

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE MATEMÁTICA

**REFLEXÕES SOBRE RACIONALISMO E EMPIRISMO
NA MATEMÁTICA E NO ENSINO DE MATEMÁTICA
A PARTIR DO PROBLEMA DE MOLYNEUX**

Roberto Ribeiro dos Santos Filho

Rio de Janeiro – RJ

Março 2024

**REFLEXÕES SOBRE RACIONALISMO E EMPIRISMO
NA MATEMÁTICA E NO ENSINO DE MATEMÁTICA
A PARTIR DO PROBLEMA DE MOLYNEUX**

Roberto Ribeiro dos Santos Filho

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários para obtenção do título de Mestre em Ensino de Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Thiago Hartz Maia

Rio de Janeiro – RJ

Março 2024

CIP - Catalogação na Publicação

R237r Roberto Ribeiro dos, Santos Filho
Reflexões sobre racionalismo e empirismo na
matemática e no ensino de matemática a partir do
problema de Molyneux / Santos Filho Roberto Ribeiro
dos. -- Rio de Janeiro, 2024.
106 f.

Orientador: Maia Thiago Hartz.
Dissertação (mestrado) - Universidade Federal do
Rio de Janeiro, Instituto de Matemática, Programa
de Pós-Graduação em Ensino de Matemática, 2024.

1. História da Matemática. 2. História da
Filosofia. 3. Ensino de Matemática. 4. Educação
Matemática. 5. Educação Especial. I. Thiago Hartz,
Maia, orient. II. Título.

Aprovada em 25/03/2024

Thiago Hartz Maia

Doutor – IM/UFRJ, Presidente

Gérard Émile Grimberg

Doutor – IM/UFRJ

Ivã Gurgel

Doutor – USP

Cleber Haubrichs dos Santos (suplente)

Doutor – IFRJ

Resumo

Em 1688, o escritor, político e filósofo inglês William Molyneux propôs um experimento de pensamento que ficou conhecido, posteriormente, como “problema de Molyneux”. Se um cego de nascença recobrasse a visão, ele seria capaz de distinguir imediatamente, por meio da visão, as figuras geométricas que ele conhecia, até então, somente por meio dos outros sentidos? Nesta dissertação, investigamos o problema de Molyneux, refletindo sobre as suas implicações para a matemática e para o ensino de matemática.

No primeiro capítulo fazemos uma revisão dos debates sobre empirismo e racionalismo na filosofia dos séculos XVII e XVIII. No segundo capítulo, apresentamos o problema formulado por William Molyneux e as primeiras respostas dadas a ele, notadamente por John Locke (1690), Gottfried Leibniz (1704) e George Berkeley (1709). No terceiro capítulo, analisamos um texto filosófico de Denis Diderot de 1749 que aborda o problema, intitulado “Carta sobre os cegos para uso dos que veem”. No quarto capítulo, propomos utilizar o problema de Molyneux como uma forma de explorar as visões de alunos acerca da natureza da matemática. Discutimos, ainda no quarto capítulo, a função dos experimentos de pensamento e, em seguida, analisamos como que, com o desenvolvimento das cirurgias de catarata, o problema de Molyneux deixou de ser entendido como um experimento de pensamento e passou a ser entendido como um experimento real. No quinto capítulo, mostramos como alguns debates da educação matemática especial trazem aspectos da oposição empirismo-racionalismo que exploramos anteriormente na dissertação. Por fim, no apêndice, apresentamos uma tradução do relato de William Cheselden, publicado em 1728, sobre o primeiro experimento real do problema de Molyneux.

Palavras-chave: História da Matemática; História da Filosofia; Educação Matemática; Educação Especial; Problema de Molyneux.

Abstract

In 1688, the English writer, politician and philosopher William Molyneux proposed a thought experiment that later became known as “Molyneux's problem”. If a man born blind regained his sight, would he be able to immediately distinguish, through vision, the geometric figures that he knew, until then, only through the other senses? In this master thesis, we investigate the Molyneux problem, reflecting on its implications for mathematics and mathematics teaching.

In the first chapter we review the debates about empiricism and rationalism in the philosophy of the 17th and 18th centuries. In the second chapter, we present the problem formulated by William Molyneux and the first answers given to it, notably by John Locke (1690), Gottfried Leibniz (1704), and George Berkeley (1709). In the third chapter, we analyze a philosophical text by Denis Diderot from 1749 that addresses the problem, entitled “Letter on the blind for the use of those who can see”. In the fourth chapter, we discuss how the Molyneux's problem can be used as a way of exploring the students' views on the nature of mathematics. We discuss how, with the development of cataract surgeries, the problem stopped being considered as a thought experiment and became a real experiment. In the fifth chapter, we show how some debates in special mathematics education bring aspects of the empiricism-rationalism opposition that we explored previously in this master thesis. Finally, in the appendix we present a translation of William Cheselden's 1728 account of the first real experiment on the Molyneux problem.

Keywords: History of Mathematics; History of Philosophy; Mathematics Education; Special Education; Molyneux's Problem.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus, pela força para superar todos os obstáculos até aqui.

À minha família que me apoiou durante toda minha vida acadêmica e também à minha esposa, que sempre me motivou a nunca desistir de meus sonhos.

Agradeço também ao meu orientador, que sempre foi paciente comigo em todos os momentos, mesmo quando divagávamos sobre as propriedades dos pentágonos.

Sumário

Introdução	8
Capítulo 1 – A teoria do conhecimento nos séculos XVII e XVIII.....	19
1.1. O racionalismo	19
1.2. O empirismo	25
1.3. A matemática entre empirismo e racionalismo	30
Capítulo 2 – O problema de Molyneux	33
2.1. A pergunta de William Molyneux.....	33
2.2. As primeiras respostas.....	34
Capítulo 3 – A “Carta sobre os cegos” de Diderot	44
3.1. O movimento iluminista.....	44
3.2. Análise da carta	46
Capítulo 4 – Visões sobre a natureza da matemática	61
4.1. As abordagens contextuais ao ensino de ciências e de matemática	59
4.2. Abordagens implícitas e explícitas à natureza da ciência	63
4.3. Um experimento de pensamento ou um experimento real?	66
4.4. Investigando as visões dos alunos sobre a natureza da matemática.....	73
Capítulo 5 – As definições matemáticas na educação especial	75
5.1. Algumas reflexões sobre o ensino de matemática para alunos cegos	75
5.2. A questão filosófica da definição dos objetos matemáticos	81
Conclusões.....	85
Apêndice – Tradução do relato de Cheselden (1728).....	88
Bibliografia.....	100

Introdução

A crescente conscientização acerca da necessidade de incluir pessoas com deficiência fez com que ferramentas de acessibilidade estejam mais presentes em nosso dia a dia. Existem filmes com audiodescrição para pessoas cegas, intérpretes de Libras nas mais diversas áreas¹ e adaptações para pessoas com alguma deficiência motora. Apesar de ainda ser abaixo do desejado para que a adaptação seja satisfatória, essa conscientização nos faz vislumbrar um mundo mais adaptado às necessidades individuais.² A Educação Especial tem como objetivo tornar a educação mais acessível para pessoas com deficiência.³ Apesar dessa recente conscientização da necessidade da acessibilidade, os esforços para uma educação acessível não são recentes. Vygotsky divide a visão da sociedade sobre a pessoa cega em três momentos diferentes. Essa divisão nos ajuda a entender a evolução da Educação Especial não só para cegos, mas para qualquer pessoa com deficiência.

O primeiro momento, segundo ele, vai desde a antiguidade até antes do Iluminismo, quando os cegos eram vistos como dotados de uma habilidade especial, como capazes de desenvolver as forças místicas da alma, como tendo uma penetrante visão interior, dotada de um conhecimento espiritual que não existe nos demais.⁴ Na Grécia antiga, os aedos e os adivinhos eram figuras cegas inspiradas pelo próprio deus Apolo.⁵ Segundo a doxografia, o próprio Homero teria sido um autor cego. A cegueira, nesses casos, seria a causa da clarividência. Vygotsky se refere a esse período como místico pelo fato de as faculdades atribuídas aos cegos serem consideradas forças supra sensoriais da alma, cujas ligações com a cegueira pareciam enigmáticas, milagrosas e incomprensíveis.

O segundo momento se iniciou no Iluminismo e se diferenciava do primeiro principalmente por usar o conhecimento científico no lugar do místico.⁶ Para Vygotsky, isso

¹ Para citar um exemplo, é cada vez mais comum ter intérpretes de Libras traduzindo o conteúdo de discursos públicos do governo por um lado como também comentários de competições de jogos eletrônicos por outro.

² Silva e Bego (2018), Meletti e Ribeiro (2014), Bueno e Souza (2018).

³ Declaração de Salamanca (1994).

⁴ Vygotsky (2011, p. 100).

⁵ Detienne (2013).

⁶ Vygotsky (2011, p. 101).

se deu por causa da nova concepção de psicologia que, por fim, criou um método educacional para cegos. De fato, a partir do Iluminismo, vemos o florescimento de diversas escolas especiais ao redor do mundo. No Brasil, um pouco mais tarde, tivemos a criação do Instituto Benjamin Constant, em 1854,⁷ e do INES, em 1856.⁸ No princípio desse período havia a concepção de que, na ausência da capacidade sensorial de um órgão, os outros órgãos sensoriais acabariam por compensá-lo, desenvolvendo-se mais que o normal. Um típico exemplo disso é a ideia, até hoje bastante difundida, de que cegos teriam particular aptidão para a música. Posteriormente, ficou claro que os sentidos não se superdesenvolviam para compensar a falta de funcionalidade de outro, mas que havia uma reestruturação da atividade psíquica a fim de tornar possível a compensação.⁹ Apesar de partir de uma premissa incorreta acerca da compensação,¹⁰ o que diferencia o segundo período do primeiro é o uso de ideias científicas como guia para entender como pessoas com deficiência realmente entendem e interagem com o mundo.¹¹

O aprofundamento dos estudos sobre as especificidades das interações do cego e de seu aprendizado resultou no conceito de que a adaptação e a compensação não se dão no campo biológico, mas sim no campo psíquico. Esse amadurecimento da concepção de compensação é o que marcou o terceiro e último momento. Vygotsky argumenta que a capacidade de adaptação do cego vem do desenvolvimento de estruturas psicológicas que assumem a tarefa de compensar o funcionamento do órgão defeituoso e não de uma capacidade superdesenvolvida do órgão físico.¹² O ouvido do cego não ouve mais, nem o olho do surdo vê mais, mas a falta da funcionalidade desses órgãos se torna a principal força motriz do desenvolvimento psicológico da personalidade do indivíduo com deficiência.

Através dessa caracterização temporal apresentada por Vygotsky, podemos identificar o Iluminismo como um momento de profunda mudança na compreensão das

⁷ O IBC [S. D.].

⁸ Conheça o INES (2021).

⁹ Vygotsky (2011, p.102).

¹⁰ A depender da língua e do contexto, utiliza-se a expressão “substituição” em vez de “compensação”, como na expressão alemã *Sinnesvikariat*, corrente no século XIX, que significa literalmente “a substituição dos sentidos”. A palavra “vicariato” também existe em português, porém não é usada neste contexto. Para uma discussão histórica da teoria da compensação dos sentidos no século XIX, cf. Olsén (2013).

¹¹ Vygotsky, como psicólogo, entendia a psicologia como ciência. Escrevemos dessa forma pois era como ele via. (Vygotsky, 2011, p. 101, 103.).

¹² Vygotsky (2011, p. 103).

deficiências e, mais especificamente, da cegueira. Cassirer¹³ aponta que o iluminismo tomou para si a missão de secularizar o pensamento filosófico:¹⁴

O problema lógico e epistemológico das ‘relações da consciência com os seus objetos’ não pode ser resolvido pela introdução de temas religiosos e metafísicos que, pelo contrário, só iriam obscurecê-lo.¹⁵

Antes do período iluminista, um argumento comumente utilizado para falar sobre como conhecemos o mundo é de que, no momento da concepção, todos já têm escrito em sua alma o conhecimento sobre todas as ideias e que redescobrimos essas ideias enquanto interagimos com o mundo. A proposta de que as ideias são de algum modo inatas é denominada inatismo, sendo um dos elementos centrais do racionalismo no decorrer da história da filosofia.¹⁶ Essa atitude filosófica remonta à teoria da reminiscência da alma de Platão, ainda que seja muito difícil encontrar hoje autores que defendam essa atitude nos termos postos por Platão.¹⁷ O filósofo francês René Descartes, já no século XVII, ao refletir sobre as faculdades da alma, se baseia em uma forma de inatismo, ainda que a sua proposta seja bastante diferente da proposta platônica.¹⁸ John Locke, no final do século XVII, defende o oposto, ao repetir a proposta aristotélica, defendida na abertura da *Metaphysica*, de que nada nos é conhecido sem antes ter sido experienciado através dos órgãos dos sentidos.¹⁹ Não temos ideia do que é a cor vermelha sem antes ver essa cor. Nosso conhecimento sobre os objetos é construído ao longo de nossa interação com ele. É justamente essa relação que dita nossa concepção sobre eles.

Ao refletir sobre a diferença entre essas duas perspectivas – que vieram a ser conhecidas, respectivamente, como racionalismo e empirismo –, percebemos pontos relevantes para o debate dentro da Educação Especial. Se nosso conhecimento sobre objetos geométricos, por exemplo, não está de alguma forma dentro de nós quando nascemos,

¹³ Ernst Cassirer era um filósofo neokantiano afiliado à escola de Marburg.

¹⁴ Cassirer (1992, p. 140).

¹⁵ Cassirer (1992, p. 141).

¹⁶ Dea, Walsh & Lennon (2017, introdução).

¹⁷ Markie & Folescu (2011, seção 3).

¹⁸ Sobre o inatismo em Descartes, ver Newman (2023, seção 1.4). Ver também Smith (2021, seção 3). No próximo capítulo, voltaremos ao pensamento de Descartes.

¹⁹ Em seu texto *An Essay Concerning Human Understanding*, Locke propõe a ideia de *tabula rasa*, ou seja, a ideia de que não nascemos com nenhuma ideia, como se fôssemos um livro em branco. É a experiência que fornece as ideias à nossa mente.

isso significa que construímos as ideias ao longo de nossas experiências com esses objetos. É de se esperar que duas pessoas que tiverem experiências muito diferentes acerca de um mesmo objeto tenham concepções muito diferentes também acerca desse objeto e, em última instância, acerca da própria geometria. Nessa perspectiva, no âmbito da Educação Especial, o professor vidente e o aluno cego jamais terão a mesma ideia de quadrado, visto que suas experiências nunca serão as mesmas. Não bastaria apenas pôr em braile a descrição sobre o objeto, se essa descrição é essencialmente visual. Assim, é necessário entender como as ideias são formuladas por um vidente e por uma pessoa cega, a fim de descrever o objeto de maneira que seja acessível a quem lê. O debate iluminista sobre se as ideias são inatas ou adquiridas através da experiência é relevante para pensarmos a Educação Especial e por isso as analisaremos mais a fundo no primeiro capítulo desta dissertação.

No segundo capítulo, partiremos de um problema de pensamento que foi central no Iluminismo, o chamado problema de Molyneux. Segundo Cassirer,

Ao considerar-se o conjunto de problemas de que tratam a teoria do conhecimento e a psicologia do século XVIII, surpreende a percepção de que, apesar da sua diversidade e da especificidade de cada um, eles convergem para um mesmo ponto. A busca de detalhes vê-se levada constantemente, apesar de toda a sua riqueza e de sua aparente dispersão, para um problema teórico fundamental onde se reúnem todos os fios.²⁰

Essa questão foi apresentada pelo escritor, político e filósofo inglês William Molyneux em uma carta a John Locke:

Suponha um homem nascido cego, agora adulto, ao qual foi ensinado a distinguir, pelo tato, entre um cubo e uma esfera, do mesmo metal e aproximadamente do mesmo tamanho, de modo que possa dizer, ao tocar em uma e em outra figura, qual é o cubo e qual é a esfera. Suponha agora que o cubo e a esfera estejam sobre uma mesa e que o homem passe a enxergar. Questiono se

²⁰ Cassirer (1992, p. 153).

com a vista, antes de tocar os objetos, ele poderia distinguir e dizer qual é a esfera e qual é o cubo.²¹

Racionalistas tendem a responder sim a esse problema, pois a pessoa já nasceu com o conhecimento sobre como é o cubo e como é a esfera, bastando aplicá-lo a essa situação em particular. No momento que a pessoa receber o estímulo visual, será desperto dentro dela a ideia de cubo ou de esfera, visto que a origem das ideias além de não ser através dos órgãos sensoriais não são dependentes deles para serem formuladas. Por outro lado, Locke, o empirista que popularizou esse problema, disse que, por nunca ter interagido através da visão com um cubo e uma esfera, o homem que nasceu cego não os conhece por meio da visão e, assim, não teria como distinguir entre um e o outro.

Muitos filósofos do século XVIII, tanto rationalistas quanto empiristas, se debruçaram sobre esse problema. Muitas vezes as suas respostas não se limitaram a um *sim* ou a um *não*. Gottfried Leibniz, por exemplo, que defendia que algumas ideias são inatas, argumenta que sim, o cego seria capaz de discernir entre as duas figuras, mas com a condição de que fosse dito que os objetos a frente são de fato um cubo e uma esfera, restando dizer qual é qual.²² Ele ainda argumenta que o cego seria capaz de fazer isso por simplesmente aplicar princípios racionais sobre a informação visual que ele está recebendo. Na sequência, ele argumenta sobre a importância de separar as imagens das ideias exatas que temos acerca dos objetos. A base do argumento de Leibniz é de que as ideias são independentes dos sentidos, ou seja, podemos abstrair totalmente dos dados sensoriais as propriedades puras dos objetos. Bastaria, então, argumentar, como na prova de um teorema, de que uma dada imagem, por ter tais características, deve corresponder a um objeto especificamente e não ao outro.

George Berkeley,²³ por outro lado, argumenta que um cego, ao recuperar a visão, jamais saberia distinguir entre um cubo e uma esfera. No centro da resposta de Berkeley está o argumento de que esse homem, agora vidente, seria incapaz de perceber distâncias

²¹ Locke (1999, p.128). No original: “Suppose a Man born blind, and now adult, and taught by his touch to distinguish between a Cube, and a Sphere of the same metal, and nighly of the same bigness, so as to tell, when he felt one and t’other; which is the Cube, which the Sphere. Suppose then the Cube and Sphere placed on a Table, and the Blind Man to be made to see. *Quaere*, Whether by his sight of it, before he touches them, he could now distinguish, and tell, which is the Globe, which the Cube.”

²² Leibniz (1996, p. 51).

²³ George Berkeley (1685-1753) foi um filósofo irlandês. Se para Locke não podíamos conhecer o mundo sem o experienciar antes, para Berkeley o mundo visual como conhecemos existe apenas dentro de nossa mente.

apenas pelos dados visuais.²⁴ Como raios de luz não carregam a informação da distância que viajaram e a imagem que forma em nossa retina é bidimensional então a informação sobre distâncias e profundidades não é sensorial, mas sim percebida através de operações internas, intelectuais, mesmo que automáticas²⁵ Para Berkeley, essa capacidade de perceber distâncias não é inata, precisa ser aprendida através da prática. Portanto, um cego seria incapaz de perceber a profundidade em figuras tridimensionais, como no cubo e na esfera, o que impossibilitaria o argumento de Leibniz. Mesmo que fosse dito que em sua frente estão um cubo e uma esfera, o agora vidente não necessariamente perceberia que esses objetos são tridimensionais e talvez perguntasse se é uma pegadinha.

A discussão iluminista sobre a teoria do conhecimento viu o embate em torno do problema de Molyneux acirrar-se ainda mais quando um cirurgião chamado William Cheselden, em 1728, realizou a primeira cirurgia de catarata bem-sucedida de que se tem relato.²⁶ Dada a importância desse relato de Cheselden, optamos por apresentar no apêndice uma tradução para português, seguida das imagens do trabalho original, de 1728.

Cheselden registrou o que o jovem operado e agora vidente disse sobre os objetos que agora percebia através da visão. Esse relato parecia apresentar uma resposta empírica para um problema que antes era só teórico e com uma resposta a favor do empirismo iluminista. Esse jovem se mostra totalmente incapaz de perceber profundidade nas coisas. Veja como o relato do jovem trazido por Cheselden concorda com o que Berkeley disse anteriormente em sua obra: “quando viu pela primeira vez, estava tão longe de fazer julgamentos sobre distâncias que pensou que todos os objetos tocavam seus olhos (como ele expressou) assim como sentia na pele”.²⁷ Visto que o problema de Molyneux está no centro dos debates entre racionalistas e empiristas, apresentaremos mais a fundo as diferentes visões sobre esse problema – de Molyneux, Locke, Leibniz e Berkeley – no

²⁴ Berkeley (2002, p. 12).

²⁵ Quando desenhamos um cubo no quadro em sala de aula, conseguimos fazer de tal forma que qualquer pessoa perceba que aquele desenho representa uma figura tridimensional, mas que está em uma superfície bidimensional. Para um cego que tem a visão recuperada, essa percepção tridimensional não existe, visto que, na retina, a imagem é formada bidimensionalmente. Assim, de acordo com Berkeley, ele precisaria de tempo para aprender a perceber as características visuais que determinam profundidade. Quando percebemos um cubo, entendemos que aquilo é um cubo e não um hexágono com alguns riscos no meio porque estamos acostumados a perceber um cubo quando vemos esse desenho.

²⁶ Degenaar (1996, p. 14 e 56).

²⁷ Cheselden (1728, p. 2). No original: “When he first saw, he was so far from making any Judgment about Distances, that he thought all Objects whatever touch’d his Eyes, (as he express’d it) as what he felt did his Skin.”. Cf. Berkeley (2002, pág. 12).

capítulo 2, a fim de entendermos melhor as diferenças nos pressupostos filosóficos entre as suas escolas de pensamento.

Uma das análises iluministas desse problema que consideramos mais relevantes para nosso trabalho é o feito na obra *Carta sobre os cegos para uso dos que veem*, escrita por Denis Diderot.²⁸ Ele analisa o problema de forma diferente, supondo uma simplificação conveniente. De certa forma, Diderot junta a resposta de Berkeley com a de Locke ao dizer que o cego com a visão recuperada não saberia discernir entre um cubo e uma esfera pois não conseguiria discernir profundidades, mas que saberia discernir entre um quadrado e um círculo se lhes fossem apresentados como tal e se, assim como sugere Leibniz, o agora vidente tivesse conhecimento matemático para analisar o objeto à luz das propriedades que lhe são conhecidas.²⁹ Diderot argumenta que, dependendo da formação do sujeito em questão, ele responderia o problema de maneiras diferentes e que apenas alguém que estudou as propriedades geométricas dos objetos saberia dizer de fato qual é qual.

A análise feita por Diderot, que será tema do terceiro capítulo desta dissertação, permite pensar sobre o problema de forma relevante para a Educação Especial. Na construção de seu argumento, Diderot valoriza a maneira como os cegos interagem com o mundo citando exemplo de como é a vida de algumas pessoas cegas que ele conheceu e de como elas superaram suas expectativas. Ele menciona Nicholas Saunderson, um renomado matemático de sua época que era cego e que ocupou a cátedra de professor lucasiano de matemática na Universidade de Cambridge.³⁰ Todos esses exemplos são citados por Diderot para embasar a ideia de que os cegos são capazes de entender a complexidade do mundo e das ideias, mas que precisamos respeitar e valorizar a maneira como eles fazem isso.³¹ Diderot mostra que a adaptação é possível, mas que devemos respeitar a estruturação que os cegos fazem do espaço geométrico e que, por interagirem com esse

²⁸ Denis Diderot (1713-1784), editor da *Encyclopédie*, com contribuições de D'Alembert, tem grande importância na história da ciência, além de ser um dos principais filósofos do período iluminista. Seu primeiro trabalho original, *Lettre sur auveugles* (Carta sobre os cegos), é uma das obras de referências principais desse trabalho. Nela Diderot introduz a perspectiva de que a resposta ao problema de Molyneux não precisa ser necessariamente a mesma para todos os indivíduos. Essa nova perspectiva dá um passo adiante em como fazer educação matemática especial de uma maneira mais natural para os alunos.

²⁹ Diderot (1749, pág. 136, 137).

³⁰ Essa mesma cátedra foi ocupada por Isaac Newton, Charles Babbage, George Stokes, Paul Dirac e Stephen Hawking.

³¹ Uma das pessoas cegas que ele conversou e mostrou em sua carta fala que prefere ter seu sentido do tato aperfeiçoado do que receber um novo sentido.

espaço por um sentido diferente, os caminhos tomados para entender o mundo são distintos. Respeitados todas as diferenças, o cego é sim capaz de discernir duas figuras geométricas se recuperada a visão, argumenta Diderot. Trazemos o debate iluminista sobre a teoria do conhecimento para refletir, sobre a óptica da filosofia, sobre como adaptar alunos com deficiência.

Nos dois capítulos seguintes, traremos as contribuições desta dissertação, a saber, algumas reflexões educacionais inspiradas nos debates sobre o problema de Molyneux, as quais resumimos a seguir.

No quarto capítulo, discutimos a estreita relação existente entre a resposta que uma dada pessoa dá ao problema de Molyneux e sua concepção de matemática. Propomos utilizar essa relação como modo de investigar as visões dos alunos acerca da natureza da matemática. Para isso, é importante termos uma clareza maior acerca da função dos experimentos de pensamento na filosofia. Discutiremos como o problema de Molyneux deixou de ser visto como um experimento de pensamento e passou a ser visto como um experimento real. Nossa narrativa é baseada principalmente no trabalho da historiadora da psicologia Marjolein Degenaar.

Veremos as diferentes respostas empíricas que foram dadas ao problema de Molyneux. Um relato interessante é o do médico J. C. August Franz, de 1841. O experimento feito por ele é o primeiro que envolveu de fato um cubo e uma esfera além de ter sido documentado precisamente. O tempo de recuperação do cego operado foi respeitado, mas impedindo que ele pudesse aprender a usar a visão. Quando ele conseguia ser exposto à luz sem sentir dor, Franz realizou uma série de experimentos com esse jovem cego e, quando colocou o cubo e a esfera diante desse jovem, ele conseguia discernir de que se tratava de duas figuras diferentes. Após uma análise inicial, ele foi capaz de dizer que se tratava de um objeto quadrangular e outro circular e, depois de mais um tempo disse que era um quadrado e o outro era um disco. Com os olhos desse jovem vendado, Franz substituiu o cubo por um disco, colocando assim a esfera e o disco lado a lado. Ao abrir os olhos novamente, o jovem não conseguiu discernir qual era qual. Ao final do experimento, Franz permitiu que o jovem pudesse tocar nos objetos que ele estava tentando reconhecer através da visão. O jovem expressou, então, grande surpresa de não ter conseguido perceber esses objetos apesar de conhecê-los muito bem.³² Esse experimento com o jovem e

³² Degenaar (1996, p. 91-92).

a maneira como ele foi conduzido gerou muitos elogios, mas também críticas. Essas realizações empíricas do problema de Molyneux fizeram com que a ênfase passasse a ser na resposta – afirmativa ou negativa – ao problema.

Nós defendemos que o problema de Molyneux volte a ser pensado como um experimento de pensamento, ou seja, como uma situação hipotética cujo valor não está na sua resposta em si, mas sim no fato de que, ao tentar respondê-lo, precisamos articular e explicitar diversos pontos do nosso modo de compreender o mundo que estavam tácitos anteriormente. Nesse sentido, propomos que o problema de Molyneux – pensado estritamente como um experimento de pensamento – pode ser utilizado para investigar as concepções dos alunos acerca da natureza da matemática. Fazemos uma revisão das discussões sobre abordagens contextuais ao ensino de ciências e discutimos como o problema de Molyneux pode ser, nesse contexto educacional, ser utilizado para investigar as concepções dos alunos acerca da natureza da matemática.

No quinto capítulo, mostramos que os debates sobre o problema de Molyneux podem contribuir para refletirmos sobre algumas práticas da Educação Especial. A reflexão sobre qual perspectiva, racionalista ou empirista, orienta as nossas práticas educacionais; de se as ideias são inatas ou se deveriam ser aprendidas através dos sentidos. A perspectiva filosófica do professor ou da professora afeta diretamente o modo como ele ou ela propõe e interpreta as atividades dos alunos.

