significa que  $x$  é uma função arbitrária de  $y$  e que essa função arbitrária é chamada de  $\Gamma$ .

E que pela natureza de  $\sqrt{-1}$ , tem duplo<sup>5</sup> sentido  $\pm$ , também se tem

$$x - y\sqrt{-1} = 2\Gamma : (\ln s + t\sqrt{-1}). \quad (240)$$

Assim Euler ao separar novamente  $x$  e  $y$  obtém

$$x = \Gamma : (\ln s - t\sqrt{-1}) + \Gamma : (\ln s + t\sqrt{-1}) \quad (241)$$

$$y\sqrt{-1} = \Gamma : (\ln s - t\sqrt{-1}) - \Gamma : (\ln s + t\sqrt{-1}), \quad (242)$$

sendo expressões de  $x$  e  $y$  que certamente sempre podem ser reduzidas a valores reais.

Dizendo em §45 que por exemplo se  $\Gamma$  fosse representado por qualquer potência da expressão que o procede, ou qualquer múltiplo, então denotando o expoente por  $\lambda$ , e usando a abreviação  $\ln s = v$ , o desenvolvimento da série de potência seria

$$x = v^\lambda - \frac{\lambda(\lambda-1)}{1 \cdot 2} v^{\lambda-2} t^2 + \frac{\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} v^{\lambda-4} t^4 - \frac{\lambda \dots (\lambda-5)}{1 \cdot 2 \dots 6} v^{\lambda-6} t^6 + \text{etc} \quad (243)$$

$$y = \frac{\lambda}{1} v^{\lambda-1} t - \frac{\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} v^{\lambda-3} t^3 + \frac{\lambda \dots (\lambda-4)}{1 \cdot 2 \dots 5} v^{\lambda-5} t^5 - \frac{\lambda \dots ((\lambda-6))}{1 \cdot 2 \dots 7} v^{\lambda-7} t^7 + \text{etc} \quad (244)$$

De fato o valor de  $y$  necessita receber sinais opostos, mas se pode, dependendo da natureza do objeto, transpor a positiva e negativa direções dos eixos.

Então Euler chega a conclusão que esses valores aparentemente são bem diferentes dos obtidos na resolução particular. Porém, por um lado, o caso das cartas Náuticas são imediatamente válidos tomando  $\lambda = 1$ , caso esse que não constava na fórmula anterior. E sendo  $\lambda = 1$ , se tem que

$$x = \ln s = \ln \tan(45^\circ + \frac{1}{2}u)ey = t \quad (245)$$

E de fato, os valores de  $x$  e  $y$  foram trocados, mas eles podem ser sempre permutados.

Embora seja certo que todos os valores encontrados acima devem ser contidos dentro da fórmula atual, uma vez que esta última constitui claramente a solução mais geral, Euler ressalta que vale bem a pena o trabalho de mostrar que é realmente este o caso. Para isso, observe que  $\Gamma : z$  denota uma arbitrária função de  $z$ , e isso sempre possível escrever em seu lugar  $\Delta : Z$ ,  $z$  sendo certa função de  $z$ . Tomando  $Z = e^{\alpha z}$ , com  $z = \ln s - t\sqrt{-1}$ ; então no lugar de  $\Gamma : (\ln s - t\sqrt{-1})$  é possível escrever

$$\Delta : e^{\alpha \ln s - \alpha t\sqrt{-1}}. \quad (246)$$

Mas desde que  $e^{\alpha \ln s} = s^\alpha$ , e

$$e^{\alpha t\sqrt{-1}} = \cos \alpha t \pm \sqrt{-1} \sin \alpha t, \quad (247)$$

se tem que

$$e^{\alpha \ln s - \alpha t\sqrt{-1}} = s^\alpha (\cos \alpha t - \sqrt{-1} \sin \alpha t). \quad (248)$$

<sup>5</sup> Aqui  $\sqrt{-1}$  resultada da condição em §42 inicial  $\alpha\alpha + \beta\beta = 0$

Recolocando então  $\Gamma$  com a nova função  $\Delta$ , a fórmula encontrada no final da forma geral, se torna

$$x = \Delta : s^\alpha (\cos \alpha t - \sqrt{-1} \sin \alpha t) + \Delta : s^\alpha (\cos \alpha t - \sqrt{-1} \sin \alpha t) \quad (249)$$

$$y\sqrt{-1} = \Delta : s^\alpha (\cos \alpha t - \sqrt{-1} \sin \alpha t) - \Delta : s^\alpha (\cos \alpha t - \sqrt{-1} \sin \alpha t); \quad (250)$$

onde se pode observar que os dois valores podem ser multiplicados por uma constante arbitrária, e também podem ser trocadas.

Considerando o caso especial de  $\Delta : z = z$  se encontra

$$x = 2s^\alpha \cos \alpha t, ey = 2s^\alpha \sin \alpha t. \quad (251)$$

Se  $\alpha$  for tomado com ideia negativa, o seguinte valores também satisfariam

$$x = 2s^{-\alpha} \cos \alpha t, ey = 2s^{-\alpha} \sin \alpha t. \quad (252)$$

E como observado, que as duas solução podem sempre ser combinadas de tal maneira que ambas são multiplicadas por uma constante e somadas juntas. Portanto, das duas soluções, se pode tirar uma outra solução mais geral formada por

$$x = (\mathfrak{A}s^\alpha + \mathfrak{B}s^{-\alpha}) \cos \alpha t, \quad (253)$$

e

$$y = (\mathfrak{A}s^\alpha - \mathfrak{B}s^{-\alpha}) \sin \alpha t. \quad (254)$$

Assim a solução dada anteriormente<sup>6</sup> está incluída nessa fórmula, porém claramente, a fórmula Euler incluiu a função  $\Delta$  é muito mais geral.

E partindo para derivar a segunda solução encontrada no caso particular, do caso geral, é tomado

$$Z = \cos \alpha z = \cos(\alpha \ln s - \alpha t \sqrt{-1}) = \cos(\alpha \ln s) \cos(\alpha t \sqrt{-1}) + \sin(\alpha \ln s) \sin(\alpha t \sqrt{-1}). \quad (255)$$

Mas isso é como sabemos que

$$\cos(\alpha t \sqrt{-1}) = \frac{e^{-\alpha t} + e^{\alpha t}}{2} \quad (256)$$

e

$$\sin(\alpha t \sqrt{-1}) = \frac{e^{-\alpha t} - e^{\alpha t}}{2\sqrt{-1}}, \quad (257)$$

tal que

$$Z = \frac{e^{-\alpha t} + e^{\alpha t}}{2} \cos(\alpha \ln s) + \frac{e^{-\alpha t} - e^{\alpha t}}{2\sqrt{-1}} \sin(\alpha \ln s) \quad (258)$$

<sup>6</sup>  $x = \frac{1}{2} \alpha \epsilon a \sin \left( \frac{t+\delta}{\lambda} \right) \left( s^{\frac{1}{\lambda}} + b s^{-\frac{1}{\lambda}} \right), y = \frac{1}{2} \alpha \epsilon a \cos \left( \frac{t+\delta}{\lambda} \right) \left( s^{\frac{1}{\lambda}} - b s^{-\frac{1}{\lambda}} \right).$

Disso se tem que

$$x = \Delta : \left( \frac{\cos(\alpha \ln s)(e^{-\alpha t} + e^{\alpha t})}{2} + \frac{\sin(\alpha \ln s)e^{-\alpha t} - e^{\alpha t}}{2\sqrt{-1}} \right) + \Delta : \left( \frac{\cos(\alpha \ln s)(e^{-\alpha t} + e^{\alpha t})}{2} + \frac{\sin(\alpha \ln s)e^{-\alpha t} - e^{\alpha t}}{2\sqrt{-1}} \right) \quad (259)$$

$$y\sqrt{-1} = \Delta : \left( \frac{\cos(\alpha \ln s)(e^{-\alpha t} + e^{\alpha t})}{2} + \frac{\sin(\alpha \ln s)e^{-\alpha t} - e^{\alpha t}}{2\sqrt{-1}} \right) - \Delta : \left( \frac{\cos(\alpha \ln s)(e^{-\alpha t} + e^{\alpha t})}{2} + \frac{\sin(\alpha \ln s)e^{-\alpha t} - e^{\alpha t}}{2\sqrt{-1}} \right) \quad (260)$$

Mas, selecionando  $\Delta : Z$  a ser  $Z$ , se torna

$$x = \frac{\cos(\alpha \ln s)(e^{-\alpha t} + e^{\alpha t})}{2}, \quad (261)$$

$$y\sqrt{-1} = \frac{\sin(\alpha \ln s)(e^{-\alpha t} - e^{\alpha t})}{\sqrt{-1}}, \quad (262)$$

e no caso onde  $\alpha$  é negativo

$$x = \cos(\alpha \ln s)(e^{\alpha t} + e^{-\alpha t}), \quad (263)$$

$$y\sqrt{-1} = -\frac{\sin(\alpha \ln s)(e^{-\alpha t} - e^{\alpha t})}{\sqrt{-1}}. \quad (264)$$

Fórmulas essas que incluem a solução presente no segundo caso<sup>7</sup>.

Assim, Euler conclui que em tese a formula geral para encontrar as coordenadas  $x$  e  $y$  inclui todas as possíveis representações da superfície esférica em uma superfície plana, em que os meridianos cortam os paralelos em ângulo retos e que toda pequena superfície sobre a esfera são representadas como formas similares sobre o plano.

Além disso essa solução contém também a projeção, em que um dos hemisférios é mapeado no interior de um círculo, em que o centro são colocados os polos. Projeção está que se é originada com formula estabelecida com

$$x = s^\alpha \cos \alpha t, \quad (265)$$

e

$$y = s^\alpha \sin \alpha t; \quad (266)$$

é suposto que  $\alpha = -1$ , tal que

$$x = \frac{\cos t}{\tan(45^\circ + \frac{1}{2}u)}, \quad (267)$$

e

$$y = \frac{\sin t}{\tan(45^\circ + \frac{1}{2}u)}. \quad (268)$$

Isso para que,  $x$  e  $y$  desapareçam nos polos, onde  $u = 90^\circ$ . Porém no equador, onde  $u = 0$  e  $s = 1$ , então  $x = \cos t$  e  $y = \sin t$ , onde

$$xx + yy = 1. \quad (269)$$

---

<sup>7</sup>  $x = \frac{1}{2}\alpha b \sin \frac{\ln(\epsilon s)}{\mu} (e^\theta + Ae^{-\theta})$   
 $y = -\frac{1}{2}\alpha b \cos \frac{\ln(\epsilon s)}{\mu} (e^\theta - Ae^{-\theta}).$

Portanto, o equador é representado por um círculo com raio = 1. Além disso todo ponto com longitude  $t$ ,

$$\frac{y}{x} = \tan t, \quad (270)$$

tal que todo meridiano é representado pelos raios do círculo. Finalmente a imagem do paralelo com latitude  $u$  é um círculo, concêntrico com o do equador, e com raio

$$= \frac{1}{s} = \frac{1}{\tan(45^\circ + \frac{1}{2}u)} = \tan(45^\circ - \frac{1}{2}u); \quad (271)$$

ou seja, o raio é igual a tangente da metade da distância ao polo. E os hemisférios são costumeiramente representados em conformidade nestas condições.

Assim Euler termina seu estudo sobre a segunda hipótese e se encaminha para a próxima.

### TERCEIRA HIPÓTESE

*Que todas áreas da Terra fossem representadas com seu verdadeiro tamanho no plano*

Iniciando (52) com a fórmula geral para  $dx$  e  $dy$

$$dx = p du + q dt, \quad dy = r du + s dt, \quad (272)$$

e supondo, novamente que, todo Meridiano corta os Paralelos em ângulo reto. Portanto a condição  $\frac{s}{q} = -\frac{p}{q}$  seja cumprida. Logo se coloca que  $s = -np$ ,  $q = nr$ , e tendo que

$$dx = p du + nrz dt, \quad dy = r du - np dt. \quad (273)$$

Agora o elemento de um Meridiano será

$$PQ = du \sqrt{pp + rr}, \quad (274)$$

e o elemento de um Paralelo

$$PR = n dt \sqrt{pp + rr}. \quad (275)$$

Contudo a área do retângulo  $PQRS$  será

$$n du dt (pp + rr), \quad (276)$$

enquanto, sobre a esfera, a área correspondente de  $pqrs$  será

$$du dt \cos u. \quad (277)$$

Desde que essas expressões devem ser iguais, se tem que

$$n(pp + rr) = \cos u \quad (278)$$

ou

$$n = \frac{\cos u}{pp + rr}, \quad (279)$$

tal que por conta da hipótese se chega que

$$dx = p du + \frac{e dt \cos u}{pp + rr}, \quad (280)$$

e

$$dy = r du - \frac{p dt \cos u}{pp + rr}. \quad (281)$$

Contudo, é necessário encontrar funções adequadas para  $p$  e  $r$ , de forma a fazer com que as fórmulas sejam integráveis.

Para simplificar os cálculos, se toma as substituições

$$p = m \cos \phi \quad r = m \sin \phi, \quad (282)$$

tal que  $pp+rr=mm$ , obtendo disso

$$dx = m du \cos \phi + \frac{dt \cos u \sin \phi}{m}, \quad (283)$$

e

$$dy = m du \sin \phi - \frac{dt \cos u \cos \phi}{m}. \quad (284)$$

Posteriormente tomado  $m = k \cos u$ , para obter

$$dx = k du \cos u \cos \phi + \frac{dt \sin \phi}{k} \quad (285)$$

e

$$dy = k du \cos u \sin \phi - \frac{dt \cos \phi}{k}. \quad (286)$$

Finalmente, tomando  $\cos u du = dv$ , tal que  $v = \sin u$ , resulta em

$$dx = k dv \cos \phi + \frac{dt \sin \phi}{k}, \quad (287)$$

$$dy = k dv \sin \phi - \frac{dt \cos \phi}{k}, \quad (288)$$

onde agora é necessário encontrar valores adequados para  $k$  e  $\phi$

Uma vez que ainda não é conhecido nenhum método adequado para encontrar uma solução geral para estas equações, se incia a procura por soluções particulares. E em primeiro lugar, a solução descoberto anteriormente<sup>8</sup> no trabalho, onde  $x = t$  e  $y = \sin u$ , se apresenta. Esses valores são obtidos da formula desenvolvida, se adotado  $k = 1$  e  $\phi = 90^\circ$ , e isso estende para um mais geral solução se para  $k$  e  $\phi$  forem selecionadas constantes arbitrárias. por exemplo  $k = a$  e  $\phi = \alpha$ , onde se obtém

$$x = av \cos \alpha + \frac{t \sin \alpha}{a} \quad (289)$$

e

$$y = av \sin \alpha - \frac{t \cos \alpha}{a}. \quad (290)$$

---

<sup>8</sup>  $x = t$  e  $y = \ln \tan 45^\circ + \frac{1}{2}u$ .

Essa solução difere da anterior apenas por conta dos meridianos serem, agora, inclinados com o eixo  $EF$  a um ângulo  $\alpha$  e não mais ortogonais. Mas os paralelos são cortados por esses meridianos a um ângulo reto, e sendo retas paralelas.

Assim sendo capaz de obter outras soluções, se for tomado uma quantidade para  $k$  e para  $\phi$ , escolhendo uma função que depende apenas de  $v$  e a outra apenas de  $t$ . Então, se  $k = T$  e  $\phi = V$ , se chega

$$dx = R dv \cos V + \frac{dt}{T} \sin V \quad (291)$$

e

$$dy = T dv \sin V - \frac{dt}{T} \cos V. \quad (292)$$

Disso segue que

$$x = T \int dv \cos V = \sin V \int \frac{dt}{T}, \quad (293)$$

$$y = T \int dv \sin V = -\cos V \int \frac{dt}{T}. \quad (294)$$

Dessa igualdade em relação a  $x$  se obtém

$$\frac{\int dv \cos V}{\sin V} = \int \frac{dt}{T} : T = \alpha; \quad (295)$$

e da igualdade em relação a  $y$

$$\frac{\int dv \sin V}{\cos V} = - \int \frac{dt}{T} : T = \beta. \quad (296)$$

Disso, se chega nas igualdades que envolvem a função  $T$

$$\int \frac{dt}{T} = \alpha T; \quad (297)$$

$$\int \frac{dt}{T} = -\beta T, \quad (298)$$

e por consequência  $\beta = -\alpha$ . Diferenciando,

$$\frac{dt}{T} = \alpha dT \text{ e assim } T = \sqrt{\frac{2t}{\alpha}}.$$

E para  $V$ , por outro lado se tem

$$\int dv \cos V = \alpha \sin V \quad (299)$$

$$\int dv \sin V = -\alpha \cos V; \quad (300)$$

Diferenciando ambos se encontra que  $dv = \alpha dV$  e que  $V = \frac{v}{\alpha}$ , ou com uma constante  $V = \frac{v+c}{\alpha}$ .

Com esses valores, Euler encontra

$$\int \cos V dv = \alpha \sin V = \alpha \sin \left( \frac{b+c}{\alpha} \right) e \int \frac{dt}{T} = \alpha T = \sqrt{2\alpha t}, \quad (301)$$

e as expressões para as duas coordenadas  $x$  e  $y$ , são assim, da forma

$$x = \sin \left( \frac{v+c}{\alpha} \right) \sqrt{2\alpha t} e y = -\cos \left( \frac{v+c}{\alpha} \right) \sqrt{2\alpha t}, \quad (302)$$

de onde é deduzido imediatamente que

$$\sqrt{xx + yy} = \sqrt{2\alpha t}, \quad (303)$$

e disso, Euler evidencia a clareza de que assim, todo ponto com a mesma longitude  $t$ , são localizados em uma mesma circunferência de um círculo de raio  $\sqrt{2\alpha t}$ . Contudo, nessa representação, todos os meridianos são representados como círculos concêntricos, sendo o primeiro meridiano, com  $t = 0$  colapsado em um ponto. Já os círculos dos paralelos, contudo, são representados como raios desses círculos. E assim, Euler ainda diz que mesmo cumprindo todas as condições estabelecidas, esse mapa seria bastante inadequado.

Agora tomando  $k$  como uma função de  $v$  apenas, sendo  $= V$ , e o ângulo  $\phi$  uma função de  $t$  apenas, sendo  $= T$ . Dessa forma se tem

$$dx = V dv \cos T + \frac{dt \sin T}{V} edy = V dv \sin T - \frac{dt \cos T}{V} \quad (304)$$

e com isso, os valores de  $x$  e  $y$  são

$$x = \cos T \int V dv = \frac{1}{V} \int dt \sin T, y = \sin T \int V dv = -\frac{1}{V} \int dt \cos T. \quad (305)$$

E a partir desses valores são estabelecidas as igualdades

$$V \int V dv = \frac{dt \sin T}{\cos T} = \alpha, -V \int V dv = \frac{dt \cos T}{\sin T} = -\beta, \quad (306)$$

E dessas expressões de  $V$  segue que  $\alpha = \beta$ , que diferenciando

$$V dv = -\frac{\alpha dV}{VV}, \text{ ou } dv = -\frac{\alpha dV}{V^3} \quad (307)$$

e integrando

$$v + c = \frac{\alpha}{2VV}, \text{ e disso, } V = \sqrt{\frac{\alpha}{2(v+c)}}. \quad (308)$$

Quanto a função  $T$ ,

$$\int dt \sin T = \alpha \cos T, -\int dt \cos T = \alpha \sin T; \quad (309)$$

diferenciando se chega a

$$dT = -\frac{dt}{\alpha} \text{ e portanto } T = -\frac{t}{\alpha}. \quad (310)$$

Desses valores descobertos,

$$\int V \, dv = \sqrt{2\alpha(v + c)}, \quad (311)$$

tal que

$$x = \sqrt{2\alpha(v + c)} \cos \frac{t}{\alpha} ey = -\sqrt{2\alpha(v + c)} \sin \frac{t}{\alpha}, \quad (312)$$

do qual se tem imediatamente que

$$\frac{y}{x} = -\tan\left(\frac{t}{\alpha}\right), e \sqrt{xx + yy} = \sqrt{2\alpha(v + c)}. \quad (313)$$

E concluindo, Euler afirmar que, a partir da primeira fórmula, é claro que todos os meridianos são representados por linhas retas com raios a a partir de um ponto fixo. Da outra fórmula é claro que todos os paralelos são retratados com círculos concêntricos. Sendo esse o método muito conveniente para a representação de um mapa de cada hemisfério, no interior de um círculo, cujo centro é a imagem de um polo. E a forma de qualquer região no mapa não difere significativamente da realidade, e sua verdadeira área pode ser medida diretamente do mapa<sup>9</sup>.

E concluindo o primeiro de seus trabalhos, dos quais analisaremos, Euler nota que nestas três Hipóteses está contido tudo o que normalmente se deseja de mapas geográficos bem como hidrográficos. Que na segunda Hipótese tem abrangência mesmo todas as representações possíveis. Mas por causa da grande generalidade das fórmulas resultantes, não é fácil obter delas qualquer métodos de utilização prática. Aliás por ter a intenção do trabalho para usos práticos Euler não se alonga no debate do desenvolvimento, por considerar que estas formas mais gerais já haviam sido explicados em pormenor por outros, sendo o seu foco o trabalho prático.

#### 4.2.3 De projectione geographicā superficiei sphaericæ

Neste segundo trabalho de Euler, que é uma sequência do anterior, é notado (1) que todos os possíveis métodos para se transferir a superfície esférica em um plano, de forma que pequenas partes fossem reproduzidas em figuras semelhantes, foram exploradas. De forma que se seguiu, por exemplo, as observâncias da conformidade dos mapas marítimos e dos mapa dos hemisférios norte e sul da esfera. Porém é notado que como no seu tempo, essa projeção e construção desse tipo de mapa sendo a superior e inferior, pode não ser diretamente associada as suas fórmulas, mesmo que esses mapas tivessem as propriedades mencionadas anteriormente. Por essa questão, Euler se dispõe a explorar a conexão entre o mapa estereográfico e sua fórmula geral, mostrando como essa projeção é derivada de sua fórmula.

E seguindo da fórmula<sup>10</sup> pelo qual ele desenvolveu no trabalho anterior, e notando que para qualquer ponto sobre a esfera, seja  $v$  a distância até o polo,  $t$  a distância de um escolhido meridiano até o meridiano original ao longo de uma mesma latitude, e que  $x$  e  $y$  sejam as

<sup>9</sup> Esta projeção foi inicialmente apresentada por J.H. Lambert (1772), e é normalmente conhecida hoje como "projecção de igual área azimutal de Lambert".

<sup>10</sup>  $x = \Gamma : (\ln s - t\sqrt{-1}) + \Gamma : (\ln s + t\sqrt{-1}) e y\sqrt{-1} - \Gamma : (\ln s - t\sqrt{-1}) - \Gamma : (\ln s + t\sqrt{-1})$ .

coordenadas retangulares em que a posição do ponto correspondente no plano será determinado, tal que

$$x = \Delta : [\log \cot(\frac{1}{2}v) + t\sqrt{-1}] + \Delta : [\log \cot(\frac{1}{2}v) - t\sqrt{-1}], \quad (314)$$

$$y\sqrt{-1} = \Delta : [\log \cot(\frac{1}{2}v) + t\sqrt{-1}] - \Delta : [\log \cot(\frac{1}{2}v) - t\sqrt{-1}]. \quad (315)$$

Do qual a primeira equação pode ser escrita da forma<sup>11</sup>

$$x = \Delta : [\cot(\frac{1}{2}v)(\cos t + \sqrt{-1} \sin t)] + \Delta [\cot(\frac{1}{2}v)(\cos t - \sqrt{-1} \sin t)] \quad (316)$$

$$y\sqrt{-1} = \Delta : [\cot(\frac{1}{2}v)(\cos t + \sqrt{-1} \sin t)] - \Delta : [\cot(\frac{1}{2}v)(\cos t - \sqrt{-1} \sin t)] \quad (317)$$

e similarmente com o segundo. Contudo se observa que

$$\frac{1}{\cot(\frac{1}{2}v)(\cos t \pm \sqrt{-1} \sin t)} = \tan(\frac{1}{2}v)(\cos t \mp \sqrt{-1} \sin t) \quad (318)$$

de forma que as fórmulas (316) e (317) podem ser dada com a substituição do resultado encontrado em (318) da seguinte forma

$$x = \Delta : [\tan(\frac{1}{2}v)(\cos t + \sqrt{-1} \sin t)] + \Delta : [\tan(\frac{1}{2}v)(\cos t - \sqrt{-1} \sin t)], \quad (319)$$

$$y\sqrt{-1} = \Delta : [\tan(\frac{1}{2}v)(\cos t + \sqrt{-1} \sin t)] - \Delta : [\tan(\frac{1}{2}v)(\cos t - \sqrt{-1} \sin t)]. \quad (320)$$

E ainda diz que ser permitida a mudança do simbolo  $\Delta$  entre as representações. Dessa forma o primeiro par de equações daria a fórmula dos mapas marinhos, enquanto o segundo par representaria a fórmula para os mapas dos hemisférios.

Assim Euler continua dando de fato o caráter deste trabalho, buscando desenvolver plenamente as características dessa projeção estereográfica, afim de realmente mostrar que elas se baseiam no mesmo princípio empregado em sua fórmula, e também podendo ser retiradas delas. Continuando uma explicação, evidenciado que essa projeção da superfície esférica é projetada sobre um plano tangente, como seria, respeitando as regras de perspectiva, a um observador localizado em um ponto oposto ao ponto de tangência, como na Figura 4.5. Assim tomando o círculo  $AMC$  da esfera e a linha  $EF$  do plano que o toca em  $C$ . Tomando no ponto  $A$  a localização do observador. Agora tomando um ponto arbitrário  $M$  da esfera e estendendo a linha  $AMS$  que conecta  $A$  e  $M$ , até encontrar a linha  $EF$  em  $S$ , de forma que  $S$  seja a projeção de  $M$ . Posteriormente definindo o raio do círculo como 1, tal que o diâmetro seja  $AC = 2$ , e designando o arco  $CM = z$ , de tal forma que o ângulo  $CAM = \frac{1}{2}z$ , e a distância

$$CS = 2 \tan(\frac{1}{2}z) = \frac{2 \sin z}{1 + \cos z} + 2 \sqrt{\frac{1 - \cos z}{1 + \cos z}}. \quad (321)$$

<sup>11</sup> Euler neste momento usa  $\Delta$  para representar uma composição de funções com o logaritmo complexo natural.

De  $M$  para  $AC$  tomado a perpendicular  $MP$  tal que  $MP = \sin z$ . Agora deixando a figura girar em torno do eixo  $AC$ , com  $M$  descrevendo um círculo, do qual o plano é paralelo ao plano de tangência onde o raio é  $\sin z$ ; do qual esse círculo, corresponde, no plano tangente, ao círculo descrito com raio  $CS = 2 \tan(\frac{1}{2}z)$ . Dessa forma o raio do círculo na esfera é para sua projeção como  $PM$  para  $CS$ , ou como  $AP$  para  $AC$ , ou como  $AM$  para  $AS$ . E ainda, o ângulo central em que descreveu o círculo de raio  $PM$  sobre a esfera, é igual ao ângulo central da projeção sobre o plano.

Agora considerando um ponto  $m$  muito próximo do ponto  $M$ , onde sua projeção seja  $s$ , tal que o pequeno arco  $Mm$  corresponda ao pequeno segmento  $Ss$ . Assim se questionando qual seria a relação entre  $Mm$  e  $Ss$ . Para responder isso Euler observa que o ângulo  $ASC = 90^\circ - \frac{1}{2}z = AsC$ . Posteriormente, para mensurar o ângulo  $AMm$  que é metade do arco  $AM$ ; isso é,  $AMm = 90^\circ - \frac{1}{2}z$  e portanto igual ao ângulo  $AsC$ . Isso segue que o triângulo  $AMm$  e  $AsS$  são semelhantes, e portanto

$$Mm : Ss = AM : AS, \text{ e que, } = AP : AC. \quad (322)$$

Essa proporção é a mesma em que foi encontrada entre o raio  $PM$  do círculo descrito sobre a esfera e o raio  $CS$  do círculo correspondente sobre o plano. Portanto os elementos do arco são relacionados de mesma maneira que os raios dos círculos. Disso Euler diz que, ao considerar um pedaço  $Mm$  como infinitamente pequeno sobre a superfície esférica, a projeção observada seria semelhante. Assim a projeção seguiria com a mesma regra do qual ele havia tirado sua fórmula geral.

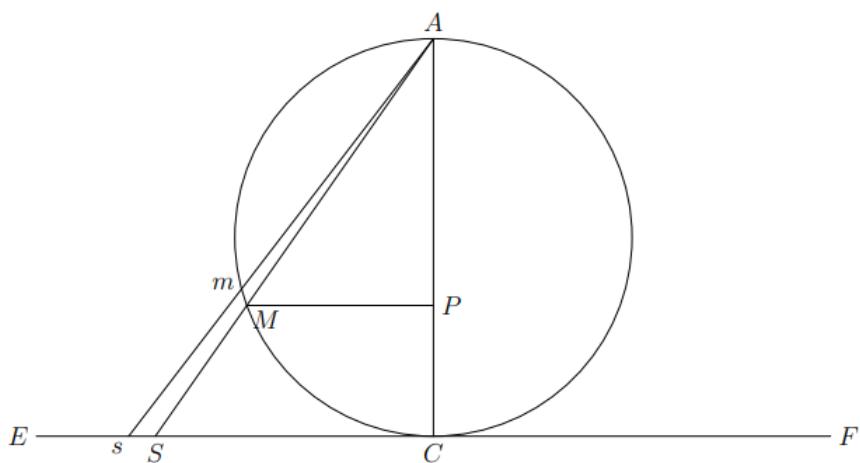


Figura 4.5 – Uma cópia da Figura 1 original de Euler.

E como antes, tomando o círculo  $AGC$ , na Figura 4.6, representando a esfera, onde a superfície deve ser projetada sobre o plano tangente em  $C$ . Tomando ainda o polo da Terra como o ponto  $G$ . Assim o ponto  $H$  seria o ponto correspondente ao polo  $G$  no plano, do qual a distância entre eles seria

$$GH = 2 \tan\left(\frac{1}{2}g\right), \quad (323)$$

onde  $g$  é o arco  $CG$ . Tomando um ponto arbitrário  $M$  sobre a esfera que é separado do polo por uma distância  $GM = v$ , enquanto o ângulo  $CGM = t$  é a longitude do ponto  $M$ , relativa ao meridiano  $GC$  considerado como o meridiano de origem. E então considerando o grande círculo contendo  $CM$ . Agora  $S$  é o ponto de projeção que corresponde com o ponto  $M$ , de tal forma que  $CS = 2 \tan(\frac{1}{2}CM)$  e o ângulo  $ECS$  igual ao ângulo  $GCM$ . Para determinar a posição do ponto  $S$  se deve calcular  $CM$  e o ângulo  $GCM$  do triângulo esférico  $GCM$ .

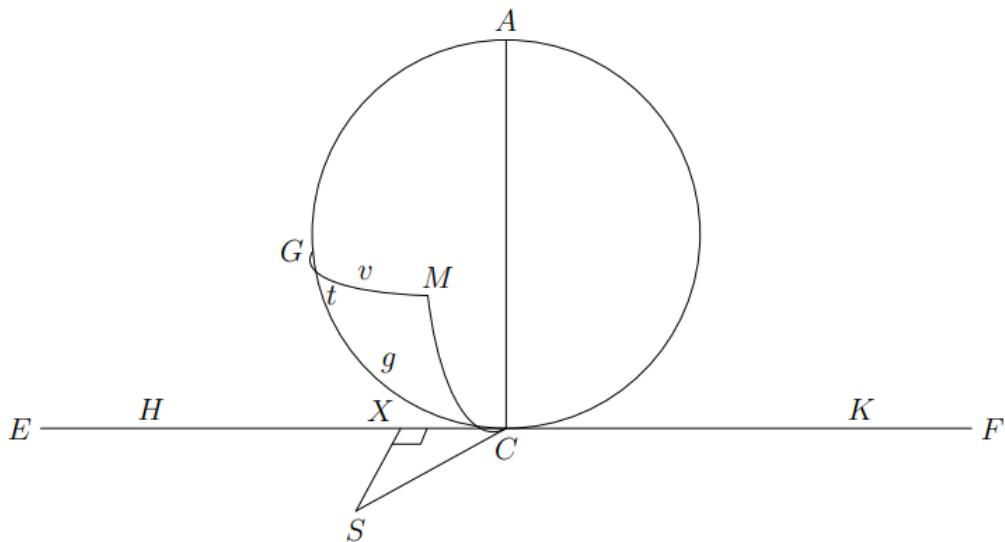


Figura 4.6 – Uma versão modificada da Figura 2 de Euler. Incluído: deslocamento do ponto  $S$  para a esquerda, para melhor percepção do desenho em perspectiva, e acrescentando as etiquetas  $v$  (o arco  $GM$ ),  $t$  (o ângulo esférico  $CGM$ ), e  $g$  (o arco  $CG$ ).

Nesse triângulo esférico  $CGM$  são conhecidos dois lados  $CG = g$  e  $GM = v$  e o ângulo entre eles  $MCG = t$ . E pelas fórmulas trigonometria esférica se tem que

$$\cos CM = \cos g \cos v + \sin g \sin v \cos t, \quad (324)$$

onde ao substituir (324) em (321)

$$CS = 2 \tan\left(\frac{1}{2}CM\right) = \frac{2 \sin CM}{1 + \cos CM} = 2 \sqrt{\frac{1 - \cos CM}{1 + \cos CM}}, \quad (325)$$

obtendo

$$CS = 2 \sqrt{\frac{1 - \cos g \cos v - \sin g \sin v \cos t}{1 + \cos g \cos v + \sin g \sin v \cos t}}. \quad (326)$$

Além disso a equação

$$\tan GCM = \frac{\sin v \sin t}{\cos v \sin g - \sin v \cos g \cos t} \quad (327)$$

produz ao mesmo tempo o ângulo  $ECS$  da projeção.

Agora, do ponto  $S$  da projeção, descendo a perpendicular  $SX$  sobre a linha base  $EF$ , onde fica o polo  $G$ , e denotando as coordenadas  $CX$  e  $SX$  por  $x$  e  $y$  respectivamente. Assim

$$CS = \frac{2 \sin CM}{1 + \cos CM}, \quad (328)$$

tendo que

$$x = \frac{2 \sin CM \cdot \cos CGM}{1 + \cos CM}, \quad (329)$$

$$y = \frac{2 \sin CM \cdot \sin GCM}{1 + \cos CM}, \quad (330)$$

e disso segue que

$$\frac{x}{y} = \tan GCM = \frac{\sin v \sin t}{\cos v \sin g - \sin v \cos g \cos t}. \quad (331)$$

Porém, com os resultados já obtidos se chega que

$$x^2 + y^2 = CS^2 = \frac{4(1 - \cos v \cos g - \sin v \sin g \cos t)}{1 + \cos v \cos g + \sin v \sin g \cos t}. \quad (332)$$

E assim tendo duas expressões diferentes para calcular as coordenadas  $x$  e  $y$ . Partindo então da próxima igualdade, como o seguinte caminho para encontrar os valores dessa coordenadas,

$$\sin t : \sin CM = \sin GCM : \sin v \quad (333)$$

que segue que

$$\sin CM \cdot \sin GCM = \sin v \cdot \sin t. \quad (334)$$

Usando essas equações juntas com os valores introduzidos anteriormente

$$\tan GCM = \frac{\sin GCM}{\cos GCM} = \frac{\sin CM \cdot \sin GCM}{\cos v \sin g - \sin v \cos g \cos t}, \quad (335)$$

onde

$$\sin CM \cdot \cos GCM = \cos v \sin g - \sin v \cos g \cos t, \quad (336)$$

do qual se obtém os valores

$$x = \frac{2(\cos v \sin g - \sin v \cos g \cos t)}{1 + \cos CM}, \quad (337)$$

$$y = \frac{2 \sin v \sin t}{1 + \cos CM}. \quad (338)$$

Que devido a relação  $\cos CM = \cos g \cos v + \sin g \sin v \cos t$ , se obtém as seguintes expressões para as coordenadas

$$x = \frac{2(\cos v \sin g - \sin v \cos g \cos t)}{1 + \cos g \cos v + \sin g \sin v \cos t}, \quad (339)$$

$$y = \frac{2 \sin v \sin t}{1 + \cos g \cos v + \sin g \sin v \cos t}. \quad (340)$$

Tomando  $v = 0$  nesta fórmula, se obtém as coordenadas do ponto que seria a projeção do polo  $H$ . Assim,

$$x = \frac{2 \sin g}{1 + \cos g} = 2 \tan\left(\frac{1}{2}g\right) = CH, y = 0. \quad (341)$$

E também o local do outro polo pode ser obtido, sendo necessário considerar  $v = 180^\circ$ . Neste caso,

$$x = \frac{-2 \sin g}{1 - \cos g}, y = 0. \quad (342)$$

Definindo  $K$  como o segundo polo, se tem

$$CK = \frac{2 \sin g}{1 - \cos g} = 2 \cot\left(\frac{1}{2}g\right). \quad (343)$$

Além disso, tomando  $CE = CF = 2$ ,  $EF$  se torna o diâmetro do círculo dentro do que seria meia esfera retratada, que é centrada em  $C$ . O diâmetro desse círculo é 4, ou seja, duas vezes o tamanho do diâmetro da esfera.

Afim de encontrar o Equador na Projeção, Euler toma  $v = 90^\circ$ ; onde  $x$  e  $y$  representariam o ponto do equador no mapa, e

$$x = \frac{-2 \cos g \cos t}{1 + \sin g \cos t}, \quad (344)$$

$$y = \frac{2 \sin t}{1 + \sin g \cos t}. \quad (345)$$

Donde se chega que

$$x^2 + y^2 = \frac{4(1 - \sin g \cos t)}{1 + \sin g \cos t} \quad (346)$$

e portando

$$\frac{x}{x^2 + y^2} = \frac{-1 \cos g \cos t}{2(1 - \sin g \cos t)}, \quad (347)$$

assim

$$\cos t = \frac{2x}{2x \sin g - (x^2 + y^2) \cos g}; \quad (348)$$

e definindo esse valor na equação de  $x$ , se tem

$$4x \sin g - (x^2 + y^2) \cos g = -4 \cos g. \quad (349)$$

Portanto se tem

$$x^2 + y^2 = \frac{4(x \sin g + \cos g)}{\cos g} \quad (350)$$

e também

$$y^2 + (2 \tan g - x)^2 = \frac{4}{\cos^2 g}. \quad (351)$$

E com isso Euler chega que o equador se torna, no mapa, um círculo de raio  $\frac{2}{\cos g}$ . Afim de encontrar o centro desse círculo, como na figura 4.7, observa a distância  $CJ = 2 \tan g$  sobre o eixo  $x$ , e  $JX = 2 \tan g - x$ , tal que<sup>12</sup>

$$XS^2 + JX^2 = \frac{4}{\cos^2 g}. \quad (352)$$

<sup>12</sup> Lembrando que  $XS$  representa a distância  $y$ .

Disso segue que  $JD = 2/\cos g$ , logo o comprimento  $JS$  é constante, não dependendo de  $t$ . O ponto  $J$  se torna o centro do círculo correspondente ao equador, de forma que  $CJ = 2 \tan g$ . Agora subindo até  $C$  a perpendicular  $CD = 2$ , e que o ângulo  $JDC = g$  se tem que  $JD = 2/\cos g$ . Portanto assim se obtém o equador no mapa ao descrever um círculo ao redor de  $J$  com raio  $JD$ .

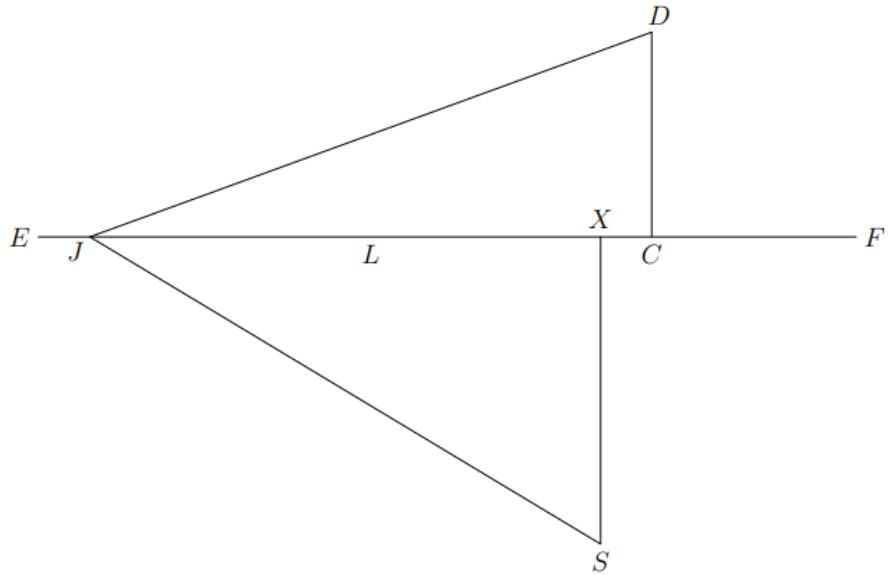


Figura 4.7 – Uma cópia da Figura 3 original de Euler.

Agora procurando (§12) definir os Círculos dos Paralelos do mapa. E para esse trabalho, são nos apresentados algumas abreviações para ajuda nos cálculos. Que são

$$a = 2 \sin g \cos \alpha, \quad (353)$$

$$b = 2 \cos g \sin \alpha, \quad (354)$$

$$c = 1 + \cos g \cos \alpha, \quad (355)$$

$$d = \sin g \sin \alpha, \quad (356)$$

$$e = 4 - 4 \cos g \cos \alpha. \quad (357)$$

Aqui Euler faz uso de  $\alpha$  no lugar de  $v$ , de forma que  $\alpha$  denota a distância do polo ao círculo Paralelo sobre consideração. Assim a equação se torna

$$x = \frac{a - b \cos t}{c + d \cos t}, \quad (358)$$

$$x^2 + y^2 = \frac{e - 4d \cos t}{c + d \cos t}. \quad (359)$$

E disso segue que

$$\cos t = \frac{a - cx}{b - dx}, \quad (360)$$

e substituindo isso na segunda equação

$$x^2 + y^2 = \frac{d(e + 4c)x + be - 4ad}{bc + ad} \quad (361)$$

e expressando novamente  $a, b, c$  e  $d$  em termos de  $g$  e  $\alpha$ , se chega

$$x^2 + y^2 = \frac{4[x \sin g + \cos g - \cos \alpha]}{\cos g + \cos \alpha}. \quad (362)$$

E trazendo para a seguinte forma

$$y^2 + \left( \frac{2 \sin g}{\cos g \cos \alpha} - x \right)^2 = \frac{4 \sin^2 \alpha}{(\cos g + \cos \alpha)^2}, \quad (363)$$

reconhecendo assim que o círculo paralelo em consideração é o círculo de raio  $\frac{2 \sin g}{\cos g + \cos \alpha}$ , com centro sobre o eixo  $EF$  no ponto  $L$ , e onde a distância do ponto  $C$  é

$$CL = \frac{2 \sin g}{\cos g + \cos \alpha}. \quad (364)$$

Agora buscando investigar sobre a projeção de todos os meridianos, observando a Figura 4.6. Em primeiro lugar, com  $t = 0$  e mantendo  $y = 0$ , sendo a linha reta  $HK$  que representa o meridiano principal, do qual os outros são contados. Além disso, tomando  $\beta$  coimo a inclinação de um desejado meridiano com respeito ao meridiano principal, tal que  $t = \beta$  e assim as equações se tornam

$$x = \frac{2(\sin g \cos v - \cos \beta \cos g \sin v)}{1 + \cos g \cos v + \cos \beta \sin g \sin v}, \quad (365)$$

$$y = \frac{2 \sin \beta \sin v}{1 + \cos g \cos v + \cos \beta \sin g \sin v}, \quad (366)$$

$$x^2 + y^2 = \frac{4(1 - \cos g \cos v - \cos \beta \sin g \sin v)}{1 + \cos g \cos v + \cos \beta \sin g \sin v}; \quad (367)$$

e dessas equações a quantidade  $v$  deve ser eliminada. E para esse fim, se considera a forma

$$\frac{y}{x} = \frac{\sin \beta \sin v}{\sin g \cos v - \cos \beta \cos g \sin v} = \frac{\sin \beta \tan v}{\sin g - \cos \beta \cos g \tan v}, \quad (368)$$

e disso segue que

$$\tan v = \frac{y \sin g}{y \cos \beta \cos g + x \tan \beta}. \quad (369)$$

Agora para facilitar a utilização desse valor nas equações restantes, é adotada que

$$4 - x^2 - y^2 = \frac{8 \cos g \cos v + 8 \cos \beta \sin g \sin v}{1 + \cos g \cos v + \cos \beta \sin g \sin v}; \quad (370)$$

e dividindo por  $y$ , se obtém

$$\frac{4 - x^2 - y^2}{y} = \frac{4 \cos g \cos v + 4 \cos \beta \sin g \sin v}{\sin \beta \sin v} = \frac{4 \cos g + 4 \cos \beta \sin g \tan v}{\sin \beta \tan v}. \quad (371)$$

Substituindo aqui o valor encontrado para  $\tan v$  se chega que

$$\frac{4 - x^2 - y^2}{y} = \frac{4y \cos \beta + 4x \sin \beta \cos g}{y \sin \beta \sin g}, \quad (372)$$

que segue disso

$$x^2 + y^2 = 4 - \frac{4y \cos \beta + 4x \sin \beta \cos g}{\sin \beta \sin g}, \quad (373)$$

que é a equação do círculo. Com isso, Euler pode concluir que de mesma maneira, os grandes círculos da esfera são representados como arcos circulares, ou linhas retas sobre o mapa.

Agora afim de verificar o centro assim como o raio de cada meridiano da projeção, considerando a Figura 4.8, as modificações a segui foram feitas nas fórmulas

$$\left( \frac{2 \cos g}{\sin g} + x \right)^2 + \left( \frac{2 \cos \beta}{\sin \beta \sin g} + y \right)^2 = \frac{4}{\sin^2 \beta \sin^2 g}. \quad (374)$$

Se porém, os ponto  $H$  e  $K$  forem polos no mapa, então

$$CH = 2 \tan\left(\frac{1}{2}g\right) = \frac{2 \sin g}{1 + \cos g}, \quad (375)$$

$$CK = 2 \cot\left(\frac{1}{2}g\right) = \frac{2 \sin g}{1 - \cos g}, \quad (376)$$

tal que a distância total seja

$$HK = \frac{4}{\sin g}, \quad \frac{1}{2}HK = \frac{2}{\sin g}, \quad (377)$$

e se  $O$  for o ponto médio de  $HK$ , então

$$CO = \frac{2 \cos g}{\sin g}; \quad (378)$$

contudo, como  $CX$  foi designado como  $x$ ,

$$OX = \frac{2 \cos g}{\sin g} + x. \quad (379)$$

Do ponto  $O$  sobre o eixo, a perpendicular

$$ON = \frac{2 \cos \beta}{\sin \beta \sin g}, \quad (380)$$

e tomindo  $XL = ON$ , se tem

$$SL = \frac{2 \cos \beta}{\sin \beta \sin g} + y. \quad (381)$$

Além disso,

$$OX^2 + LS^2 = LN^2 + SL^2 = NS^2 = \frac{4}{\sin^2 \beta \sin^2 g}, \quad (382)$$

tal que,

$$NS = \frac{2}{\sin \beta \sin g}. \quad (383)$$

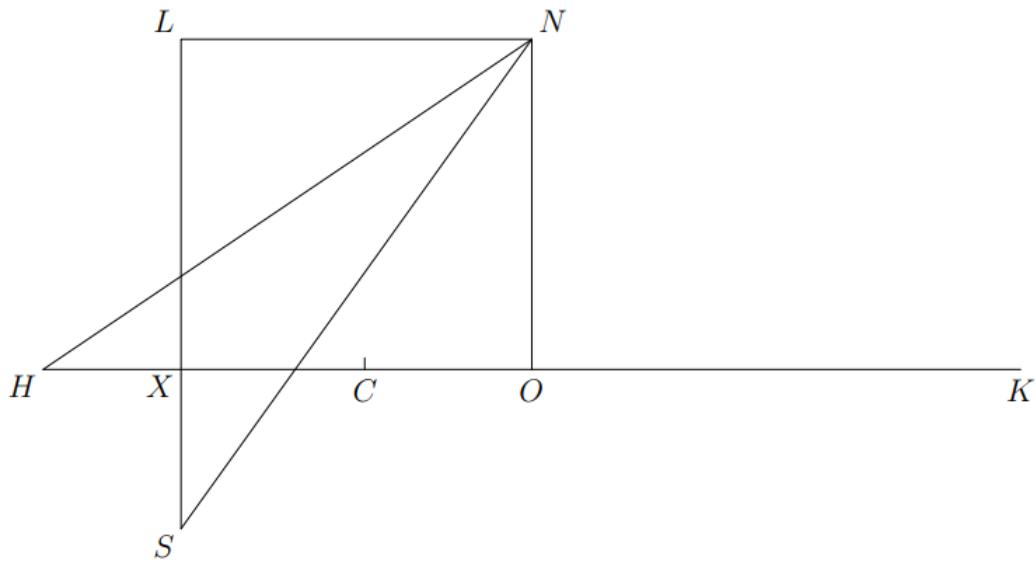


Figura 4.8 – Uma cópia da Figura 4 original de Euler.