Vejamos um exemplo. Será que a ideia de quadrado é a mesma em um cego e em um vidente? Se as ideias são inatas, essa questão não importa muito, visto que a ideia de quadrado não surge dos sentidos para existir em nossa mente e, portanto, é independente da forma como o estamos percebendo. Agora, se as ideias são aprendidas através dos sentidos e de nossa interação com o mundo, um quadrado para uma pessoa cega não representa a mesma coisa que para uma pessoa vidente. Na segunda hipótese, se torna relevante pensar nos pré-conceitos que temos e nos conceitos que queremos alcançar. Talvez o caminho que traçamos para certa atividade em sala de aula se torna mais difícil por usarmos conceitos que são naturais em um sentido, mas não o são em outros.

Refletiremos, em particular, sobre as experiências relatadas por Healy e Fernandes em alguns de seus textos. O fato do Problema de Molyneux versar também sobre objetos geométricos e das experiências de Healy e Fernandes usarem, por muitas vezes, objetos geométricos, faz com que esse o uso do trabalho delas seja adequado.

Durante o século XIX e XX, o debate em torno do problema de Molyneux não se limitou apenas aos filósofos, mas foi também explorado por outras campos do conhecimento como a “psicologia, oftalmologistas, fisiologistas e outros pesquisadores”.³³ Como dito anteriormente, outras cirurgias foram feitas, mas nem todas foram como a de Franz. Algumas contradiziam o relato feito por Cheselden visto que as circunstâncias variavam de caso para caso. Essas diferenças faziam a comparação entre os casos ser difícil, tornando difícil dar uma resposta definitiva ao problema de Molyneux apenas através de experimentos. Especificamente no século XX, o problema de Molyneux já não era uma questão central nos debates acerca da teoria do conhecimento e da Educação Especial, aparecendo mais em publicações de natureza histórica como aponta Degenaar.³⁴ Assim, essa ponte que estamos propondo entre uma reflexão sobre a teoria do conhecimento – via uma investigação acerca do problema de Molyneux – e a Educação Especial parece-nos ser, ainda, uma ponte que está por ser feita nos estudos de Educação Matemática.

Ainda no quinto capítulo, partindo de uma análise que Marilena Chauí faz da definição de círculo no *Tratado sobre a emenda do intelecto* de Espinosa, propomos que alguns relatos da comunidade de pesquisa de educação matemática especial sejam lidos à luz da história da filosofia. Por exemplo, a questão da definição dos objetos matemáticos a serem apresentadas para alunos cegos. Ao final do capítulo, retornamos ao problema de Molyneux.

Depois, apresentamos brevemente as conclusões desta dissertação. No apêndice, apresentamos uma tradução do relato de William Cheselden, médico inglês que realizou o primeiro teste real do problema de Molyneux em um cego cuja catarata ele operou em 1728. Para além da relevância intrínseca desse relato, ele também será importante em nossa narrativa, uma vez que diversos autores que discutiremos – em particular Denis Diderot – ficaram imensamente impressionados com esse relato, que conclui que a resposta do problema de Molyneux é, de um ponto de vista da clínica médica, negativo. Esse relato, que discutiremos recorrentemente nos capítulos 3 e 4, nos coloca uma questão muito interessante, a saber, em que medida o problema de Molyneux – que é um experimento de pensamento de filosofia – pode ser respondido por um experimento médico real, vislumbrando assim a possibilidade que o debate sobre o empirismo e o racionalismo

³³ Degenaar (1996, p. 15). Cf. Abbott (1903).

³⁴ Degenaar (1996, p. 125).

na matemática sejam surpreendentemente reduzidos a um problema médico. Enfatizamos o fato de que a função dos experimentos de pensamento não é chegar a uma resposta, mas investigar o nosso próprio pensamento, explicitando as nossas hipóteses, que muitas vezes jazem tácitas no discurso. Essa ideia servirá de motivação para o capítulo 4, no qual proporemos utilizar o problema de Molyneux como uma forma de investigar as visões de alunos acerca da natureza da matemática.

Capítulo 1

A teoria do conhecimento nos séculos XVII e XVIII

*Nihil in intellectu nisi prius fuerit in sensu.*³⁵

Durante os séculos XVII e XVIII, diversos filósofos pensavam sobre como conhecemos o mundo. A teoria do conhecimento tomou, então, um papel central nas disputas metafísicas e epistemológicas.³⁶ Argumentos e teorias surgiram para dar conta de explicar por que entendemos o mundo da maneira que ele se nos apresenta. Alguns pensavam que o mundo como entendemos é resultado de ideias inatas que moldam a nossa percepção. Outros pensavam que toda nossa construção de uma realidade exterior passa pela experiência e, portanto, todas as representações que criamos dos objetos que percebemos acontecem através dos sentidos. Neste capítulo, analisaremos essas duas perspectivas acerca da teoria do conhecimento, as quais são denominadas, respectivamente, racionalismo e empirismo.

1.1. O racionalismo

Descartes é conhecido entre matemáticos e físicos por ter relacionado álgebra e geometria, sendo um dos criadores da chamada geometria analítica. Ele também teve papel importante na construção de uma das formas de entender a teoria do conhecimento. Descartes acreditava que o mundo que conhecemos é resultado não do que percebemos através de nossos sentidos, mas sim como uma operação do nosso intelecto. Segundo o historiador da filosofia Geoffrey Gorham, “em duas ocasiões ele [Descartes] argumentou explicitamente que todas nossas ideias, mesmo as ideias sensoriais, são inatas na

³⁵ Nada está no intelecto sem antes estar nos sentidos. Frase famosa usada por empiristas para dizer que não nascemos com ideias anteriores. Nosso cérebro só conhece a forma geométrica do círculo, por exemplo, após ter percebido, através dos sentidos, um círculo.

³⁶ Como conhecemos e apreendemos o mundo? É através de Deus? As coisas já estão postas em nossa mente? Apreender é relembrar algo inativo ou experimentar algo novo? Questões como essas têm diferentes respostas dependendo da perspectiva filosófica de quem responde. Cf. Cassirer (1992, p. 135-136) e Hatfield (1998, p. 953).

mente”.³⁷ Em carta ao matemático jesuíta Pierre Bourdin, com quem teve diversas disputas, Descartes afirmou:

Meu principal objetivo sempre foi chamar a atenção para certas verdades muito simples que são inatas em nossas mentes, para que, assim que forem apontadas aos outros, eles considerem que sempre as conhecaram.³⁸

Conforme explicamos no capítulo anterior, o inatismo é a perspectiva filosófica segundo a qual as “ideias” que temos são uma característica de nosso espírito, nascemos com elas, e por isso são inatas. Se nascemos com elas e elas são característica comum de todos os humanos, não há então objetivo em questionar a ligação dela com a realidade, em questionar o porquê o vermelho é vermelho. Podemos até questionar o que desperta em nós a sensação da ideia de vermelho, mas nunca questionar o porquê o vermelho é despertado por essa sensação. Segundo a historiadora da filosofia Deborah A. Boyle, uma das dificuldades em compreendermos o que Descartes entende por ideias inatas está na dificuldade em compreendermos o que ele entende primeiramente por ideia.³⁹ O inatismo de Descartes, que tem características próprias, é um assunto bastante debatido da história da filosofia, que foge ao escopo desta dissertação, motivo pelo qual não nos aprofundaremos neste debate.

Para Descartes, não há diferenças em como os sentidos percebem as coisas. A ideia de triângulo pelo tato e a de triângulo pela visão são uma só, não há distinção. Nós formamos e construímos os objetos através de nossos conhecimentos e opiniões sobre esses objetos e não pelos dados sensoriais recebidos dele. Esse conhecimento é regulado através de um senso comum presente em nossa glândula pineal.⁴⁰ É como esse senso comum interage com os sentidos recebidos que nos possibilita pintar o mundo que vemos. Dessa forma, Descartes diz que temos uma capacidade inata de perceber o mundo da maneira que percebemos e que essa maneira é independente dos nossos sentidos. Eles são

³⁷ Gorham (2002, p. 355).

³⁸ *Apud* Boyle (2009, p. 1).

³⁹ Boyle (2009, p. 7-13).

⁴⁰ Para Descartes, nascemos com um senso comum dado por Deus aos homens. Esse senso comum tinha um lugar específico no corpo. Ficava em uma glândula chamada glândula pineal. Ali se encontraria o ponto de encontro entre o corpo e a alma. Era onde se encontrava o senso comum e a imaginação. Lievers diz o seguinte: “Não é a imagem retinal o elemento mais importante no processo de recepção de ideias, mas sim a recepção, pelo senso comum situado na glândula pineal, dos movimentos particulares dos espíritos animais causados e apropriados ao objeto percebido.” Cf. Lokhorst (2013) Lievers (1992, p. 7).

apenas mediadores entre os objetos e nosso senso comum, que por sua vez desperta as ideias anteriores que temos desses objetos.

A forma é julgada pelo conhecimento ou pela opinião que temos sobre a posição das várias partes de um dado objeto, e não pela semelhança das suas imagens em nossos olhos. Pois essas imagens, quando nos fazem ver círculos e quadrados, contêm, em geral, somente ovais e losangos. A posição (...) foi percebida pela visão da mesma maneira que pelo tato.⁴¹

Para Descartes, uma ideia pode ser percebida de maneiras diferentes por sentidos diferentes, mas a ideia continua a mesma. Caso alguém observe um triângulo pela visão e pelo tato, o triângulo percebido pelo tato e pela visão correspondem a mesma ideia de triângulo. Veremos mais a frente outros filósofos defendem uma teoria diferente, segundo a qual a ideia de triângulo formada pelo tato e pela visão são diferentes. Essa é um ponto muito importante, se não o central, de toda nossa discussão nesse trabalho. Saber até que ponto essas ideias são iguais ou não pode dizer muito sobre como apresentar adequadamente a ideia de triângulo a alunos que são cegos. Discutiremos isso com mais detalhes posteriormente, mas saber isso é desde já essencial para a boa compreensão da análise que queremos fazer nesta dissertação. Adepto do pensamento racionalista, Nicolas Malebranche, discípulo de Descartes, também pensava de forma semelhante, defendendo que temos ideias inatas que preexistem a nossa percepção do mundo.

Ernst Cassirer, em seu livro intitulado *A Filosofia do Iluminismo*, diz o seguinte sobre esse pensamento cartesiano:

Não existe um conhecimento verdadeiro das coisas, salvo se relacionarmos em nós mesmos as percepções sensíveis com as ideias da razão pura. Somente essa relação confere as representações uma significação objetiva; de simples modificações do nosso eu, convertem-se por esse meio em representações do ser e da ordem dos objetos. Em si mesmas, as qualidades sensíveis, as sensações de cores, de som, os cheiros e os sabores ainda não

⁴¹Lievers (1992, p. 7). No original: "Shape is judged by the knowledge or opinion that we have of the position of the various parts of an object, and not by resemblance of the pictures in our eyes. For these pictures usually contain only ovals and rhombuses when they make us see circles and squares. Position, it needs to be underlined, was perceived by sight in the same manner as by touch."

comportam o menor indício de um conhecimento do ser e do mundo; enquanto vivencias imediatas apenas nos assinalam os diversos estados por que passa a nossa alma, de instante a instante.⁴²

Dito de maneira simples, entendemos o mundo da maneira como entendemos porque nossa mente tem, de certa forma, uma pré-disposição de compreendê-lo assim.⁴³ No pensamento cartesiano, as “qualidades sensíveis” não são suficientes para transmitir a informação que é traduzida em nossa razão. O raio de luz refletido de um objeto vermelho, que atinge nossos olhos, excita os bastonetes correspondentes na retina e gera um impulso nervoso que vai até nosso cérebro e faz com que ele perceba que estamos enxergando o vermelho. Quando dizem que a qualidade sensível não é o suficiente, querem dizer que, apesar de o impulso chegar em nosso cérebro, a ideia de vermelho já existe nele – ou mais, precisamente, em nossa faculdade da razão –, e essa ideia é trazida à tona para nos fornecer a imagem daquele objeto. O mesmo acontece com sons, formas e tamanhos.

Nesse sentido, as ideias despertadas pelos objetos são características desse objeto. Ao vermos uma maçã verde, a forma maçã e a forma verde, que mencionamos anteriormente, são características daquele objeto maçã. Esse objeto desperta em nós ideias inatas. Essas características são específicas dos objetos⁴⁴ que são percebidos.

Numa direção diferente do cartesianismo, alguns, como Locke, defendiam que tudo que conhecemos, aprendemos e temos ideia vem de nossos sentidos. A epígrafe deste capítulo, *nihil in intellectu nisi prius fuerit in sensu*, que significa “nada está no intelecto sem que antes tenha estado nos sentidos”, resume bem o que Locke defendia. Para o filósofo inglês, tudo que conhecemos, conhecemos através da experiência. Isso significa que não temos ideia inatas sobre os objetos, nosso intelecto não tem parte em definir as características particulares do que está sendo percebido. Voltando no exemplo do vermelho, enxergamos essa cor nos objetos porque a luz, ao atingir nossa retina, produz um estímulo específico, que nosso olho traduz em um impulso nervoso específico, que é conduzido

⁴² Cassirer (1992 p. 139).

⁴³ Essa pré-disposição não é algo aleatório para Descartes, mas sim algo feito por Deus em nós. Deus, em sua infinita bondade, nos faz ver o mundo da maneira como ele realmente é.

⁴⁴ Descartes, por exemplo, afirma que o que é captado pelos sentidos é completamente diferente do que de fato percebemos. Sendo assim, não é possível que o sentido seja o causador principal do que estamos percebendo, mas que essas ideias estavam antes em nosso intelecto. Cf. Gorham (2002).

pelo nervo óptico ao nosso cérebro, que então é estimulado de uma maneira específica.⁴⁵ A diferença entre o pensamento racionalista e empirista é que para os racionalistas, nosso cérebro tem ideias inatas que nós usamos para interpretar esse estímulo sensorial de maneira específica, enquanto os empiristas dizem que nosso cérebro constrói as ideias conforme recebe novos estímulos vindos dos sentidos.⁴⁶ Assim, para um empirista, por exemplo, não teríamos escondido em lugar algum de nosso cérebro a ideia de uma cor que nunca vimos. Só conhecemos o roxo depois de termos visto a cor roxa, assim como não conseguimos entender um sabor sem antes tê-lo experimentado.

Locke afirma que a maneira como nós percebemos o mundo é determinada pelos nossos sentidos, e que muitas das coisas que observamos vem da experiência que temos em senti-las. Por exemplo, não temos a ideia de áspero em algum lugar antes de experienciarmos o áspero através da experiência de tocar em algo áspero. Diferentemente do pensamento racionalista, o áspero não é de fato uma característica do objeto, mas sim uma informação que nosso corpo tem ao tocar em determinado objeto. De fato, para os empiristas, diversas propriedades que extraímos de interagir sensorialmente com os objetos vem de nossos sentidos e não são características em particular do que está causando o estímulo sensorial. Um exemplo clássico é o do experimento de colocar as duas mãos em um recipiente com água morna, onde uma mão está a uma temperatura inferior à da água e a outra a uma temperatura superior à da água. A mão que está mais fria que a água, informará que o líquido está quente, enquanto a mão que está mais quente informará que o líquido está frio. Através desse experimento, Locke afirma que as características dos objetos, que são obtidas através de nossos sentidos, são relativas as condições dos nossos órgãos sensoriais naquele dado instante. Apesar de temperatura ser uma característica específica de um corpo em um dado instante, a sensação de quente e frio não é uma característica do objeto, mas é algo que está nos nossos sentidos e é compreendida através da experiência que temos com diferentes temperaturas. Moradores do Rio de Janeiro têm muito mais tolerância a temperaturas quentes do que alguém que mora no Alaska, e percebem um dia de 30°C, apesar de quente, como um dia muito mais fresco do que alguém que mora em uma região fria. Assim como essa pessoa consegue andar de bermuda numa

⁴⁵ Isso não significa que Deus foi excluído da discussão, apenas o local onde ele opera sua vontade foi alterado. Para os racionalistas é no intelecto, para os empiristas é nos sentidos, pois Deus é que nos deu a capacidade de ver o mundo da forma que vemos. Cf. Locke (1999, Livro I, Capítulo III, §22, 23).

⁴⁶ É digno de nota que nem todos os racionalistas defendem o inatismo total das ideias. O próprio Descartes faz parecer em alguns momentos que defende o inatismo total, mas em outros diz que existem algumas ideias que são aprendidas pelos sentidos. Cf. Gorham (2002).

temperatura de 15°C, enquanto os cariocas, em sua maioria, estariam usando várias camadas de roupa. A construção que fazemos do mundo está completamente relacionada com nossos sentidos, sentidos esses que são construídos pela experiência.

Muitos filósofos dessa época concordavam quem nem todas as ideias eram compostas pelas informações obtidas através dos sentidos. Além dos cinco sentidos externos (visão, audição, paladar, olfato e tato), eles argumentam que temos também sentidos internos que são responsáveis por constituir os conceitos e apreender o mundo. A lista não era a mesma entre os filósofos do século XVII, mas alguns desses sentidos seriam a memória, a imaginação, o senso comum e a estimação.⁴⁷ Diferentemente da forma como tratou as ideias inatas dos sentidos externos, Locke não combateu a concepção de “operações inatas” pertinentes aos nossos sentidos internos.⁴⁸ Mesmo assim, ele não deixou de reconhecê-las e de estudar seu papel na construção das coisas exteriores. Sobre esses sentidos internos, Locke diz: “Os objetos externos fornecem à mente as ideias de qualidades sensíveis, que são todas aquelas diferentes percepções que eles produzem em nós; e a mente fornece ao entendimento ideias sobre suas próprias operações.”⁴⁹ As diferentes associações que fazemos aos objetos que percebemos são operações desses sentidos internos. A partir deles, também somos capazes de “criar” coisas que não existem no mundo. Podemos imaginar uma criatura que dá cintura para cima tem aparência de homem e dá cintura para baixo a aparência de cavalo. Apesar de nunca termos visto tal criatura, podemos imaginá-la por fazer operações mentais com dados recebidos empiricamente. Portanto, para Locke, tudo que conhecemos vem das operações realizadas por esses dois conjuntos de sentidos, interno e externo.

Uma pausa deve ser dada aqui para explicar o conceito de ideia nesses filósofos do século XVII. Para filósofos racionalistas, na sua maioria, os seres humanos nascem com ideias inatas que são trazidas à tona pelas modificações que os sentidos causam em nós. Essas ideias inatas são as responsáveis de entendermos o mundo como ele é. Temos

⁴⁷ Locke, em seu livro *Essay*, alista percepção, retenção (dividida entre contemplação e memória), discernimento, comparação, composição, alargamento, abstração, razão, julgamento e conhecer como nossos sentidos internos. Para Locke, esses sentidos internos constroem novas ideias de maneira rápida em cima das informações obtidas pelos sentidos externos e criam assim novas ideias. Cf. Hatfield (1998, p. 984, 985). Cf. Locke (1999, Livro II. Capítulo IX. §9).

⁴⁸ Cassirer (1992 p.144).

⁴⁹ Locke. (1999, Livro II. Capítulo I. §5). No original: “External objects furnish the mind with the ideas of sensible qualities, which are all those different perceptions they produce in us; and the mind furnishes the understanding with ideas of its own operations.”

noção de extensão, distância, quente e frio porque nascemos com essas noções. Ao vermos o cavalo branco, reconhecemos aquela criatura pois temos a forma cavalo e a forma branca em nossa mente anteriormente, antes de observá-los pela primeira vez através dos nossos sentidos. Para Platão, essas ideias são ideias eternas que, de algum modo, nossa alma já conhecia. Ou seja, as ideias já estão pintadas em nossa mente anteriormente pelo Criador, a função dos nossos sentidos é apenas evocar essas formas perfeitas para construir as coisas que observamos pelos sentidos. Nesse sentido, o mundo que conhecemos é apenas o mundo que Deus quer que conheçamos, mas, como argumenta Descartes, Deus, em sua infinita bondade, nos revela o mundo da maneira como ele realmente é.

1.2. O empirismo

Para os empiristas, na sua maioria, nascemos sem ideias inatas. Tudo é aprendido através da experiência. Como a frase no começo do capítulo, nada está no intelecto sem antes ter passado pelos sentidos. As idealizações que fazemos dos objetos não são inatas, mas formamos elas através de perceber esses objetos. Ao ler a palavra cadeira e imaginar tal objeto, o leitor talvez pense em alguma cadeira específica, mas que dificilmente abrange todos os tipos existentes. Essa ideia de cadeira presente em nossa mente foi criada através dos diferentes contatos que tivemos com o objeto cadeira. Essa ideia abstrata que criamos contém características que abrangem todos os objetos que vemos e que nos remetem ao objeto cadeira.

Tanto para os racionalistas como para os empiristas, a tradução do mundo que é percebido pelos nossos sentidos são as ideias que associamos com as percepções características a esses sentidos. A diferença entre os dois está na origem dessas ideias. Para o primeiro grupo, as ideias estão presentes em nós no momento da concepção, enquanto para o segundo, as ideias são formadas conforme interagimos com o mundo.

O mundo exterior, o qual não trataremos da questão de sua existência aqui, não é o mesmo que percebemos através de nossos sentidos. Um exemplo interessante disso é apresentado por James Urmson.⁵⁰ Ele fala do exemplo de um bastão, parte imerso na água e parte fora da água. Nós percebemos o bastão torto, enquanto na verdade ele é reto. Então o mundo que percebemos é diferente do mundo como ele é. As ideias que temos dos

⁵⁰ Cf. Zunino (2006 p. 14-15).

objetos são necessariamente diferentes dos objetos verdadeiros, pois nós apenas interagimos com eles indiretamente através dos sentidos. A relação que temos com um objeto é o estímulo que ele causa nos nossos sentidos que por sua vez causam então um impulso nervoso. Nós não percebemos o objeto em si, a causa primeira do estímulo, mas uma consequência dessa causa, o impulso nervoso. Para Locke, apenas algumas características que percebemos nos objetos são deles de fato. Um exemplo é apresentado por ele:

A chama é denominada quente e luminosa; a neve, branca e fria; e o maná, branco e doce – a partir das ideias que eles produzem em nós. Essas qualidades são comumente pensadas como sendo as mesmas nesses corpos que as ideias que temos em nós, uma a perfeita semelhança da outra (...). E, no entanto, aquele que considerar que o mesmo fogo que, a uma certa distância, produz em nós a sensação de calor, produz, ao se aproximar mais, a sensação totalmente diferente de dor, deve refletir sobre qual razão ele tem para dizer que essa ideia de calor, que foi produzida nele pelo fogo, está realmente no fogo; e sua ideia de dor, que o mesmo fogo produziu nele da mesma maneira, não está no fogo. Por que consideramos que a neve possui características como a brancura e a frieza, mas não consideramos que a dor seja uma característica do fogo, quando ambos — neve e fogo — são capazes de provocar essas sensações em nós apenas por meio das características físicas de suas partes sólidas, como tamanho, forma, quantidade e movimento?⁵¹

Ou seja, apenas qualidades como massa, imagem, número e movimento são de fato características do objeto. Qualquer outra coisa que percebemos neles, como a sensação de calor ou a dor do calor intenso produzido pelo fogo, são traduções dessas quatro características pelos nossos sentidos. As propriedades das ideias que construímos dos objetos não características presentes no objeto diretamente, mas fruto da interação dos

⁵¹ Locke (1999, Livro II, Capítulo VIII, §16). Tradução adaptada. No original: "Flame is denominated hot and light; snow white and cold; and manna white and sweet from the ideas that they produce in us. Which qualities are commonly thought to be the same in those bodies that those ideas are in us, the one the perfect resemblance of the other (...). And yet he that will consider that the same fire that, at one distance produces in us the sensation of warmth, does, at a nearer approach, produce in us the far different sensation of pain, ought to bethink himself what reason he has to say—that this idea of warmth, which was produced in him by fire is actually in the fire; and his idea of pain, which the same fire produced in him the same way, not in the fire. Why are whiteness and coldness in snow, and pain not, when it produces the one and the other idea in us; and can do neither, but by bulk, figure, number and motion of its solid parts?".

nossos sentidos com essas ideias chamadas primárias por Locke no parágrafo seguinte da citação acima.

De certa forma, o computador também faz um processo de internalizar os objetos. Ele é capaz de absorver sons, imagens e alguns são sensíveis ao toque, mas a informação que fica armazenada dentro é codificada pelos seus receptores e traduzido para sua linguagem interna. Dessa forma, o computador é capaz de armazenar dentro de si uma representação desse objeto com um significado relevante para ele mesmo e é capaz de resgatar caso seja necessário. Nós temos a ideia de telefone, que é um conjunto de diversas ideias como cor, peso e formato, assim como um computador também pode ter essas ideias se tiver os sensores necessários para captá-las. A diferença reside nas operações internas que são feitas nessas ideias. Os sentidos internos fazem operações nessas ideias produzidas pelos sentidos externos e criam assim ideias que são associadas aos objetos percebidos. Sabemos discernir um telefone de verdade de um telefone de papelão. Mesmo que a falsificação seja muito bem-feita, um telefone feito inteiramente de papelão nunca será capaz de fazer chamadas para o outro lado do planeta. Podemos dizer isso porque temos a capacidade de discernir e julgar, que são sentidos internos, sobre as ideias que recebemos pelos sentidos externos. Inspirado no funcionamento de nosso cérebro, programas têm sido desenvolvidos para dar ao computador a capacidade de fazer operações internas semelhantes. Talvez o que nos diferencie de um computador seja a motivação que os leva a interagir com o mundo externo, mas isso é completamente fora do que queremos estudar aqui. É claro que guardamos as ideias sobre os objetos de maneira fundamentalmente diferente de um computador, assim como nossa relação com elas também é diferente.

Temos contato com mundo através de nossos sentidos desde que temos órgãos sensoriais aptos a captar a informação que chega até eles e a área específica do cérebro desenvolvido o suficiente para interpretar essa informação. E desse momento em diante, começamos a adquirir experiência sobre como esses sentidos nos afetam e o que eles dizem sobre as coisas que nos impressionam. Começamos então a criar ideias que representam tudo que percebemos através dos sentidos. Mais uma vez, nós não percebemos o objeto em si, mas apenas o que nossos sentidos nos indicam dele. E através dessa experiência, começamos a relacionar o que sentimos com um sentido ao que sentimos com outro. Podemos dizer que o chão está quente por ver que ele está exposto ao sol por muito tempo ou sabemos como a aspereza deve parecer aos nossos olhos. Se vemos uma superfície

refletora ou brilhante, assumimos que ela é lisa. Se observamos um objeto pontiagudo, temos uma ideia de como é tocar aquela ponta.

O mundo real não é o mesmo que o mundo que percebemos. Se nossa forma de conhecer o mundo se dá dessa maneira, então as ideias que temos das coisas são dependentes do conjunto de sentidos que temos disponíveis. Visto que o mundo que construímos é inteiramente dependente do conjunto de sentidos que temos, se formos privados de um sentido, o mundo que construiremos será naturalmente diferente. Também construiremos menos relações com os objetos através dos sentidos que temos. Como observado no parágrafo anterior, podemos prever se um objeto é liso ou áspero antes de tocá-lo, mas se não tivéssemos o sentido do tato, jamais conseguiríamos discernir essas coisas, apenas que elas são visualmente diferentes assim como azul é do verde. Se fosse esse o caso, talvez fosse diferente a relação visual de alguns com a agulha de uma injeção.

De fato, somos capazes de dizer anteriormente como um sentido nosso seria impressionado por um objeto antes de ele ser sujeito a esse sentido. Antes de comer nossa refeição favorita, conseguimos imaginar o sabor dela só de observá-la. Isso ocorre pois conhecemos a aparência visual desse prato e criamos a expectativa do sabor que ele terá por já termos o experimentado anteriormente.

É importante notar também que essas ideias podem ser ou não compartilhadas entre os sentidos. Como mencionamos anteriormente, o triângulo formado pela visão pode ser o mesmo ou não do formado pelo tato dependendo de qual linha de pensamento usamos para responder essa questão. Nesse debate, chamado pelos filósofos de heterogeneidade das ideias, a linha entre empiristas e racionalistas começa a ficar mais turva. Descartes e seus seguidores acreditavam que os sentidos serviam para informar as modificações que a alma passa num momento determinado. Os sentidos servem para investigar qual ideia representa o objeto que estamos interagindo sensorialmente. Quer pelo tato, quer pela vista, se tocarmos em um cubo, vamos reconhecer o cubo da mesma maneira e seríamos capazes de dizer que aquele objeto é o cubo independente do sentido que escolhemos para analisar, quer seja um ou vários. Isso seria assim pois independente dos sentidos, temos a ideia de cubo a priori em nossa mente, o trabalho dos sentidos é simplesmente invocar, trazer à tona, a ideia de cubo.

Já Locke acreditava que é possível existir algumas ideias que pertençam apenas a um sentido e outras a mais de um sentido. Nesse sentido, Locke escreve no primeiro parágrafo do capítulo III do livro II de sua obra *Essay*:⁵²

Divisão das ideias simples. – Para melhor concebermos as ideias que recebemos da sensação, pode ser útil considerá-las em referência às diferentes maneiras pelas quais elas se aproximam de nossas mentes e se tornam perceptíveis por nós. Primeiramente, existem algumas que chegam à nossa mente por apenas um sentido. Em segundo lugar, há outras que se transmitem à mente por mais de um sentido. Em terceiro lugar, outras são obtidas apenas por reflexão. Por fim, existem algumas que encontram seu caminho e são sugeridas à mente por todos os modos de sensação e reflexão.⁵³

A ideia que temos de cor pertence apenas ao sentido da visão assim como o de calor pertence apenas ao tato. Mas como dito, Locke não é adepto da heterogeneidade radical das ideias, para ele existem ideias que pertencem a mais de um sentido. No breve capítulo V do mesmo livro, Locke alista no único parágrafo desse capítulo algumas ideias que podem ser percebidas por mais de um sentido, a saber: ideias de extensão, figura, movimento, partes de corpos.⁵⁴ Apesar de ter uma posição diferente da de Descartes sobre como formamos conhecimento, ele concorda com o fato de ideias despertadas por sentidos diferentes serem iguais. Esse não é o caso de todos os empiristas como veremos agora.

⁵² An Essay Concerning Human Knowledge. Essa obra era configurada por livros, capítulos e parágrafos. Os diversos autores que citam Locke ou que editam suas obras mantêm essa arrumação feita por ele, então ao mencionarmos as citações ao *Essay*, faremos referenciando o Livro, capítulo e parágrafo, a fim de facilitar a consulta da referência.

⁵³ Locke (1999, *Essay*, Livro II, Capítulo III §1). No original: “Division of simple ideas. The better to conceive the ideas we receive from sensation, it may not be amiss for us to consider them, in reference to the different ways whereby they make their approaches to our minds and make themselves perceptible by us. First, then, there are some which come into our minds by one sense only. Secondly, there are others that convey themselves into the mind by more senses than one. Thirdly, Others that are had from reflection only. Fourthly, there are some that make themselves way, and are suggested to the mind by all the ways of sensation and reflection.”

⁵⁴ “Ideas received both by seeing and touching. The ideas we get by more than one sense are, of space or extension, figure, rest, and motion. For these make perceptible impressions, both on the eyes and touch; and we can receive and convey into our minds the ideas of the extension, figure, motion, and rest of bodies, both by seeing and feeling. But having occasion to speak more at large of these in another place, I here only enumerate them.” Locke (1999, Livro II, Capítulo V, §1).

Berkeley, filósofo do início do século XVIII e conhecido por suas teorias que defendem o imaterialismo,⁵⁵ era contemporâneo de Locke e foi influenciado pelas obras dele.⁵⁶ Berkeley acreditava que não existem ideias pertencentes a mais de um sentido, mas que somos capazes de perceber uma ideia de outro sentido por aprender a identificar dicas que ajudam nossos sentidos internos a identificá-las. Como aponta Batista, “Berkeley ressalta o que, segundo acredita, constituiria o maior erro filosófico da sua época, qual seja, o de supor que a percepção de um único e mesmo objeto pode se dar de igual maneira, porém por sentidos diferentes”.⁵⁷ Para Berkeley, não existe uma ideia compartilhada entre sentidos como Locke defendia. A noção de distância não é compartilhada pela visão e pelo tato, mas apenas pelo tato e a visão aprende com a experiência de comparar dicas visuais com as noções de distâncias percebidas pelo tato.

Vamos analisar logo em seguida com mais cuidado o que Berkeley escreveu, mas podemos dizer que nossos sentidos de fato são capazes de dizer sobre como outro seria impressionado. Essa tradução da informação absorvida por um sentido e traduzida em outro é o centro da discussão de um problema muito famoso que começaremos a analisar agora. Problema esse que é relevante para a formulação da teoria de Berkeley. Enquanto analisamos essa questão, vale se perguntar: será que essa tradução entre os sentidos é inata ou ela é possível apenas após experiências sucessivas em traduzir de um para o outro?

1.3. A matemática entre racionalismo e empirismo

O problema de refletir sobre o impacto das teses racionalistas e empiristas na matemática é extremamente complexo, pois nenhuma das duas teses parece ser capaz de apreender completamente a natureza dos objetos matemáticos. Por um lado, sob influência da tradição platônica, os filósofos e matemáticos compreendem que os objetos matemáticos não podem ser apreendidos por meio dos sentidos. Assim, quando desenhamos um triângulo em um papel, não estamos vendo o triângulo, de uma perspectiva platônica. O que aces-samos é uma representação – ou, na terminologia platônica, a sombra – do que de fato é

⁵⁵ Esse conceito ficará mais claro ao longo desse trabalho. Não trataremos disso em profundidade pois sairia do escopo de nosso trabalho falar do imaterialismo de Berkeley. Dito de maneira breve, Berkeley defende que o mundo que vemos está em nossa mente, ou seja, ele não existe como o percebemos fora dela. Cf. Downing (2004).

⁵⁶ Locke nasceu em 29 de agosto de 1632 e morreu em 28 de outubro de 1704 aos 72 anos enquanto Berkeley nasceu em 12 de março de 1685 e morreu em 14 de janeiro de 1753 aos 67 anos. Ambos são contemporâneos, mas pela diferença de idades, Berkeley leu os trabalhos de Locke em sua formação.

⁵⁷ Batista (2005, p. 38).

um triângulo. A ideia de triângulo somente por ser acessada, de uma perspectiva platônica e, por extensão, de qualquer perspectiva racionalista, por meio do intelecto ou da razão.

O peso da tradição platônica é tão grande que parece que qualquer atitude empirista diante da matemática seria demasiadamente ingênua, confundindo ente e representação. Conforme observam Russel Markus e Mark McEvoy:⁵⁸

Os empiristas geralmente têm o desafio de explicar nosso conhecimento da matemática. O empirista afirma que todo conhecimento surge da experiência sensorial. Objetos matemáticos não são sensíveis. É difícil ver como a experiência sensorial pode apoiar afirmações sobre objetos matemáticos. Além disso, muitas afirmações matemáticas são de natureza universal. Mas nossa experiência é limitada e finita. Mais uma vez, é difícil ver como a experiência sensorial pode apoiar afirmações matemáticas universais.

Conforme os autores apontam, uma postura empirista radical corre o risco de ter de abdicar a possibilidade de ter qualquer conhecimento acerca da matemática. Porém, como seria de se esperar, há modos de contornar essas limitações do empirismo – modos particularmente interessantes, pois viriam a se mostrar fundamentais nas discussões que faremos no próximo capítulo acerca do problema de Molyneux.

A principal estratégia, que será adotada por David Hume e John Locke, é a “estratégia da reivindicação”, que consiste em reivindicar para os sentidos parte do conhecimento de, nas tradições empiristas que lhes eram anteriores, eram tipicamente pensadas como sendo associadas ao inatismo.⁵⁹ Há dois conjuntos de ferramentas que permitem aos empiristas empreender esse projeto.

Primeiro, eles dispõem dos sentidos, que permitem articular uma argumentação que refere a eles uma certa possibilidade de apreender a realidade. O problema está, conforme ficará claro no próximo capítulo, no fato de que esses sentidos, por serem disjuntos, que os sentidos, por serem disjuntos, podem levar à construção distinta dos objetos, fazendo com que uma esfera acessada por meio da visão em nada se assemelhe a uma esfera acessada por meio do tato.

⁵⁸ Markus e McEvoy (2016, p. 157).

⁵⁹ Markus e McEvoy (2016, p. 158).

Segundo, eles dispõem das faculdades mentais, ou seja, das capacidades psicológicas de refletir acerca daquilo que é dado da empiria. Assim, faculdades como a memória e o raciocínio são mobilizadas no intuito de dar sentido aos dados obtidos a partir dos sentidos. São exatamente essas faculdades que nos permitiram fazer com que uma esfera acessada por meio da visão fosse entendida como sendo um ente assemelhado à mesma esfera acessada por meio do tato. Por exemplo, podemos compreender que não há pontas e, supondo que a ideia de ponta já tenha sido associada a ambos os sentidos, podemos ver que, ainda que inicialmente distintas, ambas as esferas – a apreendida pela visão e a apreendida pelo tato – tem a mesma propriedade de não ter pontas, podendo assim serem identificadas como sendo o mesmo objeto. Veremos que essas ideias ganharão destaque no modo como os empiristas responderão o problema de Molyneux no próximo capítulo.

Na segunda metade do século XVIII, o debate sobre empirismo e racionalismo na matemática será inteiramente reconfigurado pela proposta de Immanuel Kant de que a matemática consiste em *juízos sintéticos a priori*. Curiosamente, essa proposta kantiana, que foi extremamente influente na filosofia da matemática, não teve, ao que parece, nenhum impacto nos debates sobre o problema de Molyneux. Vale observar que, ainda que este problema tenha sido intensamente debatido no século XVIII, o próprio Kant jamais escreveu sobre ele. Tendo em vista este fato e também a nossa escolha de balizar cronologicamente a análise filosófica até meados do século XVIII, terminando com Diderot, não aprofundaremos nesta dissertação acerca da caracterização kantiana da matemática.

Capítulo 2

O problema de Molyneux

2.1. A pergunta de William Molyneux

No final do século XVII, William Molyneux, que escreveu *Dioptrica nova*,⁶⁰ estava interessado em estudar os fenômenos relacionados a óptica. Molyneux não estava sozinho nesse campo, havia muito interesse em estudar fenômenos relacionados a óptica. Ele formula um problema envolvendo uma pessoa cega de nascença influenciado pelos seus estudos em óptica e talvez pela sua esposa, Lucy, que ficou cega em seu primeiro ano de casamento. Molyneux envia para Locke uma carta onde formula o famoso problema que leva seu nome. Locke enuncia da seguinte forma:⁶¹

Suponha um homem nascido cego, agora adulto, ensinado pelo seu toque a distinguir entre um cubo e um globo de mesmo metal, de mesmo tamanho, de maneira que possa dizer, quando sentir um e o outro, qual é o cubo e qual é o globo. Suponha então que o cubo e o globo sejam postos em uma mesa e que se faça o homem cego ver: *quaere* [a pergunta é] se pela visão, antes de tocar neles, pode ele agora distinguir e dizer qual é o globo e qual é o cubo?⁶²

Locke registra logo em seguida a resposta do próprio Molyneux sobre o assunto e mostra também sua opinião concordando com a resposta. Ele diz:

Não. Pois, apesar de ele ter obtido experiência como um globo e como um cubo afetam seu tato, ele ainda não obteve a experiência de o que afeta o seu tato desta ou daquela maneira deve afetar

⁶⁰ Primeiro livro substancial sobre óptica em inglês. Cf. Degenar (1996, p. 18).

⁶¹ É interessante notar que essa formulação de Locke não foi a primeira que Molyneux fez. Na primeira vez, além da questão proposta de reconhecer as formas das figuras, ele também colocou a questão da distância. Cf. Degenar. (1996, p. 17).

⁶² Locke (1999, Livro II, Capítulo IX, §8).

sua visão desta ou daquela maneira; ou que o ângulo protuberante do cubo, que pressiona sua mão de maneira desigual, deva parecer aos seus olhos da mesma forma que aparece no cubo. – Eu concordo com esse pensante cavalheiro, o qual tenho orgulho de chamar meu amigo, em sua resposta a esse problema; e sou da opinião que o homem cego, na primeira vista, não seria capaz de dizer com certeza qual seria o globo e qual seria o cubo, enquanto ele apenas os viu; embora ele pudesse infalivelmente nomeá-los por seu toque, e certamente distingui-los pela diferença de suas figuras sentidas.⁶³

Veremos neste capítulo e no próximo diversas respostas dadas ao problema de Molyneux, por autores como John Locke, Gottfried Wilhelm Leibniz, George Berkeley, Denis Diderot, entre outros. Veremos que as suas atitudes são tipicamente alinhadas com uma das atitudes delineadas no capítulo 1, a saber, a atitude empirista ou a atitude racionalista.

2.2. As primeiras respostas

Para Locke, o cego não é capaz de dizer qual é qual pois não é capaz de fazer julgamentos no sentido recém adquirido. Para Locke, nossos sentidos internos é que são responsáveis por criar as relações não imediatas com os objetos dos sentidos externos. Reconhecemos um dado objeto e somos capazes de fazer inferências sobre as propriedades dele através de nossos sentidos externos, como a memória, que nos faz lembrar de experiências anteriores. Se esse objeto é feito de um material diferente, uma bola de madeira por exemplo, somos capazes de compor as propriedades que conhecemos anteriormente da madeira com as propriedades da bola. Jamais tentaríamos chutar essa bola de futebol ou uma feita de pedra, pois nosso conhecimento,⁶⁴ obtido pelos sentidos externos, desses objetos nos alertam que essa seria uma experiência dolorosa. Todos esses julgamentos são feitos pois tivemos as ferramentas sensoriais para obter essas informações. Mas, para Locke, se um cego, ao recuperar sua visão, observasse um objeto pontiagudo,

⁶³ Locke (1999, Livro II, Capítulo IX, §8).

⁶⁴ Para Locke, todo conhecimento é adquirido através dos sentidos, quer internos, quer externos. “Knowledge is the perception of the agreement or disagreement of two ideas”. Ou seja, para ter conhecimento, precisamos ter percepção pois é através da percepção que podemos dizer se as ideias concordam ou não. Logo, se não temos a percepção, não temos como dizer se as ideias concordam ou não. Note que para haver concordância, é necessário não só a percepção pelos sentidos externos, mas também pelos internos, que julgam, memorizam, compararam, abstraem, compõem e todas as outras capacidades pertinentes a ele. Cf. Locke (1999, Livro IV, Capítulo I, §1, 2). Cf. Priselac (2021).

ele não seria capaz de saber que aquele objeto impressionaria sua mão de determinada maneira, pois, por não ter a experiência sensorial visual com objetos pontiagudos, ele não é capaz de julgar esse objeto como ele faz com o tato. Ele só seria capaz de fazer tal julgamento após olhar para o objeto e tocá-lo e relacioná-lo com as informações já obtidas pelo tato.

Leibniz, um matemático famoso por desenvolver o cálculo de maneira independente de Newton, pode ser interpretado como racionalista em sua construção de uma teoria do conhecimento, que temos ideias inatas as quais usamos para pintar o mundo a nossa volta. Diferentemente de Locke, ele responde positivamente ao problema de Molyneux⁶⁵, de que o cego seria capaz de discernir entre o cubo e a esfera. “O fundamento de sua resposta é sua adesão ao inatismo”⁶⁶. No entanto, Leibniz coloca uma condição para que sua resposta seja positiva. O cego precisa saber de antemão que os objetos postos a mesa em sua frente são um cubo e uma esfera. Se essa hipótese for satisfeita, então o cego será capaz de discernir qual é o cubo e qual é a esfera por observar, “através da aplicação de princípios racionais”⁶⁷, usando o sentido da visão as propriedades que ele já conhece através do tato. Ao observar visualmente o cubo e a esfera, e sabendo que um deles é o cubo e outro a esfera, ele seria capaz de usar esses princípios racionais, como conhecimentos geométricos formais ou informais,⁶⁸ para dizer qual é qual. Se as ideias são inatas e nossos sentidos apenas a trazem à tona, é possível que ao usarmos a visão, mesmo sem experiência, acessemos também essas ideias. Ao usarmos princípios racionais no que está a nossa vista, seríamos capazes de evocar a ideia da esfera em um dos objetos e a ideia de cubo no outro objeto. É necessário saber que um deles é o cubo e o outro a esfera, pois, caso contrário, seria necessário vasculhar todas as ideias para, através desses princípios racionais, reconhecer naquele objeto o cubo e no outro a esfera, o que torna a tarefa impossível.

Apesar de a classificação em escolas de pensamento de filosóficos ser falha, pois vez por outra as ideias de filósofos de determinado grupo escapam dessas escolas, fica claro que a resposta a esse problema de Molyneux é diferente dependendo de qual forma

⁶⁵ Um trabalho muito interessante mostra que Locke achava que Molyneux concordava com sua resposta positiva é Tredanaro (2016).

⁶⁶ Ulysses (2009, p.113).

⁶⁷ Leibniz. (1996, IX. p. 51).

⁶⁸ Ou seja, quer seja conhecimento teórico das construções e propriedades geométricas, quer seja conhecimento empírico de manusear naturalmente objetos que, necessariamente, tem formato geométrico.

entende-se a teoria do conhecimento⁶⁹. Se nascemos com ideias inatas sobre os objetos, basta apenas operações racionais para saber dizer então qual objeto é qual. Como as ideias que temos desses objetos são inatas, não precisamos de tempo e experiência com eles para aprender a identificá-los. O sentido ativará, fará vir à tona, essa ideia que já se encontra dentro do indivíduo. Se, por outro lado, a construção das ideias é feita através da experiência adquirida pelo uso dos sentidos, o cego não teria experiência suficiente no sentido da visão para saber discernir qual objeto é qual. Ele precisaria primeiramente aprender a entender o que vê para depois poder usar essa informação para discernir qual é qual. Esse entendimento pode vir a ser aprendido de formas diferentes, quer pelo auxílio do tato como pelo uso contínuo da visão como diz Diderot⁷⁰ na afirmação a seguir, que é sua resposta ao problema de Molyneux: “que será preciso algum tempo a seu olho para que ele se experimente: mas que este se experimentará por si próprio, e sem ajuda do tato”⁷¹. Ou seja, para Diderot, é possível que a visão aprenda sozinha a reconhecer as distâncias e a extensão dos objetos sem ajuda do tato. Ela continua acontecendo através da experiência, mas não seria necessário a experiência anterior dos outros sentidos traduzidos na visão para então a visão também perceber a distância.

Quando Locke publicou esse problema proposto por Molyneux na sua segunda edição do Ensaio em 1708, ainda não havia relato de alguém cego de nascença que houvesse recuperado a visão. Essa questão ficaria em aberto, à mercê do debate filosófico e da troca de argumentos. Para Locke, o problema de Molyneux se tornou um exemplo importante em sua teoria do conhecimento, onde esse conhecimento se dá através dos sentidos. Felizmente esse problema obteve uma solução experimental no século XVIII, quando uma operação bem-sucedida realizada por Cheselden, um hábil cirurgião, baixou as cataratas de um jovem de 14 anos. Diderot, em sua carta aos cegos, conta sobre as dificuldades que esse jovem teve assim que recuperou a visão:

O jovem a quem este hábil cirurgião removeu as cataratas não distinguiu, por muito tempo, nem distâncias, nem situações, nem sequer figuras. Um objeto de uma polegada colocado diante de sua vista, e que lhe escondia uma casa, parecia-lhe tão grande quanto a casa. Todos os objetos ficavam sobre os seus olhos; e

⁶⁹ Um excelente compilado das diversas respostas de vários filósofos da época pode ser encontrado no livro Degenaar (2016).

⁷⁰ Denis Diderot (1713 – 1784) foi um importante filósofo francês iluminista do século XVIII

⁷¹ Diderot e Guinsburg (2009, p. 135).

ele lhe pareciam aplicados a este órgão, como os objetos do tato o são à pele. Não conseguia distinguir o que julgara redondo, por meio das mãos, do que julgara angular; nem discernir se o que sentira estar em cima ou embaixo estava com efeito em cima ou embaixo. (...) Precisou de grandes números de experiências reiteradas para certificar-se de que a pintura representava corpos sólidos; e quando (...) pôs-lhe a mão, e sentiu-se muito espantado por não encontrar senão um plano liso sem nenhuma saliência: perguntou então qual era o enganador, o sentido do tato, ou o sentido da vista.⁷²

Para os empiristas, como Locke, isso parecia uma confirmação de suas previsões. O cego de fato não sabia como interpretar as informações que ele recebe pelo sentido da visão. Mesmo as noções mais simples, que aparentemente recebemos junto com a vista, como o tamanho das coisas e as distâncias entre elas, não lhe eram óbvias como são para nós. Tudo indica que a visão não despertava nesse jovem ideias inatas correspondentes aos objetos que sua vista captava. Ele precisava de tempo para experimentar as sensações recebidas pela visão para entender o que enxergava como no caso do quadro, o qual lhe causou um espanto por não saber qual sentido lhe enganava. Existem poucas coisas que se aproximam da capacidade das imagens de representar coisas como paisagens, objetos ou pessoas para os cegos. Mesmo que usemos uma estátua ou maquete como representação de algo, elas são muito menos corriqueiras que as imagens que vemos desses objetos.⁷³ Quantas vezes vimos uma maquete ou boneco, acessível ao toque, do Cristo Redentor e quantas vezes vimos o Cristo Redentor, quer pessoalmente, quer através de imagens.

É interessante notar que esse jovem demorou muito mais tempo para discernir tamanhos e distâncias do que os limites dos objetos em si. Existem sensações que são pertinentes a apenas um dos sentidos externos.⁷⁴ A capacidade de ver cores é objeto apenas da visão, enquanto diferenciar sons diferentes pertence ao domínio da audição. Saber

⁷²Diderot e Guinsburg (2009, p. 130). Cf. Cheselden (1728).

⁷³ Um vídeo muito interessante no YouTube apresenta a seguinte situação: um cego tenta identificar que objetos recebidos através do correio pelo toque. No primeiro vídeo, ele identifica objetos como um pequeno violino. No segundo vídeo, aparecem algumas representações de objetos em miniatura. O interessante nesse vídeo é a dificuldade envolvida em reconhecer objetos que facilmente conseguimos reconhecer através da visão. Grande parte da dificuldade vem de ou ele nunca ter tido contato com esses objetos, ou por eles não estarem no formato usual, quer seja por tamanhos diferentes, quer seja por estar planificado. Link para acesso: https://www.youtube.com/watch?v=7cP_Fr2j8T0 (acessado 20 de janeiro de 2024).

⁷⁴ Cf. Locke (1999, Livro II, Capítulo III, §1).

diferenciar o doce do amargo é característica do paladar e um cheio do outro é capacidade do olfato. O tato discerne sobre a textura do que é tocado. Dessa sensações específicas, somos capazes de inferir informações extras por usar nossos sentidos internos. A noção de tamanho e distância parece ser algo que recebemos diretamente do sentido da visão, mas, como percebemos no jovem que teve sua vista recuperada, ele conseguia discernir os limites dos objetos, mas não seu tamanho e distância⁷⁵. Como dissemos anteriormente, Diderot acreditava que, dado tempo ao sentido da visão, ela aprenderia sozinha e por experiência a reconhecer a distância e o tamanho das coisas.

Berkeley investigou profundamente essa questão da visão e de nossos sentidos. Em seu livro intitulado *An essay towards a new theory of vision*, Berkeley escreve sobre como fazemos uma construção do mundo através dos nossos sentidos e qual é a parte de cada um deles nessa ação. Para Berkeley, não percebemos a distância diretamente, mas “sim uma ideia “sugerida” à mente pela associação entre ideias percebidas pela visão e pelo tato, o que se torna possível graças a experiência, que estabelece uma conexão entre as ideias (objetos) heterogêneas”⁷⁶. A noção de distância, diferentemente da cor, não é um objeto direto do sentido da visão. Não adquirimos uma noção de magnitude e distância através da visão.

Berkeley combate uma ideia presente nos filósofos da época, e talvez presente hoje no senso comum das pessoas, que o sentido da visão é o determinante em dizer o quanto perto ou quanto longe um objeto está de nós. Um argumento comum é de que o nosso olho é capaz de perceber, de alguma forma, as linhas e ângulos geométricos. Talvez para conciliar suas teorias filosóficas com a matemática que estava desenvolvendo, Descartes diz que nós percebemos, através da visão, seis objetos em especial: “a luz, a cor, a posição, a distância, o tamanho e a forma”.⁷⁷ Berkeley diz que percebemos apenas a cor e a luz. Dessa forma, a posição, a distância e o tamanho não são obtidos diretamente através da visão, mas sim através de operações internas feitas pelos nossos sentidos secundários. Como vimos anteriormente com os exemplos de Urmson, essas três informações podem nos enganar dependendo das circunstâncias. Essas operações são aprimoradas conforme exercitamos a prática de determinar grandezas por julgamentos internos. Esses

⁷⁵ Reconhecer os limites físicos de um objeto não significar saber tamanhos e distâncias. Um pássaro no céu pode parecer maior que um avião, isso por causa da distância.

⁷⁶ Zunino (2006, p. 56).

⁷⁷ Descartes (1637).

Julgamentos são feitos rapidamente pelo costume que temos em fazê-los. Berkeley usa um exemplo para mostrar esse ponto: toda vez que ouvimos uma palavra, imediatamente associamos o que ouvimos a um significado. Essa operação acontece instantaneamente em nosso cérebro, de forma que não conseguimos evitar que ela seja feita. Ao ler a palavra batata, automaticamente pensamos em batata, quer seja batata frita, batata cozida ou batata rosti e dependendo da hora em que ler isso, talvez tenha ficado com fome ou até sentido o cheiro da batata. Essas associações são feitas instantaneamente e acontecem independentemente da nossa vontade. O mesmo acontece com a noção de distância, posição, tamanho e forma no sentido da visão. Desde pequenos aprendemos e exercitamos as operações internas que determinam essas características relativas dos objetos, características essas que dependem de nós, pois fomos nós que as construímos e não algo pertencente ao objeto.

Isto é, eu penso, de acordo com todos, que distância, por si mesma e imediatamente, não pode ser vista. Pôr a distância ser uma linha direcionada com o fim no olho, ela projeta apenas um ponto no fundo do olho, cujo ponto permanece invariavelmente o mesmo, seja a distância mais longa ou mais curta.⁷⁸

Esse raciocínio apresentado por Berkeley já estava presente na *Dioptrica Nova* de Molyneux⁷⁹. Independentemente de quanto longe estejamos de um determinado objeto, os raios luminosos criam os mesmos pontos no fundo de nossa retina. Os raios são os mesmos, independentemente da distância que estejamos do objeto que os reflete. As inferências que fazemos sobre a distância não vem de um estudo matemático de nossa mente sobre as inclinações desses raios, mas sim da experiência que adquirimos em comparar magnitudes. Para Berkeley, aprendemos a noção de distância pelo tato, mas ela é sugerida pela vista, assim como os pensamentos são sugeridos pelo ouvido:

Por vezes dizemos que um objeto está a uma determinada distância, por vezes dizemos que ele se aproxima ou se afasta. Deveremos sempre dar preferência a este último tipo de afirmação, que pertence propriamente ao tato. Esse tipo de afirmação não é

⁷⁸Berkeley (2002, §2).

⁷⁹Degenaar (1996, p. 22).

percebida, mas sim meramente sugerida pelo olho, da mesma maneira que os pensamentos são sugeridos pelo ouvido.⁸⁰

Dito isso, conseguimos então imaginar a resposta de Berkeley para o problema de Molyneux. Ele responde negativamente ao problema de Molyneux e usa essa resposta para elaborar suas ideias. De fato, esse problema serve como apoio para a construção da teoria do conhecimento de Berkeley. Como vimos anteriormente, Berkeley acreditava que não existem ideias que pertençam a dois sentidos ao mesmo tempo. A noção de distância não pode pertencer ao tato e a vista ao mesmo tempo, mas nossa vista aprende a relacionar informações visuais com a distância percebida pelo tato. Essa noção não é dada a priori, mas é aprendida pela experiência em relacionar as informações obtidas pelo tato e as informações obtidas pela vista.

Berkeley coloca a distância como uma ideia produzida pela mediação dos sentidos internos sobre dados obtidos pelos sentidos externos.⁸¹ Sabemos discernir se um objeto se aproxima ou se distancia também através do som, dessa forma “ouvimos” a distância. Assim como ao ver uma barra de ferro quente, ao notar que sua cor não é mais a mesma, mas que agora é um vermelho brilhante, sabemos que a barra deve estar realmente quente, e podemos dizer que estamos “vendo” que a barra está quente.⁸² Da mesma forma, também não somos capazes de relacionar naturalmente a distância dos objetos com as informações obtidas pela visão. Apenas a experiência em ver essas distâncias que nos ajudam a dizer se um objeto está perto ou não e que dado objeto tridimensional que vemos está com uma parte na frente e outra atrás. Para Berkeley, esse cego seria incapaz de discernir

⁸⁰ Berkeley (2002, §50). No original: “Whenever we say an Object I sat a Distance, whenever we say it draws near, or goes farther off, we must always mean it of the latter sort, which properly belong to Touch, and are not so truly perceived, as suggested by the Eye in like manner as Thoughts by the Ear.”