Agora, donde o raio é exatamente igual a  $NH$ , Euler reconhece que o ponto  $N$  é o centro do meridiano no mapa, e seu raio é  $\frac{2}{\sin \beta \sin g}$ , e  $NH$  tem exatamente mesmo comprimento. Como o meridiano adotado foi arbitrário, se mostra assim que todo círculo que representa os meridianos passam pelos dois polos.

Assim Euler inicia uma nova busca, a *Derivação da projeção de sua Fórmula Geral*. Afim de descobrir com ela é feita, se deve buscar a forma da função  $\Delta$ , afim de obter a Projeção considerada a se obter. Primeiro de tudo, Euler reconhece que potências maiores que a primeira não podem ocorrer; caso contrário, múltiplos valores de ângulos  $t$  e  $v$  poderia aparecer. Contudo as funções devem ser frações, como encontrado anteriormente as frações para  $x$  e  $y$ . Portanto se busca  $\Delta(z)$  tenha a seguinte forma geral

$$\Delta(z) = \frac{a + bz}{c + dz}, \quad (384)$$

enquanto é escolhido  $z$  a última forma obtida, sendo

$$z = \tan\left(\frac{1}{2}v\right) \cdot (\cos t \pm \sqrt{-1} \sin t). \quad (385)$$

Dessa forma, se considera a função

$$\frac{a + b \tan\left(\frac{1}{2}v\right) \cdot (\cos t \pm \sqrt{-1} \sin t)}{c + d \tan\left(\frac{1}{2}v\right) \cdot (\cos t \pm \sqrt{-1} \sin t)} \quad (386)$$

e colocando no lugar de  $\tan\left(\frac{1}{2}v\right)$ ,  $\frac{\sin v}{(1+\cos v)}$ , tal que torna a ter a forma

$$\frac{a(1 + \cos v) + b \sin v \cdot (\cos t \pm \sqrt{-1} \sin t)}{c(1 + \cos v) + d \sin v \cdot (\cos t \pm \sqrt{-1} \sin t)}. \quad (387)$$

E afim de deixar os calculas mais claros, a fração é escrita da forma

$$\frac{P \pm Q\sqrt{-1}}{R \pm S\sqrt{-1}} \quad (388)$$

onde

$$P = a(1 + \cos v) + b \sin v \cos t, eQ = b \sin v \sin t, \quad (389)$$

$$R = c(1 + \cos v) + d \sin v \cos t, eS = d \sin v \sin t. \quad (390)$$

Onde para as coordenada  $x, y$  se tem as seguintes expressões

$$x = \frac{P + Q\sqrt{-1}}{R + S\sqrt{-1}} + \frac{P - Q\sqrt{-1}}{R - S\sqrt{-1}}, \quad (391)$$

$$y = \sqrt{-1} = \frac{P + Q\sqrt{-1}}{R + S\sqrt{-1}} - \frac{P - Q\sqrt{-1}}{R - S\sqrt{-1}}. \quad (392)$$

Do qual se obtém

$$x = \frac{2PR + 2QS}{R^2 + s^2}, y = \frac{2QR - 2PS}{R^2 + s^2}. \quad (393)$$

E colocando os valores de  $P, Q, R, S$  e obtendo se chega no denominador comum

$$R^2 + S^2 = c^2(1 + \cos v)^2 - 2cd(1 + \cos v) \sin v \cos t + d^2 \sin^2 v \quad (394)$$

$$R^2 + S^2 = (1 + \cos v)[c^2(1 + \cos v) + 2cd \sin v \cos t + d^2(1 - \cos v)]. \quad (395)$$

E os fatores dos numeradores de  $x$  e  $y$  são

$$PR + QR = (1 + \cos v)[ac(1 + \cos v) + (bc + ad) \sin v \cos t + bd(1 - \cos v)], \quad (396)$$

$$QR - PS = (1 + \cos v)(bc - ad) \sin v \sin t. \quad (397)$$

Chegando nas seguintes expressões para as coordenadas

$$x = \frac{2ac(1 + \cos v) + 2(bc + ad) \sin v \cos t + 2bd(1 - \cos v)}{c^2(1 + \cos v) + 2cd \sin v \cos t + d^2(1 - \cos v)} \quad (398)$$

$$y = \frac{2(bc - ad) \sin v \sin t}{c^2(1 + \cos v) + 2cd \sin v \cos t + d^2(1 - \cos v)} \quad (399)$$

E assim, ao comparar essa fórmulas obtidas com as apresentadas anteriormente que são

$$x = \frac{2(\cos v \sin g - \sin v \cos g \cos t)}{1 + \cos g \cos v + \sin g \sin v \cos t}, \quad (400)$$

$$y = \frac{2 \sin v \sin t}{1 + \cos g \cos v + \sin g \sin v \cos t} \quad (401)$$

Euler vê que existe uma conformidade entre os resultados, e podendo agora descobrir os valores que devem acompanhar as constantes  $a, b, c$  e  $d$  para completar o trabalho. Para que os denominadores sejam idênticos, se deve ter

$$c^2 + d^2 = 1, c^2 - d^2 = \cos g, 2cd = \sin g.$$

Das duas primeiras equações se chega que

$$c^2 = \frac{1 + \cos g}{2} = \cos^2\left(\frac{1}{2}g\right), \quad (402)$$

$$d^2 = \frac{1 - \cos g}{2} = \sin^2\left(\frac{1}{2}g\right); \quad (403)$$

que é,

$$c = \cos\left(\frac{1}{2}g\right), d = \sin\left(\frac{1}{2}g\right), \quad (404)$$

e a terceira equação, assim, é cumprida automaticamente

$$2cd = 2\sin\left(\frac{1}{2}g\right)\cos\left(\frac{1}{2}g\right) = \sin g. \quad (405)$$

E para que os numeradores nas duas expressões de  $x$  sejam idênticos, é necessário que

$$ac + bd = 0, ac - bd = \sin g, bc + ad = -\cos g, \quad (406)$$

ou, se substituir nas expressões acima os valores de  $c$  e  $d$

$$a\cos\left(\frac{1}{2}g\right) + b\sin\left(\frac{1}{2}g\right) = 0 \quad (407)$$

$$a\cos\left(\frac{1}{2}g\right) - b\sin\left(\frac{1}{2}g\right) = \sin g, \quad (408)$$

$$b\cos\left(\frac{1}{2}g\right) + a\sin\left(\frac{1}{2}g\right) = -\cos g. \quad (409)$$

As duas primeiras equações produzem

$$a = \frac{\sin g}{2\cos\left(\frac{1}{2}g\right)} = \sin\left(\frac{1}{2}g\right), \quad (410)$$

$$b = \frac{-2\sin g}{2\sin\left(\frac{1}{2}g\right)} = -\cos\left(\frac{1}{2}g\right), \quad (411)$$

e esses dois valores são suficientes para satisfazer a terceira equação. Faltando agora apenas descobrir os valores para os quais  $a$  e  $b$  também satisfazem as expressões de  $y$ . Para isso é necessário que

$$bc - ad = 1. \quad (412)$$

Mas com os valores encontrados,  $bc = -\cos^2\left(\frac{1}{2}g\right)$  e  $ad = \sin^2\left(\frac{1}{2}g\right)$ , tal que

$$bc - ad = -1. \quad (413)$$

Contudo, é observado que pode ser permutada as coordenadas positivas e negativas dos eixos, para que o resultado seja completo.

E assim Euler se encaminha para a conclusão (20) deste trabalho dizendo que com toda a discussão, sobre as fórmulas gerais, o conduzem a projeção estereográfica, se a função  $\Delta(z)$  tomar a forma

$$\Delta(z) = \frac{\sin(\frac{1}{2}g) - z \cos(\frac{1}{2}g)}{\cos(\frac{1}{2}g) + z \sin(\frac{1}{2}g)} = \frac{\tan(\frac{1}{2}g) - z}{1 + z \tan(\frac{1}{2}g)} \quad (414)$$

Além disso, Euler reforça que, "esse método de projeção é extraordinariamente apropriado para a aplicação prática requerida pelos Geógrafos por não er nenhuma distorção forte de nenhuma região da terra". Sendo importante também notar que com essa projeção, não apenas todos os Meridianos e Círculos de paralelos exibidos com círculos ou como linhas retas, mas todos os grandes círculos sobre a esfera são expressados como arcos de círculos ou linhas retas. E outra hipótese, que se possa fazer com a função  $\Delta$ , não teria essa vantagem simples.

#### 4.2.4 De projectione geographica Deslisliana in mappa generali imperii russici usitata

Neste texto, Euler faz comentários sobre o trabalho já iniciado pelo famoso geógrafo e astrônomo Joseph-Nicolas Delisle em 1730 e passado para a direção de Euler em 1740. Ao iniciar o comentário Euler sobre a escolha da projeção estereográfica, com o olho no equador, que era normalmente usada para representação dos dois hemisférios terrestres. Esse método veio como opção por não apenas exibir os círculos dos paralelos e dos meridianos se cruzando em ângulos retos, mas também pelo fato de exibir uma proporção no mapa, em semelhança com as características da esfera. Além disso, Euler cita que o professor e geógrafo Wittenberg Hasius<sup>13</sup> que já havia usado essa projeção para a construção de mapas.

Porém é apontado que a projeção tem duas peculiaridades indesejadas que são a grande desigualdade no meridiano central, e também o fato de quanto mais afastado do centro do mapa, mais curvo são os meridianos. Para argumentar sobre os dois problemas são analisados uma mesma província, a de Kamachatka. Para o primeiro problema a província aparece ser 4 vezes maior que uma outra província, localizada no meio do mapa, mesmo ambas tendo o mesmo tamanho. Para o segundo problema o problema ocorreria caso alguém retirasse do mapa apenas a província, resultando em um para incongruente com as regras normalmente utilizadas para os mapas. Apontando que seria muito útil se localidades de mesmo tamanho fossem representadas com o mesmo tamanho e também que ao se retirar uma parte do mapa, essa parte sem qualquer alteração para sua utilização.

Essa proposta contudo foi rejeitado, sendo pensada a projeção, também estereográfica, com o centro no polo, onde todos os meridianos são linhas retas que são coincidentes no polo e evitando parte dos problemas citados anteriormente, tendo o problema de também de uma excessiva graduação das latitudes de forma desigual, sendo também rejeitada.

Assim buscando então um outro sistema de projeção ao qual tivesse os meridianos como linhas retas e em que os graus de latitude tivessem a mesma medida, somando com a propriedade de que os paralelos cruzassem os meridianos de forma ortogonal. Como essa possibilidade não

<sup>13</sup> Johann Matthias Hasius, (1684 -1742), Professor de Matemática de Wittenberg desde 1720.

existem, foi buscado a forma de manter uma proporção que tivesse o menor desvio possível, dado que essa alteração é aceitável frente as propriedades requeridas no mapa.

Nesse processo de busca Delisle é que percebe que se tomar dois paralelos que limitam o mapa de forma a serem equidistante do paralelo central do mapa, essa alteração da proporção entre longitude e latitude é mínima, sendo então agora necessário buscar os paralelos para que o mapa fosse construído. Na continuidade do trabalho Euler mostra o processo dos cálculos por trás dessa ideia aplicada por Delisle, localizando os pontos pelo qual os paralelos buscados passam para fazer um mapa do Império Russo.

# CAPÍTULO 5

## Lagrange, Joseph Louis

### 5.1 Biografia

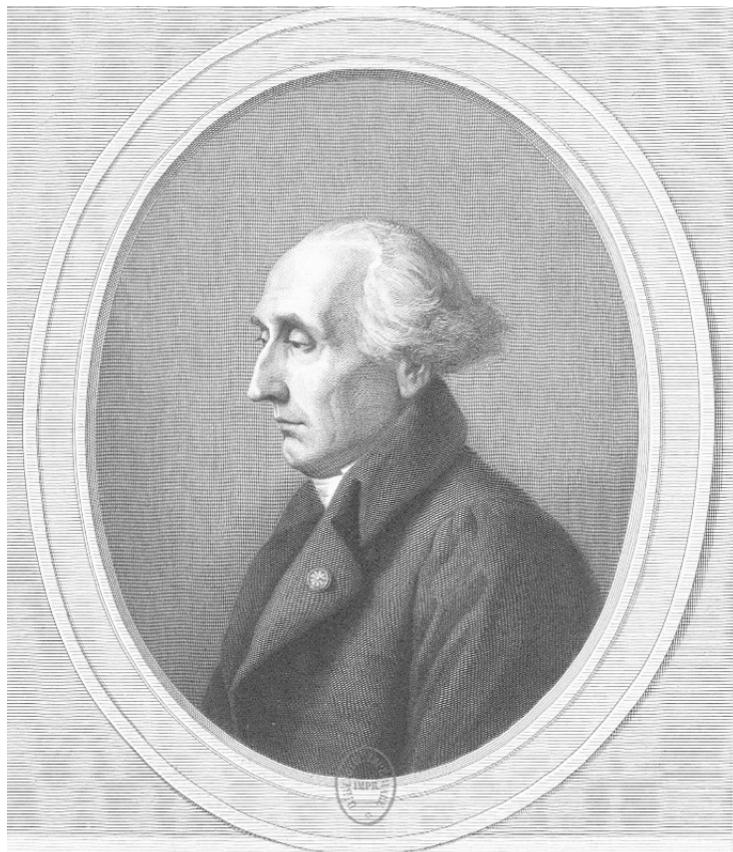


Figura 5.1 – Lagrange, imagem presente no início no seu Oeuvres.

Demarcando a vida de Lagrange em 3 momentos, dadas sua estadia, temos as seguintes etapas. Primeiro, entre 1736 e 1766 morando em Turim, cidade na qual tem sua origem, de 1766 e 1787, quando trabalhou na academia de Berlim e de 1787 até o ano de sua morte, em 1813, morando em Paris. Com essa separação se pode dizer que os dois primeiros foram momentos de maior produção científica, começando em 1754 com a descoberta do cálculo das variações e com a aplicação da mecânica em 1756. Trabalhou também na mecânica celeste sendo estimulado

por d'Alembert a participar das competições da *Académie des Sciences* de Paris. O período de Berlim teve sua produção mais focada na mecânica e no cálculo diferencial integral. Já em Paris foi dedicado aos escritos didáticos e a composição dos grandes tratados que resumiam suas concepções matemáticas, que acabaram por encerrar a matemática do século XVIII e abrir as portas para o próximo século.

Batizado como Giuseppe Lodovico Lagrangia, filho de Giuseppe Francesco Lodovico Lagrangia e Teresa Grossi, nasceu no dia 25 de janeiro de 1736 em Turim, foi como iniciou sua história, porém sempre assinando seu nome como Lodovico LaGrange ou Luigi Lagrange, preferindo o nome de ascendência paterna de origem francesa, importando que até o final de sua vida se consolidou como Joseph-Louis Lagrange. Viveu com sua família uma vida modesta, mesmo com seu pai e irmão assumindo o ofício de seu avô paterno, o de Tesoureiro do Escritório de Obras Públicas e Fortificações de Turim até 1800, e sendo o mais velho de onze filhos do casal. Lagrange foi em sua juventude levado pelo pai ao estudo das leis, porém, ao começar seus estudos em física e geometria percebeu sua facilidade e talento mudando para as ciências exatas. Atraído primeiramente pela geometria, aos 17 anos voltou-se para a análise, que era um campo em desenvolvimento. Já em 1754 endereçou um pequeno ensaio em italiano para Giulio da Fagnano<sup>1</sup> (1682-1766), ao qual desenvolveu um cálculo formal baseado em uma analogia entre o binômio de Newton e as sucessivas diferenciações do produto de duas funções, comunicando posteriormente, também, Euler. Em 1755 Lagrange é apontado como professor de matemática da *Scuola d'Artiglieria* de Turim e também no mesmo ano comunicou a Euler em uma carta sobre o princípio do cálculo das variações de sua própria maneira, recebendo os parabéns pelo alto grau de perfeição de sua teoria. Em 1756 é eleito membro estrangeiro da *Académie des Sciences* de Berlim. Em 1757 foi cofundador da *Società Scientifica Privata Torinese* uma sociedade que posteriormente se tornou a Academia de Ciência de Turim, tendo a maioria de suas memórias publicada pela sociedade. Em 1764 estuda o problema dos 3 corpos e ganha o prêmio da Académie des Sciences de Paris. Em 1766 assume, por recomendação de Euler e d'Alembert, o lugar de Euler como diretor da seção de matemática de Académie Royale des Sciences de Berlim. Em 1779 vira senador em Paris, porém deixando Berlim apenas em 1787, após a morte de sua esposa em 1783, e da morte do rei Frederick II, para se tornar membro da Académie des Sciences de Paris. Torna-se o primeiro professor de matemática na recentemente fundada *École Polytechnique* em 1794 e também na *École Normale* em 1795 juntamente de Laplace<sup>2</sup> e Monge<sup>3</sup> morrendo em 10 de abril de 1813, com 77 anos.

<sup>1</sup> Giulio Carlo di Fagnano (1682-1766) foi um matemático italiano. Destacou-se por seu trabalho na determinação do comprimento e da divisão de arcos de várias curvas, com foco especial na lemniscata. Em sua *Produzione Matematiche* (2 volumes, 1750), ele discutiu seu trabalho e estabeleceu uma base para o estudo de integrais elípticas.

<sup>2</sup> Pierr-Simon Laplace (1749-1827) foi um matemático, astrônomo e físico francês que resumiu e ampliou com seu *Mécanique Céleste* ao fazer um estudo geométrico da mecânica newtoniana baseada no cálculo.

<sup>3</sup> Gaspar Monge (1746-1818) foi um matemático francês criador da Geometria Descritiva, além disso chegou a ocupar o cargo de ministro da Marinha durante a Revolução Francesa.

## 5.2 Sur la construction des cartes géographiques

Assim como nos capítulos anteriores, o trabalho de Lagrange é dividido por parágrafos e seguiremos a mesma simbologia para indicá-los. Então (§) indicará o parágrafo tratado.

### 5.2.1 Premier Mémoire

Na introdução da primeira memória, Lagrange diz que um mapa geográfico não é nada mais que uma figura plana que representa a superfície da Terra, ou uma de suas partes, e se lamenta pela Terra não ser uma figura de fácil projeção, como um sólido determinado por superfícies planas ou de forma curvilínea que pudesse ser desenvolvida em um plano, mas sendo uma esfera ou, como disse ele mesmo "ou plutôt sphéroïdique", seria impossível mapear a Terra sem a alteração de qualquer uma de suas posições e distâncias de diferentes lugares. Continua dizendo que dado esse problema, os geógrafos pensaram na construção de espécies de tabelas para representar os lugares, respeitando as regras de perspectiva, gerando diferentes projeções a depender da posição do "olho" e do plano de projeção. Dado isso, o problema então é transferir lugares da terra que são definidos por círculos de longitude e latitude, e afirma que essas projeções são facilmente concebidas por seções cônicas que transferem os círculos da Terra para o plano.

Lagrange, nesse momento, diferencia alguns tipos de projeções baseado no lugar do olho, que seria o topo desse cone. Caso o olho estivesse no centro do globo, a projeção seria *central*, com propriedade de que todos os grandes círculos são levados em retas e os pequenos círculos, em círculos ou elipses, dependendo da posição do plano. Sendo usada por vezes para os mapas mundi e mapas celestes com o plano geralmente paralelo ao equador, donde teremos que os círculos de latitude são levados também em círculos, tendo como vantagem lugares localizados no mesmo meridiano estando em uma linha reta, que é a construção mais curta para ligar dois pontos.

Assim, se o olho estiver na superfície do globo e o plano for perpendicular ao raio de visão do centro do globo, essa projeção é chamada de *estereográfica*, a qual Lagrange atribui a Ptolomeu na construção de astrolábios e planisférios terrestres até ser adotada pelos geógrafos da época para a construção dos mapas. Sua principal propriedade consiste em que todos os círculos do globo sejam paralelamente representados, tal que para determinar os pontos de projeção de um paralelo ou meridiano, basta três pontos. E ainda na introdução nos é informado que essa propriedade descoberta por Ptolomeu foi exposta no *Sphaerice a planetis projectio in planum*. Outra propriedade atribuída ao trabalho de Ptolomeu por Lagrange é a da conformidade da transformação, donde existe a preservação dos ângulos entre os pontos do globo e da projeção, daí pode ser tirado que figuras infinitamente pequenas da esfera são transferidas em figuras semelhantes no plano, respeitando os ângulos e alterando apenas os tamanhos. Contudo essa é também uma característica de outras projeções, no caso dos mapas marinhos reduzidos e de uma infinidade de outros mapas.

Um outro caso abordado é o do olho estar infinitamente longe do globo, tendo assim que todos os raios de projeção são perpendiculares ao plano, chamando assim de projeção *ortográfica*, com círculos levados em retas, círculos ou elipses no plano. Sendo mais utilizada por astrônomos para cálculos de eclipses.

Essas projeções são as chamadas principais por Lagrange, notando que a diferença entre elas é característica resultante da diferente localização do olho e do plano de projeção, salvo que todas elas possuem seu grau de deformação. Ainda é citado o trabalho de *de la Hire*<sup>4</sup> que teria encontrado uma regra<sup>5</sup> para a que a alteração fosse mínima, porém não muito prática para os geógrafos. Dessa forma o problema dos mapas se mostra como um trabalho totalmente indeterminado, devido a característica específica desejada por cada mapa ser uma, necessitando assim de uma técnica diferenciada para a representação dos círculos de latitude e longitude em outros círculos, retas ou elipses. O que realmente vai ser crucial será essa necessidade primária, que ditará a regra a ser utilizada. Um exemplo apresentado é o dos mapas marinhos reduzidos, que tem a única finalidade de representar os ventos como linhas retas, fazendo assim que todos os meridianos fossem linhas retas paralelas, e os paralelos, paralelos com o equador, sendo sempre ortogonais aos meridianos; de modo que os graus de latitude e longitude sejam proporcionais à relação existente entre eles na superfície do globo. E terminando sua introdução é lembrado que o primeiro a ter essa visão mais geral da teoria dos mapas foi Lambert, que adotou a única condição de que os ângulos formados no globo fossem os mesmos no mapa e sendo tratado posteriormente por Euler, exatamente nos dois trabalhos que tratamos nos capítulos anteriores dessa monografia. Porém, Lagrange deixa marcado que:

...mas estes dois ilustres autores estão satisfeitos em mostrar que as teorias conhecidas de projeção estereográfica e de mapas reduzidos estão contidos nesta solução, e ainda ninguém se comprometeu a dar a esta teoria toda a extensão que são suscetíveis, ao determinar todos os casos em que a solução em questão pode dar círculos para os meridianos e paralelos.

(LAGRANGE, 1779, p. 641. Tradução nossa.)

Lagrange, assim, deixa claro sua intenção de abordar o problema de uma forma mais geral, não se atentando a uma forma específica de resolver o problema. E na continuidade do texto ainda afirma ser um método mais simples e diferente do tratado pelos matemáticos citados, dizendo que aplicará sua solução geral nos casos particulares, buscando encontrar consequências úteis para o problema dos mapas.

Deixando a introdução do trabalho, Lagrange já inicia em (§1) considerando a Terra como um esferoide qualquer, por generalidade – resultado da rotação de uma curva dada em torno do eixo da Terra, sendo essas as curvas de todos os meridianos, donde podemos encontrar nesse eixo as coordenadas retangulares  $p$  (projeção do ponto no eixo) e  $q$  (segmento ortogonal

<sup>4</sup> Philippe de la Hire (1640-1718) foi um matemático, físico, astrônomo e geógrafo francês, e especialista em arquitetura. Ele participou de um projeto de criação de um mapa da França encomendado pelo rei Luís XIV e realizado pela Académie des Sciences de Paris, com a publicação do mapa pela academia em 1693.

<sup>5</sup> Presente nas *Mémoires de l'Académie des Sciences* de Paris do ano de 1701.

ao eixo). Lagrange nomeia  $s$  como o arco correspondente um meridiano contado a partir do polo e  $t$  o ângulo formado entre o plano desse meridiano com o plano do primeiro meridiano. Assim, qualquer localização na esfera pode ser dada em função de  $s$  e  $t$ , com  $s$  sendo a distância até o polo chamada de latitude ou complemento da latitude, e  $t$  a longitude da localização. Por facilidade, ao se considerar o raio da Terra como 1, tem-se que as coordenadas retangulares serão da forma  $p = \cos s$  e  $q = \sin s$ . Já tendo então como representar uma localização na Terra por coordenadas de  $s$  e  $t$ , imaginemos a transferência desse local para um mapa geográfico, de maneira que exista uma correspondência entre o ponto  $(s, t)$  e coordenadas  $(x, y)$  retangulares com  $x$  sendo abcissa e  $y$  ordenada, com ambas sendo funções de  $s$  e  $t$ .

Quando considerado em (§2), dois lugares infinitamente próximos, Lagrange nos leva a pensar de forma infinitesimal ao determinar suas coordenadas pelas variáveis  $s$ ,  $t$  e  $s + ds$ ,  $t + dt$  que são sobre o mapa correspondentes as coordenadas  $x$ ,  $y$  e  $x + dx$ ,  $y + dy$ . Segundo, também é fácil de ver que as distâncias dos pontos serão  $\sqrt{ds^2 + q^2 dt^2}$  na Terra, e  $\sqrt{dx^2 + dy^2}$  nas coordenadas retangulares. Logo, para manter a maior generalidade possível, neste momento, é suposto que essas distâncias sejam proporcionais da forma  $\frac{1}{m}$ , de tal maneira que  $\sqrt{ds^2 + q^2 dt^2} : \sqrt{dx^2 + dy^2} = 1 : m$ , tirando daí a equação fundamental que deve ser resolvida

$$dx^2 + dy^2 = m^2(ds^2 + q^2 dt^2). \quad (415)$$

Dessa forma, o estudo dos mapas se torna restritamente um estudo de transformações conformes, ao manter a similaridade a um nível infinitesimal.

Com uma troca de variável em (§3) garantida pelo fato de  $q$  ser dado através da quantidade  $s$ , no caso de  $\frac{ds}{q} = du$ , sendo  $\frac{ds}{q}$  integrável e  $mq = n$ . Substituindo na equação (415) tem-se que

$$dx^2 + dy^2 = n^2(du^2 + dt^2). \quad (416)$$

Assim a questão é determinar as quantidades  $x$ ,  $y$  em função de  $t$ ,  $u$ . Como a equação tem incógnitas do tipo  $dx$  e  $dy$  o artifício usado é multiplicar a equação pela identidade trigonométrica  $1 = \sin^2 \omega + \cos^2 \omega$  de um ângulo  $\omega$  indeterminado, para arranjar os produtos do lado direito da seguinte forma:

$$(\sin \omega du - \cos \omega dt)^2 + (\cos \omega du + \sin \omega dt)^2, \quad (417)$$

de tal modo que a equação se transforma em

$$dx^2 + dy^2 = n^2(\sin \omega du - \cos \omega dt)^2 + n^2(\cos \omega du + \sin \omega dt)^2. \quad (418)$$

Devido a indeterminação de  $\omega$  é possível escrever da forma

$$dx = n(\sin \omega du - \cos \omega dt) \quad (419)$$

$$dy = n(\cos \omega du + \sin \omega dt). \quad (420)$$

Com uma nova substituição, ao considerar  $n \sin \omega = \alpha$  e  $n \cos \omega = \beta$  as últimas equações (419) e (420) se tornam da forma

$$dx = \alpha du - \beta dt \quad (421)$$

$$dy = \beta du + \alpha dt \quad (422)$$

onde Lagrange aplica o "méthode connue de M. d'Alembert":<sup>6</sup>

$$dx + dy\sqrt{-1} = (\alpha + \beta\sqrt{-1})(du + dt\sqrt{-1}) \quad (423)$$

$$dx - dy\sqrt{-1} = (\alpha - \beta\sqrt{-1})(du - dt\sqrt{-1}) \quad (424)$$

Sendo  $\alpha + \beta\sqrt{-1}$  uma função de  $u + t\sqrt{-1}$  e  $(\alpha - \beta\sqrt{-1})$  de  $u - t\sqrt{-1}$  tendo  $x$  e  $y$  como resultado de uma integração.

E Lagrange acrescenta:

Denotemos, em geral, pelas características  $f$  e  $F$  quaisquer duas proposições indeterminadas, de modo que  $f(z)$ ,  $F(z)$  são quaisquer duas funções de  $z$ ; vamos denotar ainda por  $f'(z)$ ,  $F'(z)$  as diferenciais dessas funções. (LAGRANGE, 1779, p. 645. Tradução nossa.)

Donde teria como

$$f'(z) = \frac{df(z)}{dz} \quad (425)$$

$$F'(z) = \frac{dF(z)}{dz} \quad (426)$$

obtendo,

$$\alpha + \beta\sqrt{-1} = f'(u + t\sqrt{-1}) \quad (427)$$

$$\alpha - \beta\sqrt{-1} = F'(u - t\sqrt{-1}), \quad (428)$$

tendo

$$x + y\sqrt{-1} = f(u + t\sqrt{-1}) \quad (429)$$

$$x - y\sqrt{-1} = (Fu - t\sqrt{-1}), \quad (430)$$

onde, pode-se dizer que

$$x = \frac{f(u + t\sqrt{-1}) + F(u - t\sqrt{-1})}{2} \quad (431)$$

$$y = \frac{f(u + t\sqrt{-1}) - F(u - t\sqrt{-1})}{2\sqrt{-1}}, \quad (432)$$

sendo  $f$  e  $F$  ainda funções arbitrárias.

---

<sup>6</sup> método já explicado anteriormente.

Interessante notar que esta é uma das primeiras memórias que se faz uso da derivada utilizando o termo  $f'$  para denominá-la. Também nos deixa com a ideia de que a derivada das funções complexas tem propriedade de conservar as proporções, logo os ângulos. Vemos assim uma significação geométrica em um trabalho que tomou um ritmo bem geral do problema.

Em (§4) Lagrange relembra que as expressões dadas em (§3) são as mais gerais das coordenadas  $x$  e  $y$ , dada a condição inicial de que as distâncias de dois lugares infinitamente próximos na Terra seriam proporcionais à distância no mapa na razão  $1 : m$ . Lembrando que

$$mq = n \quad (433)$$

e que

$$n \sin \omega = \alpha, \quad (434)$$

$$n \cos \omega = \beta, \quad (435)$$

Onde ao elevar ao quadrado, as duas equações, somar e isolar  $n$

$$n = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}, \quad (436)$$

e por consequência da relação (433)

$$m = \frac{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}{q}; \quad (437)$$

mas

$$\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta\sqrt{-1})(\alpha - \beta\sqrt{-1}) = f'(u + t\sqrt{-1})F'(u - t\sqrt{-1}); \quad (438)$$

onde se tem ao substituir (438) em (437)

$$m = \frac{\sqrt{f'(u + t\sqrt{-1})F'(u - t\sqrt{-1})}}{q} \quad (439)$$

Assim percebemos que  $m$  é dado em função de  $t$  e  $u$ , sendo  $u$  dado em função de  $s$ . Como os lugares infinitamente próximos são do tipo  $t$  e  $s$  e  $t + dt$  e  $s + ds$  logo, a razão é dependente justamente da escolha dos lugares próximos, formando sempre figuras semelhantes no mapa da Terra; tendo assim as expressões, dando as mesmas propriedades de outros mapas, como o estereógrafo e dos mapas reduzidos.

Deste momento em diante Lagrange começa a determinar as características das funções utilizadas nos pontos anteriores, dado que já teria a aparência das variáveis  $x$  e  $y$  em função de  $u$  e  $t$  e de  $m$  como fator de proporção.

Supondo a partir de (§5) que  $t = 0$  para encontrar as funções que determinam as expressões de  $x$  e  $y$  que dão as coordenadas das curvas de meridianos, em especial o primeiro, partiríamos de (431) e (432)

$$x = \frac{f(u) + F(u)}{2} \quad (440)$$

$$y = \frac{f(u) - F(u)}{2\sqrt{-1}}, \quad (441)$$

que serão duas funções arbitrárias de  $u$ . Podendo, assim, supor que o primeiro meridiano seria uma curva qualquer que pode sofrer qualquer mudança de sua latitude por uma outra regra indeterminada. E para uma simplificação de notação, chamam-se as funções que depende de  $u$  da seguinte maneira

$$\frac{f(u) + F(u)}{2} = \varphi(u) \quad (442)$$

$$\frac{f(u) - F(u)}{2\sqrt{-1}} = \phi(u), \quad (443)$$

tendo daí ao isolar primeiro  $f(u)$  e somar as equações se obtém

$$f(u) = \varphi(u) + \phi(u)\sqrt{-1} \quad (444)$$

e ao se fazer o mesmo processo com  $F(u)$  se chega que

$$F(u) = \varphi(u) - \phi(u)\sqrt{-1}. \quad (445)$$

onde Lagrange deixa com essa forma de função as expressões de  $x$  e  $y$

$$x = \frac{\varphi(u + t\sqrt{-1}) + \varphi(u - t\sqrt{-1})}{2} + \frac{\phi(u + t\sqrt{-1}) - \phi(u - t\sqrt{-1})}{2}\sqrt{-1} \quad (446)$$

$$y = \frac{\phi(u + t\sqrt{-1}) + \phi(u - t\sqrt{-1})}{2} + \frac{\varphi(u + t\sqrt{-1}) - \varphi(u - t\sqrt{-1})}{2\sqrt{-1}}; \quad (447)$$

Com a facilidade de que, agora, as quantidades imaginárias se destroem por elas mesmas.

Na continuidade do trabalho, Lagrange chega em um momento crucial que é a percepção de que essa forma, mesmo que mais geral, de determinar as funções arbitrárias apresentadas até aqui não seria a mais conveniente para seu objetivo. Porque a garantia não deve ser da posição dos lugares marcados sobre os meridianos, e sim a forma dos meridianos e dos paralelos, pois eles serão as linhas traçadas no mapa que irão determinar os lugares. Mudando assim o foco para o encontro de funções ainda indeterminadas que sejam solução para os meridianos e paralelos por linhas de certa natureza, Lagrange diz que a dificuldade dessa tarefa seria tão grande que achava impossível de se resolver de forma geral, partindo então para a resolução particular onde os meridianos e paralelos fossem arcos de círculos, que são formas preferíveis quando comparáveis a outras curvas, e com a escolha desse critério são incluídos os casos de mapas reduzidos e da projeção estereográfica.

Assim, dado a natureza da forma como de um círculo, o início de (§7) se dá com a principal propriedade dos círculos: terem o raio de curvatura constante, partindo para a procura da expressão geral dos raios de osculação das curvas que representam os meridianos e paralelos de acordo com os parâmetros de (§3). Sendo a expressão do raio de osculação relacionada a  $x$  e  $y$  da forma

$$\frac{(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dyd^2x - dxd^2y} \quad (448)$$

onde basta variar em  $s$  ou  $u$  para variar os meridianos, ou seja, a expressão de  $x$  e  $y$ , e para os paralelos bastando variar unicamente em  $t$ ; de forma geral

$$dx = \alpha du - \beta dt \quad (449)$$

$$dy = \beta du + \alpha dt; \quad (450)$$

neste caso, assim seria para os meridianos

$$dx = \alpha du, \quad (451)$$

$$dy = \beta du \quad (452)$$

$$d^2x = \frac{d\alpha}{du} du^2 \quad (453)$$

$$d^2y = \frac{d\beta}{du} du^2; \quad (454)$$

tal que se nomeia de  $r$  o nome do raio osculador de um meridiano qualquer, teremos ao substituir esses valores na equação (448)

$$\frac{1}{r} = \frac{\beta \frac{d\alpha}{du} - \alpha \frac{d\beta}{du}}{(\alpha^2 + \beta^2)^{\frac{3}{2}}}. \quad (455)$$

E para os paralelos tem-se

$$dx = -\beta dt, \quad (456)$$

$$dy = \alpha dt, \quad (457)$$

$$d^2x = -\frac{d\beta}{dt} dt^2, \quad (458)$$

$$d^2y = \frac{d\alpha}{dt} dt^2; \quad (459)$$

onde o nome  $\rho$  é atribuído ao raio osculador de um paralelo qualquer, teremos ao substituir os valores encontrados na equação (448)

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\beta \frac{d\alpha}{dt} - \alpha \frac{d\beta}{dt}}{(\alpha^2 + \beta^2)^{\frac{3}{2}}}. \quad (460)$$

que pela condição de integrabilidade das formulas  $\alpha du - \beta dt$ ,  $\beta du + \alpha dt$  tem que<sup>7</sup>

$$\frac{d\alpha}{dt} = -\frac{d\beta}{du}, \quad (461)$$

$$\frac{d\beta}{dt} = \frac{d\alpha}{du}; \quad (462)$$

---

<sup>7</sup> Equações de Cauchy-Riemann

que nos permite escrever as expressões de  $\frac{1}{r}$  e  $\frac{1}{\rho}$  da seguinte forma:

$$\frac{1}{r} = \frac{\beta \frac{d\beta}{dt} + \alpha \frac{d\alpha}{dt}}{(\alpha^2 + \beta^2)^{\frac{3}{2}}},$$

$$\frac{1}{\rho} = \frac{-\beta \frac{d\beta}{du} + \alpha \frac{d\alpha}{du}}{(\alpha^2 + \beta^2)^{\frac{3}{2}}},$$

onde

$$\frac{1}{r} = \frac{d \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}}{dt}, \quad (463)$$

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}}{du} \quad (464)$$

que pela igualdade<sup>8</sup> encontrada em (§4) podemos considerar que

$$\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} = \sqrt{f'(u + t\sqrt{-1})F'(u - t\sqrt{-1})} \quad (465)$$

de tal modo que se adota a seguinte forma

$$\Omega = \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} = \frac{1}{\sqrt{f'(u + t\sqrt{-1})F'(u - t\sqrt{-1})}} \quad (466)$$

ou seja,

$$\frac{1}{r} = \frac{d\Omega}{dt}, \quad (467)$$

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d\Omega}{du} \quad (468)$$

Quantidade essa  $\Omega$  que será utilizada para determinar o valor de  $m$ , que temos em (§4) ser  $m = \frac{1}{q\Omega}$ . Sendo  $q$  uma função do arco  $s$  do meridiano dado pela figura, e que  $du = \frac{ds}{q}$ , sendo  $q$  também como uma função de  $u$ ; Lagrange ainda diz que se quiséssemos que a quantidade  $m$  fosse constante ou que fosse função apenas de  $u$ , ou seja, o mesmo valor para todos os pontos de um paralelo, demandaria que  $\Omega$  fosse também uma função de  $u$  apenas. Por consequência  $\frac{d\Omega}{dt} = 0 = \frac{1}{r}$ , logo  $r = \infty$  com todos os meridianos do mapa sendo linhas retas.

Continuando de forma mais geral, agora em (§9), Lagrange supõe que os meridianos fossem representados por círculos, de forma a generalizar o resultado encontrado anteriormente, fazendo com que  $r$  fosse um valor que variasse apenas de um meridiano para outro, sendo constante ao longo de um mesmo meridiano, logo  $r$  e  $\frac{d\Omega}{dt}$  só poderia ser função de  $t$  apenas, de forma que quando variado em  $u$  na diferencial citada, o valor fosse nulo. Assim, a condição para que os meridianos fossem círculos seria

<sup>8</sup>  $\alpha^2 + \beta^2 = f'(u + t\sqrt{-1})F'(u - t\sqrt{-1})$ .

$$\frac{d^2\Omega}{dtdu} = 0. \quad (469)$$

Daí ao multiplicar a equação por  $dt$  e integrar, variando apenas em  $t$ , chega-se em  $\frac{d\Omega}{du} = U = \frac{1}{\rho}$ , com  $U$  uma função qualquer de  $u$  sem  $t$ ; sendo assim, os paralelos também são círculos com o raio sendo funções de  $u$  apenas, mantendo-se ao longo dos paralelos. Lagrange ainda deixa apontado que, se caso, partíssemos dos paralelos sendo círculos, obteríamos os meridianos também como círculos com a condição da circularidade sendo a mesma  $\frac{d^2\Omega}{dtdu} = 0$ .

Em busca de encontrar a forma das funções  $f$  e  $F$  que respeitem essas condições, são apresentadas outras duas funções  $\varphi$  e  $\Phi$  que são da forma  $\varphi(z) = \frac{1}{\sqrt{f'(z)}}$ ,  $\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{F'(z)}}$ ; de tal modo que  $\Omega = \varphi(u + t\sqrt{-1})\Phi(u - t\sqrt{-1})$  e diferenciando duas vezes fazendo variar primeiro em  $u$  e depois em  $t$  é obtido

$$\frac{d\Omega}{du} = \varphi'(u + t\sqrt{-1})\Phi(u - t\sqrt{-1}) + \Phi'(u - t\sqrt{-1})\varphi(u + t\sqrt{-1}),$$

$$\frac{d^2\Omega}{dudt} = [\varphi''(u + t\sqrt{-1})\Phi(u - t\sqrt{-1}) - \varphi'(u + t\sqrt{-1})\Phi'(u - t\sqrt{-1}) - \Phi''(u - t\sqrt{-1})\varphi(u + t\sqrt{-1}) + \Phi'(u - t\sqrt{-1})\varphi'(u + t\sqrt{-1})]\sqrt{-1};$$

que pela condição de circularidade dos meridianos e paralelos temos que  $\varphi''(u + t\sqrt{-1})\Phi(u - t\sqrt{-1}) - \Phi''(u - t\sqrt{-1})\varphi(u + t\sqrt{-1}) = 0$  daí

$$\frac{\varphi''(u + t\sqrt{-1})}{\varphi(u + t\sqrt{-1})} = \frac{\Phi''(u - t\sqrt{-1})}{\Phi(u - t\sqrt{-1})} \quad (470)$$

de tal forma que essas duas equações, uma sendo função de  $u + t\sqrt{-1}$  e a outra de  $u - t\sqrt{-1}$  não poderiam ser iguais se forem diferentes de uma constante. Assim é chamado de  $k$ , uma constante arbitrária que representa o valor das razões. Podendo ser escritas da forma

$$\frac{\varphi''(z)}{\varphi(z)} = k = \frac{d^2\varphi(z)}{\varphi(z)dz^2}, \quad (471)$$

$$\frac{\Phi''(z)}{\Phi(z)} = k = \frac{d^2\Phi(z)}{\Phi(z)dz^2} \quad (472)$$

que são integráveis pelas regras conhecidas, com resultado da forma

$$\varphi(z) = M e^{z\sqrt{k}} + N e^{-z\sqrt{k}}, \quad (473)$$

$$\Phi(z) = P e^{z\sqrt{k}} + Q e^{-z\sqrt{k}} \quad (474)$$

com  $M, N, P$ , e  $Q$  coeficientes quaisquer, positivos ou negativos, reais ou imaginários;

E

$$\varphi(z) = \frac{1}{\sqrt{f'(z)}}, \quad (475)$$

$$\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{F'(z)}}; \quad (476)$$

que pode ser escrito da forma

$$f'(z) = \frac{1}{(Me^{z\sqrt{k}} + Ne^{-z\sqrt{k}})^2} = \frac{e^{2z\sqrt{k}}}{(Me^{2z\sqrt{k}} + N)^2} \quad (477)$$

$$F'(z) = \frac{1}{(Pe^{z\sqrt{k}} + Qe^{-z\sqrt{k}})^2} = \frac{e^{2z\sqrt{k}}}{(Pe^{2z\sqrt{k}} + Q)^2}; \quad (478)$$

$$f'(z) = \frac{df(z)}{dz}, \quad (479)$$

$$F'(z) = \frac{dF(z)}{dz}; \quad (480)$$

onde se multiplica por  $dz$  e integra, obtendo

$$f(z) = \frac{1}{2M(Me^{2z\sqrt{k}} + N)\sqrt{k}} + G \quad (481)$$

$$F(z) = \frac{1}{2P(Pe^{2z\sqrt{k}} + Q)\sqrt{k}} + H, \quad (482)$$

com  $G$  e  $H$  novas constantes arbitrárias. Assim, a forma das funções arbitrárias é determinada colocando no lugar de  $z$ , em  $f(z)$ ,  $u + t\sqrt{-1}$  e em  $F(z)$ ,  $u - t\sqrt{-1}$  gerando as seguintes expressões

$$f(u + t\sqrt{-1}) = \frac{1}{2M(Me^{2u\sqrt{k}+2t\sqrt{-k}} + N)\sqrt{k}} + G, \quad (483)$$

$$F(u - t\sqrt{-1}) = \frac{1}{2P(Pe^{2u\sqrt{k}-2t\sqrt{-k}} + Q)\sqrt{k}} + H, \quad (484)$$

que será apenas uma questão de substituir nos valores de  $x$  e  $y$ .