⁸¹ Esse argumento é importante para o imaterialismo radical que Berkeley irá formular em sua obra *A treatise concerning the principles of human knowledge* (1710). Ao afirmar a heterogeneidade entre o sentido do tato e da visão, mostrando que o sentido da visão, que ocorre em nossa mente, e o do tato, que ocorre fora de sua mente, Berkeley tenta mostrar que o mundo que percebemos está dentro da nossa mente. Não que ele não exista, mas nós não o percebemos da maneira que ele é, mas sim da maneira que nossos sentidos são capazes de perceber. Se o mundo que percebemos é objeto direto de nossas ideias, e se elas podem representar de maneira distorcida como no exemplo do bastão torto na agua, então o mundo material que pensamos que existe na verdade não é. De acordo com Zunino (2006, p. 66): “Sua doutrina é que isso acontece porque a experiência nos ensina que os objetos visíveis (que existem apenas na mente) estão intimamente correlacionados com os objetos tangíveis (fora da mente) dos quais eles são signos que nos levam a supor (equivocadamente) que as coisas que vemos estão ordenadas em profundidade”. Ou seja, nossa noção de realidade se dá através da ordem espacial que percebemos através da visão, mas se essa ordem na verdade não existe na visão, então o mundo percebido não existe de fato. Não trataremos aqui a tese do imaterialismo radical de Berkeley, mas é impossível falar de sua teoria da visão sem ao menos mencioná-lo. Cf. Zunino (2006, p. 66-68) e Downing (2004).

⁸² Cf. Berkeley (1999, p. 144).

o cubo da esfera pois, primeiramente, todos pareceriam figuras planas pois ele não é capaz de perceber distâncias e consequentemente profundidade.

As características que não são percebidas diretamente, mas que são relativas aos nossos sentidos e que são passíveis de mediação pelos sentidos não são características particulares dos objetos e dependem da disposição dos nossos sentidos. Todo conhecimento sensível que temos dos objetos moldam nossas ideias e, através da experiência, dão forma ao mundo como o percebemos. Claramente então, o mundo que pintamos ao nosso redor é refém do conjunto sensorial que temos disponível.⁸³ Caso tivéssemos um sentido a mais ou um sentido a menos, nossa forma de encarar esse mundo construído por esse conjunto seria diferente, pois a pintura que faríamos do mesmo seria diferente. O conjunto de ferramentas, ou o conjunto de sentidos, que temos é o que nos proporciona as experiências que por sua vez nos permite pintar o mundo de uma forma específica. Dê um hábil pintor um pincel e 2 cores básicas, como vermelho e verde, ele lhe fará uma bela pintura, mas essa pintura de forma nenhuma conseguira representar o que o mesmo pintor consegue fazer com as 3 cores básicas que percebemos; vermelho, verde e azul. Quão diferente seria o mundo para nós se fossemos capazes de enxergar em 4 cores básicas diferentes.⁸⁴

Voltaire também dedica algumas páginas de sua obra intitulada *Elementos da Filosofia de Newton* para comentar o problema de Molyneux e expor sua opinião em como construímos conhecimento. Ele compartilha do argumento da linha para dizer que não percebemos distâncias quando diz logo no começo do capítulo 7 da segunda parte de sua obra:

É claro que ela não pode ser percebida imediatamente por si mesma, pois a distância é apenas uma linha entre o objeto e nós. A distância termina num ponto, nós só sentimos esse ponto; e, se

⁸³ Com conjunto sensorial, queremos dizer todos os sentidos disponíveis ao indivíduo. Ele pode ser dividido em dois subconjuntos. O sensorial externo formado pela visão, tato, audição, paladar e olfato e o sensorial interno é formado pelos sentidos internos como o julgamento, imaginação, memória etc.

⁸⁴ Não digo isso no sentido de diminuir uma pessoa cega, mas sim de notar que ela é incapaz de entender a beleza percebida através da visão. Alguém que enxerga menos cores vê um mundo completamente diferente. Cf. Diderot e Guinsburg (2009, p. 97). No vídeo a seguir, uma pessoa daltônica usa óculos especiais que lhe permitem enxergar cores que antes não conseguia: <https://www.youtube.com/watch?v=hqHlIRZnF38> (acessado 20 de janeiro de 2024). Uma fala interessante na parte final do vídeo é que a pessoa diz que os objetos parecem agora parecerem ser reais, parecem estar em três dimensões. De fato, o mundo para alguém com menos cores é muito diferente de alguém que enxerga as três cores básicas. Quão mais diferente deve ser para alguém que não enxerga. Novamente, a diferença não quer dizer que um conjunto sensorial é superior a outro, mas é de fato diferente.

o objeto estiver a mil léguas ou a um pé, esse ponto é sempre o mesmo.⁸⁵

No caso de um som percebido pela audição ou de um sabor percebido pelo paladar, o órgão sensorial é estimulado a perceber diretamente essas coisas através da informação carregada pelo que causou esse estímulo. Podemos encontrar na onda sonora a informação que é traduzida em um determinado ruído, assim como o paladar traduz compostos em sabor. Não podemos encontrar no feixe de luz a informação sobre a distância que ele percorreu pois sentimos apenas o ponto que ele causa no fundo de nossa retina, e esse ponto é independente da distância percorrida pela luz.

Logo em seguida, Voltaire constrói um exemplo interessante para esclarecer como a experiência é necessária para aprendermos a interpretar as informações recebidas pelos sentidos. Ele diz que um surdo que recuperasse a audição seria incapaz de dizer, ao ouvir o barulho de um canhão ou o som de um concerto, ele seria incapaz de dizer qual é qual e seria também incapaz de dizer se essas coisas acontecem perto dele ou não pois não tem experiência sobre a intensidade que esses sons causam. De fato, ao ouvirmos um helicóptero, não julgamos que ele está mais perto que a televisão ou que a pessoa ao nosso lado. Não conseguimos mais ouvir por causa da intensidade do barulho do helicóptero, mas sabemos que ele faz tipicamente um barulho forte. Dessa experiência anterior julgamos então que o helicóptero não está mais perto que alguém que está conversando conosco. Da mesma forma, percebemos distâncias através da visão pela experiência que temos em ver as coisas.

Voltaire assume a dificuldade de provar isso e diz que “isso não poderia ser esclarecido e colocado fora de qualquer contestação a não ser por algum cego de nascença a quem se tivesse devolvido a visão”. Ele então conta sobre o caso do jovem que teve a visão recuperada por Cheselden, que já mencionamos e ao qual voltaremos na seção 4.2., e diz:

Foi, portanto, uma solução irrevogável para o fato de que nossa maneira de ver as coisas não é de modo algum o resultado imediato dos ângulos formados em nossos olhos, pois esses ângulos matemáticos estavam nos olhos desse homem como nos nossos, e não

⁸⁵ Voltaire. (2015, p. 121).

lhe serviam para nada sem o auxílio da experiência dos outros sentidos.⁸⁶

Fica claro então a posição de Voltaire sobre como construímos o conhecimento. Para ele, assim como Locke e Berkeley, é necessário que adquiramos experiência para saber interpretar as informações recebidas pelo sentido e que essa interpretação é essencial para formarmos o mundo da maneira que fazemos. Fazemos julgamentos de maneira imperceptível pois os fazemos desde muito novos, a ponto que conseguimos perceber as distâncias instantaneamente usando a visão. Terminamos essa consideração do pensamento de Voltaire citando a parte final de seu capítulo 7:

Cada um de nossos sentidos executa a função para a qual a natureza o destinou. Eles se auxiliam mutuamente para enviar a nossa alma, pelas mãos da experiência, a medida dos conhecimentos que nosso ser comporta. Pedimos a nossos sentidos o que eles não foram feitos para nos dar. Gostaríamos que nossos olhos nos ensinassem o que é a solide, a grandeza, a distância etc.; mas é preciso que o tato, nesse caso, se ajuste à visão, e que a experiência os auxilie. Se o padre Malebranche tivesse considerado a natureza por esse lado, talvez tivesse atribuído menos erros aos nossos sentidos, que são as únicas fontes de todas as nossas ideias.⁸⁷

⁸⁶Voltaire. (2015, p.125).

⁸⁷Voltaire. (2015, p. 128).

Capítulo 3

A “Carta sobre os cegos” de Diderot

3.1. O movimento iluminista

A filosofia do século XVIII foi marcada, sobretudo na França, por um projeto denominado Iluminismo. Participaram desse projeto diversos autores, que se denominavam *philosophes*, em um sentido preciso do termo. Eles constituíam uma comunidade de homens e mulheres letRADos que compartilhavam, frequentemente por meio de cartas, suas expectativas, anseios e preocupações acerca das ciências, da filosofia, das artes, dos ofícios e das técnicas.⁸⁸

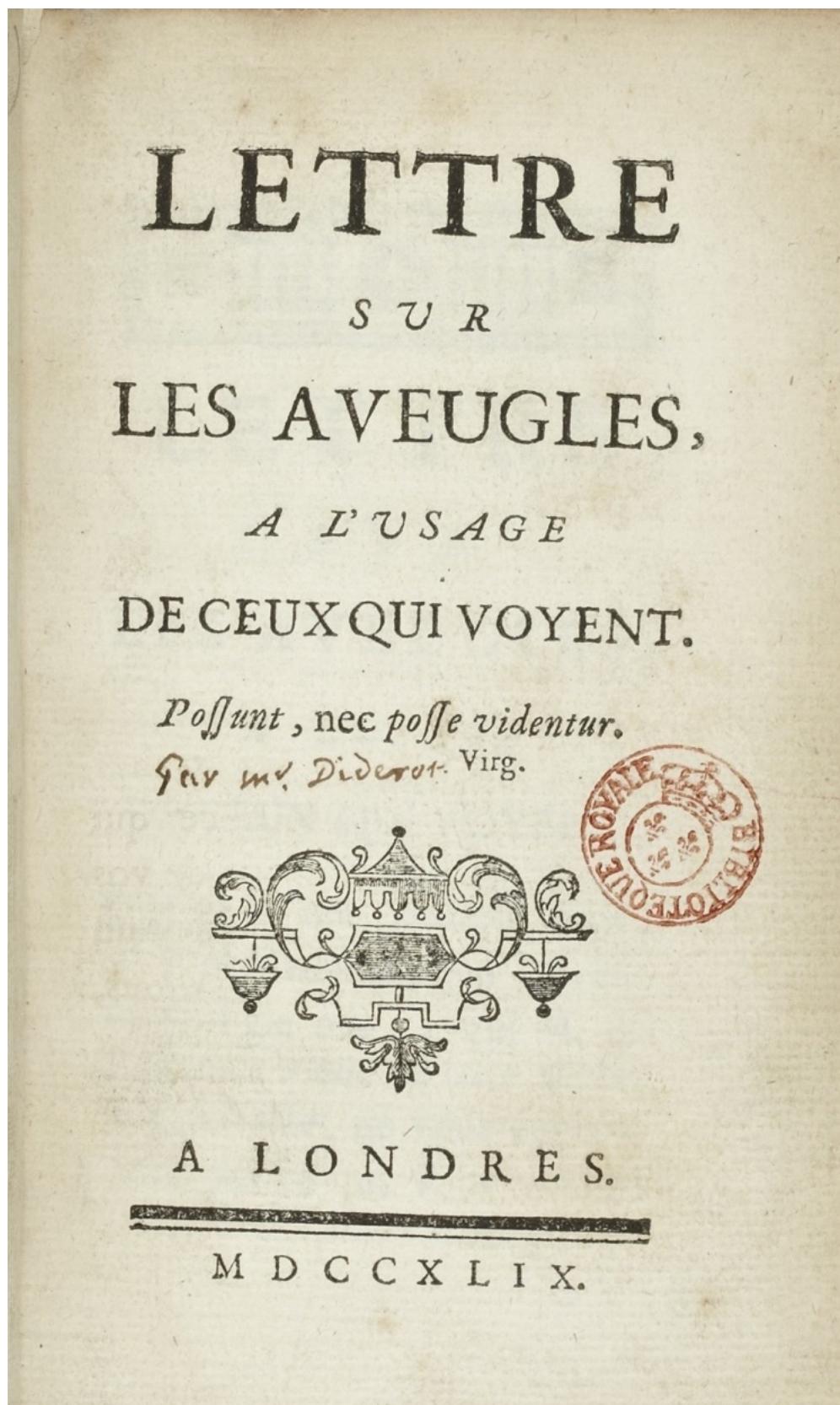
Esses autores compartilhavam não somente expectativas, anseios e preocupações, mas também uma visão de mundo marcada pela laicização do conhecimento, pela adesão à filosofia natural newtoniana e pela valorização dos diversos campos do saber. Compunham esse grupo de filósofos pensadores como Voltaire (nome fictício usado por François-Marie Arouet), Denis Diderot, Jean le Rond D'Alembert, Charles Montesquieu, Jean-Jacques Rousseau, entre outros. Entre as obras importantes desses autores para nós estão os livros *Elementos da Filosofia de Newton*, publicado por Voltaire em 1738, e *Carta sobre os cegos para uso dos que veem*, publicada por Diderot em 1749.

Foram Diderot e D'Alembert que empreenderam o maior projeto editorial do século XVIII, a *Encyclopédie, ou dictionnaire raisonné des sciences, des arts et des métiers*, ou seja, *A encyclopédia, ou dicionário razoado das ciências, das artes e dos ofícios*, publicada em 28 volumes em meados do século. A expectativa dos dois autores era compilar em um só trabalho todo o conhecimento da época, desde as ciências e as matemáticas até os ofícios existentes na sociedade.

Houve também vertentes do movimento Iluminista em outros locais, como na Escócia, com autores como Adam Smith, David Hume e Thomas Reid, e na Alemanha, com autores como Gotthold Ephraim Lessing e Immanuel Kant, entre outros.

⁸⁸ Na nossa caracterização do Iluminismo, nos baseamos na análise de Bristow (2017).

Figura 1 – Folha de rosto do livro *Carta sobre os cegos para uso dos que veem.*



Fonte –Bibliothèque nationale de France (BnF).

3.2. Análise da carta

Sobre as diferenças que alistamos na seção anterior, Diderot⁸⁹, em sua carta sobre os cegos já mencionado anteriormente, fala sobre o caso de duas pessoas cegas e suas experiências de vida com um sentido a menos. Uma breve análise do relato de Diderot nos ajudara a entender algumas diferenças existentes nessas pessoas com um conjunto sensorial diferente. O primeiro é quem ele se refere como cego de Puiseaux. Ele era capaz de discernir muitas coisas que só discernimos usando o sentido da visão. Ele “é tão sensível às menores vicissitudes que ocorrem na atmosfera que pode distinguir uma rua de um beco sem saída”⁹⁰ era capaz de arremessar objetos de maneira a acertar seu alvo precisamente⁹¹ e conseguia diferenciar as pessoas por sua voz, pois cada uma tinha “uma infinidade de matizes delicados que nos escapam, porque não temos, para observá-las, o mesmo interesse que o cego”.⁹² Ele também era capaz de muitas outras coisas que não conseguimos só com tato, como colocar a linha em uma agulha, mas Diderot não para por aí em sua investigação sobre como os cegos entendem certas coisas. Ele perguntou a esse mesmo cego de nascença como ele entendia o espelho, o qual disse que o espelho é “Uma certa máquina, respondeu-me, que põe as coisas em relevo longe de si mesmas, se se encontram situadas convenientemente em relação a ela. É como a minha mão, que não preciso pousar ao lado de um objeto a fim de senti-la.”⁹³ É interessante notar que o cego usou relatos de outras pessoas sobre suas experiências com espelhos para então, junto da maneira que ele conhecida o mundo, através do tato, dizer o que ele achava que era o espelho. Ele diz que o espelho põe as coisas em relevo longe de si mesmas. Quando diz isso, ele sabe que o espelho é liso, então quando fala relevo, ele quer dizer que o espelho faz aparecer longe das coisas as causas que fazem a vista percebê-las. O cego de Puiseaux consegue apenas entender o sentido da visão usando um sentido que é conhecido a ele, o

⁸⁹ Diderot foi um influente filósofo do século XVIII e que viveu décadas antes da revolução francesa. Quando escreveu essa obra, ele também estava trabalhando na Encyclopédie junto de outras pessoas, incluindo Jean le Rond d'Alembert. Apesar de focarmos nas questões sensoriais, a *Carta Sobre os Cegos*, de Diderot, carrega muitas questões éticas e teológicas. Diderot foi preso por escrever essa obra que continha, segundo a acusação, “chocante sensualismo epistemológico”. A Carta foi publicada “para exibir suas qualificações de editor da futura Encyclopédie” e “consistia num passo adiante na gênese do pensamento filosófico de Diderot” além de propiciar a Diderot um primeiro contato com Voltaire que acabamos de considerar. Cf. Guinsburg (2009, p. 95) e Wilson (2018).

⁹⁰ Guinsburg (2009, p. 102).

⁹¹ Guinsburg (2009, p. 101).

⁹² Guinsburg (2009, p. 100).

⁹³ Guinsburg (2009, p. 98).

do tato. Isso fica mais evidente ainda quando é perguntado ao cego o que são os olhos, ao que ele responde:

São, respondeu-lhe o cego, um órgão sobre o qual o ar produz o efeito de minha bengala sobre minha mão (...) quando coloco minha mão entre vossos olhos e um objeto, minha mão vos está presente, porém o objeto vos está ausente. A mesma coisa me acontece, quando procuro uma coisa com minha bengala e encontro uma outra.⁹⁴

Mais uma vez, foi usado, pelo cego, uma analogia com o sentido que é conhecido por ele, usou algo conhecido dele para tentar explicar o que ele não conhece por não ter experimentado. Fica claro pelo relato de Diderot que esse cego de Puiseaux consegue ter uma vida normal e significativa assim como os videntes, mas que a interação dele com objetos é objetivamente diferente de um vidente, pois as ideias que ele constrói são diferentes. Isso fica claro na fala dessa pessoa, que diz:

“Se a curiosidade não me dominasse”, disse ele, “eu preferiria muito mais ter longos braços: parece-me que minhas mãos me instruiriam melhor do que se passa na lua do que vossos olhos ou telescópios; além disso, os olhos cessam de ver mais do que as mãos de tocar. Valeria, pois, muito mais que fosse aperfeiçoado em mim o órgão que posso do que me conceder o que me falta”.⁹⁵

Um vidente não descreveria o espelho e o olho da maneira como foi descrita acima, pois para isso usaria os conhecimentos obtidos através de suas experiências visuais, diferentemente do cego que usou suas experiências tátteis. Os caminhos percorridos por essa pessoa mencionada por Diderot com certeza foram diferentes dos que nós percorremos para chegar nos mesmos fins. Somos capazes de arremessar objetos e acertar o alvo e somos capazes de dizer se uma rua é ou não sem saída, mas aprendemos a fazer isso por experiências diferentes, experiências que fazem sentido dentro do nosso conjunto sensorial. Essas diferenças sensoriais não tornam o indivíduo incapaz de ter uma vida normal

⁹⁴ Guinsburg (2009, p. 99).

⁹⁵ Guinsburg (2009, p. 100).

Figura 2 – Ilustração de um cego presente na Dióptrica de René Descartes e reproduzida na carta sobre os cegos de Diderot.



Fonte – *Lettres sur les aveugles*, exemplar da Bibliothèque nationale de France (BnF).

e não o tornam incapaz de ter uma vida acadêmica como veremos no próximo exemplo fornecido por Diderot.

Outro exemplo que Diderot deu foi de um matemático chamado Nicholas Saunderson (1682–1739), que foi professor em Cambridge e membro da Royal Society⁹⁶. Saunderson era cego, mas isso não o impediu de ser um excelente matemático. Diderot atribui a ele a prova geométrica de que o volume de uma pirâmide é um terço da área da base vezes a altura. A prova de Saunderson passa por mostrar que podemos colocar 6 pirâmides dentro de um prisma cuja face lateral seja de mesmo formato que a base da pirâmide. As bases seriam postas nas faces dos prismas e o vértice da pirâmide estaria no centro do cubo, em todas as seis pirâmides. Saunderson também inventou uma máquina que o permitia fazer cálculos algébricos e representar figuras geométricas.

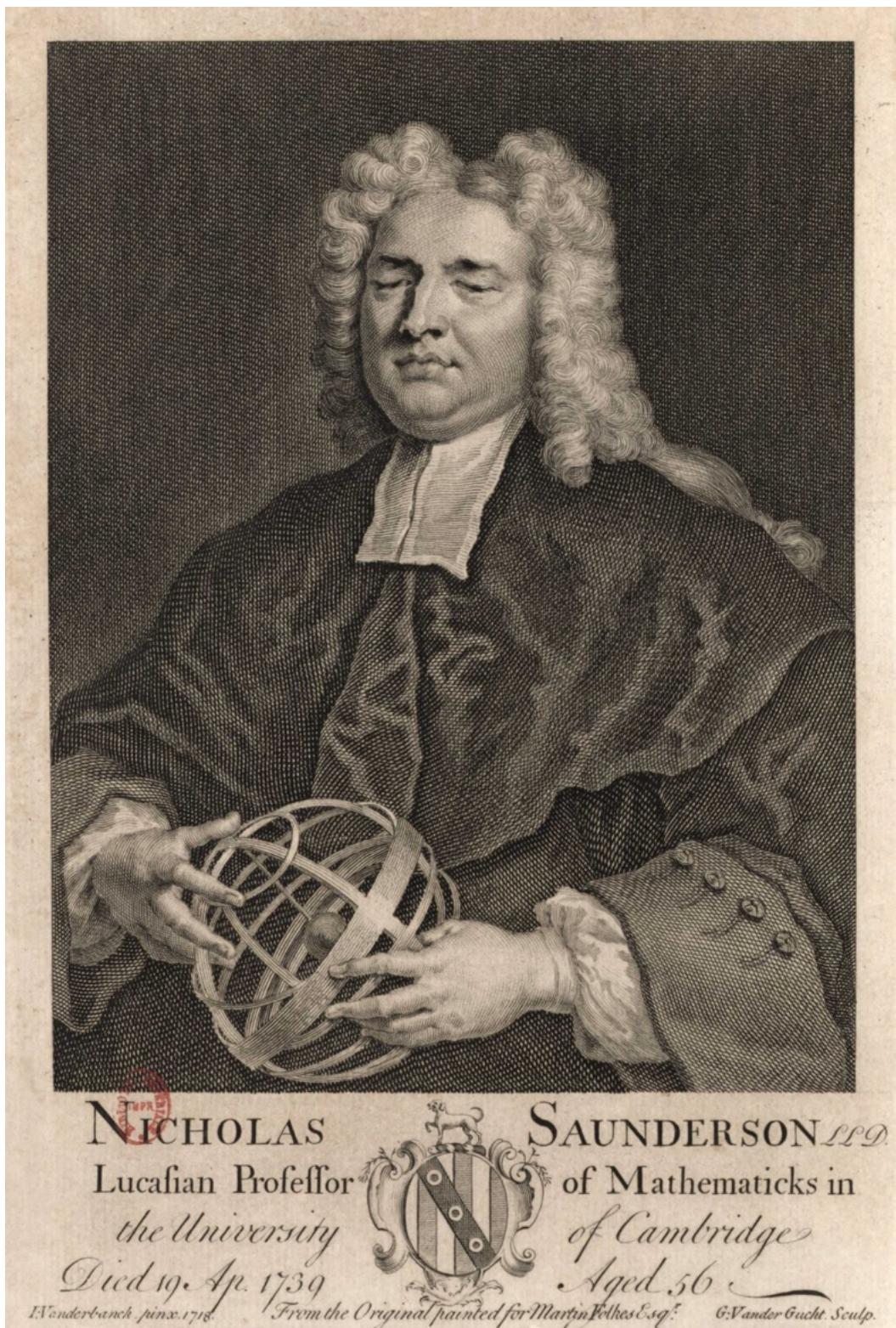
Imaginai um quadrado (...) dividido em quatro partes iguais por meio das linhas perpendiculares aos lados, de modo que ele vos ofereça os nove pontos 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9. Suponde esse quadrado perfurado por nove orifícios capazes de receber alfinetes de duas espécies, todos do mesmo comprimento e da mesma grossura, mas uns com a cabeça um pouco mais grossa do que os outros.⁹⁷

O algarismo zero é representado por colocar apenas o alfinete de cabeça grande no centro e mais nenhum nos buracos adjacentes. o algarismo 1 é representado por colocar o alfinete pequeno no centro do quadrado e mais nenhum nos buracos adjacentes, e os outros algarismos são representados como a figura, um alfinete de cabeça grande no centro e um outro alfinete no buraco correspondente. Saunderson conseguia usar essa máquina com muita velocidade e, se tivesse uma tabela tão grande quanto quisesse, poderia realizar operações algébricas com números de qualquer ordem.

⁹⁶ Cf. (Nicholas... [S. D.]).

⁹⁷ Guinsburg (2009, p. 109).

Figura 3 – Retrato de Nicholas Saunderson.



Fonte –Bibliothèque nationale de France (BnF).

“Eis como a mesma tabela lhe servia para demonstrar as propriedades das figuras retilíneas. Suponhamos que precisasse demonstrar que os paralelogramos, com a mesma base a mesma altura, são iguais em superfície: ele dispunha seus alfinetes como vedes na figura 4. Atribuía nomes aos vértices e concluía a demonstração com os dedos”.⁹⁸

Segundo Diderot, talvez ele usasse apenas os alfinetes grandes para marcar os pontos, então ele podia usar alfinetes pequenos nos buracos adjacentes para poder dar nome a esses pontos. Saunderson também escreveu o livro Elementos de Álgebra “onde só se percebe que ele era cego pela singularidade de certas demonstrações, as quais um homem que vê talvez não encontrasse”⁹⁹. Saunderson também deu aula na universidade de Cambridge, onde ministrava aulas de óptica, falava sobre a natureza da luz e de outros fenômenos ópticos. Diderot argumenta que ele podia fazer isso pois:

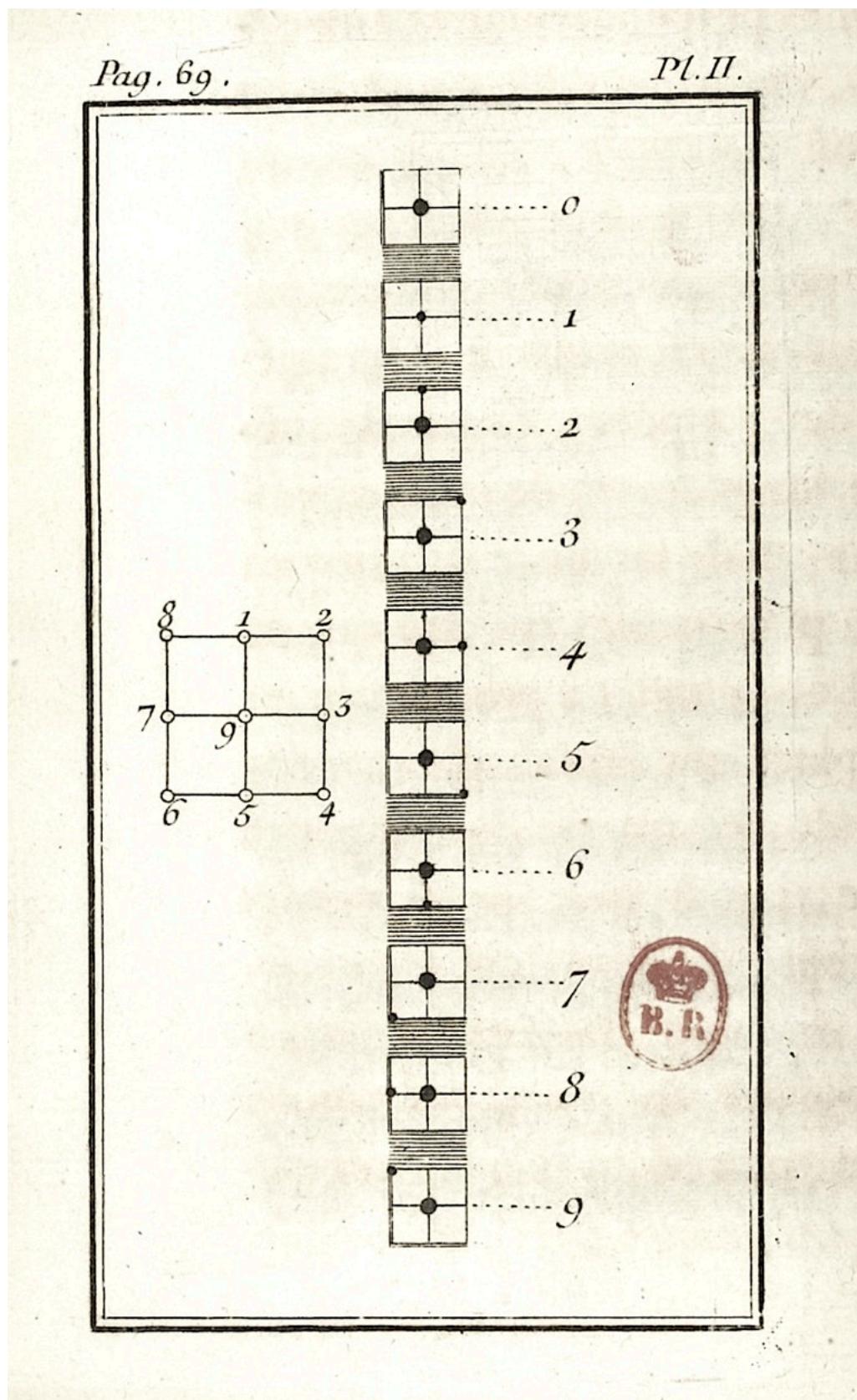
“Há três coisas a distinguir em toda questão mista de física e geometria: o fenômeno a explicar, as suposições do geômetra e o cálculo que resulta das suposições. Ora, é evidente que, qualquer que seja a penetração de um cego, os fenômenos da luz e das cores lhe são desconhecidos. Ele entenderá as suposições, porque são todas relativas a causas palpáveis, mas de modo nenhum a razão que o geômetra tinha de preferi-las a outras (...) o cego toma, portanto, as suposições pelo que lhe são dadas (...) a passagem da física à geometria está transposta, e a questão torna-se puramente matemática.¹⁰⁰

⁹⁸Guinsburg (2009, p. 112).