E antes de fazer essa substituição em (§11) é feito um estudo sobre o valor de  $k$ , o qual pode ser positivo ou negativo, porém Lagrange percebe que a diferença que isso resultaria para a fórmula é fruto da troca de lugares das variáveis  $t$  e  $u$  em relação a  $f(u + t\sqrt{-1})$  e  $F(u - t\sqrt{-1})$ . Para isso é feita a troca da constante  $H$  por uma outra constante arbitrária  $\frac{1}{2PQ\sqrt{k}} + H$ , que ao ser reduzida e posteriormente dividindo tudo por  $e^{2u\sqrt{k}+2t\sqrt{-k}}$  resultaria em  $F(u - t\sqrt{-1}) = -\frac{1}{2Q(Qe^{2u\sqrt{k}+2t\sqrt{-k}} + P)} + H$ , que é resultado da troca de sinal de  $k$  e da troca de posição de  $t$  com  $u$  e  $P$  com  $Q$ , concluindo assim que nesse contexto seria suficiente considerar  $k$  como um constante positiva, dado que a permutação entre  $u$  e  $t$  para  $k$  negativo seria possível por conta da permutabilidade das variáveis na equação fundamental, dada em (§3)<sup>9</sup>

Partindo então para a substituição em  $x$  e  $y$ , e por facilidade, adotaremos  $k = c^2$  obtendo

---

<sup>9</sup>  $dx^2 + dy^2 = n^2(du^2 + dt^2)$ .

$$x = -\frac{1}{4cM(Me^{2cu+2ct\sqrt{-1}} + N)} - \frac{1}{4cP(Pe^{2cu-2ct\sqrt{-1}} + Q)} + \frac{G + H}{2} \quad (485)$$

$$y = -\frac{1}{4cM(Me^{2cu+2ct\sqrt{-1}} + N)} + \frac{1}{4cP(Pe^{2cu-2ct\sqrt{-1}} + Q)} + \frac{G - H}{2\sqrt{-1}} \quad (486)$$

de tal modo que as constantes  $G, H, M, N, P$ , e  $Q$  devem ser determinadas de forma que os imaginários se destruam. Para isso  $\frac{G + H}{2} = A$  e  $\frac{G - H}{2\sqrt{-1}} = B$  com  $A$  e  $B$  constantes reais quaisquer. E fazendo por mais generalidade  $M = C + D\sqrt{-1}$ ,  $N = G + I\sqrt{-1}$ , com  $C, D, E$  e  $I$  também constantes reais, donde será necessário que  $P = C - D\sqrt{-1}$  e  $Q = E - I\sqrt{-1}$ , fazendo com que os imaginários se cancelam. Mas sem levar essas suposições a frente é suposto da seguinte forma

$$M = a(\cos g + \sin g\sqrt{-1}) = ae^{g\sqrt{-1}} \quad (487)$$

$$N = b(\cos h + \sin h\sqrt{-1}) = be^{h\sqrt{-1}} \quad (488)$$

$$P = a(\cos g - \sin g\sqrt{-1}) = ae^{-g\sqrt{-1}} \quad (489)$$

$$Q = b(\cos h - \sin h\sqrt{-1}) = be^{-h\sqrt{-1}} \quad (490)$$

com  $a, b, g$  e  $h$  constantes arbitrárias reais, que após algumas reduções encontraremos

$$x = A - \frac{a \cos 2(ct + g) + b \cos(g + h).e^{-2cu}}{2ac[a^2e^{2cu} + 2ab \cos(2ct + g - h) + b^2e^{-2cu}]} \quad (491)$$

$$y = B - \frac{a \sin 2(ct + g) + b \sin(g + h).e^{-2cu}}{2ac[a^2e^{2cu} + 2ab \cos(2ct + g - h) + b^2e^{-2cu}]} \quad (492)$$

Tendo essas equações para determinar agora  $x$  e  $y$  no mapa, são feitos alguns estudos em relação a elas. Neste caso ao se retirar a variável  $u$ , encontra-se a equação das curvas que representam os diferentes meridianos nas diferentes longitudes  $t$ , sendo de forma recíproca ao eliminar  $t$ , tendo as curvas que representam os paralelos em todas as latitudes. Para facilitar estas eliminações, Lagrange começa pela soma de  $(x - A)^2$  e  $(y - B)^2$ , obtendo

$$(x - A)^2 + (y - B)^2 = \frac{e^{-2cu}}{4a^2c^2[a^2e^{2cu} + 2ab \cos(2ct + g - h) + b^2e^{-2cu}]} \quad (493)$$

do qual é retirado

$$a^2e^{2cu} + 2ab \cos(2ct + g - h) + b^2e^{-2cu} = \frac{e^{-2cu}}{4a^2c^2[(x - A)^2 + (y - B)^2]} \quad (494)$$

e substituindo nos valores de  $x$  e  $y$

$$\frac{x - A}{(x - A)^2 + (y - B)^2} = -2ac[ae^{2cu} \cos 2(ct + g) + b \cos(g + h)] \quad (495)$$

$$\frac{y - B}{(x - A)^2 + (y - B)^2} = 2ac[ae^{2cu} \sin 2(ct + g) + b \sin(g + h)] \quad (496)$$

onde é mais fácil eliminar  $u$  ou  $t$ .

Em (§14) já passando para as eliminações, o primeiro passo é eliminar  $e^{2cu}$  das equações obtidas, resultando em

$$\frac{(x - A) \sin 2(ct + g) + (y - B) \cos 2(ct + g)}{(x - A)^2 + (y - B)^2} = -2abc \sin(2ct + g - h), \quad (497)$$

que pode ser reduzido a

$$\left[ x - A + \frac{\sin 2(ct + g)}{4abc \sin(2ct + g - h)} \right]^2 + \left[ y - B + \frac{\cos 2(ct + g)}{4abc \sin(2ct + g - h)} \right]^2 = \frac{1}{[4abc \sin(2ct + g - h)]^2} \quad (498)$$

de tal forma que se pode tratar essa equação como a de um círculo; chamando  $r$  de raio e  $X$  e  $Y$  as abscissas e ordenadas, respectivamente, do centro do círculo, donde

$$r = \frac{1}{4abc \sin(2ct + g - h)}, \quad (499)$$

$$X = A - r \sin 2(ct + g), \quad (500)$$

$$Y = B - r \sin 2(ct + g). \quad (501)$$

Agora, eliminando  $t$  dessas duas últimas equações, é obtida a seguinte relação

$$(X - A) \cos(g + h) - (Y - B) \sin(g + h) + \frac{1}{4abc} = 0 \quad (502)$$

que gera uma reta que será o centro de todos os círculos que representarão os meridianos, tal que essa reta terá com o eixo das abscissas um ângulo cuja tangente será  $\frac{dY}{dX} = \cot(g + h)$ , para que o ângulo seja igual a  $90^\circ - g - h$

Eliminando agora em (15) o ângulo  $t$  da mesma equação para ter as equações dos círculos dos paralelos, teremos

$$\left[ \frac{x - A}{(x - A)^2 + (y - B)^2} + 2abc \cos(g + h) \right]^2 + \left[ \frac{y - B}{(x - A)^2 + (y - B)^2} - 2abc \cos(g + h) \right]^2 = 4a^4 c^2 e^{4cu} \quad (503)$$

chegando em

$$\frac{1 + 4abc \cos(g + h).(x - A) - 4abc \sin(g + h).(y - B)}{(x - A)^2 + (y - B)^2} = 4a^2 c^2 (a^2 e^{4cu} - b^2) \quad (504)$$

que se transforma em

$$\left[ x - A - \frac{b \cos(g + h)}{2ac(a^2 e^{4cu} - b^2)} \right]^2 + \left[ y - B - \frac{b \sin(g + h)}{2ac(a^2 e^{4cu} - b^2)} \right]^2 = \frac{e^{4cu}}{4c^2(a^2 e^{4cu} - b^2)^2}, \quad (505)$$

que de mesma forma pode ser visto como um círculo, onde chamaremos de  $\rho$  o raio e de  $\xi$  e  $\eta$  as coordenadas das abscissas e ordenadas do centro do círculo, tendo

$$\rho = \frac{e^{2cu}}{2c(a^2 e^{4cu} - b^2)}, \quad (506)$$

$$\xi = A + \frac{b}{a} \cos(g + h) \cdot \rho e^{-2cu}, \quad (507)$$

$$\eta = B - \frac{b}{a} \sin(g + h) \cdot \rho e^{-2cu}. \quad (508)$$

Que ao eliminarmos  $u$  dessas últimas equações teremos a equação do centro dos círculos dos paralelos, sendo

$$(\xi - A) \sin(g + h) + (\eta - B) \cos(g + h) = 0, \quad (509)$$

que será uma linha reta a qual terá um ângulo com as abscissas tal que sua tangente será  $\frac{d\xi}{d\eta} = \tan(g + h)$ ; de tal forma que o ângulo será  $180^\circ - g - h$ , que por consequência será perpendicular a reta referente aos centros dos meridianos.

Agora em busca do valor da quantidade  $m$ , em (16), que exprime a proporção da distorção de ampliação ou diminuição de determinada região da Terra para o mapa. Temos que  $m = \frac{1}{q\Omega}$ , logo o valor de  $\Omega$  deve ser encontrado e para isso é feita a substituição do valor de  $\varphi$  e  $\phi$  na equação de (10) de  $\Omega$  obtendo

$$\Omega = MP2^{2u\sqrt{k}} + NQe^{-2u\sqrt{k}} + MQe^{2t\sqrt{-k}} + NPe^{-2t\sqrt{-k}}, \quad (510)$$

que com algumas substituições se torna

$$\Omega = a^2 e^{2cu} + 2ab \cos(2ct + g - h) + b^2 e^{-2cu}; \quad (511)$$

chegando que

$$m = \frac{1}{q[a^2 e^{2cu} + 2ab \cos(2ct + g - h) + b^2 e^{-2cu}]} \quad (512)$$

Com esses resultados, Lagrange constata que com a substituição de  $\Omega$  nas equações encontradas em (§7), pode observar a exatidão das fórmulas, pois os raios  $r$  e  $\rho$  dos meridianos e paralelos são determinados, de forma geral, por

$$\frac{1}{r} = -\frac{d\Omega}{dt}, \quad (513)$$

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d\Omega}{du} \quad (514)$$

que resultará os mesmos valores encontrados anteriormente para os raios dos círculos que representam os meridianos e paralelos.

Em (§18) é o lugar utilizado para a análise das condições necessárias para que a quantidade  $m$  fosse constante, ou uma função de  $u$  sem  $t$ . Anteriormente, em (§8) foi visto que dessa forma todos os meridianos seriam linhas retas; assim as fórmulas encontradas para que os meridianos fossem qualquer tipo de círculo também serão analisadas, englobando os casos de linhas retas. Isso será questão de ver se a expressão de  $m$  obtida em (§16) pode se tornar função de  $u$  apenas. Assim, como  $q$  pode ser função de  $u$ , ele faria que o termo  $2ab \cos(2ct + g - h)$ , que contém  $t$ , desaparecesse por ele mesmo; o que só pode acontecer, caso  $a = 0$  ou  $b = 0$ . No primeiro caso teria

$$m = \frac{1}{qb^2 e^{-2cu}}, \quad (515)$$

e no outro

$$m = \frac{1}{qa^2 e^{2cu}} \quad (516)$$

por isso, tendo em geral,

$$q = \frac{Ae^{Bu}}{m} \quad (517)$$

Com  $A$  e  $B$  sendo constantes quaisquer; equação que servirá para determinar a figura do meridiano, assim que  $m$  for dado por  $u$ . Numa diferenciação logarítmica, tem-se

$$\frac{dq}{q} = Bdu - \frac{dm}{m}; \quad (518)$$

porém  $du = \frac{ds}{q}$ , donde

$$dq + q\frac{dm}{m} = Bds; \quad (519)$$

e multiplicando por  $m$  e integrando,

$$mq = b \int mds + C; \quad (520)$$

donde

$$q = \frac{B \int mds + C}{m} \quad (521)$$

que dará  $q$  em  $s$ , se  $m$  já for dado em  $s$ . Portanto, para que  $m$  fosse constante se encontraria

$$q = Bs + \frac{C}{m} \quad (522)$$

que daria uma linha reta para os meridianos e, consequentemente, um cone reto para a figura da Terra.

Dessa forma, as fórmulas foram obtidas independentemente da figura dos meridianos da Terra, e para aplicar essas fórmulas na construção dos mapas geográficos é necessário conhecer a função da latitude, que é a variável  $u$  que nós supomos ser  $du = \frac{ds}{q}$ , lembrando que  $s$  é o arco

do meridiano contato a partir do polo, e  $q$  a ordenada perpendicular ao eixo da terra definido em (§3).

Levando em consideração a Terra como uma esfera, como afirma ser de costume na construção de mapas geográficos por Lagrange e, por mais facilidade, que o seu raio fosse a unidade, teríamos que

$$q = \sin(s) \quad (523)$$

com  $s$  sendo ao mesmo tempo distância ao polo, ou complemento da latitude. Donde se chega que

$$du = \frac{ds}{\sin(s)} \quad (524)$$

que tem a integral como

$$u = \frac{1}{2} \log \frac{1 - \cos(s)}{1 + \cos(s)} = \log \tan \frac{s}{2}; \quad (525)$$

de forma que somando uma constante arbitrária  $\log k$ , teremos de forma geral

$$u = \log \left( k \log \frac{s}{2} \right), \quad (526)$$

e a partir daí

$$e^{cu} = \left( k \tan \frac{s}{2} \right)^c; \quad (527)$$

assim, as exponenciais desaparecerão e restarão apenas senos e cossenos. Mas, para trazer toda a generalidade possível a fórmula, os valores de  $q$  e  $s$  devem ser dados sem levar em consideração a hipótese da Terra esférica. Assim, Lagrange supõe que a Terra fosse um esferoide elíptico com os polos achatados, fazendo com que o raio do equador ou o eixo maior da elipse igual a 1, e o eixo menor da elipse, podendo chamar de eixo menor da Terra igual a  $\gamma$ . Tomando em  $p$  nas abscissas sobre o eixo menor ao polo, conforme suposto em 1, a equação da elipse será

$$(a - p)^2 + \gamma^2 q^2 = \gamma^2, \quad (528)$$

onde se tira a diferencial

$$\frac{dp}{dq} = \frac{\gamma^2 q}{1 - p}; \quad (529)$$

sendo claro que  $\frac{dp}{dq}$  é igual a tangente do ângulo que a perpendicular da elipse faz com o eixo das abscissas  $p$ , assim, neste caso  $\frac{dp}{dq}$  será igual a tangente do ângulo que exprime a distância ao polo, ou ao complemento da latitude.

Se nomeia então essa distância, de forma geral, do polo ou do complemento da latitude de  $z$ , tal que

$$\frac{dp}{dq} = \tan(z) \quad (530)$$

onde

$$\frac{\gamma^2 q}{1 - p} = \tan(z); \quad (531)$$

tendo

$$q = \frac{(1 - p) \tan(z)}{\gamma^2}; \quad (532)$$

e substituindo esse valor de  $q$  na equação da elipse, encontra-se

$$1 - p = \frac{\gamma^2}{\sqrt{\gamma^2 + \tan^2 z}}, \quad (533)$$

e que

$$q = \frac{\tan(z)}{\sqrt{\gamma^2 + \tan^2(z)}}. \quad (534)$$

Diferenciando ambos temos

$$dp = \frac{\gamma^2 \tan(z) d \tan(z)}{(\gamma^2 + \tan^2(z))^{\frac{3}{2}}}, \quad (535)$$

$$dq = \frac{\gamma^2 d \tan(z)}{(\gamma^2 + \tan^2(z))^{\frac{3}{2}}} \quad (536)$$

onde

$$ds = \sqrt{dp^2 + dq^2} = \frac{\gamma^2 \sqrt{1 + \tan^2(z)}}{(\gamma^2 + \tan^2(z))^{\frac{3}{2}}} d \tan(z); \quad (537)$$

e lembrando que em (§3),  $du = \frac{ds}{q}$ , obtendo

$$du = \frac{\gamma^2 \sqrt{1 + \tan^2(z)}}{\tan(z)(\gamma^2 + \tan^2(z))} d \tan(z) = \frac{\gamma^2 dz}{\sin(z)(\gamma^2 \cos^2(z) + \sin^2(z))}. \quad (538)$$

Seja

$$1 - \gamma^2 = \epsilon^2 \quad (539)$$

tal que  $\epsilon$  seja a excentricidade da elipse que forma os meridianos da Terra; ou seja,

$$du = \frac{\gamma^2 dz}{\sin(z)(\gamma^2 + \epsilon^2 \sin^2(z))} = \frac{dz}{\sin(z)} - \frac{\epsilon^2 \sin(z) dz}{1 - \epsilon^2 \cos^2(z)} \quad (540)$$

sendo a integral de  $\frac{dz}{\sin(z)}$

$$\frac{1}{2} \log \frac{1 - \cos(z)}{1 + \cos(z)} = \log \tan \frac{z}{2}, \quad (541)$$

e a integral de  $\frac{\epsilon^2 \sin(z) dz}{1 - \epsilon^2 \cos^2(z)}$  é

$$\frac{\epsilon}{2} \log \frac{1 - \epsilon \cos(z)}{1 + \epsilon \cos(z)} \quad (542)$$

que somando uma constante arbitrária  $\log(k)$ , apresenta-se

$$u = \log \left[ k \tan \frac{z}{2} \left( \frac{1 + \epsilon \cos(z)}{1 - \epsilon \cos(z)} \right)^{\frac{\epsilon}{2}} \right]. \quad (543)$$

E, assim, sobre a expressão de  $q$  e substituindo também  $1 - \epsilon^2$  no lugar de  $\gamma^2$  é obtido

$$q = \frac{\sin(z)}{\sqrt{1 - \epsilon^2 \cos^2(z)}}. \quad (544)$$

Sobre o caso da terra esférica seria necessário  $\epsilon = 0$ , donde

$$u = \log \left( k \tan \frac{z}{2} \right), \quad (545)$$

assim como encontrado acima; mas Lagrange faz as expressões de  $u$  semelhantes ao utilizar um ângulo  $\xi$  tal que

$$\tan \frac{\xi}{2} = \tan \frac{z}{2} \left( \frac{1 + \epsilon \cos(z)}{1 - \epsilon \cos(z)} \right)^{\frac{\epsilon}{2}}, \quad (546)$$

que aí chegando ao mesmo

$$u = \log \left( k \tan \frac{\xi}{2} \right); \quad (547)$$

para que se possa enxergar o ângulo  $\xi$  como a distância do polo corrigida pelo achatamento da Terra; e como a excentricidade  $\epsilon$  é muito pequena, é possível encontrar a correção dita como a diferença entre  $\xi$  e  $z$ , por uma série altamente convergente<sup>10</sup>

Chegando a uma aproximação, ao negligenciar as quantidades da ordem de  $\epsilon^4$  em

$$\delta = -\frac{\epsilon^2 \cos(z)}{2}, \quad (548)$$

$$\xi = z = \frac{\epsilon^2}{2} \sin(2z) \quad (549)$$

com toda a exatidão desejável.

Resolvendo assim o problema de maneira geral para a qual a projeção estereográfica oferece apenas uma solução particular; partindo que essa projeção será utilizada para a construção de mapas terrestres com a fixação de duas propriedades ditas no início, sendo: 1º – de que toda superfície da Terra será transformada em uma figura semelhante, mudando apenas em tamanho; e 2º – que os meridianos e paralelos fossem formados por círculos no mapa. Que ao se fixar apenas essas condições chegamos em uma solução geral que engloba as demais transformações com essas características.

Assim, termina a primeira memória de Lagrange, onde o foco foi todo no desenvolvimento da fórmula que iria generalizar o processo de transferência das coordenadas esféricas, para a cartesiana. Dado esse encerramento, uma segunda memória tem início, com o propósito de explorar as consequências dos resultados obtidos nesta primeira.

## 5.2.2 Second Mémoire

Nesta segunda memória, Lagrange objetiva aprofundar sua análise sobre as fórmulas encontradas na primeira memória, e para facilidade, continua com a numeração dos tópicos seguindo a partir do (§21). Consequentemente, ligado ao estudo das fórmulas está sua aplicação prática com a construção inicial, marcações e delimitações de pontos específicos de um mapa, possibilitando assim a confirmação e checagem de todo o trabalho de sua primeira memória.

<sup>10</sup> dados por Lagrange no 'Nouveaux Mémoires de l'Académie royale de Berlin' em 1776.

Ao introduzir a segunda memória observações já levantadas anteriormente são retomadas, como o fato dos principais métodos para a construção de mapas terrestres estarem baseadas ou nos princípios da projeção estereográfica, que Lagrange atribui a Ptolomeu, ou dependente da teoria das latitudes crescentes. Além disso, também é lembrado que a primeira é mais normalmente utilizada na construção dos próprios mapas, com a característica de que todos os meridianos e paralelos da Terra são, em geral, todos círculos do globo representados por círculos; já a segunda forma sendo unicamente utilizada para os mapas marinhos, tendo agora todos os meridianos e paralelos da Terra representados por linhas retas. Porém, mesmo com essa diferença os dois métodos apresentam a característica de não alterarem as figuras infinitamente pequenas na superfície da Terra, tal que os ângulos possíveis de serem formados no globo, também são nos mapas, construídos com esses métodos.

Assim, junto a essa propriedade vem a curiosidade de Lagrange em estudar a natureza das curvas que devem ser traçadas no plano para a representação dos paralelos e meridianos para ter essa propriedade em todos os locais. E com todo o trabalho da primeira memória é dito que não haveria grandes dificuldades na obtenção de uma fórmula geral para esse problema, mas sim, na determinação das funções arbitrárias encontradas no processo. Assim, surge outra questão nesse estudo da fórmula, onde se é definido, a princípio, uma natureza específica para essas linhas que representam os meridianos e paralelos.

Essa nova questão aos olhos de Lagrange é dita como muito mais difícil que a principal, talvez ultrapassando as forças da Análise conhecida no momento. Contudo, para a aplicação da fórmula na geografia, não é necessária sua resolução geral, mas sim, sua resolução particular com meridianos e paralelos como arcos de círculos, que é a figura escolhida dada a dificuldade em se traçar outras curvas diferentes de círculos, que englobaria os dois processos citados inicialmente, sendo as demais soluções apenas para a saciedade de sua curiosidade.

Assim, entrando em (§21) é lembrado que nos itens (§12) e (§16) da memória precedente se obteve soluções com diferentes resultantes da permutabilidade de  $t$  e  $u$  em (§11), com a solução resultante dessa permutação contendo uma exponencial de  $t$ , senos e cossenos da quantidade  $u$ , que em (§19) foi observado ser uma quantidade logarítmica; ao invés da solução dada imediatamente após essas fórmulas, contendo apenas senos e cossenos dos ângulos  $t$  e  $z$ , por conta de

$$e^u = k \tan \frac{z}{2} \left( \frac{1 + \varepsilon \cos(z)}{1 - \varepsilon \cos(z)} \right)^{\frac{3}{2}} \quad (550)$$

sendo, assim, essa a solução analisada. Como é visto ela contém constantes arbitrárias que ajudam na generalidade da fórmula, enquanto outras dependem das posições arbitrárias dos eixos de coordenadas. Assim, pode-se definir essas últimas de maneira conveniente, de forma simples, sem perder a generalidade.

É tomado assim os eixos do plano como os eixos dos centros dos meridianos e paralelos, visto que ambos os eixos são linhas retas perpendiculares e, supondo que o eixo do centro dos meridianos seja o eixo das ordenadas  $y$ , e o eixo das abscissas  $x$  de centro dos paralelos; exigindo

de (§14) e (§15), em primeiro lugar que o ângulo  $90 - g - h$  seja reto, fazendo com que  $g + h = 0$ , por consequência  $h = -g$ ; em segundo lugar que  $X = 0$  resultando em  $a = \frac{1}{4abc}$ ; e em terceiro, que  $\eta = 0$ , gerando  $B = 0$ . Com isso, fazendo as substituições e colocando no lugar de  $u$  e  $q$  os valores de  $z$  de (§19), mudando  $a$  para  $\frac{a}{k^c}$ ,  $b$  em  $bk^c$ ,  $2c$  em  $c$  e  $2g$  em  $-cg$ , o que é possível por  $a, b, c, g$  e  $k$  serem constantes arbitrárias, para abreviar

$$\theta = \tan \frac{\zeta}{2} = \tan \frac{z}{2} \left( \frac{1 + \varepsilon \cos(z)}{1 - \varepsilon \cos(z)} \right)^{\frac{3}{2}}, \quad (551)$$

tendo

$$x = \frac{a^2 \theta^c - b^2 \theta^{-c}}{2abc[a^2 \theta^c + 2ab \cos[c(t-g)] + b^2 \theta^{-c}]}, \quad (552)$$

$$y = \frac{\sin[c(t-g)]}{c[a^2 \theta^c + 2ab \cos[c(t-g)] + b^2 \theta^{-c}]}, \quad (553)$$

$$\frac{1}{r} = 2abc \sin[c(t-g)], \quad (554)$$

$$Y = -\frac{\cot[c(t-g)]}{2abc}, \quad (555)$$

$$\frac{1}{\rho} = c(a^2 \theta^c - b^2 \theta^{-c}), \quad (556)$$

$$\xi = \frac{a^2 \theta^c + b^2 \theta^{-c}}{2abc(a^2 \theta^c - b^2 \theta^{-c})}, \quad (557)$$

$$m = \frac{\sqrt{1 - \varepsilon^2 \cos^2(z)}}{\sin(z)[a^2 \theta^c + 2ab \cos[c(t-g)] + b^2 \theta^{-c}]} \quad (558)$$

Tal que na fórmula  $t$  é a longitude do meridiano qualquer,  $z$  o complemento da latitude do paralelo qualquer,  $\varepsilon$  é a excentricidade dos meridianos;  $a, b, c$  e  $g$  são quatro constantes arbitrárias, onde  $x$  e  $y$  são as ordenadas e abscissas de um lugar qualquer com longitude  $t$  e com complemento da latitude  $z$ ;  $r$  o raio do círculo que representa um meridiano qualquer com centro no eixo das ordenadas a uma distância  $Y$  do eixo das abscissas;  $\rho$  o raio dos círculos que representa um paralelo qualquer com centro sobre o eixo das abscissas a uma distância  $\xi$  do eixo das ordenadas; onde  $1 : m$  é a proporção ao qual cada local da Terra é aumentado ou diminuído no mapa, supondo o raio da Terra como 1.

Em (§22) é dado início ao estudo das diferentes projeções que são obtidas com os diferentes valores atribuídos a  $c$ , que foi chamado de *expoente de projeção*.

Ao se considerar  $c = 0$ , tem-se

$$\frac{1}{r} = 0, \quad (559)$$

$$\frac{1}{\rho} = 0, \quad (560)$$

que, por consequência,

$$r = \infty, \quad (561)$$

$$\rho = \infty; \quad (562)$$

assim, os meridianos e paralelos seriam linhas retas, resultando nos mapas reduzidos.

Para determinar as posições dos diferentes meridianos e paralelos, com  $c = 0$  nas expressões de  $x$  e  $y$ , ou supondo  $c$  infinitamente pequeno, observa-se que

$$\theta^c = 1 + c \log \theta, \quad (563)$$

$$\theta^{-c} = 1 - c \log \theta; \quad (564)$$

onde se encontra

$$x = \frac{a - b}{2abc(a + b)} + \frac{a^2 + b^2}{2ab(a + b)^2} \log \theta, \quad (565)$$

$$y = \frac{t - g}{(a + b)^2} \quad (566)$$

e se  $c$  for nulo, para que  $x$  não seja infinito, é necessário que  $a - b$  também seja nulo, tal que

$$a - b = ch, \quad (567)$$

$$b = a - ch \quad (568)$$

$h$  sendo uma constante qualquer; e substituindo esses valores com  $c = 0$ , resultará em

$$x = \frac{h}{4a^3} + \frac{\log \theta}{4a^2}, \quad (569)$$

$$y = \frac{t - g}{4a^2}, \quad (570)$$

que de forma mais simples

$$x = A + b \log \theta, \quad (571)$$

$$y = C + Bt, \quad (572)$$

com  $A, B, C$  sendo contantes arbitrárias.

Como  $t$  é a longitude e  $\theta$  depende apenas da latitude, percebe-se que

$$y = C + Bt \quad (573)$$

é a equação comum aos meridianos, e que

$$x = A + B \log \theta \quad (574)$$

é a equação comum aos paralelos. Assim, as primeiras equações são de retas paralelas ao eixo das abscissas, a uma distância proporcional a longitude  $t$ ; e a segunda de retas paralelas ao eixo das ordenadas a uma distância do eixo proporcional ao logaritmo de  $\theta$ .

Nos mapas reduzidos normalmente a Terra é suposta como uma esfera, logo  $\varepsilon = 0$  e, por consequência,

$$\theta = \tan \frac{z}{2}, \quad (575)$$

que está de acordo com a teoria comum dos mapas. Mas ao levar o achatamento da Terra em consideração, tem-se

$$\theta = \tan \frac{\zeta}{2}, \quad (576)$$

logo, apenas a distância do polo corrigida  $\zeta$  (§19) no lugar de  $z$ .

Com relação ao valor de  $m$ , coloca-se  $B$  no lugar de  $\frac{1}{(a+b)^2}$ ,

$$m = \frac{B\sqrt{1 - \varepsilon^2 \cos^2(z)}}{\sin(z)}. \quad (577)$$

Já tendo feito o estudo para  $c$  nulo, inicia-se o estudo para um valor qualquer real, diferente de zero, para a exponente de projeção no item (§23). Tratando-se de  $c$  negativo ou positivo, Lagrange observa que apenas uma troca de lugares entre os valores de  $a$  e  $b$  ocorreria, sendo assim suficiente estudar o caso de  $c$  positivo.

Deste modo, inicia-se a procura da existência de meridianos e paralelos que possam ser representados por linhas retas, implicando assim que os raios dos círculos que o descrevem sejam infinitos. Logo, existiriam valores para  $t$  e  $\theta$  que resultariam em  $r = \infty$  e  $\rho = \infty$ . No caso de  $r = \infty$ , implicaria que

$$\sin[c(t - g)] = 0, \quad (578)$$

e, por consequência,

$$t = g \text{ ou } t = 180^\circ + g$$

tal que  $\rho = 0$  gerando

$$a^2\theta^c - b^2\theta^{-c} = 0, \quad (579)$$

de onde se chega que

$$\theta^c = \pm \frac{b}{a} \quad (580)$$

Assim, ao efetuar as substituições nas expressões de  $x$  e  $y$ , encontra-se resultado nulo em ambas. Donde conclui-se que os próprios eixos das abscissas seriam o meridiano com  $t = g$  e que o eixo das ordenadas seria o paralelo que está a uma distância do polo corrigida  $\zeta$ , tal que

$$\left( \tan \frac{\zeta}{2} \right)^c = \pm \frac{b}{a}. \quad (581)$$

Dessa forma, nomeia-se como *centro dos mapas* o ponto onde o meridiano e o paralelo que devem ser representados por retas se encontram, sendo a origem das coordenadas  $x$  e  $y$ . Como as quantidades  $a$ ,  $b$  e  $g$  são arbitrárias, qualquer localidade da Terra pode se tornar o centro do mapa. Tal que a longitude desse local seja  $g$ , e que a latitude seja  $(90^\circ - h)$ , tendo

$$\frac{b}{a} = \pm \left( \tan \frac{h}{2} \right)^c. \quad (582)$$

Além disso, em (§24) é tratado o fato de que todos os meridianos devem passar pelos polos que ficam no eixo das abscissas do mapa. E, para determinar o local exato deles, é considerado  $z = 0$  e  $z = 180^\circ$ , de tal maneira a obter o polo norte e o sul, respectivamente, com esses valores. Agora  $z = 0$  resulta em  $\theta = 0$  e  $z = 180^\circ$  em  $\theta = \infty$ , tal que com essas suposições as expressões de  $x$  e  $y$  resultam, no caso do polo Norte

$$x = -\frac{1}{2abc} \quad (583)$$

$$y = 0, \quad (584)$$

e para o polo Sul

$$x = \frac{1}{2abc}, \quad (585)$$

$$y = 0, \quad (586)$$

onde se observa que os polos são lugares equidistantes do centro do mapa. Dessa forma é nomeado o espaço entre os polos de *eixo do mapa*, de forma que seu tamanho seja dado por  $2\delta$ , tal que  $\delta = \frac{1}{2abc}$  e que

$$ab = \frac{1}{2\delta c}, \quad (587)$$

de tal modo que combinando essa equação com a seguinte,

$$\frac{a}{b} = \pm \left( \tan \frac{h}{2} \right)^c, \quad (588)$$

foi o meio pelo qual se definiram as constantes  $a$  e  $b$ . Com isso, é possível concluir que, como os eixos já são determinados pela nossa vontade, e que o tamanho a ser dado ao eixo também o é, o mapa pode ser feito do tamanho desejado.

Agora em (§25) Lagrange mostra como os meridianos e paralelos devem ser traçados, levando em consideração que o centro do mapa já foi dado. Vale ressaltar que neste momento é onde entra a primeira imagem do trabalho, que vem em auxílio no entendimento do processo de busca e entendimento da forma dos meridianos e paralelos.

Na Figura 5.1, dado que  $C$  seja o centro do mapa,  $B$  o polo Norte com  $BC = \delta$ , e com centro em  $C$  com raio  $BC$  a descrever o círculo  $BDAE$ , do qual se tiram dois diâmetros  $BCA$  e  $DCE$  perpendiculares, e que o ponto  $A$  seja o polo Sul do Mapa; dessa forma, com  $C$  centro do Mapa e origem das coordenadas  $x$  e  $y$ , e com a linha  $AB$  sendo eixo do Mapa e eixo das abscissas, com valores positivos entre  $C$  e  $A$ , e negativos entre  $C$  e  $B$ . De mesmo modo a linha  $DE$  será o eixo das ordenadas com seus valores positivos entre  $C$  e  $D$ , e negativos entre  $C$  e  $E$ . Lembrando que o eixo que contém o centro dos círculos que definem os meridianos é o eixo das ordenadas, logo, sendo correspondido por  $DE$ , que pode ser prolongado se necessário, estando a uma distância  $Y$  do ponto  $C$  com raios iguais e  $r$ , da mesma forma os centros dos círculos que representam os paralelos estarão sobre a linha  $BA$  a uma distância  $\xi$  do ponto  $C$ , com raio igual a  $\rho$ . Assim, é possível descrever os diferentes círculos pelas fórmulas de (21), bem como

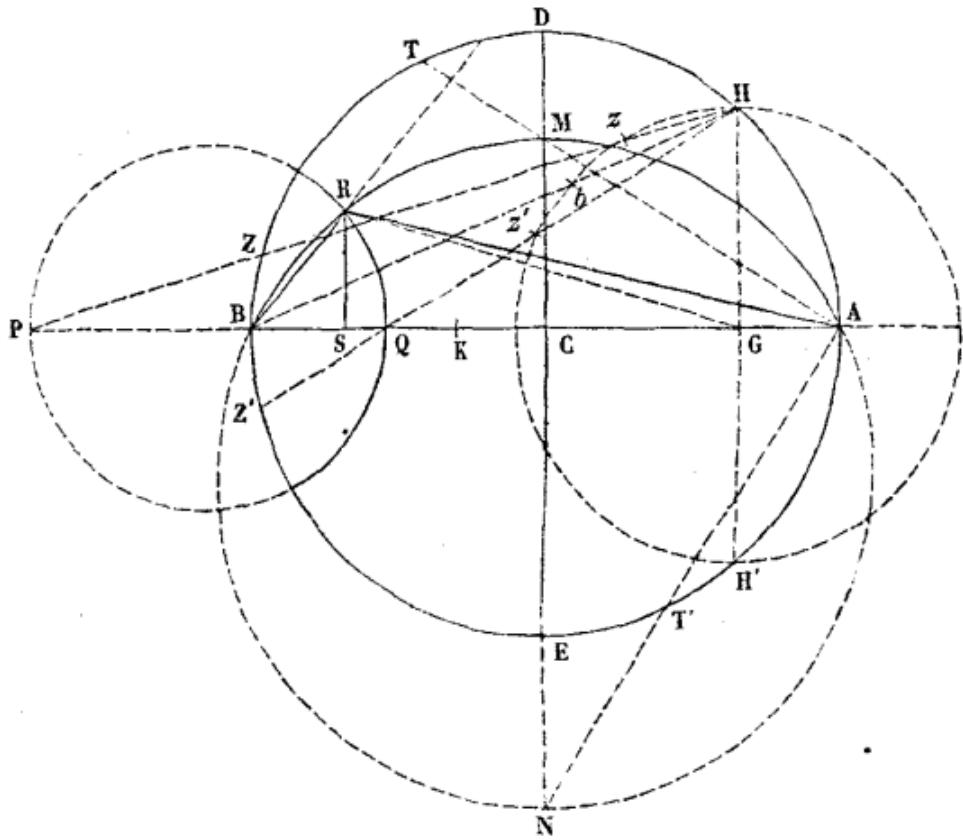


Figura 5.2 – Figura 1 do trabalho de Lagrange.

determinar os valores das constantes  $a$ ,  $b$  e  $g$ . Porém, iremos facilitar essas operações reduzindo as mais simples possíveis para o uso prático.

Então, a primeira coisa feita em (§26) é a procura do ponto de interceptação dos meridianos no eixo  $DE$ , mesmo se for necessário um prolongamento. Logo, para encontrá-lo a primeira coisa a fazer é procurar os valores de  $y$  quando  $x = 0$  nas fórmulas de (§21). Com  $x = 0$  se encontra

$$a^2\theta^2 - b^2\theta^{-c} = 0 \quad (589)$$

e tomado seu quadrado

$$a^4\theta^{2c} - 2a^2b^2 + b^4\theta^{-2c} = 0 \quad (590)$$

adicionando  $4a^2b^2$  a ambos os lados da equação e, buscando sua raiz quadrada, temos

$$a^2\theta^2 + b^2\theta^{-c} = \pm 2ab \quad (591)$$

substituindo esse valor na expressão de  $y$ , chega-se a

$$y = \frac{\sin [c(t-g)]}{2abc[\cos [c(t-g) \pm 1]]}, \quad (592)$$

ou aplicando fórmulas trigonométricas comuns, substituindo  $\frac{1}{2abc} = \delta$ , obtém-se

$$y = \delta \tan \frac{c(t-g)}{2}, \quad (593)$$

$$y = -\delta \cot \frac{c(t-g)}{2}. \quad (594)$$

Os arcos  $BT$  e  $AT'$  serão arcos com o mesmo ângulo  $c(t-g)$ , com  $t-g$  sendo a diferença entre a longitude do meridiano a ser traçado com o meridiano que passa pelo centro do mapa; extraíndo do ponto  $A$  as cordas  $AT$  e  $AT'$ , os pontos  $M$  e  $N$  onde essas cordas cruzam a linha  $DE$ , prolongada se necessário, serão as duas extremidades do diâmetro  $MN$  do círculo que representa o meridiano procurado; de tal forma que seja necessário apenas para descrever esse círculo, sair de seu centro que é o meio do segmento  $MN$ , sendo ainda apontado por Lagrange que seria fácil demonstrar com Geometria que o círculo passará ao mesmo tempo pelos pontos  $A$  e  $B$  que são os polos do mapa. Essa construção a seguir tem evidentemente o ângulo  $BAT$  igual a  $\frac{c(t-g)}{2}$ , e o ângulo  $BET'$  igual a  $\frac{180^\circ - c(t-g)}{2} = 90^\circ - \frac{c(t-g)}{2}$ , de forma que  $CA$  é igual a  $\delta$ , logo

$$CM = \delta \tan \frac{c(t-g)}{2}, \quad (595)$$

$$CN = -\delta \cot \frac{c(t-g)}{2}. \quad (596)$$

Agora, buscando em (§27) o ponto de interceptação dos paralelos com o eixo  $BA$ , é suposto  $y = 0$  que

$$\sin [c(t-g)] = 0 \quad (597)$$

e, por consequência,

$$c(t-g) = 0 \text{ ou } c(t-g) = 180^\circ;$$

que substituindo na expressão de  $x$  se encontra

$$x = \frac{a^2 \theta^c - b^2 \theta^{-c}}{2abc(a^2 \theta^2 \pm 2ab + b^2 \theta^{-c})}, \quad (598)$$

o qual reduzido se torna

$$x = \frac{a^{\frac{c}{2}} \theta \mp b \theta^{-\frac{c}{2}}}{2abc(a \theta^{\frac{c}{2}} \pm b \theta^{-\frac{c}{2}})} = \frac{\theta^c \mp \frac{b}{a}}{2abc(\theta^c \pm \frac{b}{a})}. \quad (599)$$

ou

$$\theta = \tan \zeta, \quad (600)$$

sendo  $\zeta$  a distância do polo corrigido ao paralelo, e

$$\frac{b}{a} = \pm \left( \tan \frac{h^c}{2} \right) \quad (601)$$

com  $h$  sendo a distância do polo corrigido, ao local onde se encontra o centro do mapa, que foi supostamente dado, com sinais ambíguos, porque  $\frac{1}{2abc} = \theta$ , tal que

$$x = -\theta \frac{\left( \tan \frac{h}{2} \right)^c \mp \left( \tan \frac{\zeta}{2} \right)^c}{\left( \tan \frac{h}{2} \right)^c \pm \left( \tan \frac{\zeta}{2} \right)^c}, \quad (602)$$

então, obtendo a distância  $CQ$  ao considerar os sinais superiores e,  $CP$  ao considerar os inferiores; sendo o círculo descrito sobre o diâmetro  $PQ$  o paralelo procurado.

Caso o expoente de projeção for tal que  $c = 0$ , a fórmula precedente se torna

$$x = -\theta \frac{(\tan \frac{h}{2}) \mp (\tan \frac{\zeta}{2})}{(\tan \frac{h}{2}) \pm (\tan \frac{\zeta}{2})} = -\delta \frac{\sin \frac{h \mp \zeta}{2}}{\sin \frac{h \pm \zeta}{2}} \quad (603)$$

sendo muito conveniente o cálculo logarítmico. Por construí-la será alterado  $\sin \frac{h \mp \zeta}{2}$  por seu equivalente

$$\sin \left( h - \frac{h \pm \zeta}{2} \right) = \sin h \cos \frac{h \pm \zeta}{2} - \cos h \sin \frac{h \pm \zeta}{2}; \quad (604)$$

e substituindo, temos

$$z = \delta \cos h - \delta \sin h \cot \frac{h \pm \zeta}{2}. \quad (605)$$

Assim, Lagrange indica tomar o arco  $AH$  com uma quantidade de graus igual ao ângulo  $h$ , e arcos  $BZ$  e  $BZ'$  com graus iguais a  $\zeta$ ; tirando o ponto  $H$  das secantes  $HZP$ ,  $HQZ'$  que intersectam o eixo  $AB$  em  $P$  e  $Q$ , sendo os pontos pelo qual devem passar o círculo do paralelo procurado.

Lagrange continua e afirma que é claro, ao conduzir a corda  $HGH'$  perpendicularmente ao eixo  $BA$ , chega-se a

$$CG = \delta \cos h, \quad (606)$$

$$GH = \delta \sin h, \quad (607)$$

além disso, o ângulo  $Z'HH'$  será  $\frac{180^\circ - h - \zeta}{2}$  e o ângulo  $ZHH'$  será  $\frac{180^\circ - h + \zeta}{2}$ ; donde

$$GQ = \delta \sin h \cot \frac{h + \zeta}{2}, \quad (608)$$

$$GP = \delta \sin h \cot \frac{h - \zeta}{2}; \quad (609)$$

que, por consequência,

$$CQ = \delta \sin h \cot \frac{h + \zeta}{2} - \delta \cot \frac{h - \zeta}{2}, \quad (610)$$

e

$$CP = \delta \sin h \cot \frac{h - \zeta}{2} - \delta \cos h; \quad (611)$$

onde

$$x = -CQ, \text{ ou } x = -CP.$$

e etc.

Se do centro  $G$  e de raio  $GH$  descrever o círculo  $Hzbz'H'$ , e tomar sobre a circunferência o arco  $Hb$  com o mesmo ângulo que  $h$ , e os arcos  $bz$ ,  $bz'$  com o mesmo ângulo que  $\zeta$ , então

desenha as secantes  $hz$ ,  $Hb$ ,  $Hz'$  no prolongamento de  $AB$ , estes se cruzando nos pontos  $P$ ,  $B$  e  $Q$ , tal que os ângulos  $bHG = \frac{180^\circ - h}{2}$ ,  $z'HG = \frac{180^\circ - h - \zeta}{2}$ ,  $zHG = \frac{180^\circ - h + \zeta}{2}$  donde

$$GP = \delta \sin h \cot \frac{h - \zeta}{2}, \quad (612)$$

$$GQ = \delta \sin h \cot \frac{h + \zeta}{2}, \quad (613)$$

$$GB = \delta \sin h \cot \frac{d}{2} = 2\delta \cos^2 \frac{d}{2} = \delta + \delta \cos h; \quad (614)$$

que corresponde com os resultados anteriores.

Essa construção é apontada ainda por Lagrange como útil quando o ponto  $G$  for dado inicialmente no lugar do ponto  $C$ , que é o centro do mapa; ainda é dito que esse ponto  $G$  tem uma propriedade em relação a quantidade  $m$ , sendo a quantidade mínima para a hipótese da Terra esférica em (§36).

Além disso, é evidenciado no texto que com uma análise da construção, é fácil ver que os resultados estão de acordo com os princípios da projeção estereográfica; com a longitude  $g$  e a distância do polo  $h$  correspondendo com a localização do "olho" sobre a superfície do globo; o ponto  $G$  do mapa, que corresponde a mesma longitude  $g$  a uma distância do polo  $180^\circ - h$ , será o centro da projeção, neste caso sendo o ponto do plano de projeção, pelo qual passa o diâmetro do globo sobre terminando no olho; sendo a linha  $GH$  igual a distância do olho ao plano.

Conclui-se, assim, que caso  $c = 1$  será obtida a projeção estereográfica comum. Logo, fica evidenciado que a fórmula obtida por Lagrange generaliza os dois tipos principais de métodos utilizados para a construção de mapas geográficos. Além disso que com essas fórmulas pode-se levar em conta o achatamento da Terra na projeção, de tal forma que em vez de tomar a distância propriamente dita  $z$ , toma-se a distância corrigida  $\zeta$ , que foi mostrada em (19) ser muito próximo de

$$z - \frac{\varepsilon^2}{2} \sin 2z \quad (615)$$

Já em (§30) Lagrange começa dizendo que na superfície da Terra os paralelos são divididos pelos meridianos em partes proporcionais as diferenças de longitude; daí inicia uma pesquisa para saber como os paralelos são cortados pelos meridianos no mapa. Assim este é traçado saindo do polo  $B$  uma reta a um ponto  $R$ , e baixando de  $R$  uma reta perpendicular  $RS$  ao eixo  $AB$ , sendo visível que a tangente do ângulo  $RBA$  é  $\frac{RS}{BS}$ . Ou

$$RS = y, \quad (616)$$

$$BC = \delta, \quad (617)$$

$$CS = -x; \quad (618)$$

onde

$$BS = \delta + x \quad (619)$$

e, por consequência,

$$\tan RBA = \frac{y}{\delta + x} \quad (620)$$

Ao substituir  $x$  e  $y$  pelos valores dados na fórmula geral de (21), chega-se, por conta de  $\delta = \frac{1}{2abc}$ , que

$$\tan RBA = \frac{b \sin [c9t - g]}{a\theta^c + b \cos [c(t - g)]} \quad (621)$$

que sobre as fórmulas encontradas em (27), com os sinais superiores

$$CQ = -x = \frac{b - a\theta^c}{2abc(a\theta^c + b)} \quad (622)$$

onde

$$BQ = \delta - CQ = \frac{\theta^c}{bc(a\theta^c + b)}, \quad (623)$$

$$AQ = \delta + CQ = \frac{1}{ac(a\theta^c + b)}; \quad (624)$$

assim,

$$\frac{BQ}{AQ} = \frac{a\theta^c}{b}; \quad (625)$$

substituindo esses valores na expressão da  $\tan RBA$ , se encontra

$$\tan RBA = \frac{AQ \sin [c(t - g)]}{BQ + AQ \cos [c(t - g)]}; \quad (626)$$

que fornece a seguinte construção para encontrar o ângulo  $RBA$ .

Fazendo o círculo de centro  $Q$  com raio  $QA$ , e dividindo a circunferência, a começar pelo polo  $A$ , em partes que correspondam ao ângulo  $c(t - g)$ ; que são conduzidas ao outro polo  $B$ , e cada uma dessas divisões da linha  $BR$  prolongadas se necessário; essas divisões serão paralelas a  $PRQ$  em partes  $QR$  que correspondem a diferença de latitude  $g - t$  entre os meridianos  $BA$  e  $BRA$ . Dessa forma, este círculo é chamado de *círculo divisório*, por conta dessa propriedade; e sobre a projeção estereográfica com  $c = 1$ , os arcos do círculo expressarão as diferenças de longitude.