⁹⁹Guinsburg (2009, p. 114).

¹⁰⁰Guinsburg (2009, p. 115).

Figura 4 – Estratégia de contagem utilizada por Nicholas Saunderson.



Fonte – *Lettres sur les aveugles*, exemplar da *Bibliothèque nationale de France* (BnF).

Nota-se o caráter mais abstrato do conhecimento teórico para um cego. Em geral, os videntes utilizam recursos que encontram na natureza para criar alguma intuição sobre conceitos geométricos, mas para alguém cego isso se torna mais difícil. Nesse caso da óptica, o cego teria que supor como verdade algo que os videntes têm como intuição. Talvez também seja mais difícil imaginar figuras geométricas, pois quando imaginamos, imaginamos a figura, mas o cego, quando imagina, o que vem a sua mente com certeza não são figuras visuais. Ao falar sobre imaginação, Diderot diz:

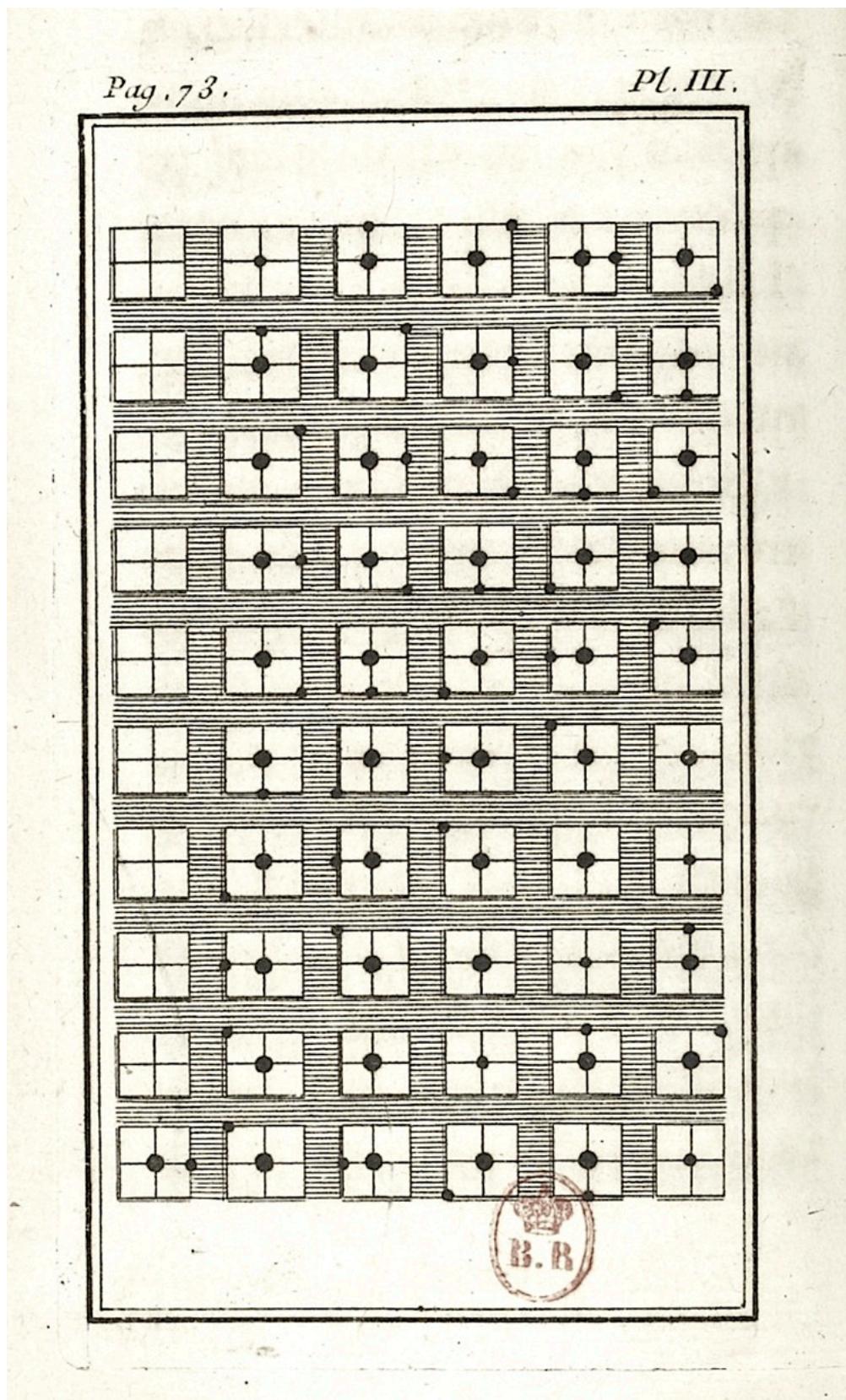
“Nós combinamos pontos coloridos; ele, de seu lado, combina apenas pontos palpáveis ou, para falar mais exatamente, apenas sensações do tato de que tem memória. Não se passa nada em sua cabeça que seja análogo ao que se passa na nossa; ele não imagina; pois, para imaginar, é preciso colorir um fundo e destacar este fundo dos pontos, atribuindo-lhes uma cor diferente do fundo.”¹⁰¹

“O cego de nascença, não podendo colorir, nem, por conseguinte figurar como nós o entendemos, só tem memória de sensações apreendidas pelo tato, que ele refere a diferentes pontos, lugares ou distâncias, e com os quais compõe figuras. É tão constante o fato de que ninguém configura na imaginação sem colorir que, se nos dessem a tocar nas trevas pequenos glóbulos cuja matéria e cor não conhecêssemos, supô-los-íamos de pronto brancos ou pretos, ou de qualquer outra cor; ou que, se não lhe atribuíssemos nenhuma cor, teríamos, assim como o cego de nascença, apenas a memória de pequenas sensações excitadas na extremitade dos dedos, e tais como pequenos corpos redondos podem ocasioná-los.”¹⁰²

¹⁰¹ Guinsburg (2009, p. 105).

¹⁰² Guinsburg (2009, p. 106).

Figura 5 – Ilustração, em uma situação específica, da estratégia de contagem utilizada por Nicholas Saunderson.



Fonte – *Lettres sur les aveugles*, exemplar da Bibliothèque nationale de France (BnF).

Nossa maneira de ensinar geometria, em geral, se dá em volta das figuras geométricas, mas quando nos propomos a ensinar a um cego, estamos agora interagindo com alguém com um conjunto sensorial diferente do nosso, onde a maneira que foi construído as ideias pertinentes a geometria se dá de uma maneira diferente. Se nós, ao imaginar uma figura, pensamos nela diante de nossos olhos, até as vezes o fechando em um esforço de vê-las, um cego talvez as imagine na ponta dos dedos¹⁰³. Ele relembra as sensações de tato que tem com figuras geométricas anteriores. Consegue você, leitor, lembrar das sensações de tato costumeiras do seu telefone. A sensação de tocar no botão de travar a tela, a sensação da câmera. E a sensação de tocar o telefone que teve antes desse? Talvez se lembre dele visualmente, mas da sensação de tato dele não, pois não temos o costume de guardá-la. “Mais geralmente, ele [o cego] tem, por experiências reiteradas do tato, a memória de sensações experimentadas em diferentes pontos: depende de ele combinar essas sensações ou pontos, e formar com elas figuras”¹⁰⁴. Enquanto nós temos o costume de imaginar a figura por completo, um cego precisa juntar todas as memórias que ele tem sobre as diferentes sensações de tocar as diferentes partes da figura ou do objeto em questão.

“Nos combinamos pontos coloridos: ele, de seu lado, combina apenas pontos palpáveis ou, para falar mais exatamente, apenas sensações do tato de que tem memória. Não se passa nada em sua cabeça que seja análogo ao que se passa na nossa: ele não imagina; pois, para imaginar, é preciso colorir um fundo e destacar este fundo dos pontos atribuindo-lhes uma cor diferente da do fundo”¹⁰⁵

Podemos dizer então que a “imagem” mental que o cego tem é a composição de diversas partes de um objeto. Quando ele imagina uma cadeira, ele junta diversas informações táteis das diferentes partes da cadeira, mas nunca percebe a cadeira toda de uma vez como um vidente faz.¹⁰⁶

¹⁰³ Guinsburg (2009, p. 107).

¹⁰⁴ Guinsburg (2009, p. 105).

¹⁰⁵ Guinsburg (2009, p. 105).

¹⁰⁶ Adell (2010, p. 99, 100).

Diderot fala sobre esses dois exemplos e então enuncia o problema de Molyneux apresentado anteriormente. Ele diz que esse problema abrange mais duas outras questões, que são: O cego começou a ver assim que a operação for feita? Caso ele veja, conseguirá discernir qual é qual? Cabe notar que essa segunda questão pode ser entendida como se o cego será capaz de transferir o conhecimento do campo tátil para o campo visual. Se ele conseguirá compreender o que agora vê com os olhos e interpretar as informações visuais a ponto de traduzi-las para a tátil. Nesse momento podemos relembrar do caso da cirurgia feita pelo Sr. Cheselden. O jovem conseguia enxergar tudo que era posto a sua frente, mas ele não estava acostumado com esse sentido. Ele dizia que “os objetos ficavam sobre os seus olhos; e eles lhe pareciam aplicados a este órgão, como os objetos do tato são a pele”¹⁰⁷, ou seja, todos os objetos pareciam estar tão próximos aos seus olhos quanto os objetos do tato são da mão no ato de tatear.

As dificuldades em perceber distâncias não são nessa altura algo estranho para nós que já consideramos brevemente o pensamento de Locke e Berkeley, mas o fato é que esse jovem não conseguia traduzir o que via para o tato. Ele não conseguia discernir as formas que via e muito menos conseguia ter noção de grandeza

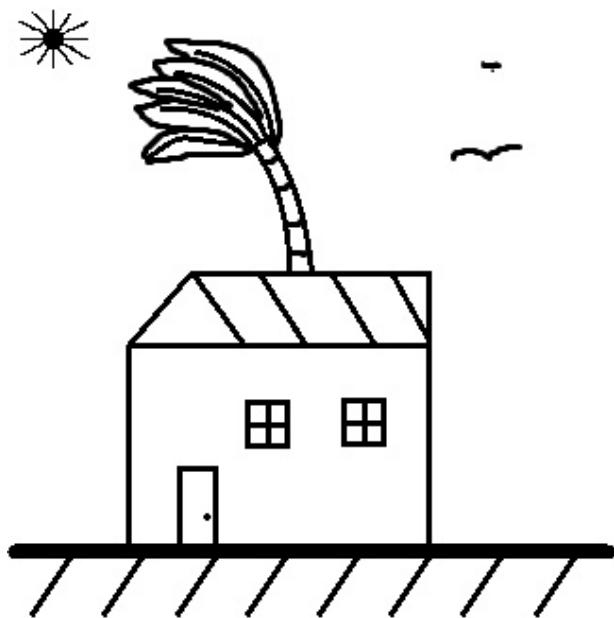
É preciso, portanto, convir que devemos perceber uma infinidade de coisas que nem a criança nem o cego de nascença percebem neles, embora elas se pintem igualmente no fundo de seus olhos; que não basta que os objetos nos atinjam, que é mister ainda que estejamos atentos a suas impressões.¹⁰⁸

Essas características sutis, que não são aparentes e óbvias para quem começa a ver, são determinantes para construirmos a visão espacial que temos através da visão. O desenho a direita, é um desenho bem simples que fiz em uma ferramenta bem simples. Olhamos essa figura e conseguimos ver as distâncias implícitas nele. A árvore atrás da casa, o pássaro que está voando mais ao fundo (ou mais à frente?), o avião que, apesar de ser menor na imagem, com certeza é maior que os objetos aqui desenhados e o sol, que é o maior dos objetos representados nessa figura, mas aparece bem pequeno nela. Até mesmo o chão, onde coloquei esses riscos para representar uma calçada plana na frente

¹⁰⁷Guinsburg (2009, p. 130). O relato original de Cheselden diz: “When he first saw, he was so far from making any Judgment about Distances, that he thought all Objects whatever touch'd his Eyes, (as he express'd it) as what he felt, did his Skin.”. Cf. Cheselden (1728).

¹⁰⁸Guinsburg (2009, p. 131).

Figura 6 – Representação plana de um espaço tridimensional.



Fonte – O autor.

da casa, carrega informações extras. Mesmo que não tenha reparado todas essas coisas na figura, agora que leu tudo isso, ao olhar novamente para ela, você é capaz de reconhecer as distâncias e os planos. Apesar de ser um desenho em duas dimensões conseguimos extrair informações tridimensionais dele.¹⁰⁹ Essas ideias não são características do desenho em si, mas um trabalho de nossa mente nessas informações. Como vimos anteriormente, Diderot acreditava que o cego, ao voltar a ver, não conseguiria se servir dessas informações sutis que para um vidente é natural, mas que com o tempo consegue aprender, apenas através da visão, a se servir dessas informações. Conseguimos perceber isso quando Diderot diz sua opinião sobre o problema de Molyneux.

Penso que a primeira vez que os olhos do cego de nascença se abrirem à luz, ele não perceberá nada absolutamente; que será preciso algum tempo a seu olho para que se experimente: mas que se experimentará por si próprio, e sem a

¹⁰⁹ Cf. Berkeley (2002, §III).

ajuda do tato; e que conseguirá não só distinguir as cores, mas discernir ao menos os limites grosseiros dos objetos”¹¹⁰

Primeiramente seria preciso que o cego se acostumasse a usar seu novo sentido. O agora vidente precisaria de algum tempo com a visão, mas que ele aprenderia a usá-la sem o sentido do tato se assim quisesse. Diderot adapta o problema para retirar a complexidade e a tridimensionalidade da questão, faz isso pois “tudo indica que nós julgamos as distâncias apenas pela experiência; e, consequentemente, que aquele que se serve dos olhos pela primeira vez vê apenas superfícies”¹¹¹. Ele passa a usar figuras planas para enunciá-lo. Faz isso porque, como vimos anteriormente, é preciso de tempo para aprender a ver as distâncias usando a vista. O cego seria incapaz de reconhecer que determinados pontos do cubo e da esfera estão mais próximos do que nós, que é essencialmente o que nos faz ver um cubo e não uma projeção inclinada dele. Para ele, um cego de nascença seria capaz de discernir entre um quadrado e um círculo se tivesse experiência suficiente em geometria para tal e estivesse apto para usar sua vista, ou seja, que fosse capaz de reconhecer os limites grosseiros dos objetos. Caso uma pessoa fosse ignorante com relação a geometria, ela dificilmente seria capaz de dizer qual é qual. Mas se fosse alguém hábil, como Saunderson, ele saberia dizer qual objeto é o quadrado e qual é a vista¹¹².

A figura da próxima página não é um cubo, mas sim um hexágono com três linhas que saem de três dos seus vértices e se encontram dentro dele. Temos o costume de representar um cubo, ou paralelepípedo, por essa figura, mas ela é apenas uma representação. O fato de a face superior dela aparecer dessa forma nos faz ter a impressão de tridimensionalidade, mas na verdade essa figura é plana. É mais fácil aceitar aqui nessa folha de papel, ou texto em *pdf*, que essa figura é plana, mas um cubo que é posto em nossa frente se pinta de maneira semelhante no fundo de nossa retina e nossos receptores nervosos o captam assim, como uma figura plana. Nossa experiência com distâncias que é responsável por nos dizer que aquela figura de fato é um cubo e não uma superfície plana.

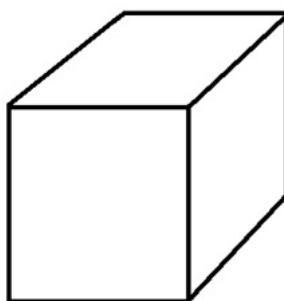
Então, para Diderot, é possível sim que o cego de nascença saiba discernir sobre qual figura é um quadrado e qual é um círculo, que discernir sobre figuras tridimensionais exi-

¹¹⁰ Guinsburg (2009, p. 135).

¹¹¹ Guinsburg (2009, p. 137). Cf. Adell. (2010, p.70, 71).

¹¹² Guinsburg (2009, p. 136-137).

Figura 7 – Esta figura não é um cubo.



Fonte – O autor.

ge um aprendizado sobre distâncias o qual o cego, nos primeiros momentos após recuperar a vista, não tem. Mas que com o tempo, o cego seria capaz de experimentar sua vista e, sem o auxílio dos outros sentidos, aprender todas as coisas que os videntes sabem usando apenas sua vista.

Esta conclusão mostra que Diderot concorda que o cego operado não é capaz de enxergar logo após a cirurgia, no entanto, após um período de adaptação, ser-lhe-á possível distinguir grosseiramente os objetos e assim entender o que é a esfera e o que é o cubo sem recorrer ao tato, uma vez que Diderot sustenta que os sentidos não tem nenhuma dependência essencial uns sobre os outros, ou ainda, não existe nenhuma dependência da visão com relação ao tato, e tampouco do tato com relação à visão para perceber a distância.¹¹³

Fica claro então que nosso conhecimento sobre o mundo exterior é completamente dependente de como o percebemos. Conjuntos sensoriais diferentes pintam o mundo de maneira diferente, mas nada impede que, acrescentado um sentido a esse conjunto, esse novo sentido seja capaz de, por si só, experimentar e saber reconhecer coisas que antes era reconhecido através de outros sentidos, se for da capacidade desse novo sentido de

¹¹³ Adell (2010, p. 68).

perceber. Mas se um conjunto sensorial for diferente do outro, os quadros pintados por esses sentidos com certeza serão diferentes. As ideias aprendidas através dos sentidos por nosso cérebro não serão as mesmas e não terão necessariamente as mesmas conexões e operações dos sentidos internos entre si.

Capítulo 4

Visões sobre a natureza da matemática

Neste capítulo, vamos propor que o problema de Molyneux seja utilizado para investigar as visões dos alunos acerca da matemática – ou, como se diz no jargão da área de ensino, as visões dos alunos acerca da *natureza da matemática*. Consideremos, por exemplo, as seguintes perguntas: Seria a matemática um conhecimento estritamente racional? Seria a matemática um conhecimento empírico? Qual o estatuto de verdade dos enunciados matemáticos? As respostas dadas pelos alunos a essas questões conformam uma certa imagem acerca do que eles entendem como sendo a matemática. Há inúmeras pesquisas empíricas investigando as visões dos alunos acerca da *natureza das ciências*,¹¹⁴ mas ainda há poucos trabalhos investigando as visões dos alunos acerca da *natureza da matemática*.¹¹⁵ Nesses trabalhos de investigação acerca das visões dos alunos, o ponto central é elaborar estratégias que sejam capazes de sondar essas visões – desde questionários até atividades investigativas. Nossa proposta é que o problema de Molyneux seja utilizado para investigar as visões dos alunos acerca da *natureza da matemática*. Esta proposta é, nesta dissertação, estritamente teórica e não foi explorada empiricamente.¹¹⁶

4.1. As abordagens contextuais ao ensino de ciências e de matemática

Na década de 1990, consolidou-se na comunidade de ensino de ciências um amplo debate, que perdura até hoje, acerca das ditas abordagens contextuais ao ensino de ciências, as quais defendem que o ensino *das ciências* deve vir acompanhado de um ensino *sobre as ciências*.¹¹⁷ Por “ensino sobre as ciências”, entende-se um ensino que discuta o que é ciência, caracterizando-a de algum modo e discutindo essa caracterização como parte constitutiva do próprio ensino de ciências.

¹¹⁴ Por vezes abreviadas como VNOS, a partir da expressão em inglês, *views on the nature of science*.

¹¹⁵ Um exemplo é o artigo de Kjeldsen e Lützen (2015).

¹¹⁶ Decerto seria interessante avaliar em que medida, em uma análise empírica em sala de aula, essa nossa proposta traria resultados interessantes. Porém, isso não será investigado nesta dissertação, ficando como perspectiva futura para a nossa pesquisa.

¹¹⁷ Matthews (1994).

A expectativa é que ao se discutir sobre ciências, os alunos desenvolveriam uma compreensão mais adequada da ciência enquanto fenômeno social, conforme indicado pela parte III dos Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio:¹¹⁸

Elementos da história e da filosofia da Biologia tornam possível aos alunos a compreensão de que há uma ampla rede de relações entre a produção científica e o contexto social, econômico e político. É possível verificar que a formulação, o sucesso ou o fracasso das diferentes teorias científicas estão associados a seu momento histórico.

Há na literatura de ensino de ciências, entretanto, uma ampla controvérsia sobre como tal caracterização deveria ser feita. Diversos autores defendem que o elemento central dessa caracterização seja o que se convencionou denominar “natureza da ciência”.¹¹⁹ Assim, o fato de que o conhecimento é baseado na empiria, de que o conhecimento científico é provisório e a ideia de que todas as culturas contribuem para a ciência seriam alguns dos muitos elementos constitutivos da natureza da ciência.¹²⁰ Outros autores criticam a ideia de haveria uma natureza da ciência e problematizam a expressão.¹²¹

Mesmo entre os autores que empregam a ideia de natureza da ciência, há debates sobre como a natureza da ciência deveria ser identificada. Alguns autores propõem uma perspectiva normativa, de modo que cabe ao ensino de ciência identificar boas e más práticas científicas.¹²² Neste modo de abordar o problema, uma grande ênfase é dada ao método científico ou, em uma abordagem um pouco mais pluralista, aos diversos métodos científicos.¹²³ Outros autores propõem uma perspectiva descritiva, que busca identificar os diversos modos como a ciência é feita e, a partir dessa identificação, sistematizar, de modo esquemáticos, as diversas práticas correntes nas comunidades científicas. Este modo de acordar o problema encontrou muito impulso nos últimos anos com a difusão da epistemologia da virtude e a retomada do historicismo como vertente historiográfica.¹²⁴

¹¹⁸ *Apud* El-Hani (2006, p. 4).

¹¹⁹ McComas (2006).

¹²⁰ El-Hani (2006).

¹²¹ Moura, Camel e Guerra (2020).

¹²² Isso remonta a uma atitude filosófica normativa, presente por exemplo na atitude de Karl Popper.

¹²³ Sobre o pluralismo científico, ver Videira (2000) e Lacey (2012).

¹²⁴ Um exemplo de obra história que se baseia em uma perspectiva epistemológica inspirada na epistemologia da virtude é o livro de Daston e Galison (2011).

4.2. Abordagens implícitas e explícitas à natureza da ciência

Há também um amplo debate sobre como a natureza da ciência deve ser apresentada aos alunos. A abordagem implícita à natureza da ciência propõe que a exposição dos alunos a situações problemáticas ou atividades nas quais elementos da natureza da ciência estejam tacitamente presentes, levaria a uma compreensão, por parte dos alunos, desses elementos.¹²⁵ Assim, a preparação de uma aula de abordagem implícita à natureza da ciência consiste em escolher bem os exemplos e as atividades a serem trabalhadas.

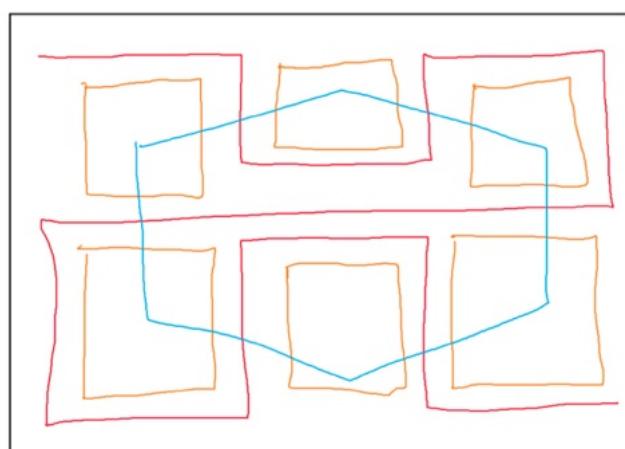
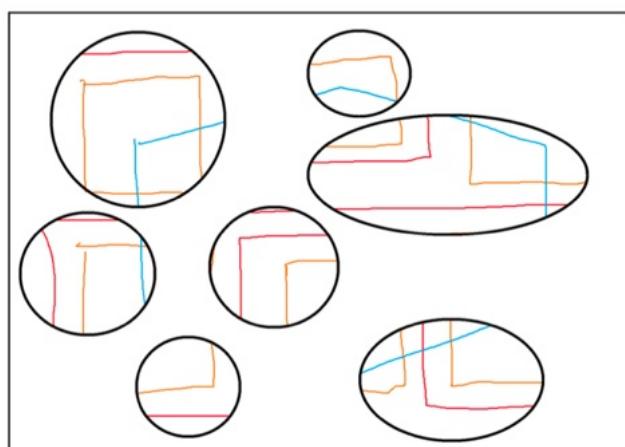
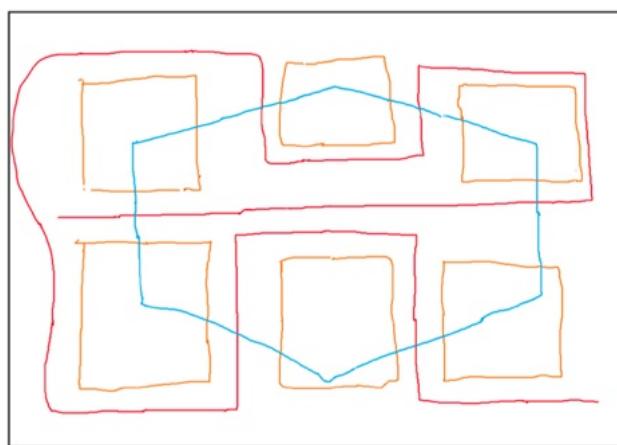
Vejamos uma brincadeira interessante que adota uma abordagem implícita à natureza da ciência.¹²⁶ Ela pode ser proposta nas aulas de ciências dos anos finais do ensino fundamental é a seguinte. A professora ou o professor divide a turma em duplas. A cada um dos integrantes da dupla é dado uma folha em branco tamanho A4, canetas coloridas e um envelope com alguns orifícios. É pedido que ele faça na folha, sem que o colega da dupla veja, um desenho relativamente simples – por exemplo, algumas figuras geométricas, como ilustrado no primeiro retângulo da Figura 8, e depois insira o desenho no envelope, conforme ilustrado no segundo retângulo da Figura 8, deixando somente partes do desenho visíveis. Em seguida, a professora ou o professor coloca uma folha de papel manteiga (ou vegetal) A4 sobre o envelope e propõe ao outro integrante da dupla que, com base nas informações dadas pela parte visível do desenho, tente reconstruir na folha de papel manteiga o desenho feito pelo colega. O aluno obterá um desenho que coincide em parte com o original, como ilustrado no terceiro retângulo da Figura 8. Ao final, os desenhos originais são retirados dos envelopes e comparados com os desenhos feitos no papel manteiga.