Em (§31) leva do polo  $A$  até o ponto  $R$  a reta  $AR$ , que nomeia de  $\lambda$  a reta  $BR$ ,  $\mu$  a reta  $AR$ , e é visível que

$$\lambda = \sqrt{(\delta + x)^2 + y^2}, \quad (627)$$

$$\mu = \sqrt{(\delta - x)^2 + y^2} \quad (628)$$

onde, substituindo para  $x$  e  $y$  os valores de (§21), e lembrando que  $\delta = \frac{1}{2abc}$ , obtém-se

$$\lambda^2 = \frac{a^2\theta^{2c} + 2ab\theta^c \cos [c(t - g)] + b^2}{b^2c^2[a^2\theta^c + 2ab \cos [c(t - g)] + b^2\theta^{-c}]^2} = \frac{\theta^c}{b^2c^2[a^2\theta^c + 2ab \cos [c(t - g)] + b^2\theta^{-c}]}, \quad (629)$$

$$\mu^2 = \frac{b^2\theta^{-2c} + 2ab\theta^{-c} \cos [c(t - g)] + a^2}{a^2c^2[a^2\theta^c + 2ab \cos [c(t - g)] + b^2\theta^{-c}]^2} = \frac{\theta^{-c}}{a^2c^2[a^2\theta^c + 2ab \cos [c(t - g)] + b^2\theta^{-c}]}, \quad (630)$$

podendo dizer que

1.  $\frac{\lambda^2}{\mu^2} = \frac{a^2\theta^{2c}}{b^2}, \frac{\lambda}{\mu} = \frac{a\theta^c}{b},$
2.  $\frac{1}{\lambda^2\mu^2} = a^2b^2c^4[a^2\theta^c + 2ab\cos[c(t-g)] + b^2\theta^{-c}]^2;$

e partindo daí

$$\frac{1}{\lambda\mu} = abc^2[a^2\theta^c + 2ab\cos[c(t-g)] + b^2\theta^{-c}] \quad (631)$$

Substituindo nessa última equação  $\theta^c$  por  $\frac{b\lambda}{a\mu}$  desde o primeiro, resultará

$$\frac{1}{\lambda\mu} = abc^2\left[\frac{\lambda}{\mu} + 2\cos[c(t-g)] + \frac{\mu}{\lambda}\right], \quad (632)$$

que ao multiplicar por  $\lambda\mu$  e, substituindo por  $abc$  o valor  $\frac{1}{2\delta}$

$$4\delta^2 = \lambda^2 + 2\lambda\mu\cos[c(t-g)] + \mu^2. \quad (633)$$

Contudo, considerando o triângulo  $BRA$ , tal que

$$BA = 2\delta, \quad (634)$$

$$BR = \lambda, \quad (635)$$

$$AR = \mu, \quad (636)$$

temos

$$(2\delta)^2 = \lambda^2 - 2\lambda\mu\cos BRA + \mu^2. \quad (637)$$

Donde, em comparação com a equação anterior, temos

$$-\cos BRA = \cos[c(t-g)], \quad (638)$$

e, por consequência,

$$BRA = 180^\circ - c(t-g). \quad (639)$$

Temos  $t - g$ , podendo dizer que a diferença da longitude dos meridianos  $BA$  e  $BRA$ , é igual a  $\frac{180^\circ - BRA}{c}$ .

Com relação a primeira equação

$$\frac{\lambda}{\mu} = \frac{a\theta^2}{b}, \quad (640)$$

ao substituir por  $\theta$  e por  $\frac{b}{a}$ , os valores  $\tan \frac{\zeta}{2}$  e  $(\tan \frac{h}{c})$ , e se tirar a raiz c-êmica, resultará

$$\frac{\tan \frac{\zeta}{2}}{\tan \frac{h}{c}} = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{\frac{1}{c}} = \left(\frac{RB}{RA}\right)^{\frac{1}{c}}, \quad (641)$$

equação pela qual é conhecida a distância do polo  $\zeta$  do paralelo  $RQ$ , em que supostamente é conhecida a distância do polo  $h$  do paralelo  $DCE$

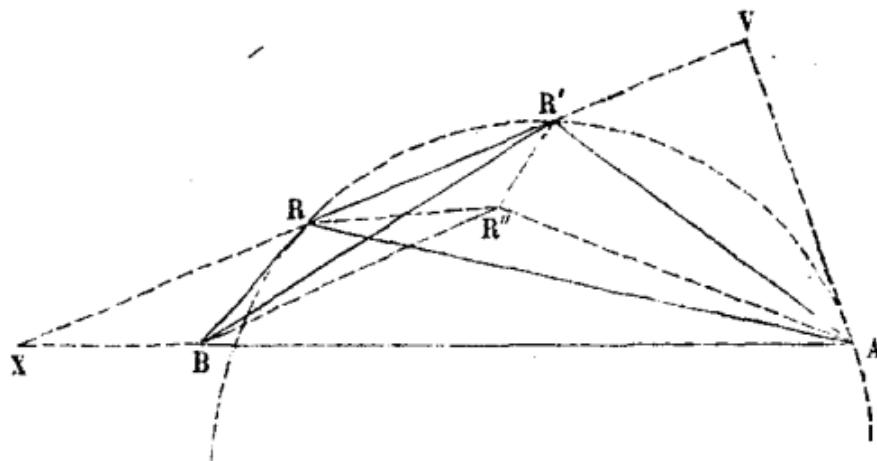


Figura 5.3 – Figura 2 do trabalho de Lagrange.

Assim, Lagrange conclui que, de forma geral, com as fórmulas já obtidas e sabendo os lugares dos polos  $A$  e  $B$  no mapa, e mais a longitude  $t$  e a distância ao polo  $\zeta$ , de um lugar  $R$  qualquer, pode se obter a longitude  $t'$  e a distância  $\zeta'$  de um ponto  $R'$  qualquer do mapa.

Ao construir as retas  $RB$ ,  $RA$ ,  $R'B$ ,  $R'A$ , em que para  $R$  temos

$$t - g = \frac{180^\circ - BRA}{c}, \quad (642)$$

$$\frac{\tan \frac{\zeta}{2}}{\tan \frac{h}{2}} = \left( \frac{RB}{RA} \right)^{\frac{1}{c}}; \quad (643)$$

e, também, para  $R'$

$$t' - g = \frac{180^\circ - BR'A}{c}, \quad (644)$$

$$\frac{\tan \frac{\zeta'}{2}}{\tan \frac{h}{2}} = \left( \frac{R'B}{R'A} \right)^{\frac{1}{c}}; \quad (645)$$

onde

$$t' - t = \frac{BRA - BR'A}{c} = \frac{R'AR - R'BR}{c} \quad (646)$$

e

$$\frac{\tan \frac{\zeta'}{2}}{\tan \frac{\zeta}{2}} = \left( \frac{R'B}{RB} \frac{RA}{R'A} \right)^{\frac{1}{c}}, \quad (647)$$

ou melhor

$$\tan \frac{\zeta'}{2} : \tan \frac{\zeta}{2} = \left( \frac{R'B}{R'A} \right)^{\frac{1}{c}} : \left( \frac{RB}{RA} \right)^{\frac{1}{c}}. \quad (648)$$

Uma outra possibilidadeposta por Lagrange, em (§33), é no caso de se saber a localização do polo  $B$  dado, e as longitudes  $t$  e  $t'$  e as distâncias  $\zeta$  e  $\zeta'$  de dois lugares quaisquer  $R$  e  $R'$ , é possível encontrar a longitude e a distância do polo de qualquer outro ponto desejado, resumindo a dificuldade em localizar o outro polo  $A$ .

Para isso, ligando as três linhas  $BR$ ,  $BR'$  e  $RR'$  é indicado que o triângulo  $BRR'$  sejam dadas suas medidas e posição; seja, neste caso,  $A$  o local do polo procurado, e que lidemos também com as retas  $RA$  e  $R'A$ , resultando em que

$$R'AR = R'BR + c(t' - t), \quad (649)$$

de tal maneira que o ângulo ao polo  $R'AR$  será conhecido. Se descrito sobre a corda  $RR'$  um círculo  $RR'A$  capaz ao ângulo  $RAR'$ ; e o polo procurado  $A$  se encontrará necessariamente sobre a circunferência do círculo.

Assim como em (§32)

$$\frac{RA}{R'A} = \frac{RB}{R'B} \left( \frac{\tan \frac{\zeta'}{2}}{\frac{\zeta}{2}} \right)^c; \quad (650)$$

de modo que a relação das linhas  $RA$  e  $R'A$  seja conhecida.

Tirando sobre o ponto  $A$  a tangente  $AV$  no círculo, que encontra a corda  $RR'$  em  $V$ ; sabendo que o ângulo  $R'AV$  é igual ao ângulo  $VRA$ , e que assim também o triângulo  $ARV$ ,  $R'AV$  serão semelhantes; tal que

$$RA : R'A = RV : VA = VA : R'V, \quad (651)$$

e, assim,

$$\overline{RA}^2 : \overline{R'A}^2 = RV : R'V, \quad (652)$$

$$\overline{RA}^2 - \overline{R'A}^2 : \overline{R'A}^2 = RR' : R'V \quad (653)$$

encontrando assim o ponto  $V$  sobre a secante  $RR'V$ , do qual a secante do círculo, sendo o ponto de contato  $A$  o polo procurado.

Por fim em (§34) dado ao fato das longitudes  $t$ ,  $t'$  e  $t''$  e as distâncias do polo  $\zeta$ ,  $\zeta'$  e  $\zeta''$  de três lugares quaisquer  $R$ ,  $R'$  e  $R''$  sobre o mapa, procura-se a localização dos polos  $B$  e  $A$ . Ao levar retas desses pontos dados aos polos gerando  $RA$ ,  $R'A$ ,  $R''A$ ,  $RB$ ,  $R'B$  e  $R''B$ , por 32 se obtêm

$$BR'A - BRA = c(t - t'), \quad (654)$$

$$BR''A - BR'A = c(t' - t''), \quad (655)$$

$$\frac{RB}{RA} : \frac{R'B}{R'A} : \frac{R''B}{R''A} = \left( \tan \frac{\zeta}{2} \right)^c : \left( \tan \frac{\zeta'}{2} \right)^2 : \left( \tan \frac{\zeta''}{2} \right)^c; \quad (656)$$

que fornecem quatro equações para determinar os pontos  $A$  e  $B$ .

Dessa forma Lagrange reduz o problema, de forma geral, ao seguinte: três pontos  $R$ ,  $R'$  e  $R''$  dados, construídos sobre uma mesma base  $AB$  três triângulos, cujos vértices são os pontos dados, e que são tais que, em 1º as diferenças dos ângulos dos vértices  $BRA$ ,  $BR'A$  e  $BR''A$  sejam dados; 2º que as razões dos lados que compreendem esses ângulos seja  $\frac{RB}{RA}$ ,  $\frac{R'B}{R'A}$ ,  $\frac{R''B}{R''A}$ , estejam em um relacionamento uma com a outra.

Esse problema é julgado difícil por Lagrange em sua resolução por métodos geométricos, e explica que não o tentou por métodos algébricos por não ser a intenção e acabar desviando do assunto principal, a menos que tivesse uma utilidade, ou se pudesse ser reduzida a uma construção fácil.

Além disso, caso quisesse empreender esta solução, também poderia usar as fórmulas de (§21). Supondo que a coordenada  $x, y$  de  $R$  e que  $x'$  e  $y'$  fossem as de  $R'$ , tendo essas equações

$$(x' - x)^2 + (y' - y)^2 = \overline{RR'}^2 \quad (657)$$

$$(x'' - x)^2 + (y'' - y)^2 = \overline{RR''}^2 \quad (658)$$

$$(x'' - x')^2 + (y'' - y')^2 = \overline{R'R''}^2 \quad (659)$$

Substituindo os valores de  $x, y, x', y', x'', y''$  pelas quantidades  $t, t', t''$  assim como  $\theta, \theta', \theta''$  que são dados, chegar-se-á nas três equações que servirão para determinar os valores de  $a, b$  e  $g$ ; com a resolução do problema feita com a descoberta dos valores das constantes.

Por meio deste problema, será possível construir um mapa geográfico no qual quaisquer três lugares podem ser colocados à vontade, o que pode ser útil em algumas ocasiões.

Com o estudo da localização concluído, ao fazer o estudo de todos os casos tendo 3 pontos como marcos, Lagrange inicia o estudo sobre as formas obtidas no mapa. Agora em (35) ele inicia o estudo sobre as alterações causadas pela projeção, buscando uma forma para diminuí-la. Como no trabalho o raio do equador foi suposto como 1, o tamanho natural de cada lugar é aumentado ou diminuído na proporção de  $1 : m$ , com  $m$  sendo determinado por

$$m = \frac{\sqrt{1 - \varepsilon^2 \cos^2 z}}{\sin z [a^2 \theta^2 + 2ab \cos [c(t - g)] + b^2 \theta^{-c}]}, \quad (660)$$

no qual colocamos  $\frac{1}{2\delta}$  no lugar de  $abc$ ,  $\tan \frac{\zeta}{2}$  no lugar de  $\theta$  e  $(\tan \frac{h}{2})^c$  no lugar de  $\frac{b}{a}$  mudando a fórmula para

$$m = \frac{2c\delta\sqrt{1 - \varepsilon^2 \cos^2 z}}{\sin z \left[ \left( \frac{\tan \frac{\zeta}{2}}{\tan \frac{h}{2}} \right)^c + \cos [c(t - g)] + \left( \frac{\tan \frac{h}{2}}{\tan \frac{\zeta}{2}} \right)^c \right]} \quad (661)$$

E com essa nova forma, a variação em  $m$  será pequena ao colocar-se a variável  $t = g$ , por exemplo, no qual a variação será nula; que ao fazer  $t = g + \alpha$ , com  $\alpha$  muito pequeno, obtém-se

$$\cos [c(t - g)] = 1 - \frac{c^2 \alpha^2}{2} + \frac{c^4 \alpha^4}{2.3.4} - \dots, \quad (662)$$

onde o primeiro termo com potência de  $\alpha$  não é encontrado, quanto ao termo que contém  $\alpha^2$ , será impossível de se destruir, a menos que  $c = 0$ , que resultaria nos mapas reduzidos.

Agora, com  $g$  igual a longitude do meridiano retilíneo  $BA$  do mapa, segue-se que os lugares sobre ele serão os menos alterados em relação a longitude na projeção, restando encontrar a latitude do local que estará sujeito ao mesmo tempo a menor alteração na latitude. Para isso basta diferenciar  $m$ , em  $y$  fazendo variar  $z$ , com a diferencial igual a zero. Lagrange, então, diz

que esse cálculo não é difícil, e ainda explica que irá negligenciar a excentricidade  $\varepsilon$  da Terra, por ser um valor muito pequeno, sem maiores problemas.

Para isso em (36), na fórmula de  $m$  será feita uma substituição para facilitar os cálculos, que será a troca das variáveis  $\theta$  e  $t$  e das distâncias  $\lambda$  e  $\mu$ . Primeiro substitui em

$$a^2\theta^2 + 2ab \cos [c(t - g)] + b^2\theta^{-c} \quad (663)$$

os valores encontrados em (§31)  $\frac{1}{abc^2\lambda\mu}$ , ou melhor  $\frac{2\delta}{c\lambda\mu}$ , resultando

$$m = \frac{c\lambda\mu\sqrt{1 - \varepsilon^2 \cos^2 z}}{2\delta \sin x}. \quad (664)$$

Obtendo pelo mesmo número

$$\tan \frac{\zeta}{2} = \tan \frac{h}{2} \left( \frac{\lambda}{\mu} \right)^{\frac{1}{c}} = \tan \frac{z}{2} \left( \frac{1 + \varepsilon \cos z}{1 - \varepsilon \cos z} \right)^{\frac{\varepsilon}{2}} \quad (665)$$

onde se pode eliminar o ângulo  $z$ .

Negligenciando os termos afetados pela quantidade  $\varepsilon^2$ , da excentricidade dos meridianos, se tem

$$m = \frac{c\lambda\mu}{2\delta \sin z}, \quad (666)$$

$$\tan \frac{z}{2} = \tan \frac{h}{2} \left( \frac{\lambda}{\mu} \right)^{\frac{1}{c}}; \quad (667)$$

mas,

$$\sin z = \frac{2 \tan \frac{z}{2}}{1 + \tan^2 \frac{z}{2}}; \quad (668)$$

que substituindo os valores precedentes

$$\sin z = \frac{1}{\mu^{\frac{1}{c}} \lambda^{\frac{1}{c}} \tan \frac{h}{2} + \lambda^{1-\frac{1}{c}} \mu^{1+\frac{1}{c}} \cot \frac{h}{2}}, \quad (669)$$

sendo a expressão geral do valor de  $m$  para um ponto qualquer  $R$  do mapa, que depende das distâncias  $\lambda = RB, \mu = RA$  aos polos.

Com esse resultado, é testado ao aplicar  $c = 1$ , que é o caso da projeção estereográfica encontrada em (§29), tendo assim

$$m = \frac{\lambda^2 \tan \frac{h}{2} + \mu^2 \cot \frac{h}{2}}{2\delta} = \frac{\lambda^2 + \mu^2 - (\lambda^2 - \mu^2) \cos h}{2\delta \sin h}. \quad (670)$$

Sobre a Figura 5.1 apresentada tem-se que

$$\lambda^2 = \overline{RB}^2 = \overline{RS}^2 \overline{BS}^2 = \overline{RS}^2 + \overline{CB - CS}^2 \quad (671)$$

]

$$\mu^2 = \overline{RA}^2 = \overline{RS}^2 + \overline{SA}^2 = \overline{RS}^2 + \overline{CA + CS}^2; \quad (672)$$

onde, por  $CA = CB$  temos

$$\lambda^2 + \mu^2 = 2\overline{RS}^2 + 2\overline{CA}^2 + 2\overline{CS}^2 \quad (673)$$

$$\lambda^2 - \mu^2 = -4CA \times CS; \quad (674)$$

além disso,

$$CA \cos h = CG, \quad (675)$$

$$\delta \sin h = CA \sin h = GH; \quad (676)$$

onde

$$m = \frac{\overline{RS}^2 + \overline{CA}^2 + \overline{CS}^2 + 2CA \times CS}{GH}; \quad (677)$$

ou

$$\overline{CA}^2 = \overline{CG}^2 + \overline{GH}^2; \quad (678)$$

e ligando os pontos  $G, R$  com a reta  $GR$

$$\overline{GR}^2 = \overline{RS}^2 + \overline{SG}^2 = \overline{RS}^2 + \overline{CS}^2 + 2CS \times CG + \overline{CG}^2; \quad (679)$$

chegando finalmente a

$$m = \frac{\overline{GR}^2 + \overline{GH}^2}{GH}. \quad (680)$$

Concluindo que pela fórmula o valor de  $m$  será o mínimo no ponto  $G$ , que corresponde a uma distância do polo  $z = NH' = 180^\circ - h$ , e que é, como foi visto em (§29), o centro da projeção estereográfica; que é evidente pela natureza da projeção.

Já feito essa análise sobre  $m$  puramente, Lagrange agora tenta analisar o expoente de projeção  $c$  de modo a diminuir a variação de  $m$  em (§38). Assim, é lembrado que em (§35) foi visto que o local com menor alteração deve estar sobre o meridiano retilíneo  $AB$ ; e quando um ponto  $R$  cai sobre  $AB$  se tem que

$$\lambda + \mu = AB + 2\delta; \quad (681)$$

de tal maneira que  $\lambda$  variando uma quantidade qualquer  $\beta$ , a quantidade  $\mu$  deve variar uma quantidade  $-\beta$ . Substituindo, então, na expressão geral de  $m$  em (§36),  $\lambda + \beta$  no lugar de  $\lambda$ , e  $\mu - \beta$  no lugar de  $\mu$ , de tal maneira que  $\beta$  seja uma quantidade muito pequena, levando a precisão a  $\beta^2$  e eliminando as primeiras dimensões de  $\beta$  se tem

$$\left[ (c+1)\lambda^{\frac{1}{c}}\mu^{1-\frac{1}{c}} - (c-1)\lambda^{1+\frac{1}{c}}\mu^{-\frac{1}{c}} \right] \tan \frac{h}{2} + \left[ (c+1)\lambda^{-\frac{1}{c}}\mu^{1+\frac{1}{c}} - (c+1)\lambda^{1-\frac{1}{c}}\mu^{\frac{1}{c}} \right] \cot \frac{h}{2} = 0 \quad (682)$$

e fazendo  $\frac{\lambda}{\mu} = n$  se reduz a

$$n^{\frac{1}{c}}[x + 1 - (c-1)n] \tan \frac{h}{2} + n^{-\frac{1}{c}}[c-1 - (c+1)n] \cot \frac{h}{2} = 0 \quad (683)$$

sendo que a equação dará o mínimo valor de  $m$  para qualquer que seja  $c$ .

Ao chamar de  $\bar{\omega}$  em (§39) a distância ao polo superior, ou o complemento da latitude de um lugar situado sobre o meridiano  $BA$ , pelo qual as duas equações em questão serão observadas, tem-se que ao substituir nas fórmulas de (§36)

$$\tan \frac{z}{2} = \tan \frac{h}{2} \left( \frac{\lambda}{\mu} \right)^{\frac{1}{c}} \quad (684)$$

$\bar{\omega}$  no lugar de  $z$  e  $n$  no lugar de  $\frac{\lambda}{\mu}$ , chegando em

$$\tan \frac{\bar{\omega}}{2} = n^{\frac{1}{c}} \tan \frac{h}{2}, \quad (685)$$

onde

$$\cot \frac{h}{2} = \frac{1}{\tan \frac{h}{2}}, \quad (686)$$

que ao multiplicar as duas equações do número precedente por  $n^{\frac{1}{c}} \tan \frac{h}{2}$ , a primeira resulta em

$$n = \frac{(c+1) \tan^2 \frac{\bar{\omega}}{2} + c - 1}{(c-1) \tan^2 \frac{\bar{\omega}}{2} + c - 1}, \quad (687)$$

substituindo esse valor na segunda, fazendo algumas frações desaparecerem, e seguindo algumas reduções, chega-se a

$$(c^2 - 2) \left( 1 + \tan^6 \frac{\bar{\omega}}{2} \right) + (3c^2 - 7) \left( \tan^2 \frac{\bar{\omega}}{2} + \tan^4 \frac{\bar{\omega}}{2} \right) = 0; \quad (688)$$

ou ainda

$$c^2 = \frac{1 + 7 \tan^2 \frac{\bar{\omega}}{2} + 7 \tan^4 \frac{\bar{\omega}}{2} + \tan^6 \frac{\bar{\omega}}{2}}{\left( 1 + \tan^2 \frac{\bar{\omega}}{2} \right)^3}, \quad (689)$$

que após algumas simplificações resulta em

$$c^2 = 1 + \sin^2 \bar{\omega} \quad (690)$$

$$c = \sqrt{1 + \sin^2 \bar{\omega}}. \quad (691)$$

Tendo  $c$ ,  $n$  é encontrado pela fórmula acima que ainda pode ser reduzida a

$$n = \frac{c - \cos \bar{\omega}}{c + \cos \bar{\omega}}. \quad (692)$$

O valor de  $c$ , que é o expoente de projeção, e o valor  $n$  que dá a relação  $\frac{BK}{AK}$  das partes do eixo  $BA$  do mapa para um ponto  $K$  sobre as condições propostas, e que a longitude seja  $g$  e a latitude  $90^\circ = \bar{\omega}$ .

Em (§40) Lagrange diz que o local em questão tem a propriedade, que a quantidade  $m$  é próxima de constante a todos os lugares vizinhos; tal que as regiões próximas serão as menos alteradas em seu tamanho e conservarão, por consequência, uma forma muito próxima do natural, porque as partes infinitamente pequenas da projeção serão semelhantes as suas partes correspondentes na Terra, dada a natureza das projeções (§4). Assim, quando a construção de

um mapa for proposta, o melhor local para se localizar o país a ser mapeado é no centro do mapa. Isso por ser o local da projeção que tem a menor deformação, logo sendo a melhor representação localizada ao centro do mapa.