A partir dessa brincadeira, a professora ou o professor explica que ciência funciona de forma similar: o desenho original é como se fosse a realidade; os cientistas têm, por meio dos dados experimentais, acesso a certos dados da realidade; a partir desses dados, eles constroem uma teoria, que é uma tentativa de dar sentido aos dados experimentais; essa teoria busca de algum modo descrever a realidade, mas não consegue, pois

¹²⁵ Abd-el-Khalick e Lederman (2000).

¹²⁶ Este exemplo não é nosso, estando bastante difundido nos debates da comunidade de abordagens contextuais ao ensino de ciências. Não fomos capazes, porém, de localizar quem foi o primeiro a propô-lo.

Figura 8 – Ilustração da atividade sobre natureza da ciência.



Fonte – O autor.

há uma série de escolhas que precisam ser feitas que são invenções dos cientistas e que podem estar erradas; quanto menor a quantidade de dados empíricos (ou seja, de orifícios no envelope), maior a chance de a teoria estar errada.

Essa brincadeira mostra que a atividade científica precisa levar em conta os dados experimentais e observar padrões (por exemplo, no desenho acima todas as linhas visíveis são aproximadamente retas, o que leva a crer que o desenho original só deve ter linhas retas – se o aluno tivesse percebido isso, não teria inventado aquela linha curva do desenho). Ou seja, as teorias científicas não são livres invenções dos cientistas. Por outro lado, a brincadeira também mostra que a atividade científica demanda criatividade por parte dos cientistas, uma vez que é preciso inventar um modo de conectar os diversos dados empíricos. Nesse ato de invenção, por vezes os cientistas são levados por preconcepções (advindas, por exemplo, de outras teorias, do seu meio cultural, dos seus valores etc.) acerca do que eles esperam que as teorias científicas que eles estão elaborando venham a ser (ou seja, o desenho no papel manteiga).

Ainda que interessante, essa brincadeira apresenta algumas visões bastante equivocadas acerca da natureza da ciência. Por exemplo, ela dá a entender que a realidade é acessada diretamente pelos experimentos. A partir de partes dessa realidade, o cientista inventaria o todo. Mas residiria nas teorias científicas um substrato factual advindo daquela realidade que foi acessada pelos experimentos.

Essa brincadeira é um exemplo de uma atividade que aborda a natureza da ciência implicitamente. Há também as abordagens explícitas à natureza da ciência. São aquelas que buscam dizer, sem deixar implícitas, o que caracteriza a natureza da ciência. Uma das ferramentas mais eficientes das abordagens explícitas é o uso de estudos casos específicos, em geral advindos da história da ciência. Um clássico nessa linha é o livro de Michael Matthews e colaboradores sobre a história dos pêndulos na física.¹²⁷

Esses trabalhos sobre abordagens contextuais ao ensino de ciências e sobre a natureza da ciência são propostos quase que unicamente por pesquisadores de ensino de biologia e de ensino de física. Esses debates pouco chegaram à comunidade de ensino de matemática.¹²⁸ Decerto a natureza da matemática é muito distinta da natureza da biologia

¹²⁷ Matthews, Gauld e Stinner (2005).

¹²⁸ Uma das poucas pesquisadoras da área de ensino de matemática que dialogam com esse referencial é Tinne Hoff Kjeldsen. Veja, por exemplo, Kjeldsen e Lützen (2015).

ou da física. Por exemplo, dois elementos que mencionamos como sendo constitutivos da natureza da ciência decerto não são constitutivos da natureza da matemática: o conhecimento matemático não é baseado na empiria e tampouco é provisório. Há uma perenidade na matemática que não ocorre nas ciências naturais.

4.3. Um experimento de pensamento ou um experimento real?

Se queremos utilizar o problema de Molyneux para explorar as visões dos alunos acerca da natureza da matemática, convém nos perguntarmos antes o que exatamente é o problema de Molyneux, do ponto de vista filosófico. Na sua elaboração inicial, ele era um experimento de pensamento, ou seja, uma situação hipotética que busca investigar os pressupostos subjacentes à nossa reflexão sobre o tema, permitindo explicitá-los e investigação a sua consistência. Na física, os experimentos de pensamento costumam ser empregados na investigação da consistência das teorias (como ocorreu com Albert Einstein e Niels Bohr na mecânica quântica) ou na elaboração de novas teorias científicas (como no caso da teoria da relatividade de Einstein).¹²⁹ Na filosofia, por sua vez, a definição de experimentos de pensamento é bastante controversa, dado o aspecto multifacetado da sua utilização:

Houve várias tentativas de definir “experimento de pensamento” nos moldes da análise conceitual tradicional (...), mas provavelmente será melhor deixar o termo vagamente caracterizado, para não prejudicar nossa investigação. É claro que precisamos de ter alguma ideia sobre o que são experimentos de pensamento, para orientar uma análise filosófica adequada (...), mas isso não significa que precisamos de começar com uma definição técnica, especificando condições necessárias e suficientes.¹³⁰

A expressão “experimento de pensamento” foi inventada somente em 1811 pelo filósofo natural dinamarquês Hans Christian Ørsted, ainda que a prática filosófica de propor experimentos de pensamento, conforme vimos no caso do problema de Molyneux, era muito anterior, remontando à idade média (tendo sido muito utilizado pelo médico

¹²⁹ Ver Adour *et al.* (2024).

¹³⁰ Brown e Fehige (2023).

árabe neoplatônico Avicenna) e, segundo alguns autores, à antiguidade clássica.¹³¹ Alguns experimentos de pensamento são absolutamente inexequíveis (por exemplo, a proposta de Ernst Mach de girar todas as estrelas simultaneamente para ver se a água do balde de Newton subiria nas paredes com o balde parado), ao passo que outros experimentos de pensamento, ainda que pareçam extremamente complexos de serem realizados de fato, vieram a se mostrar possíveis de serem realizados, seja em um laboratório, seja em um centro médico. Esse é o caso, respectivamente, dos experimentos de pensamento da mecânica quântica (o experimento EPR, o experimento de escolha demorada e o experimento das desigualdades de Bell¹³²) e do problema de Molyneux.

Assim, voltemos agora ao problema de Molyneux. O papel inicial da proposta de Molyneux era usar a situação hipotética do cego que passa a enxergar para explorar as perspectivas filosóficas de sua época. Tanto que a carga de Molyneux foi enviada a Locke e não a um cirurgião. Como experimento de pensamento, o problema logo se mostrou extremamente interessante. Os que respondiam negativamente, como Locke e Berkeley, acreditavam que todo conhecimento deveria vir da experiência,¹³³ eles usavam o problema de Molyneux como base para seus argumentos.¹³⁴ Enquanto racionalistas como Leibniz diziam que a pessoa cega seria capaz de discernir os dois objetos usando a razão. A questão por trás disso é a relação que existe entre as sensações táteis e visuais. Como já vimos, alguns acreditavam que o objeto percebido despertaria uma mesma ideia, independente do sentido que o percebeu, devendo existir assim uma relação necessária entre esses dois sentidos enquanto outros acreditavam que essa relação deveria ser aprendida pela experiência. Diderot acreditava que a pessoa aprenderia a discernir tudo usando apenas a visão, mas após o agora vidente treinar sua visão a perceber as coisas, sem o auxílio

¹³¹ Stuart, Fehige e Brown (2018). É interessante observar que este livro de Stuart, Fehige e Brown – que é um Routledge Companion sobre experimentos de pensamento, ou seja, uma obra de referência sobre o tema – não menciona o problema de Molyneux. Sobre a antiguidade clássica, ver Rescher (2005, p. 2), segundo o qual os filósofos pré-socráticos gregos “inventaram a experimentação mental como procedimento cognitivo”.

¹³² Ver Freire (2015).

¹³³ Reforçando o que foi dito anteriormente, Locke acreditava que havia algumas operações dos sentidos internos que eram inatas e que contribuíam para entendermos o mundo como ele é. Podemos classificar Locke como empirista pois essas operações eram feitas em cima de ideias construídas pela experiência, logo havia uma dependência direta das ideias obtidas pela experiência. Já Berkeley foi mais adiante, ele defendeu que todas as operações dos sentidos internos eram também aprendidas através da experiência. Na verdade, é a experiência que nos leva a relacionar experiências sensíveis, como o cair de um copo de vidro, com o som do vidro quebrando e com o medo de cortar o pé. Cf. Cassirer (1992, p.144, 155).

¹³⁴ O problema de Molyneux era usado como um experimento mental antes da cirurgia de catarata feita por Cheselden, mas após isso ele era usado por empiristas como argumento para suas ideias. Cf. Loaiza. Molyneux’s Question in Berkeley’s Theory of Vision.

do tato para tal. Nesse sentido, podemos dizer que Diderot acreditava que essa conexão entre os sentidos era arbitrária e criada pela repetida experiência em associar esses dois estímulos.¹³⁵

Ainda que ele tenha sido concebido como um experimento de pensamento, o problema de Molyneux logo se tornou um experimento real, com o advento da cirurgia de catarata. Isso reconfigurou inteiramente a compreensão que se tinha do experimento. Passou a importar mais a resposta final do problema do que o caminho para se chegar à resposta. Após a cirurgia de Cheselden, os que respondiam negativamente viram esse relato como uma comprovação empírica de suas teorias enquanto os que respondiam positivamente questionavam se o estudo havia sido feito de maneira adequada a fim de prover uma resposta correta. Como vimos, Diderot, que podemos classificar como empirista, acreditava que o cego seria capaz de diferenciar os dois objetos após obter alguma experiência usando apenas a visão. Para Diderot, e para Condillac, o experimento de Cheselden foi feito com uma pessoa que não foi preparada adequadamente para responder essa questão. Diderot acreditava que a pessoa deveria ser educada em geometria para responder apropriadamente. Essa crítica ao problema de Molyneux era comum entre os filósofos iluministas franceses.¹³⁶ Para eles, deveria ser dado ao novo vidente todas as condições possíveis para responder à pergunta, pois dessa forma saberíamos se o problema de fato vem da incapacidade sensorial ou do despreparo da pessoa que respondeu.¹³⁷ Cheselden não foi o único que fez essa cirurgia e registrou informações dos primeiros momentos do agora vidente, outras cirurgias foram feitas ao longo das décadas, e séculos, seguintes com o objetivo de esclarecer o problema de Molyneux. Não é nosso objetivo aqui analisar todas esses relatos,¹³⁸ mas gostaria de destacar brevemente o experimento feito por August Franz, de 1841, que é posterior a Diderot e o movimento iluminista.¹³⁹ Ele operou um jovem de 17 anos, que havia recebido alguma educação, que não conseguia ver nada com um olho e percebia algumas cores com o outro, mas não o suficiente para perceber

¹³⁵ Cf. Degenaar (1996, p. 130).

¹³⁶ Cf. Degenaar (1996, p. 131).

¹³⁷ Guinsburg (2009, p. 132-136). Cf. Adell. (2010, p. 69).

¹³⁸ Não existem muitos relatos de pessoas curadas de cegueira congênita, o livro *Molyneux's Problem* que trazemos como referência trata dos mais famosos, que também são quase todos que se tem registro.

¹³⁹ O leitor talvez tenha sentido falta de Kant ao longo dessa discussão. Não trouxemos o que Kant pensava sobre o assunto pois ele não escreveu sobre o problema de Molyneux. Alguns autores defendem que ele teria respondido positivamente ao problema de Molyneux e teria se juntado aos que criticam o método utilizado por Cheselden. Cf. Sassen (2004).

objetos. O jovem não conseguia enxergar assim que saiu da cirurgia por causa da dor causada pela luz. Três dias depois, o jovem tentou enxergar novamente, mas percebeu apenas um campo extenso de luz em que tudo parecia sem sentido, confuso e em movimento.¹⁴⁰ O jovem ainda não conseguia perceber as coisas pois seus olhos ainda não haviam se recuperado da cirurgia. Assim que ele conseguiu suportar a luz, suas bandagens foram retiradas e Franz conduziu experimentos com ele. O jovem conseguiu diferenciar linhas verticais de horizontais, mas fez isso por mover sua mão lentamente, como se estivesse sentindo. Ele primeiramente errou qual linha era qual, mas depois se corrigiu. Foi apresentado ao jovem uma figura que consistia no contorno de um quadrado onde havia sido desenhado um círculo com um triângulo inscrito no qual o jovem também conseguiu discernir, mas não sabia dizer sobre linhas em zigue-zague. Franz então, inspirado em Molyneux, faz um último experimento no qual colocarei na íntegra o registrado no livro da Degenaar:

Na terceira série de experimentos, inspirados pelo problema de Molyneux, Franz colocou uma esfera e um cubo, cada uma com 10 centímetros de diâmetro, no nível do olho e com um metro de distância do paciente. Ele permitiu que o jovem movesse sua cabeça lateralmente para compensar pelo ângulo de visão do olho direito amaurótico¹⁴¹. Depois de examinar os objetos com atenção, o paciente disse que ele pôde perceber uma forma circular e outra quadrangular, e, depois de analisar, ele nomeou um de quadrado e outro de disco. Enquanto o jovem manteve os olhos fechados, Franz substituiu o quadrado por um disco de mesmo tamanho e o colocou do lado da esfera. Quando o jovem abriu os olhos novamente, ele não percebeu diferença nas formas, ele viu ambas como discos. Franz então colocou o cubo em uma posição um tanto oblíqua na frente do olho e, próximo a ele, uma figura recortada em cartolina representando um contorno plano do cubo quando nesta posição. O menino era da opinião de que ambos os objetos eram algo como quadrados planos. Ele viu como um triângulo simples uma pirâmide que tinha um dos lados voltado para ele. Franz então virou um pouco a pirâmide para que uma

¹⁴⁰ “(...) an extensive field of light, in which everything appeared dull, confused and in motion.” Degenaar. (1996, p. 91).

¹⁴¹ Olho amaurótico significa que o olho tem algum nível de perda de visão.

pequena área de um de seus lados ficasse visível e uma grande área do outro. O menino olhou longamente para ele e disse que era uma forma extraordinária: nem triângulo, nem quadrado, nem círculo. Ele não tinha ideia disso e não conseguia descrevê-lo: “Na verdade”, disse ele, “devo desistir”.¹⁴²

Vemos nesse experimento de Franz uma possível resposta ao problema de Molyneux. O jovem não foi capaz de discernir o cubo da esfera, nem de perceber a profundidade dos objetos. Ele conseguiu apenas reconhecer figuras bidimensionais. O jovem ainda não havia adquirido experiência em discernir profundidades nos objetos que lhe foram apresentados em também tinha medo de se aproximar das coisas, pois não tinha noção das distâncias das coisas que estavam diante dele. Franz pediu para o jovem descrever o que ele havia sentido, no qual o jovem respondeu:

Franz pediu para o menino dar uma descrição das sensações que o objeto produziu. O jovem respondeu que assim que ele abriu os olhos, descobriu a diferença entre os dois objetos (esfera e cubo) e percebeu que não eram desenhos. Mas ele não foi capaz de formar a ideia de quadrado e disco a partir deles “até ele perceber a sensação do que ele viu na ponta dos dedos, como se realmente estivesse tocando os objetos”: Quando Franz deu a esfera, o cubo e a pirâmide nas mãos do jovem, ficou muito surpreso em não ter reconhecido elas como tais através da visão, mesmo estando familiarizado com essas formas através do sentido do toque.¹⁴³

¹⁴² Degenaar (1996, p. 92). No original: “In the third series of experiments, inspired by Molyneux's problem, Franz placed a sphere and a cube, each with a diameter of ten centimeters, on a level with the eye and one meter away from the patient. He then allowed the young man to move his head laterally in order to compensate for the angle of vision of the amaurotic right eye. Once he had examined the objects attentively, the patient said that he could see a quadrangular and a circular shape, and after some consideration he named the one a square and the other a disc. While the young man kept his eyes closed, Franz substituted a disc of equal size for the square and placed it next to the sphere. When the young man opened his eyes again, he noted no difference in the shapes; he saw them both as discs. Franz then placed the cube in a somewhat oblique position in front of the eye and, close beside it, a figure cut out of pasteboard representing a plane outline prospect of the cube when in this position. The boy was of the opinion that both objects were something like flat quadrates. He saw as a plain triangle a pyramid that had one of its sides facing him. Franz then turned the pyramid a little so that a small area of one of its sides was visible and a large area of another. The boy looked at it for a long time and said that it was an extraordinary shape: neither a triangle nor a square nor a circle. He had no idea of it and could not describe it: ‘In fact,’ he said, ‘I must give it up’.”

¹⁴³ Degenaar (1996, p. 92, tradução nossa). No original: “Franz asked the boy to give a description of the sensations that the objects had produced. The youngster replied that as soon as he had opened his eyes, he

Para Franz, a resposta do problema de Molyneux era nem positiva nem negativa. O jovem discerniu que as figuras eram diferentes, mas as reconheceu como sendo bidimensionais. Era necessário que o novo vidente pudesse se acostumar com as sensações da vista para então poder usá-la para discernir o que lhe era apresentado. As pesquisas feitas ao longo do século XIX apontam para uma resposta mais próxima da de Diderot do que a de Berkeley, mas que era necessário a experiência para perceber distâncias¹⁴⁴.

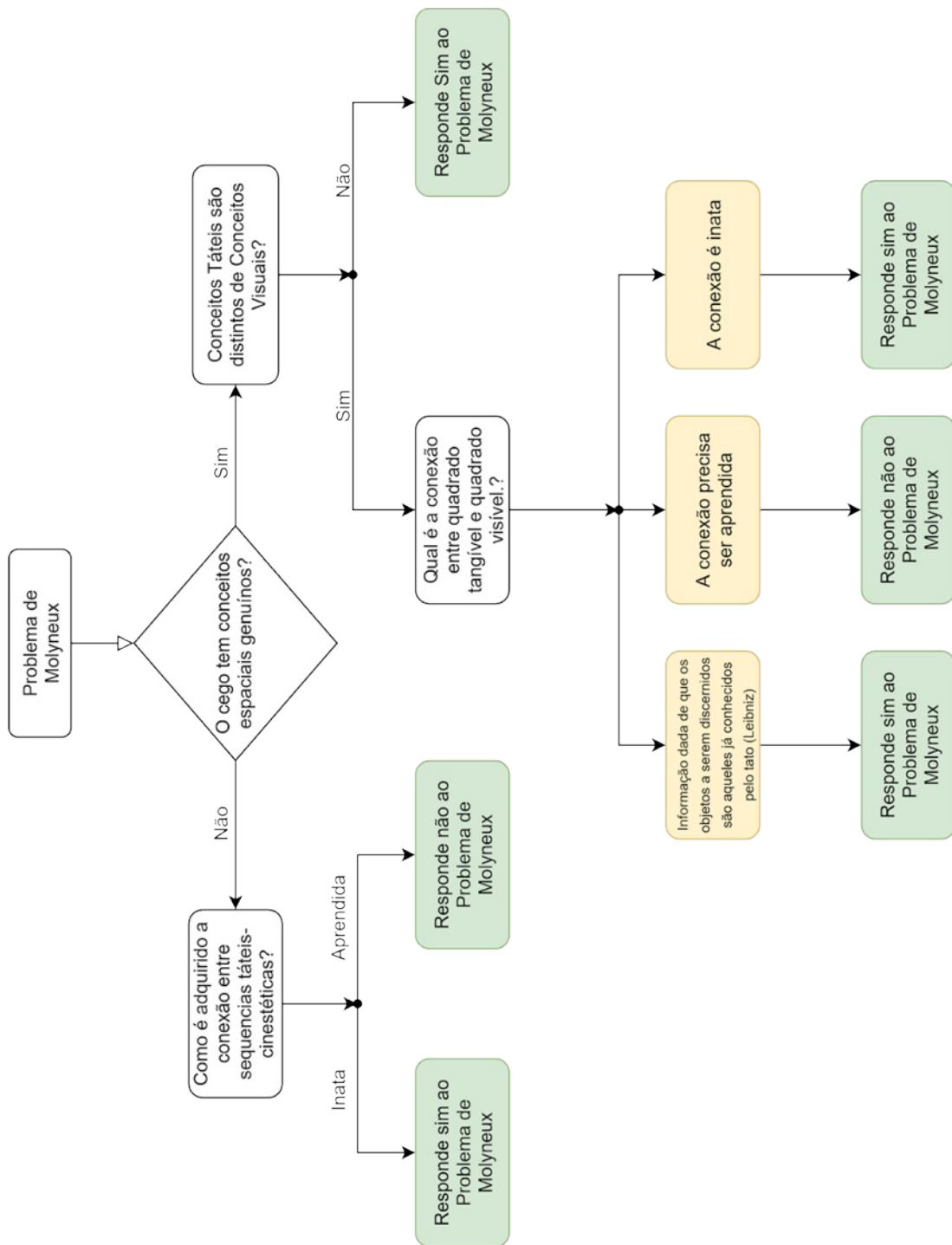
Fica claro então um ponto relevante para nosso trabalho. Conjuntos sensoriais diferentes resultam em um conhecimento acerca dos objetos também diferente. Certas propriedades presentes nos objetos são características pertencentes à vista, e se ao ensinar, nos baseamos na intuição produzida por esses conhecimentos, excluímos alunos cegos do processo de aprendizado. É essencial que na criação de atividades que envolvam alunos da Educação Especial, o conjunto sensorial característico deles seja levado em conta na escolha da estratégia que será usada. Não é possível adaptar um conhecimento característico da visão para alunos cegos, como é o caso da perspectiva. A ideia de perspectiva não existe em pessoas cegas, pelo menos não a perspectiva associada a projeção de imagens tridimensionais em um plano bidimensional.

É evidente que esses ricos relatos médicos contribuem significativamente para uma melhor compreensão da cegueira e da possibilidade de uma pessoa cega recobrar a visão após uma cirurgia. Entretanto, do ponto de vista filosófico essa ênfase no aspecto médico do problema acaba por apagar o aspecto mais sugestivo do problema de Molyneux, a saber, o fato de que, se pensado como sendo um experimento de pensamento, ele pode ser um excelente instrumento para expor os nossos pressupostos filosóficos. Será nesse sentido – ou seja, pensando o problema como sendo estritamente um experimento de pensamento – que pensaremos o problema de Molyneux no restante deste capítulo.

had discovered a difference between the two objects (sphere and cube) and had noted that they were not drawings. But he had not been able to form from them the idea of a square and a disc "until he perceived a sensation of what he saw in the points of his fingers, as if he really touched the objects.": When Franz placed the sphere, the cube and the pyramid in the young man's hands he was very surprised not to have recognised them as such by sight even though familiar with these mathematical shapes through the sense of touch"

¹⁴⁴Degenaar também apresenta um experimento mais moderno, que consiste em usar um sistema de substituição sensorial, onde se usa um sentido para representar informações de outro. Um exemplo é o *Tactile Visual Substitution System*, desenvolvido no final dos anos 1960, onde imagens eram capturadas e transformadas em impulsos tátteis que eram projetados na barriga da pessoa. O experimento mostrou que as pessoas, que eram cegas, levavam algum tempo para aprender a discernir as coisas com esse novo equipamento. Degenaar também mostra experimentos com animais. Não é nosso objetivo analisar esses experimentos a fundo, até porque eles confirmam o que foi mostrado por Franz. Cf. Degenaar (1996, p. 113-126).

Figura 9 – Diagrama de relações entre as atitudes filosóficas e o problema de Molyneux.



Fonte – O autor. Adaptado de Evans (1985, p. 381).

4.4. Investigando as visões dos alunos sobre a natureza da matemática

Feitas aquelas observações iniciais sobre os debates da comunidade de ensino de ciências e feitas também todas essas ressalvas sobre o fato de que o problema de Molyneux pode ser pensado como sendo estritamente um experimento de pensamento, nesta seção vamos refletir sobre como o problema de Molyneux pode nos ajudar a identificar as visões dos alunos acerca da natureza da matemática.

Para isso, vamos partir da análise feita pelo filósofo Gareth Evans sobre o problema de Molyneux, em um dos textos mais interessantes que encontramos sobre esse problema. Evans mostra que a concepção que um autor tem acerca da matemática (ou, mais especificamente, acerca da ontologia da matemática) determina o modo como ele responde ao problema de Molyneux, conforme ilustrado na figura 9.¹⁴⁵ Ou seja, uma determinada concepção da natureza da matemática implica (no sentido forte do termo) uma determinada resposta ao problema de Molyneux.

Inspirados nessa análise de Evans, nós propomos que essa implicação seja invertida, ou seja, que a resposta dos alunos ao problema de Molyneux seja usada para explicar as visões dos alunos acerca da matemática. Certamente não obteremos uma implicação no sentido forte (de determinação), pois a resposta ao problema de Molyneux não determina univocamente a atitude filosófica, uma vez que é possível que diferentes atitudes levam à mesma resposta. Porém, aprimorando um pouco as respostas, podemos inverter as ramificações da figura 9, obtendo uma caracterização razoavelmente precisa das visões dos alunos acerca da natureza da matemática. Para isso, elaboramos o seguinte roteiro. Primeiro, apresentamos a cada aluno o problema de Molyneux. Depois, perguntamos como esse aluno responderia ao problema de Molyneux e pedimos para justificar a sua resposta. Neste momento, é fundamental que, a partir da resposta do aluno, o professor, sem induzir qualquer atitude filosófica, consiga localizar o aluno em um dos dois grandes ramos da figura 9, ou seja, consiga identificar se o aluno acredita que o cego tem conceitos espaciais genuínos. Se a resposta for negativa, a atitude filosófica do aluno está identificada. Se a resposta for afirmativa e a resposta ao problema de Molyneux for positiva, o professor deve fazer mais duas perguntas.

¹⁴⁵ Evans (1985).

Primeiro, deve perguntar se a experiência matemática do cego com os objetos a partir do tato deve ter alguma influência na identificação dos objetos pela visão. A partir da resposta, é possível localizar se o aluno entende a correspondência tato-visão como sendo aprendida ou como sendo inata. Isso permite, enfim, fazer a pergunta mais complexa: Os conceitos táteis são distintos dos conceitos visuais? Essa pergunta pode ser particularmente difícil de ser compreendida pelo aluno. Ao fim das perguntas, o professor conseguirá localizar em qual dos ramos da figura 9 o aluno se encontra, podendo então enunciar para um aluno uma proposta de visão da natureza da matemática, cabendo ao aluno elaborar sobre se concorda ou discorda dessa conclusão.

Delineamos neste capítulo uma proposta de atividade que permite identificar as visões dos alunos acerca da natureza da matemática, com particular ênfase na dimensão empírica ou racional da matemática. Temos como perspectiva futura implementar essa pesquisa em sala de aula, avaliando assim em que medida o problema de Molyneux de fato funciona como um instrumento de sondagem acerca das visões dos alunos acerca da natureza da matemática.

Capítulo 5

As definições matemáticas na educação especial

5.1. Algumas reflexões sobre o ensino de matemática para alunos cegos

Refletir sobre como os alunos apreendem o mundo ajuda a nos prepararmos melhor para ensinar-lhes determinado conteúdo ou determinada ideia. O conjunto sensorial interno, que é composto pelos sentidos internos, do professor não é o mesmo que o do aluno, pois um professor tem muito mais experiência que um aluno em aplicar seus sentidos internos (julgamento, imaginação, memória etc.). Todo curso de graduação de licenciatura é planejado, do ponto de vista sensorial, com o objetivo de ensinar aos seus licenciandos a saber trabalhar os sentidos internos dos seus futuros alunos. Dito de outra maneira, ao preparar os professores em formação, o curso de graduação tenta capacitar esses profissionais a saber apresentar as ideias, por eles conhecidas, de forma que faça sentido aos alunos de ensino básico.

Mais difícil ainda é a tarefa do professor quando não só o conjunto sensorial interno dos seus alunos é mais inexperiente, o que sempre é o caso, mas quando também há diferença no conjunto sensorial externo do aluno e do professor. Apresentar ideias características a um sentido externo que não está presente no conjunto sensorial externo de quem a recebe é uma tarefa inviável. Mesmo que o professor tente traduzir as ideias de um dado sentido externo para outro que esteja no conjunto dos sentidos externos do aluno, como vimos nas reflexões de Diderot, o aluno só será capaz de fazer a passagem de um sentido para outro se ele já tiver experiência no que está sendo dito. Se nosso objetivo é apresentar essas ideias, não podemos esperar que os alunos já tenham experiência nelas, nem nos seus sentidos externos como também nos seus sentidos internos.

Indivíduos com um conjunto sensorial diferente não são menos capazes de aprender, mas é preciso criar estratégias específicas de como ensiná-las em determinadas circunstâncias. Essas estratégias devem recorrer ao seu conjunto sensorial. Se um professor se propõe a ensinar um aluno cego, ele deve montar uma aula pensando nesse aluno cego, usando apenas o sentido do tato, usando a cultura das pessoas cegas, para que possa então

falar de uma forma que esse aluno seja capaz de compreender plenamente. Da mesma forma ocorre com alunos surdos. O professor deve levar em conta a cultura surda e o que a perda da audição acarreta. E se outras diferenças sensoriais existirem, o professor deve saber reconhecer que diferenças são essas e saber planejar sua aula para que ele apele aos sentidos internos presentes no conjunto sensorial daquele aluno.

Um exemplo de trabalho com alunos da educação especial é o feito por Healy e Fernandes. Vamos agora analisar dois textos apresentados por essas duas autoras, um publicado em 2010 e outro em 2017. No texto *A Inclusão de Alunos Cegos*, as autoras investigam “como as ferramentas, materiais e dialógicas oferecidas para a resolução de problemas associados à determinação da área e do perímetro de figuras planas influenciam os procedimentos”¹⁴⁶ dos alunos. Elas fazem isso à luz dos trabalhos de Vygotsky e colaboradores:

Três princípios norteavam os trabalhos de Vygotsky e de seus colaboradores. O primeiro centrava-se em analisar processos e não objetos, isto é, centrava-se na análise dos processos de desenvolvimento que conduziram o sujeito experimental a determinada resposta. O segundo explicação versus descrição, em outras palavras, uma análise explicativa ao invés de descritiva, que procura determinar as relações dinâmico-causais entre os estímulos externos e as respostas internas que são à base das funções superiores. O terceiro problema do “comportamento fossilizado” direcionava-se a analisar o desenvolvimento das formas superiores de comportamento, alterando o caráter mecanicista e fossilizado dessas formas de comportamento, por exemplo, as reações formuladas por um treinamento repetitivo. Vygotsky nomeou esse método de método funcional da dupla estimulação, no qual “dois conjuntos de estímulos são apresentados ao sujeito; um como objeto de sua atividade, e outro como signos que podem servir para organizar essa atividade.”¹⁴⁷

Fica claro nessa tarefa a preocupação com os estímulos sensoriais que serão apresentados a esses alunos. A atividade consistia em construir o conceito de área e perímetro nesses alunos cegos. Não era a primeira vez que eles tinham contato com esse conteúdo,

¹⁴⁶ Healy e Fernandes (2010, p. 1117).

¹⁴⁷ Healy e Fernandes (2010, p. 1118).

mas eles mostraram não ter domínio total dos conceitos em questão. A estratégia girava em torno de usar material concreto, acessível ao tato, com o objetivo de construir com os alunos cegos o conceito de área e perímetro. Usou-se cubinhos com um centímetro de aresta como unidade de medida e incentivou-se os alunos a construir o perímetro e a área usando esses cubinhos. A partir da construção via ferramenta concreta, os alunos puderam tirar conclusões mais precisas sobre como calcular essas duas informações da figura e as relações existente entre as duas.

No final da tarefa, os alunos conseguiram aprender melhor o conceito por causa da estratégia diferenciada que apelava para o conjunto sensorial que era acessível a eles. Um dos alunos revelou indiretamente o motivo de terem tido melhor compreensão. A fala dele registrada no final do artigo de que ficou “muito mais fácil do que com a figura (impressa em Braille no papel)”¹⁴⁸ deixa claro que a dificuldade vinha de terem apresentado o conteúdo através de uma ideia construída pelo sentido da visão, a saber, a representação visual de figuras sem uma intuição tátil clara para os alunos.

As autoras argumentam no texto que “uma identificação precoce entre grandezas e números pode acarretar conflitos entre comprimento e área”¹⁴⁹. Isso possivelmente significa que esses alunos aprenderam sobre perímetros e áreas interagindo diretamente com a fórmula, o que torna prejudicial a internalização do conteúdo desses alunos, especialmente se os alunos tiveram uma atividade adaptada para eles e não feita para eles, ou para o conjunto sensorial deles. A partir do momento que foi introduzido uma ferramenta acessível ao conjunto sensorial desses alunos e que o conhecimento do assunto foi formado usando essas ferramentas, tornou-se possível que esse conhecimento fosse internalizado e manipulado pelos alunos para a construção e amadurecimento feito por eles próprios. Isso possivelmente aconteceu, pois seus sentidos internos agora puderam agir com base em informações compostas apenas pelos sentidos externos presentes nos alunos.

No texto *Design para a Diversidade: Matemática Escolar e Inclusão*, as autoras tentam mostrar que alunos com um conjunto sensorial diferente do planejado para uma atividade não conseguem ter um aprendizado eficiente nessa atividade. Elas apontam que a principal causa disso é o fato de as aulas serem adaptadas e não construídas para eles. A fim de chegar nessa conclusão, elas fazem um experimento com alunos cegos numa

¹⁴⁸ Healy e Fernandes (2010, p. 1131).

¹⁴⁹ Healy e Fernandes (2010, p. 1115).

atividade de planificar figuras tridimensionais. Eles, em sua maioria, se mostram incapazes de representar figuras tridimensionais em planos e tem dificuldade em reconhecer planificações de figuras tridimensionais. Isso fica claro na seguinte fala das autoras:

Discutir como apresentar os objetos e a forma como eles são percebidos quando há privação de órgãos sensoriais ou limitação cognitiva nos leva a algumas considerações. O indivíduo não é um alvo passivo dos ataques sensoriais provenientes do meio, ele interage com ele e estrutura o produto dessas interações, impondo uma ordem própria às suas percepções. Por exemplo, ao interagir com um objeto, o cego o mapeia com as mãos, e esse mapeamento mobiliza seu organismo que constrói um padrão mental (ou imagem) para o objeto. Estando atado à biografia do indivíduo, o padrão mental constituído para determinado objeto não coincide, necessariamente, com o de outros indivíduos, e mais, aproximando-se da perspectiva fenomenológica. Damásio (2005, p. 405) declara que “não conhecemos a aparência das coisas”, a imagem que vemos baseia-se nas mudanças que ocorrem em nosso organismo. Ou seja, as imagens de objetos matemáticos, no nosso caso, estão intrinsecamente ligadas à forma que os aprendizes têm acesso aos objetos ao interagir com os vários sistemas – o biológico, o social e o cultural – que compõem o mundo que experimentam; e, ainda, com a forma que constroem seus próprios significados para a matemática com a qual se deparam.¹⁵⁰

As informações que recebemos dos nossos sentidos não são totalmente e unicamente responsáveis pelas ideias que montamos dos objetos. Ao receber informações visuais, são nossos sentidos internos, nossa capacidade de julgar; comparar; refletir; inferir; etc., que são responsáveis por dar estrutura as informações recebidas pelos órgãos sensoriais. Ao imaginar um triângulo, qual cor imaginamos ter o triângulo? Toda imagem imaginada por um vidente está associada a pelo menos uma cor, ou duas se quisermos pensar o fundo que faz contraste, mas um cego não conhece as cores, logo o triângulo imaginado é diferente do nosso. Apesar de o triângulo abstrato conter as mesmas propriedades

¹⁵⁰ Healy; Fernandes, (2017, p. 6).

independente do conjunto sensorial que venhamos a ter, a intuição que criamos em cima dessa entidade matemática está fortemente ligada a essas informações sensoriais.

Na primeira atividade apresentada no artigo as autoras ofereceram “a questão em Braille para alguns dos aprendizes e, após explorar a pirâmide representada em Braille, eles não conseguiram reconhecê-la e tampouco destacar na representação os elementos citados no enunciado da questão”¹⁵¹. Uma representação dependente de conhecimentos visuais está fadada a ineficiência e incompREENSÃO. Uma projeção plana que favorece conhecimentos visuais não tem como ser plenamente compreendida por um aluno cego. Ele pode até decorar que aquela projeção está associada a uma figura tridimensional, mas ele não é capaz de perceber plenamente pois ele não tem conhecimento de perspectiva na imagem como um vidente tem.

Podemos ver a profundidade em uma figura plana apesar de essa profundidade de fato não existir, como podemos fazer uma profundidade inexistente ser perceptível ao tato? Essa questão apresentada foi uma questão do Enem adaptada para cegos. Fica claro, mais uma vez, que desconsiderar o conjunto sensorial do público-alvo torna impossível a compRENSÃO da atividade em questão. A incapacidade de entender não é do aluno, mas do avaliador de expressar o que deseja avaliar numa forma que seja compRENSÍVEL ao avaliado.

Uma outra atividade apresentada consistia

em representar no papel a forma geométrica que estavam recebendo para a exploração tÁTIL – cubo e pirâmide, nessa ordem. Para isso, poderiam usar quaisquer dos recursos disponíveis (régua, esquadros, punção, carretilha, transferidor) e poderiam manifestar-se, caso não estivessem satisfeitos, refazendo o desenho quantas vezes quisessem. A cada forma recebida seguia-se um período dedicado à exploração tÁTIL que, por sua vez, era seguido pelo desenho no papel¹⁵².

Com o seguinte resultado:

Os três aprendizes foram capazes de nomear as formas tridimensionais, o que, indica que tinham um padrão mental (uma imagem)

¹⁵¹ Healy e Fernandes (2017, p. 10).

¹⁵² Healy e Fernandes (2017, p. 11).

constituída para esses objetos, mas, mesmo usando material adaptado, eles não tiveram êxito na representação¹⁵³.

Uma atividade que envolve uma planificação com perspectiva para alunos cegos é impossível de ser bem-sucedida como já ponderamos. Uma outra forma de representar figuras tridimensionais é como a apresentada um pouco antes no artigo e como a maioria dos alunos tentaram fazer, onde a planificação ocorre por "abrir" a figura tridimensional¹⁵⁴. É interessante notar que a estratégia usada nessa atividade não envolvia o conceito de abrir essas figuras, mas sim de projetar lado a lado na figura. Essa maneira de representar envolve intuições visuais que não são intuitivas para cegos. Se esses alunos fossem capazes de abrir essas figuras e então entender como elas são representadas bidimensionalmente, eles conseguiram aprender muito mais intuitivamente uma forma de planificar figuras tridimensionais. Para videntes, a perspectiva tem um papel muito importante na planificação, mas isso não é possível para alunos cegos. Elas então concluem dizendo o seguinte:

A consciência perceptiva do cego lhe permite perceber as formas tridimensionais do modo que elas são, ou seja, como se revelam com faces, arestas e vértices. Porém, eles não conseguem representar em duas dimensões o que as mãos veem em três e acabam por representar somente o que se mostra distinto aos seus "olhos", ou seja, as diferentes formas geométricas que aparecem numa única peça¹⁵⁵.

Essa conclusão do experimento é consequência de uma atividade criada supondo intuições que são do campo visual a alunos que são cegos. Levar em conta o conjunto sensorial do público-alvo da atividade é fundamental para o sucesso dela.

Os experimentos delas mostram uma ideia relevante de que vimos nas seções anteriores. Não é possível que alunos cegos usem conhecimentos visuais para representar figuras tridimensionais em um plano. A ideia de abrir uma figura tridimensional em uma versão plana envolve ideias visuais. Não que não seja possível fazer isso, mas é importante ensinar aos alunos cegos a fazer usando seus recursos táteis e não visuais. Pois

¹⁵³ Healy e Fernandes (2017, p.14).

¹⁵⁴ Assim como o cubo é aberto em algo parecido com uma cruz por descolar alguns dos lados dos outros.

¹⁵⁵ Healy e Fernandes (2017, p.16).

apenas através desses recursos que eles são capazes de criar intuição, algo de extrema importância para matemática.

As autoras falam dos trabalhos de Vygotsky e de seus colaboradores que afirmam a importância de artefatos e signos para influenciar a atividade cognitiva dos alunos e que a “carência das experiências sensoriais pode ser minimizada por outros canais perceptivos, como, por exemplo, quando for adequado, utilizar-se de representações concretas”¹⁵⁶.

5.2. A questão filosófica da definição dos objetos matemáticos

Voltemos agora à frase “ao interagir com um objeto, o cego o mapeia com as mãos, e esse mapeamento mobiliza seu organismo que constrói um padrão mental (ou imagem) para o objeto”.¹⁵⁷ É interessante observar, a partir dos trabalhos dessas autoras, que frequentemente as construções mentais dos objetos geométricos pelos alunos cegos recorre à ideia de remeter o objeto àquilo que o produziu. Isso é visível no modo como um aluno cego define o que é pirâmide:

[Como] você descreveria isso para um colega, em uma carta, que também trabalhava com figuras desse tipo?

[Aluno]: (Pega na pirâmide de madeira) Eu diria a [ele] que a base é quadrada e que à medida que sobem as laterais vão diminuindo até formar uma ponta, aqui em cima (move o dedo simultaneamente pelas bordas de uma face do triângulo da mesma maneira que antes).¹⁵⁸

Ou seja, uma pirâmide são quatro lados de um quadrado que vão subindo e se tornam um ponto. Esses relatos da comunidade de ensino de matemática, mais especificamente de educação matemática especial, remontam – de modo muito interessante e, até onde puder observar, não registrado na literatura de ensino de matemática – alguns debates filosóficos sobre a matemática dos séculos XVII e XVIII. Assim, nesta seção, vamos propor, a título de sugestão, que talvez seja interessante olharmos para a história da filosofia a fim de identificarmos reflexões que já foram feitas no passado e que dialogam

¹⁵⁶ Healy e Fernandes (2017, p. 5).

¹⁵⁷ Healy; Fernandes, (2017, p. 6).

¹⁵⁸ Healy e Fernandes (2011, p. 11).

com as inquietações atuais das pesquisadoras e dos pesquisadores em educação matemática especial.

Nesse sentido, vale lembrarmos aqui a discussão que Marilena Chauí faz da definição de círculo por Espinosa. Euclides, no início de sua obra *Os Elementos*, escrita por volta do ano 300 A.E.C., define círculo nas seguintes palavras:

15. Círculo é uma figura plana contida por uma linha [que é chamada circunferência], em relação à qual todas as retas que a encontram [até a circunferência do círculo], a partir de um ponto dos postos no interior da figura, são iguais entre si.¹⁵⁹

Essa definição se assemelha muito àquela hoje corrente nos livros didáticos, que recorre à noção de lugar geométrico, que é posterior a Euclides. Circunferência é o lugar geométrico dos pontos equidistantes a um ponto dado. Círculo é a região do plano delimitada por uma circunferência. Essa definição, conforme recorda Marilena Chauí, foi duramente criticada por Baruch Espinosa na sua obra *Tratado da emenda do intelecto*, publicado em 1677:

a marca distintiva do conhecimento matemático encontra-se na peculiaridade de suas definições, que são sempre genéticas porque mostram a geração de seu objeto ou como é produzida a ideia da coisa definida, apresentando a causa eficiente interna ao definido, e mostram como da definição podem ser deduzidas ou demonstradas todas as propriedades que decorrem necessariamente da essência do definido. Eis por que Espinosa dirá que a definição do círculo como figura na qual todos os pontos são equidistantes do centro não é a boa definição, pois o define por uma propriedade e não oferece sua gênese. A definição perfeita do círculo o deduz como o efeito do movimento de um semieixo ao redor de um centro fixo, assim como a definição perfeita da esfera a define como o movimento de um semicírculo ao redor de um eixo de revolução do qual todos os pontos se distanciam de maneira a permanecer equidistantes do centro. Essas definições nos dizem qual é a essência particular do círculo ou a da esfera porque nos mostra tanto a causa eficiente de sua geração quanto a

¹⁵⁹ Euclides (2009).

compreensão de que essa essência é a causa de todas as suas propriedades, de tal maneira que, construída a definição, poderemos deduzir ou demonstrar todos os efeitos dessa essência particular, isto é, todas as suas determinações ou propriedades.¹⁶⁰

Ou seja, a proposta de Espinosa é que os objetos matemáticos não sejam definidos por suas propriedades, mas sim pelas suas causas eficientes.¹⁶¹ Mais adiante em seu livro, ela retoma essa ideia:

Recordemos, por um momento, como o *De emendatione* [isto é, o *Tratado da emenda do intelecto* de Espinosa] explica a gênese de uma figura geométrica, no caso, o círculo: no *continuum* da quantidade infinita, o movimento engendra um segmento de reta que gira ao redor de um centro fixo produzindo o círculo, cuja forma é constituída pela composição do movimento do segmento de reta com o centro fixo. O círculo é esse ato determinado do movimento que diferencia um corpo no *continuum* da extensão.¹⁶²

Contraponto as perspectivas de Descartes, que defendia que o pensamento deveria operar de modo claro e distinto, e de Espinosa, exposta acima, ela afirma: “a ideia verdadeira não é aquela que resiste ao escrutínio da atenção ou da consciência, que se debruça sobre ela para ver sua clareza e distinção e conferir-lhe valor objetivo”, conforme defendia Descartes, mas sim aquela “que narra a produção da própria coisa”.¹⁶³

Parece-nos que essa crítica de Espinosa está em sintonia com as conclusões da comunidade de educação matemática para alunos cegos. As definições matemáticas que recorrem às propriedades dos objetos recorrem frequentemente à representação visual. Por outro lado, uma definição que recorra à ideia de causa eficiente – tal como a definição de círculo de Espinosa ou a definição de pirâmide de alunos cegos (quatro pontos que viram um) – recupera o que a coisa é, sendo, portanto, independente da forma de representação adotada (visual ou tátil). Aqui, entretanto, a análise do problema de Molyneux

¹⁶⁰ Chauí (2016), p. 20.

¹⁶¹ Chauí faz uma observação muito interessante, que vale comentarmos aqui. Quando Marx vai definir classe social, ele se inspira nesse debate sobre a definição dos objetos matemáticos. Assim, para ele, o que define uma classe social não é a renda (que é atributo da classe, da mesma maneira que a equidistância é atributo da circunferência), mas sim a sua causa eficiente (aquilo que a produz), ou seja, sua inserção nas relações de produção da sociedade.

¹⁶² Chauí (2016), p. 163.

¹⁶³ Chauí (2016), p. 198.

nos traz uma importante lição. Se é verdade que a figura pode ser definida pela sua causa, que pode ser apreendida tanto pelo tato quanto pela visão, então necessariamente a resposta ao problema de Molyneux, se pensado como um experimento de pensamento, precisa ser positiva. Pois precisamos supor a pessoa cega tem conceitos espaciais genuínos e que conceitos táteis não são distintos de conceitos visuais. Ou, alternativamente, se a pessoa cega não tiver conceitos espaciais genuínos, ao menos a conexão entre sequências táteis-cenestésicas tem que ser inata. Em ambos os casos, a resposta ao problema de Molyneux seria positiva. Não queremos com isso responder ao problema de Molyneux, mas sim mostrar como o ensino de matemática tem muito a aproveitar dos debates feitos, ao longo da história, pela filosofia.

Conclusões

Nesta dissertação, estudamos diversos aspectos do empirismo e do racionalismo na matemática e no ensino de matemática. Primeiro, no capítulo 1, fizemos uma caracterização do empirismo e do racionalismo. Vimos também como essas duas atitudes filosóficas levam a perspectivas bastante diferentes acerca da matemática.

Por um lado, diversos filósofos e matemáticos, alinhados a uma atitude racionalista, defenderam que os objetos matemáticos não podem ser apreendidos por meio dos sentidos. Segundo eles, o que acessamos por meio dos sentidos é apenas uma representação do triângulo. O próprio triângulo só pode ser acessado por intermédio da razão. Por outro lado, filósofos alinhados com o empirismo defendem que, de algum modo, o conhecimento do mundo viria das experiências sensoriais. Essa perspectiva empirista encontra diversas dificuldades ao tratar da matemática, a tal ponto que, se levada ao extremo, acaba tendo que abdicar da possibilidade de termos conhecimento acerca dos objetos matemáticos. Mas, conforme vimos, há modos de contornar essas limitações. A principal estratégia, que foi adotada por filósofos como David Hume e John Locke, é a “estratégia da reivindicação”, que consiste em reivindicar para os sentidos parte do conhecimento que, nas tradições empiristas que lhes eram anteriores, eram tipicamente pensadas como sendo associadas ao inatismo.

Particularmente importante nessa narrativa foi o experimento de pensamento proposto em 1688 pelo escritor, político e filósofo inglês William Molyneux, que ficou conhecido, posteriormente, como “problema de Molyneux”, que foi apresentado no capítulo 2. Se um cego de nascença recobrasse a visão, ele seria capaz de distinguir imediatamente, por meio da visão, as figuras geométricas que ele conhecia, até então, somente por meio dos outros sentidos? Esse problema chamou a atenção de diversos filósofos e serviu como um experimento de pensamento que permitia refletir sobre como conhecemos o mundo.

Na segunda metade do capítulo 2, analisamos as primeiras respostas ao problema de Molyneux, dadas por John Locke (1690), Gottfried Leibniz (1704) e George Berkeley (1709). Locke argumenta que o cego não tem como distinguir entre os dois objetos, pois ele não tem experiência em usar sua visão para discernir entre um objeto e outro. Leibniz, por sua vez, argumenta que o cego será sim capaz de discernir desde que seja satisfeita

uma condição: dizer ao agora vidente que diante dele estão um cubo e uma esfera. Dessa forma, ele vai poder saber quais propriedades buscar em cada objeto a fim de poder dar uma resposta precisa. Berkeley vai mais longe que Locke em sua resposta negativa ao problema de Molyneux. Ele argumenta que o agora vidente não é capaz de discernir distâncias e de perceber profundidade nas imagens. Portanto, conclui Berkeley, o cego agora vidente não será capaz sequer de identificar que os dois objetos postos diante dele são tridimensionais.

Em seguida, no capítulo 3, analisamos um livro de Denis Diderot de 1749 intitulado “Carta sobre os cegos para uso dos que veem”. Nesse livro, exemplo da perspectiva iluminista acerca da cegueira, Diderot explora diversos aspectos da cegueira, relatando dois casos em particular, a saber, o do cego de Puiseaux e do célebre matemático cego inglês Nicholas Saunderson, que ocupou a cátedra de professor lucasiano em Cambridge, cátedra que outrora fora ocupada por Isaac Newton. Diderot fala sobre esses dois cegos para primeiramente argumentar que a capacidade de dar uma resposta ao problema não passa apenas pela capacidade sensorial, mas também pelo conhecimento da pessoa.

O problema de Molyneux havia sido proposto como um experimento de pensamento, ou seja, uma situação hipotética imaginada que busca servir de ferramenta para examinarmos nossos pressupostos filosóficos e científicos. Entretanto, o que era um experimento de pensamento se tornou um experimento real quando, em 1728, Willian Cheselden realizou a primeira cirurgia de catarata bem-sucedida em um cego de nascença que temos registro. Ele conhecia o problema de Molyneux e acompanhou o jovem ao longo de sua recuperação e adaptação ao uso da visão, realizando assim o primeiro experimento real do problema de Molyneux. No apêndice desta dissertação, apresentamos uma tradução do relato de Cheselden. A partir desse relato de Cheselden, Diderot concorda com a resposta dada por Berkeley, de que o cego seria incapaz de perceber profundidade, e apresenta uma versão nova do problema que se propõe a eliminar o empecilho da inexperiência em ver figuras em tridimensionais. Diderot propõe trocar o cubo e a esfera por um quadrado e um círculo. Dessa forma, imagina Diderot, o cego não estaria impedido pela sua inexperiência em usar a visão e que dependeria apenas da sua capacidade intelectual de analisar o que está percebendo através da visão.

No capítulo 4, nos voltamos a uma reflexão sobre o ensino de matemática. Partindo do trabalho de Gareth Evans, que mostra que as atitudes acerca da filosofia da

matemática determinam a resposta dada ao problema de Molyneux. Explorando a recíproca dessa implicação, propusemos utilizar o problema de Molyneux como uma forma de explorar as visões de alunos acerca da natureza da matemática. Para isso, defendemos que o problema de Molyneux seja pensado como um experimento de pensamento. Ao longo do tempo, com a aprimoração da cirurgia de catarata, muitos tentaram dar uma solução final ao problema de Molyneux como um experimento empírico e não de pensamento. Vimos alguns relatos interessantes que nos ajudaram a refletir sobre as diferenças entre os cegos e os videntes na maneira de perceber os objetos. Argumentamos, porém, que a fim de entender melhor como nossos alunos aprendem matemática, é interessante que pensemos no problema de Molyneux como um experimento de pensamento, podendo assim cumprir a sua função de servir de ferramenta para explicitar as visões dos alunos acerca da natureza da matemática.

Por fim, no capítulo 5, refletimos sobre de que modo as reflexões sobre o problema de Molyneux podem contribuir para o ensino de matemática para alunos cegos. Buscamos traçar paralelos entre debates de história da filosofia e debates contemporâneos da comunidade de ensino de matemática. Através do relato de experiência de Healy e Fernandes, vimos como é difícil para alunos cegos conteúdos geométricos que envolvem perspectiva e planificação. Buscamos fazer a ponte entre esses trabalhos e as reflexões que vimos anteriormente acerca do problema de Molyneux. Ainda com base no trabalho dessas autoras, refletimos sobre a questão filosófica da definição dos objetos matemáticos. Exploramos a definição da pirâmide dada por alunos cegos, conforme o relato dessas autoras, e comparamos com a definição de círculo dada por Baruch Espinosa em 1677. Ele propõe que a definição de círculo não seja dada pelas propriedades dessa figura geométrica, mas sim remetendo a figura às suas causas. Defendemos que, restituindo o lugar das causas na geometria, talvez seja possível compreendermos melhor quais definições podem ser mais interessantes no ensino de matemática para alunos cegos.

Apêndice

Tradução do relato de Cheselden (1728)

Apresentamos a seguir uma tradução do breve artigo do médico inglês Willian Cheselden em que ele descreveu as observações acerca do problema de Molyneux feitas pelo jovem cego que Cheselden operou as cataratas. Esse relato pode ser encontrado no periódico *Philosophical Transactions* (publicado de 1683 a 1775), v. 35, p. 447–450, 1728.

Tradução

Lido no dia 4 de julho de 1728 (e também no dia 27 de abril de 1727).

Relato de algumas observações feitas por um jovem cavalheiro que nasceu cego, ou perdeu a visão tão cedo que ele não tinha lembrança de ter visto, e que foi operado entre os 13 e os 14 anos de idade. Escrito pelo Sr. Will Chesselden, F.R.S. [Fellow da Royal Society], Cirurgião de Vossa Majestade e do St. Thomas Hospital.

Embora digamos do cavaleiro que ele era cego, como fazemos com todos que tem catarata madura, ainda assim eles nunca são tão cegos dessa causa a ponto de não discernir dia e noite, e, em sua maioria, diante de uma luz forte, distinguir preto, branco e escarlate, mas eles não conseguem perceber a forma de nada pela luz pela qual essas percepções são feitas, sendo deixada entrar obliquamente através o humor aquoso ou a superfície anterior do cristalino (pelos quais os raios não podem ficar em foco na retina) eles não podem discernir de uma maneira diferente do que um olho saudável através de um pote quebrado de geleia, onde uma grande variedade de superfícies tão diferentes refratam a luz, que os muitos distintos lápis de raios não podem ser coletados pelo olho no foco apropriado, portanto a forma de um objeto em tal caso, não pode ser discernido, apesar da cor ser. E assim foi com esse jovem cavalheiro, que pensou que conhecia essas cores separadamente sob uma boa luz. No entanto, quando ele as viu após a cirurgia, as ideias fracas que ele tinha delas antes não eram suficientes para que ele as conhecesse depois e, portanto, ele não pensava que eram as mesmas que ele conhecia antes pelos seus nomes. Agora ele pensava que escarlate era uma das cores mais belas, e de outras, as mais alegres eram as mais agradáveis e quando ele viu o preto pela primeira vez, ele ficou desconfortável,

porém, depois de pouco tempo, ele se reconciliou com a cor, mas alguns meses depois, vendo por acidente uma mulher negra, ele ficou aterrorizado com a visão

Quando ele viu pela primeira vez, ele era incapaz de fazer julgamentos sobre distâncias, que ele pensava que todos os objetos tocavam seus olhos, (como ele se expressou), assim como o que ele sentia em sua pele. E não considerava nenhum objeto mais agradável do que aquele que era suave e regular, embora não pudesse formar nenhum julgamento de sua forma, ou adivinhar o que havia em qualquer objeto que lhe agradasse. Ele não conhecia a forma de nenhuma coisa, nem uma da outra, apesar de diferença em forma ou magnitude. Mas quando era dito o que aquela coisa era, aquela forma que ele antes conhecia pelo tato, ele observaria atentamente e talvez conseguisse reconhecê-las novamente. Mas tendo que aprender muitos objetos de uma vez ele esquecia muitos e, como ele disse, primeiramente ele aprendeu a saber e novamente esquecia mil coisas em um dia. Uma situação em particular (embora possa parecer insignificante) eu vou relatar. Tendo esquecido qual era o gato e qual era o cachorro, ele estava envergonhado de perguntar. Apesar de pegar o gato (que ele conhecia por sentir) ele estava obcecado em olhar para ela atentamente, e depois colocando-a no chão disse: “Então – veja só! – eu vou te reconhecer da próxima vez”. Ele estava muito surpreso que a coisa que ele mais gostava, não parecia concordar com seus olhos, esperando que aquelas pessoas que ele mais amava parecessem mais bonitas, e que as coisas fossem mais agradáveis à sua vista que fossem do seu gosto. Achávamos que ele sabia o que as fotos representavam, que foram enviadas para ele, mas descobrimos depois que estávamos enganados. Durante cerca de dois meses depois de ter sido operado, ele descobriu imediatamente, eles representavam corpos sólidos. Naquela época ele os considerava apenas como planos coloridos de festa ou superfícies diversificadas com variedade de tintas. Mas mesmo assim ele não ficou surpreso, pois as imagens pareceriam as coisas que representavam, e ficou impressionado quando descobriu que aquelas partes, que por sua luz e sombra pareciam agora redondas e irregulares, pareciam apenas planas como o resto. Perguntou então qual era o sentido mentiroso: Sentir ou Ver?