Dessa forma Lagrange diz que escolherá um país a ser projetado e o colocará o mais próximo do centro do mapa, transformando sua longitude em  $g$  e a latitude, ou altura do polo, igual a  $90^\circ - \bar{\omega}$ ; donde o expoente de projeção será

$$c = \sqrt{1 + \sin^2 \bar{\omega}}. \quad (693)$$

Então, para construir o mapa, será colocado um ponto  $K$  que seja o centro do mapa, e fazendo a linha  $BA$ , de tal forma que o ponto  $K$  divida o segmento em  $BK$  e  $AK$  de tal modo que

$$BK : AK = c - \cos \bar{\omega} : c + \cos \bar{\omega} \quad (694)$$

onde  $B$  será o polo norte e  $A$  o polo sul; a distância  $BA$  será o eixo do mapa, com tamanho arbitrário, dependendo do mapa.

Além disso, o ângulo  $h$  que representa a distância do polo, ou o complemento da latitude do local que ocupa o centro  $C$  do mapa, dá-se pela fórmula

$$\tan \frac{\bar{\omega}}{2} = n^{\frac{1}{c}} \tan \frac{h}{2} \quad (695)$$

de forma que em (§39),  $n = \frac{KB}{KA}$ , de modo que

$$\tan \frac{h}{2} = \left( \frac{KA}{KB} \right)^{\frac{1}{c}} \tan \frac{\bar{\omega}}{2}; \quad (696)$$

tendo assim todos os elementos necessários para a construção do mapa proposto.

Quando (§41) o expoente de projeção é dado, como no caso da projeção estereográfica ou  $c = 1$  (§29), só se pode fazer desaparecer na expressão de  $m$  os termos com a primeira dimensão de  $\beta$ , tomando (§39)

$$n = \frac{KB}{KA} = \frac{c - \cos \bar{\omega}}{c + \cos \bar{\omega}}; \quad (697)$$

de forma que a variação de  $m$  é por consequência da deformidade do mapa que será sempre maior que o anterior, ou com  $c$  sendo um valor conveniente para fazer desaparecer também a segunda dimensão de  $\beta$ .

Ao se fazer  $c = 1$  para a projeção estereográfica, Lagrange tem então

$$n = \frac{1 - \cos \bar{\omega}}{1 + \cos \bar{\omega}} = \tan^2 \frac{\bar{\omega}}{2}; \quad (698)$$

mas em geral, quando  $c = 1$

$$\tan \frac{\bar{\omega}}{2} = n^{\frac{1}{c}} \tan \frac{h}{2} = n \tan \frac{h}{2}; \quad (699)$$

onde

$$n = n^2 \tan^2 \frac{h}{2} \quad (700)$$

$$n = \cot^2 \frac{h}{2} = \frac{1 + \cos h}{1 - \cos h} = \frac{GB}{GA}; \quad (701)$$

porém,  $n = \frac{KB}{KA}$ , donde o ponto  $K$  caí em  $G$ , de acordo com o que foi visto em (§37).

Agora, pela expressão geral de  $m$  encontrada aqui, Lagrange conclui que é fácil ver que o valor de  $m$  para locais no eixo  $BA$ , a qualquer distância do ponto  $G$ , será

$$\frac{\overline{GH}^2 + \beta^2}{GH} \quad (702)$$

do qual decorre que, para qualquer valor da quantidade  $GH$ , jamais a segunda dimensão de  $\beta$  irá desaparecer do valor de  $m$ , a menos que fosse suposto  $GH = \infty$ , que será um absurdo, pois teria assim  $m = \infty$ . Logo, ele não irá desaparecer no caso visto em (§39), quando o valor de  $\bar{\omega}$  será tal que  $c = 1$ , que fará que  $\sin \bar{\omega} = 0$  e por consequência  $\omega = 0$  ou  $\omega = 180^\circ$ , podendo assim dizer que seria o caso onde um dos polos ocupe o centro do mapa, sendo a projeção estereográfica polar.

De fato, ao assumir que o equivalente a isso, com  $\sin \bar{\omega}$  infinitamente pequeno e igual a  $i$ , tem-se

$$c = 1 + \frac{i^2}{2}, \quad (703)$$

$$\cos \bar{\omega} = 1 - \frac{i^2}{2}, \quad (704)$$

onde

$$n = \frac{i^2}{2}, \quad (705)$$

$$\tan \frac{\bar{\omega}}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos \bar{\omega}}{1 + \cos \bar{\omega}}} = \frac{i}{2}, \quad (706)$$

onde, por  $\tan \frac{\bar{\omega}}{2} = n^{\frac{1}{c}} \tan \frac{h}{2}$ , tem-se

$$\tan \frac{h}{2} = \frac{1}{i}, \quad (707)$$

$$\cot \frac{h}{2} = i \quad (708)$$

e

$$\frac{\lambda}{\mu} = n, \quad (709)$$

$$\lambda + \mu = 2\delta \quad (710)$$

onde

$$\lambda = \delta i^2, \quad (711)$$

$$\mu = 2\delta. \quad (712)$$

Substituindo esses valores sobre a expressão geral de  $m$  de (§38) e negligenciando o que deve ser negligenciado por conta de  $i$  infinitamente pequeno, tem-se

$$m = 2\delta i - \beta i + \frac{\beta^2}{2\delta i}, \quad (713)$$

onde o termo afetado por  $\beta$  desaparece ao se fazer  $i = 0$ , mas não o que contém  $\beta^2$ . Sendo apontado, por Lagrange, como o único caso geral que (§39) está em falta; isso por conta que a eliminação de  $\beta^2$  vem da multiplicação pela quantidade  $n^{1+\frac{1}{c}} \tan \frac{h}{2}$ , que neste caso passa a ser  $\frac{i^2}{4}$ . Nota esta que Lagrange faz para remover a aparente contradição que poderia ser observada entre os resultados de (§37) e (§38).

Para terminar o trabalho, Lagrange então procura encontrar os valores para construir um mapa onde o centro fosse a cidade de Berlim.

# CAPÍTULO 6

## Considerações finais

Com a leitura desses trabalhos sobre o problema dos mapas, pode-se perceber o contexto ao qual se encontravam durante seu desenvolvimento. Também é possível verificar, pela primeira vez, a utilização do cálculo das diferenciais parciais em diferentes níveis, juntamente com a utilização dos números complexos, para resolver esse problema.

Nesse contexto, Lambert teve um papel crucial no processo do desenvolvimento por ser o primeiro, chegando a mandar cartas que acabaram por, possivelmente, incentivar Lagrange no interesse pelo tema; contudo, é perceptível a diferença de abordagem dos autores. O método de Lambert é exploratório, colocando várias hipóteses ao longo do trabalho e por se tratar de um trabalho ao qual o cálculo foi utilizado como ferramenta, mostra-se com menor "potência" que o utilizado pelos demais, ao se utilizar de séries infinitas, em alguns casos, esquivando-se de encontrar as equações de forma geral, indo em direção à soluções particulares.

Seu trabalho, de fato, apresenta características de uma pesquisa que inicia questões gerais sobre os problemas dos mapas, por supor condições e estabelecer “parâmetros” como, por exemplo, a consideração do mapa de Mercator e da projeção estereográfica como extremos. Seu trabalho possui uma carga muito maior de geometria esférica, não que não haja nos posteriores, entretanto, este dedica maiores esforços em uma abordagem global do problema dos mapas.

Euler, em contrapartida, desenvolve o método de Lambert com uma abordagem sobretudo local, ao enunciar a nível local três condições de uma representação isométrica de uma porção da esfera sobre o plano, mostrando a impossibilidade de contemplar essas três condições de forma conjunta, indo após isso por um caminho mais objetivo ao mostrar as transformações de determinadas projeções conforme suas fórmulas. Nesse processo, de forma mais metódica, com aplicação direta do cálculo diferencial desde o início, utiliza seus resultados sobre as trajetórias ortogonais, envolvendo as quantidades imaginárias, tratado na mesma época. No problema das trajetórias ortogonais, Euler considera transformações que preservam ângulos – método que irá retomar no problema dos mapas – considerando a preservação dos ângulos entre os paralelos e meridianos, ao partir de um ponto de vista privilegiado, por já ter estudado de outra forma a propriedade ao qual vai priorizar no seu estudo: a preservação dos ângulos entre paralelos e

meridianos no globo para o plano.

Assim, Euler traz um aperfeiçoamento nos resultados em relação a Lambert, por ser mais direto, mesmo mostrando as consequências de algumas hipóteses ao longo do trabalho, sendo mais objetivo ao sempre manter a propriedade central da preservação dos ângulos. As transformações que ele considera permite preservar os ângulos entre meridianos e paralelos como ocorre no caso das trajetórias ortogonais; aliás, Euler chega as transformações do tipo

$$\Delta z = \frac{a + bz}{c + dz},$$

sendo função da variável complexa que preserva os ângulos localmente. Importante destacar que essa forma ao qual Euler chega, é a mesma que posteriormente será conhecida como Transformação de Möbius de tal forma que a, b, c e d são constantes complexas. Essa relação foi chamada dessa forma por ser tratada e estudada pelo matemático August Ferdinand Möbius (1816-1868), o qual não tratamos neste estudo.

Já Lagrange inicia seu trabalho da posição de quem conhecia os trabalhos dos predecessores, citando-os na introdução e partindo da ideia de generalizar ao máximo o trabalho. Lagrange busca uma forma geral de transformações, não focando no processo de construir um determinado mapa, como adotou Euler no início ao querer construir o mapa estereográfico, e sim, tentando desde o início uma forma que fosse generalizar a construção de mapas, partindo de sua fórmula e se moldando conforme fossem dados os parâmetros associados à forma que desejaria que o mapa obtivesse. Nesse processo, Lagrange acaba por usar o método de d'Alembert como ferramenta para escrever o problema como um sistema de equações diferenciais parciais através da resolução do sistema. Mas seus resultados não ultrapassam os resultados encontrados por Euler, devido aos limites da matemática da época. Neste momento, ao não conseguir continuar com sua ideia inicial de generalização completa do problema, Lagrange inicia o teste das fórmulas buscando construir os mapas já conhecidos anteriormente para ter a confirmação e validação de sua forma até o ponto ao qual chegou. Ressaltamos que Euler e Lagrange adotaram métodos diferentes, pois Euler usa os seus resultados sobre as trajetórias ortogonais, enquanto Lagrange tenta encontrar soluções mais gerais através de resoluções de sistemas de equações diferenciais parciais usando métodos inaugurados por D'Alembert entre as décadas de 40 e 50 em outros trabalhos que envolvem o problema da mecânica analítica.

Assim, podemos ver como o desenvolvimento do cálculo, anos antes, agora aplicado a uma nova visão em relação aos mapas, como a preservação dos ângulos, possibilitou uma abordagem infinitesimal das formas do mapa, sendo um tratamento local mediante a utilização das equações diferenciais que, naquele momento, já tinham sido estudadas, podendo mostrar uma nova aplicação do cálculo para a construção de mapas melhores. Essa utilização fez com que a teoria fosse estudada de uma forma aprofundada, sendo base para estudos do século XIX com a teoria das transformações conforme o trabalho de Gauss *Solution générale de ce problème: Représenter les parties d'une surface donnée de telle sorte que la représentation soit semblable à l'original en les plus petites parties* de 1822, que foi um trabalho de grande

influência para a criação da matéria hoje conhecida como Geometria Diferencial através do artigo *Disquisitiones Generales circa Superficies Curvas* de 1828 ao qual faz a proposição de uma abordagem das superfícies por meio de parametrizações locais, introduzindo, por exemplo, o conceito de curvatura Gaussiana.

Neste trabalho podemos ver como as discussões sobre a forma da Terra e o desenvolvimento do cálculo diferencial integral, anos antes, propiciaram um terreno fértil para uma nova etapa do desenvolvimento humano e matemático, com os novos mapas mais precisos que puderam ajudar de forma política e militar, por exemplo, servindo como base para trabalhos futuros do século XVIII.

---

# Referências Bibliográficas

## 6.1 Fontes primárias

1. D'ALEMBERT, J. *Traité de Dynamique*. Paris, 1743.
2. D'ALEMBERT, J. *Traité de l'équilibre et du mouvement des fluides*. Paris, 1744.
3. D'ALEMBERT, J. *Réflexions sur la cause générale des vents*. Paris, 1747.
4. D'ALEMBERT, J. *Recherches sur la courbe que forme une corde tendue, mise en vibration*, Hist. De l'Ac. Des Sc. Des Berlin, vol 3, pp. 214-219, 1747.
5. D'ALEMBERT, J. *Suite des recherches sur la courbe que forme une corde tendue, mise en vibration*. Hist. De l'Ac. Des Sc. Des Berlin, vol 3, pp. 220-229, 1747.
6. D'ALEMBERT, J. *Theoria resistiae quam patitur corpus in fluidomotum, ex principiis omninò novis et simplissims deducta, habitâ ratione tum velocitatis, figurae, et massae corporis moti, tum densitatis & Compressionis partim fluidi*. O manuscrito está nos Arquivos da Academia de Ciências de Berlim-Brandenburg, Sob o símbolo: I-M478, 1749.
7. BERNOULLI, J. *Essai d'une nouvelle physique céleste, servant à expliquer les principaux phénomènes du ciel, et en particulier la cause physique de l'inclinaison des orbites des planètes par rapport au plan de l'équateur du soleil*. Imprimerie Royale, Paris, 1735.
8. EULER, L. *Atlas russicus mappa una generali et undeviginti specialibus vastissimum imperium russicum cum adiacentibus regionibus secundum leges geographicas et recentissimas observationes delineatum exhibens*. Cura et opera Academiae Imperialis Scientiarum Petropolitanae, 1745.
9. EULER, L. *Von der Gestalt der Erden, Anmerckungen über die Zeitungen*. Opera Omnia, ser. III, vol. 2, pp. 325-346. São Petersburgo. 1738. Tradução de Stacy G. Langton.

10. EULER, L. *De repraesentatione superficie sphaericae super plano.* Acta Academiae Scientarum Imperialis Petropolitinae, pp. 107-132. Opera Omnia: Series 1, Volume 28, pp. 248-275. , 1777, 1778.
11. EULER, L. *De projectione geographica superficie sphaericae.* Acta Academiae Scientarum Imperialis Petropolitinae, pp. 133-142. Opera Omnia: Series 1, Volume 28, pp. 276-287. 1777, 1778.
12. EULER, L. *De projectione geographica Deslisliana in mappa generali imperii russici usitata.* Acta Academiae Scientarum Imperialis Petropolitinae, pp. 143-153. Opera Omnia: Series 1, Volume 28, 1777, 1778.
13. EULER, L. *Opera Omnia.* series IV A, vol. II. Correspondence with Johann and Nicolaus Bernoulli.
14. EULER, L. *Opera Omnia.* Series IV A, Vol. VI. Correspondence with Maupertuis and Frederick II.
15. EULER, L. *Opera Omnia.* series IV A, Vol. V. Correspondence with Clairaut, D'Alembert and Lagrange.
16. EULER, L. *Considerationes de Traiectoriis Orthogonalibus,* Opera Omnia: Series 1, Volume 28,pp. 99-128, 1770.
17. EULER, L. *Institutionum calculi integralis volumen primum,* 3<sup>a</sup> edição, São. Petersburgo: Imperial Academy of Sciences, 1768.
18. EULER, L. *Institutionum calculi integralis volumen secundum,* São. Petersburgo: Imperial Academy of Sciences, 1769.
19. EULER, L. *Institutionum calculi integralis volumen tertium,* São. Petersburgo: Imperial Academy of Sciences, 1771.
20. EULER, L. *The work, which comprises 234 letters.* Publicado em São Petersburgo em 3 volumes, Vol 1 e 2(cartas 1 - 154) publicado em 1768, Vol 3 publicado em 1772.
21. GAUSS, C. F. *Solution générale de ce problème: Représenter les parties d'une surface donnée de telle sorte que la représentation soit semblable à l'original en les plus petites parties.* Mémoire couronné en réponse à la question proposée par la Société Royale des Sciences de Copenhague 1822. 1822, trad. L. Laugel. Paris: Hermann, 1915.
22. LAGRANGE, J.-L. *Sur la construction de cartes géographiques.* Nouveaux Mémoires de l'Académie royale des Sciences et des Belles-Lettres de Berlin, Premier mémoire, p. 638-664, e Second mémoire, p. 664-692. 1779.

23. LAMBERT, J. H. *Beiträge zum Gebrauche der Mathematik und deren Anwendung.* 3 partes. Berlin: Verlag des Buchladens der Realschule, 1765-1772.
24. LAMBERT, J. H. *Anmerkungen und Zusätze zur Entwerfung der Land- und Himmelscharten,* 1772. Editado por A. Wangerin. Leipzig: Engelmann, 1894.
25. LAMBERT, J. H. *Monatsbuch mit den zughörigen Kommentaren, sowie mit einem Vorwort über den Stand der Lambertforschung.* Editado por K. Bopp. In: Abhandlungen der Königlich Bayerischen Akad. der Wiss., Math.-phys. Klasse, vol. XXVII, 6. Abhandlung. 1914.
26. PICARD, J. *La mesure de la Terre.* Paris: Imprimerie Royale, 1671.

## 6.2 Fontes secundárias

1. BARKER, Stephen F. *Filosofia da Matemática.* Tradução Leônidas Hegenberg e Octanny Silveira da Mota. Rio de Janeiro: Zahar, 1969.
2. BONNET, Ossian *Thèse d'astronomie. Sur la théorie mathématique des cartes géographiques.* Journal de Mathématiques Pures et Appliquées, Série 1, Vol.17, pp.301-340, 1852.
3. CADDEO, R. & PAPADOPOULOS, A. *Mathematical Geography in the Eighteenth Century : Euler, Lagrange and Lambert.* Springer Cham, 2022.
4. CASSINI, J. *De la carte de la France et de la perpendiculaire à la méridienne de Paris.* Mém. de l'Acad. Roy. des Sciences de Paris, pp.389-405, 1733.
5. CHASLES, M. *Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie.* Mémoires couronnés par l'Académie royale des sciences et belles-lettres de Bruxelles, tome XI. Bruxelles: Hayez, 1837.
6. CLAIRAUT, A.-C. *Détermination géométrique de la perpendiculaire à la méridienne tracée par M. Cassini avec plusieurs méthodes d'en tirer la grandeur et la figure de la terre.* Mém. de l'Acad. Roy. des Sciences de Paris. pp. 404–416, 1735.
7. CLAIRAUT, A.-C. *Sur la nouvelle méthode de M. Cassini pour connaître la figure de la terre.* Mém. de l'Acad. Roy. des Sciences de Paris. pp. 117–122, 1738.
8. DARBOUX, G. *Leçons sur la théorie générale des surfaces et les applications géométriques du calcul infinitésimal.* 1<sup>a</sup> ed. 4 volumes. Paris: Gauthier-Villars, 1889.
9. DARBOUX, G. *Sur un problème posé par Lagrange.* Bulletin des sciences mathématiques, vol. 35, pp. 28–30, 1911.

10. DARBOUX, G. *Sur la construction des cartes géographiques*. Bulletin des Sciences Mathématiques, vol. 35, pp. 23–28, 1991.
11. DELISLE, J.-N. *Mémoires pour servir à l'histoire et au progrès de l'astronomie, de la géographie et de la physique, recueillies de plusieurs dissertations lues dans les assemblées de l'Académie royale des sciences de Paris et de celle de St Petersbourg*. São Petersburgo: Académie des sciences, 1738.
12. EULER, L. *De repraesentatione superficie sphaericae super plano*. Tradução de George Heine, 2012.
13. EULER, L. *De projectione geographica superficie sphaericae*. Tradução de George Heine, 2008.
14. EULER, L. *De projectione geographica Deslisiana in mappa generali imperii russici usitata*. Tradução de George Heine, 2007.
15. FÜSS, P. H. *Correspondance mathématique et physique de quelques célèbres géomètres du XVIIIe siècle, précédée d'une notice sur les travaux de Léonard Euler, tant imprimés qu'inédits et publiée sous les auspices de l'Académie impériale des sciences de Saint-Pétersbourg*. 1845.
16. GILLISPIE, Charles Coulson; *Dictionary of Scientific Biography*, Nova York: Scribner, 1981. Vol 4, 7 e 8.
17. GREENBERG, J. L. *The Problem of the Earth's Shape from Newton to Clairaut: The Rise of Mathematical Science in Eighteenth-Century Paris and the Fall of "Normal" Science*. Cambridge: Cambridge University Press, 1995.
18. GREENBERG, M. J. *Euclidean and non-Euclidean geometries: Development and history*. New York, US: W. H. Freeman and Company, 1993. (Third Edition).
19. GRIMBERG, G. E. *A Constituição da Teoria das Funções de Várias Variáveis no Século XVIII : O Início da Análise Moderna*. São Paulo, Tese de Doutorado, 2000.
20. GUERRIER, V. I. *Leibniz in seinen Beziehungen zu Russland und Peter dem Grossen: Eine geschichtliche Darstellung*. São Petersburgo e Leipzig, 1873.
21. HUYGENS, Christiaan, *Euvres complètes*. 22 vol. La Haye, Société hollandaise des sciences. 1888–1950.
22. KANAS, Nick; *Star Maps: History, Artistry, and Cartography*. New York, US: Springer - Praxis, 2012. (Second Edition)

23. MAIRAN, J.-J. D. de. *Recherches géométriques sur la diminution des degrés terrestres, en allant de l'équateur vers les pôles. Où l'on examine les conséquences qui en résultent, tant à l'égard de la figure de la Terre, que de la pesanteur des corps, et de l'accourcissement du pendule.* Mémoires de l'Académie Royale des Sciences pour l'année 1720, pp. 231–277. Paris, 1722.
24. MAUPERTUIS, P.L. Moreau de. *Discours lu dans l'assemblée publique de l'Académie royale des sciences sur la mesure de la terre au cercle polaire.* Euvres de M. de Maupertuis, t. 1, pp. 89–175, 1737.
25. MAUPERTUIS, P.L. Moreau de et al. *La Figure de la Terre, déterminée par les observations De Messieurs de Maupertuis, Clairaut, Camus, Le Monnier, de l'Académie Royale des Sciences, et de M. l'Abbé Outhier, Correspondant de la même Académie, Accompagnés de M. Celsius, Professeur d'Astronomie à Upsal, Faites par ordre du Roy au Cercle polaire.* Paris: Imprimerie Royale, 1738.
26. NABONNAND, Philippe. *Le problème mathématique des cartes géographiques au 19e siècle.* Actas de la Academia Nacional de Ciências. Córdoba, Tomo XV, pp. 99-115. ISSN: fffhal-01079476. 2012.
27. PAPADOPoulos, A. *Clairaut, Euler and the figure of the Earth.* Hal-03750333, 2022.
28. PAPADOPoulos, A. *On the works of Euler and his followers on spherical geometry.* Ganita Bhāratī, v. 36, n. 1-2, p. 237-292, 2014.
29. PERGE, Apollonius de. *Les coniques.*, Tradução de P. Ver Eecke. Paris, 1963.
30. PTOLOMEU, *Traite de geographie*, traduzido do grego para Francês por N. Halma, Eberhart, Paris, 1828.
31. ROSENFELD, Boris A. *A History od Non-Euclidean Geometry: Evolution of the concept of a Geometric Space.* Tradução Shenitzer, A. .New York: Springer-Verlang, 1988.
32. ROQUE, Tatiana; CARVALHO, João Bosco Pitombeira de. *Tópicos de história da matemática.* Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2012.
33. ROQUE, Tatiana. *História da matemática: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas.* Rio de Janeiro: Zahar, 2012.
34. STRICK, Heinz Klaus. *Johann Heirich Lambert.* Alemanha: Spektrum der Wissenschaft Verlagsgesellschaft Heidelberg, 2017. Tradução de John O'Connor, 2021.