Ao ver a imagem de seu pai em um medalhão no relógio de sua mãe e lhe ser dito o que era, ele reconheceu uma semelhança, mas ficou muito surpreso e perguntou como poderia ser que um grande rosto pudesse ser expresso em um pequeno espaço, dizendo:

deveria ter parecido tão impossível para ele, quanto colocar um alqueire de qualquer coisa em um litro.

A princípio, ele podia suportar muito pouca visão, e as coisas que via ele considerava extremamente grandes; mas ao sentir as coisas maiores, as primeiras coisas que ele concebeu partiram, nunca sendo capaz de imaginar quaisquer linhas além dos limites que viu; ele sabia que a sala em que ele estava era apenas parte da casa, mas não conseguia conceber que toda a casa pudesse parecer maior. Antes de ser operado, ele obteve pouca vantagem em ver, pela qual valeria a pena passar por uma operação, exceto ler e escrever; pois ele disse: Ele pensava que não teria mais prazer em passear no exterior do que no Jardim, o que poderia fazer com segurança e rapidez.

E mesmo a Cegueira, ele observou, tinha esta vantagem, de que ele poderia ir a qualquer lugar na Escuridão muito melhor do que aqueles que podem ver e depois de ter visto, ele não perdeu essa qualidade tão cedo, nem desejou que uma Luz percorresse o caminho. casa à noite. Ele afirmou que cada novo objeto era um novo deleite, e o prazer era tão grande que ele queria maneiras de expressá-lo; mas sua gratidão ao seu Operador ele não conseguia esconder, nunca o vendo por algum tempo sem lágrimas de alegria em seus olhos e outras marcas de afeto. E se por acaso ele não viesse no momento esperado, ele ficaria triste por não poder deixar de chorar por sua decepção. Um ano depois de ter visto pela primeira vez, sendo levado até Epsom Downs e observando uma grande perspectiva, ele ficou extremamente encantado com isso e chamou-o de um novo tipo de visão. E agora, sendo recentemente operado de seu outro olho, ele diz que os objetos inicialmente pareciam grandes para este Olho, mas não tão grandes como pareciam inicialmente para o outro; e olhando para o objeto famoso com ambos os olhos, ele pensou que ele parecia duas vezes maior do que apenas com o primeiro olho operado, mas não o dobro, que podemos descobrir de qualquer maneira.

Reprodução do trabalho original de Cheselden

Nas próximas páginas, incluímos as imagens do trabalho original de Cheselden, que traduzimos acima. A tradução foi feita a partir da versão datilografada do texto publicada posteriormente no site no periódico *Philosophical Transactions* cotejadamente à versão original manuscrito.

VII. *An Account of some Observations made by a young Gentleman, who was born blind, or lost his Sight so early, that he had no Remembrance of ever having seen, and was couch'd between 13 and 14 Years of Age. By Mr. Will. Chesselden, F. R. S. Surgeon to Her Majesty, and to St. Thomas's Hospital.*

THO' we say of the Gentleman that he was blind, as we do of all People who have Ripe Cataracts, yet they are never so blind from that Cause, but that they can discern Day from Night ; and for the most Part in a strong Light, distinguish Black, White, and Scarlet ; but they cannot perceive the Shape of any thing ; for the Light by which these Perceptions are made, being let in obliquely thro' the aqueous Humour, or the anterior Surface of the Chrystalline (by which the Rays cannot be brought into a *Focus* upon the *Retina*) they can discern in no other Manner, than a sound Eye can thro' a Glass of broken Jelly, where a great Variety of Surfaces so differently refract the Light, that the several distinct Pencils of Rays cannot be collected by the Eye into their proper *Foci* ; wherefore the Shape of an Object in such a Case, cannot be at all discern'd, tho' the Colour may : And thus it was with this young Gentleman, who though he knew these Colours asunder in a good Light ; yet when he saw them

O o o

after

after he was couch'd, the faint Ideas he had of them before, were not sufficient for him to know them by afterwards ; and therefore he did not think them the same, which he had before known by those Names. Now Scarlet he thought the most beautiful of all Colours, and of others the most gay were the most pleasing, whereas the first Time he saw Black, it gave him great Uneasiness, yet after a little Time he was reconcil'd to it ; but some Months after, seeing by Accident a Negroe Woman, he was struck with great Horror at the Sight.

When he first saw, he was so far from making any Judgment about Distances, that he thought all Objects whatever touch'd his Eyes, (as he express'd it) as what he felt, did his Skin ; and thought no Objects so agreeable as those which were smooth and regular, tho' he could form no Judgment of their Shape, or guess what it was in any Object that was pleasing to him : He knew not the Shape of any Thing, nor any one Thing from another, however different in Shape, or Magnitude ; but upon being told what Things were, whose Form he before knew from feeling, he would carefully observe, that he might know them again ; but having too many Objects to learn at once, he forgot many of them ; and (as he said) at first he learn'd to know, and again forgot a thousand Things in a Day. One Particular only (tho' it may appear trifling) I will relate ; Having often forgot which was the Cat, and which the Dog, he was ashamed to ask ; but catching the Cat (which he knew by feeling) he was observ'd to look at her stedfastly, and then setting her down, said, So Puss ! I shall know you another Time. He was very much surpriz'd, that those Things which he had lik'd best,

best, did not appear most agreeable to his Eyes, expecting those Persons would appear most beautiful that he lov'd most, and such Things to be most agreeable to his Sight that were so to his Taste. We thought he soon knew what Pictures represented, which were shew'd to him, but we found afterwards we were mistaken; for about two Months after he was couch'd, he discovered at once, they represented solid Bodies; when to that Time he consider'd them only as Party-colour'd Planes, or Surfaces diversified with Variety of Paint; but even then he was no less surpriz'd, expecting the Pictures would feel like the Things they represented, and was amaz'd when he found those Parts, which by their Light and Shadow appear'd now round and uneven, felt only flat like the rest; and ask'd which was the lying Sense, Feeling, or Seeing?

Being shewn his Father's Picture in a Locket at his Mother's Watch, and told what it was, he acknowledg'd a Likeness, but was vastly surpriz'd; asking, how it could be, that a large Face could be express'd in so little Room, saying, It should have seem'd as impossible to him, as to put a Bushel of any thing into a Pint.

At first, he could bear but very little Sight, and the Things he saw, he thought extreamly large; but upon seeing Things larger, those first seen he conceiv'd less, never being able to imagine any Lines beyond the Bounds he saw; the Room he was in he said, he knew to be but Part of the House, yet he could not conceive that the whole House could look bigger. Before he was couch'd, he expected little Advantage from Seeing, worth undergoing an Operation for, except reading and writing; for he said, He thought he could have no more Plea-

sure in walking abroad than he had in the Garden, which he could do safely and readily. And even Blindness he observ'd, had this Advantage, that he could go any where in the Dark much better than those who can see ; and after he had seen, he did not soon lose this Quality, nor desire a Light to go about the House in the Night. He said, every new Object was a new Delight, and the Pleasure was so great, that he wanted Ways to express it ; but his Gratitude to his Operator he could not conceal, never seeing him for some Time without Tears of Joy in his Eyes, and other Marks of Affection : And if he did not happen to come at any Time when he was expected, he would be so griev'd, that he could not forbear crying at his Disappointment. A Year after first Seeing, being carried upon *Epsom Downs*, and observing a large Prospect, he was exceedingly delighted with it, and call'd it a new Kind of Seeing. And now being lately couch'd of his other Eye, he says, that Objects at first appear'd large to this Eye, but not so large as they did at first to the other ; and looking upon the same Object with both Eyes, he thought it look'd about twice as large as with the first couch'd Eye only, but not Double, that we can any Ways discover.

Read July:
4: 1728.
(or also April.
27: 1727.)

An Account of some Observations
made by a young Gentleman, who was
born blind, or lost his sight so early,
that he had no remembrance of ever
having seen, and was couched be-
tween 13 and 14 Years of Age. By
William Cheselden Esq. F. R. S. Sur-
geon to her Majesty &c.

Tho' we say of this Gentleman that he was blind, as we do of all people who have ripe Cataracts, yet they are never so blind from that cause, but that they can discern Day from Night; and for the most part in a strong Light distinguish black, white and Scarlet. But they cannot perceive the Shape of any thing: for the light by which these Perceptions are made, being let in obliquely thro' the aqueous Humor, or the anterior Surface of the Crystalline (by which the Rays cannot be brought into a Focus upon the Retina) they can discern in no other manner, than a sound Eye can thro' a glass of broken Jelly, where a great variety of Surfaces so differently refract the Light, that the several distinct Pencils of Rays cannot be collect- ed by the Eye into their proper Foci: wherefore the Shape of an Object in such a Case cannot be at all discerned, tho' the Colour may. And thus it was with this young Gentleman, who though he knew these Colours asunder in a good Light; yet when he saw them after he was couched, the faint Ideas he had of them before, were not suffi-
cient

cient for him to know them by afterwards: and therefore he did not think them the same, which he had before known by those Names. Now Scarlet he thought the most beautifull of all Colours, and of others the most gay were the most pleasing: whereas the first time he saw black, it gave him great Uneasiness; yet after a little time he was reconciled to it. But some Months after, seeing by accident a Negroe Woman, he was struck with great horror at the sight.

When he first saw, he was so far from making any Judgement about Distances, that he thought all Objects whatever touch'd his Eyes, (as he express'd it), as what he felt, did his Skin. And tho'^{ught} no Objects so agreeable as those that were smooth and regular, tho' he could form no judgement of their Shape, or guess what it was in any Object that was pleasing to him. He knew not the Shape of any thing, nor any one thing from another, however different in Shape or Magnitude. But upon being told what Things were, whose form he before knew from feeling, he would carefully observe that he might know them again. But having too many Objects to learn at once, he forgot many of them; and (as he said) at first he learn'd to know, and again forgot a thousand things in a day. One particular only (tho' it may appear trifling) I will relate. Having often forgot which was the Cat, and which the Dog, he was ashamed to ask: but catching the

Cat

Cat (which he knew by feeling) he was observed to look very stedfastly at her, and then setting her down, said, So Puff! I shall know you another Time. He was very much surprized, that those things which he had liked best, did not appear most agreeable to his Eyes; expecting those persons would appear most beautifull, that he loved most, and such things to be most agreeable to his sight, that were so to his Taste. We thought he soon knew what Pictures represented, which were shew'd to him, but we found afterwards we were mistaken: for about two Months after he was couched, he discovered at once, they represented solid Bodies; when to that time he consider'd them only as parti-colour'd Planes, or Surfaces diversified with variety of Paint. But even then he was no less surprized, expecting the Pictures would feel like the things they represented, and was amazed, when he found those parts, which by their Light and Shadow appear'd now round and uneven, felt only flat like the rest; and ask'd which was the lying Sense, Feeling or Seeing?

Being shewon his Father's Picture in a Lock-
et at his Mother's Watch, and told what it was, he acknowledged a likeness, but was vastly sur-
prized; asking, how it could be, that a large
Face could be express'd in so little Room: saying
it should have seem'd as impossible to him, as
to put a Bushel of him into a Pint.

At first, he could bear but very little light,
and

and the things he saw, he thought extremely large: but upon seeing things larger, those first seen he conceived less, never being able to imagine any lines beyond the bounds he saw. The Room he was in, he said, he knew to be but part of the House, yet he could not conceive that the whole House could look bigger. Before he was couched, he expected little advantage from seeing, worth undergoing an operation for, except reading and writing. For he said, he thought he could have no more pleasure in walking abroad, than he had in the garden, which he could do safely and readily. And even blindness, he observed, had this advantage, that he could go any where in the dark much better than those who can see. And after he had seen, he did not soon lose this quality, nor desire a light to go about the house in the night. He said, every new object was a new delight, and the pleasure was so great, that he wanted ways to express it: but his gratitude to his operator he could not conceal, never seeing him for some time without tears of joy in his eyes, and other marks of affection. And if he did not happen to come at any time, when he was expected, he would be so grieved, that he could not forbear crying at his disappointment. A year after first seeing, being carried upon Epsom Downs, and observing a large prospect, he was exceedingly delighted with it, and called it a new kind of seeing. And now being lately couched of his other eyes, he says, that objects at first appear'd large to this eye, but not so large as they did

at

at first to the other. And looking upon the same Object with both Eyes, he thought it look'd about twice as large as with the first couch'd Eye only but not double, that we can any ways discover.

An Explication of the Instruments used in the foregoing new Operation on the Eyes. By the same.

A D. represent the figures of the two Eyes, on which a new Operation was perform'd, by making an Incision thro' the Iris, which had contracted it self in both Cases so close, as to leave no Pupil open for the Admision of Light.

The Perforation of the Eye A. was made a little above the Pupil, the closing of which ensued upon the putting down a cataract, which not knowing how low it may be lodged, I made the Incision a little higher than the Middle, lest any part of it should lie in the Way.

The Eye B. was one I couch'd not long before, where the Patient had been blind but a few years. At first he thought every Object further from him than it was: but he soon learn'd to judge the true distance, the cause of which I shall endeavour to explain by the lowermost Figure, in which let the Circle H. I. K represent the Eye, H the place where an Image through the natural Pupil I was represented from the place

Bibliografia

ABBOTT, T. K. Molyneux's Problem. **The Lancet**, Londres, v. 161, n. 4165, 1839-1840, 1903.

ABD-EL-KHALICK, Fouad & LEDERMAN, Norm. Improving science teachers' conceptions of nature of science: A critical review of literature. **International Journal of Science Education** 22(7):665-701, 2000.

ADELL, Edna A. A. **A questão de Molyneux em Diderot**. 2010, 118p. Dissertação (Mestrado) - Curso de Filosofia, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2010.

ADOUR, Theo; STOLZE, Laura; AZEVEDO, Thales; SOUZA, Reinaldo; HARTZ, Thiago. **Teoria, experimentos e experimentos de pensamento na construção da teoria da relatividade geral**. Manuscrito ainda não publicado, 2024.

ARMSTRONG, A. H. **The Cambridge History of Later Greek and Early Medieval Philosophy**.: Cambridge: Cambridge University Press, 1967

BATISTA, Cláudia Bacelar. **Percepção e Linguagem**: a teoria da visão em Berkeley. 2005. 218p. Dissertação (Mestrado) - Curso de Filosofia, Universidade Federal da Bahia, Salvador, 2005.

BERKELEY, George; ROBINSON, Howard (ed.). **George Berkeley Principles of Human Knowledge and Three Dialogues**. New York: Oxford University Press, 1996.

BERKELEY, George; WILKINS, David R. (ed.). **An Essay towards a new Theory of Vision**. Dubai: [S.I.], 2002.

BOYLE, Deborah A. **Descartes on Innate Ideas**. London: Continuum, 2009.

BRISTOW, William. Enlightenment. **The Stanford Encyclopedia of Philosophy**, 2017.

BROWN, James Robert, Fehige, Yiftach (2023). Thought Experiments. **Stanford Encyclopedia of Philosophy**, 2023.

BUCHDAHL, Gerd. George Berkeley. In: GILLISPIE, Charles Coulston. **Dictionary of Scientific Biography**. 2. ed. New York: Charles Scribner'S Sons, 1970. p. 16-18.

BUENO, J. G. S.; SOUZA, S. B. A Constituição do Campo da Educação Especial Expressa na Revista Brasileira de Educação Especial (1992-2017). **Revista Brasileira de Educação Especial**, São Paulo, v. 24, n. , p. 33-50, 2018.

CASSIRER, Ernst. **A filosofia do iluminismo**. Campinas: Editora da Unicamp, 1992. Tradução de: Álvaro Cabral.

CHAUÍ, Marilena. **A nervura do real II: Imanência e liberdade em Espinosa**. Rio de Janeiro: Companhia das Letras, 2016.

CHESSELDEN, WILL. An Account of Some Observations Made by a Young Gentleman, Who Was Born Blind, or Lost His Sight So Early, That He Had no Remembrance of Ever Having Seen, and Was couch'd between 13 and 14 Years of Age. **Philosophical Transactions (1683-1775)**, v. 35, p. 447–450, 1727.

Conheça o INES. 2021. Disponível em: <https://www.gov.br/ines/pt-br/acesso-a-informacao-1/institucional/conheca-o-ines>. Acesso em: 26 jan. 2024

DASTON, Lorraine; GALISON, Peter. **Objectivity**. Princeton: Princeton University Press, 2021.

DEA, Shannon; WALSH, Julie; LENNON, Thomas M. Continental Rationalism. **Stanford Encyclopedia of Philosophy**, 2017.

DETIENNE, Marcel. **Mestres da verdade na Grécia arcaica**. Rio de Janeiro: WMF Martins Fontes, 2013.

DAINEZ, Débora; SMOLKA, Ana Luiza Bustamante. O conceito de compensação no diálogo de Vigotski com Adler: desenvolvimento humano, educação e deficiência. **Educação e Pesquisa**, São Paulo, v. 40, n. 4, p. 1093-1108, dez. 2014.

Declaração de Salamanca (1994). Sobre princípios, políticas e práticas na área das Necessidades Educativas Especiais. Brasília, DF: Coordenadoria Nacional para Integração da Pessoa Portadora de Deficiência. Disponível em: portal.mec.gov.br/seesp/arquivos/pdf/salamanca.pdf

DEGENAAR, Marjolein. **Molyneux's Problem: three centuries of discussion on the perception of forms**. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1996.

DESCARTES, René. **Méditations métaphysiques**. Paris: [S.I.], 1641.

DESCARTES, René. **La dioptrique**. Paris: [S.I.], 1637.

DOWNING, Lisa. **George Berkeley**. Stanford Encyclopedia of Philosophy, 2020.

DUIGNAN, Brian. **Plato and Aristotle: How do They Differ?** Britannica, 2024. Disponível em: <https://www.britannica.com/story/plato-and-aristotle-how-do-they-differ>. Acesso em: 04 fev. 2021.

EL-HANI, Charbel Niño. Notas sobre o Ensino de História e Filosofia da Ciência na Educação Científica de Nível Superior. In: Silva, Cibelle Celestino (org). **Estudos de História e Filosofia das Ciências: Subsídios para Aplicações no Ensino**. São Paulo: Livraria da Física, 2006, p. 3-21.

EVANS, Gareth. **Molyneux's question**. In: EVANS, Gareth. Collected papers. Oxford: Oxford University Press, 1985, p. 364-399.

FREIRE JR., Olival. **The Quantum Dissidents**. Berlin: Springer, 2015.

FRIEDMAN, Michael, **Ernst Cassirer**, The Stanford Encyclopedia of Philosophy, 2022.

GILLISPIE, Charles Coulston. **Denis Diderot**. In: GILLISPIE, Charles Coulston. Dictionary of Scientific Biography. New York: Charles Scribner's Sons, 1970. p. 464-466.

GORHAM, Geoffrey. Descartes on the Innateness of All Ideas. **Canadian Journal of Philosophy**. [S. L.], p. 355-388. set. 2002.

GUINSBURG, Jacob. **Diderot: obras i - filosofia e política**. [S.I.]: Editora Perspectiva, 2009. p. 95-140.

HATFIELD, Gary. The Cognitive Faculties. In: AYERS, Michael Richard; GARBER, Daniel. The Cambridge History of Seventeenth-Century Philosophy. Cambridge: Cambridge University Press, 1998. Cap. 28. p. 953-996.

HATFIELD, Gary. René Descartes. **Stanford Encyclopedia of Philosophy**, 2023.

HEALY, Lulu; FERNANDES, Solange Hassan Ahmad Ali. A Inclusão de Alunos Cegos nas Aulas de Matemática: explorando área, perímetro e volume através do tato. **Bolema**, Rio Claro, v. 23, n. 37, p. 1111-1136, dez. 2010.

HEALY, Lulu; FERNANDES, Solange Hassan Ahmad Ali. The role of gestures in the mathematical practices of those who do not see with their eyes. **Educational Studies in Mathematics**, v. 77, p. 157-174, 2011.

HEALY, Lulu; FERNANDES, Solange Hassan Ahmad Ali. Design para a Diversidade: matemática escolar e inclusão. In: **V Congresso Internacional 2017. Educação, Inclusão e Inovação**. São Paulo: Universidade Anhanguera de São Paulo, 2017. p. 1-18.

KARGON, Robert. William Molyneux. In: GILLISPIE, Charles Coulston. Dictionary of Scientific Biography. New York: Charles Scribner'S Sons, 1970. p. 464-466.

KJELDSEN, Tinne Hoff; LÜTZEN, Jesper. Interactions between mathematics and physics: The history of the concept of function—teaching with and about nature of mathematics. **Science & Education**, v. 24, p. 543-559, 2015.

LACEY, Hugh. Pluralismo metodológico, incomensurabilidade e o status científico do conhecimento tradicional. **Scientiae Studia**, v. 10, p. 425-454, 2012.

LEIBNIZ, Gottfried Wilhelm; REMNANT, Peter; BENNET, Jonathan (ed.). **New Essays on Human Understanding**. Cambridge: Cambridge University Press, 1996.

MENNO, Lievers. The Molyneux Problem. **Journal of the History of Philosophy**, v. 30, p. 399-416, 1992.

LOAIZA, Juan R. Molyneux's Question in Berkeley's Theory of Vision. **Theoria. An International Journal for Theory, History and Foundations of Science**, v. 32, n. 2, p. 231-247, 14 jun. 2017.

LOCKE, John; Manis, Jim (ed.). **An Essay concerning Human Understanding**. Pennsylvania: The Pennsylvania State University, 1999.

LOKHORST, Gert-Jan. Descartes and the Pineal Gland. **Stanford Encyclopedia of Philosophy**, 2013.

MARKIE, Peter & FOLESCU, M. Rationalism vs. Empiricism. **Stanford Encyclopedia of Philosophy**, 2011.

MATTHEWS, Michael R.; GAULD, Colin F.; STINNER, Arthur (org.). **The pendulum: Scientific, historical, philosophical and educational perspectives**. Berlin: Springer, 2005.

MATTHEWS, Michael S. História, filosofia e ensino de ciências: a tendência atual de reaproximação. **Caderno Brasileiro de Ensino de Física**, v. 12, n. 3, p. 164-214, 1995.

MARCUS, Russel; McEVOY, Mark (org.). **An Historical Introduction to the Philosophy of Mathematics: A Reader**. London: Bloomsbury, 2016.

MCCOMAS, William F. (org.). **The nature of science in science education: Rationales and strategies**. Berlin: Springer, 2006.

MELETTI, Silvia Márcia Ferreira; RIBEIRO, Karen. Indicadores educacionais sobre a educação especial no brasil. **Cadernos Cedes** (São Paulo), v. 34, n. 93, p. 175-189, 2014.

MOURA, CRISTIANO; CAMEL, Tânia; GUERRA, Andreia. A Natureza da Ciência pelas lentes do currículo: normatividade curricular, contextualização e os sentidos de ensinar sobre ciências. **Ensaio Pesquisa em Educação em Ciências** (Belo Horizonte), v. 22, 2020.

NEWMAN, Lex. Descartes' Epistemology. **Stanford Encyclopedia of Philosophy**, 2023.

NICHOLAS Saunderson FRS. The Royal Society. Disponível em: <<https://royalsociety.org/topics-policy/diversity-in-science/scientists-with-disabilities/nicholas-saunderson/>> Acessado em: 01/02/2021

O IBC. Disponível em: <http://antigo.ibc.gov.br/o-ibc/conselho-diretor/98-institucional/sobre-o-ibc/80-sobre-o-ibc#:~:text=O%20Instituto%20Benjamin%20Consstant%20nasceu,pelo%20fato%20de%20n%C3%A3o%20enxergarem>. Acesso em: 08 abr. 2022.

OLSÉN, Jan Eric. Vicariates of the Eye: Blindness, Sense Substitution, and Writing Devices in the Nineteenth Century. **Mosaic: A Journal for the Interdisciplinary Study of Literature**, v. 46, n. 3, p. 75-91, 2013.

PINHEIRO, Ulysses. Corpos invisíveis e corpos intangíveis: a solução de Leibniz para o problema de Molyneux. **O Que nos Faz Pensar**, Rio de Janeiro, v. 18, n. 26, p. 111-132, dez. 2009.

PRISELAC, Matthew. **Locke: knowledge of the External World**. Disponível em: <https://iep.utm.edu/locke-kn/>. Acesso em: 02 fev. 2021.

RESCHER, Nicholas, **What If? Thought Experimentation in Philosophy**. New Brunswick: Transaction Publishers, 2005.

SASSEN, Brigitte. Kant on Molyneux's Problem. **British Journal for The History of Philosophy**, v. 12, n. 3, p. 471-485, 2004.

S/A. **66-year-old Bodybuilder William Reed sees color for first time.** [S.I.] [s.n.], 2017. (6 min.), publicado pelo canal JustineReed97. Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=hqHlIRZnF38>. Acesso em: 26 jan. 2024.

SILVA, Larissa Vendramini da; BEGO, Amadeu Moura. Levantamento Bibliográfico sobre Educação Especial e Ensino de Ciências no Brasil. **Revista Brasileira de Educação Especial**, São Paulo, v. 24, n. 3, p. 343-358, set. 2018.

SMITH, Kurt. Descartes' Theory of Ideas. **Stanford Encyclopedia of Philosophy**, 2021.

SOUZA, Vera Lucia Trevisan de; ANDRADA, Paula Costa de. Contribuições de Vygotski para a compreensão do psiquismo. **Estudos de Psicologia** (Campinas), v. 30, n. 3, p. 355-365, set. 2013.

STUART, Michael T.; FEHIGE, Yiftach; BROWN, James Robert (eds.). Routledge Companion to Thought Experiments. New York: Routledge, 2018.

TREDANARO, Emanuele. LEIBNIZ, MOLYNEUX E AS CAUSAS FINAIS: uma ocasião de disputa perdida. **Revista Dissertatio de Filosofia**, v. 50, n. 1, p. 263-297, 23 out. 2016.

URMSON, J. O. **Berkeley**. Oxford: Oxford University Press, 1982.

VIDEIRA, Antonio Augusto Passos. A Filosofia de ciência de Ludwig Boltzmann: atomismo, mecânica clássica, darwinismo e pluralismo teórico. **Ciência e filosofia**, n. 6, p. 199-225, 2000.

VIGOTSKI, Lev Semionovitch. A defectologia e o estudo do desenvolvimento e da educação da criança anormal. **Educação e Pesquisa**, [S.L.], v. 37, n. 4, p. 863-869, dez. 2011.

VOLTAIRE. **Elementos da Filosofia de Newton**. 2^a ed. Campinas: Editora da Unicamp, 2015.

WILSON, Arthur McCandless. **Diderot**. São Paulo: Perspectiva, 2012

WOLFE, Charles T.; SHANK, J. B. Denis Diderot. In: ZALTA, Edward N. **The Metaphysics Research Lab**, Stanford University, 2022. p. 14. Disponível em: <<https://www-csli.stanford.edu/groups/metaphysics-research-lab>> Acessado em: 10/10/2022.

ZUNINO, Pablo Enrique Abraham. **Distância e Movimento em Berkeley: a metafísica da percepção.** 2006. 1 v. Dissertação (Mestrado) - Curso de Filosofia, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2006.