UFRJ

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO

EQUAÇÕES INDETERMINADAS E LUGARES GEOMÉTRICOS:

uma proposta alternativa para o estudo de equações em $\Re^2$

ANDRÉ SEIXAS DE NOVAIS

RIO DE JANEIRO

2011

EQUAÇÕES INDETERMINADAS E LUGARES GEOMÉTRICOS:
uma proposta alternativa para o estudo de equações em $\Re^2$

ANDRÉ SEIXAS DE NOVAIS

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática, Universidade Federal do Rio de Janeiro, como requisitos parcial à obtenção do título de Mestre Ensino de Matemática.

Orientador: Victor Augusto Giraldo

RIO DE JANEIRO
2011

Novais, André Seixas.

Equações Indeterminadas e Lugares Geométricos: uma proposta alternativa para o estudo de equações em $\Re^2$/André Seixas de Novais – Rio de Janeiro: UFRJ/ IM, 2011.

235 f

Orientador: Victor Giraldo

Dissertação (mestrado) - UFRJ/ IM/ Programa de Pos-Graduação em Ensino de Matemática, 2011.

Referências Bibliográficas: f. 167 - 171.

1. Educação Matemática. 2. Tecnologias Educacionais I. Giraldo, Victor Augusto. II. Universidade Federal do Rio de Janeiro, Instituto de Matemática, Programa de Pós-graduação em Ensino de Matemática. III. Título.

Equações Indeterminadas e Lugares Geométricos: uma proposta alternativa para o estudo de equações em $\Re^2$

André Seixas de Novais

Orientador: Victor Augusto Giraldo

Dissertação de Mestrado submetida ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática, Instituto de Matemática, da Universidade Federal do Rio de Janeiro – UFRJ, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Ensino de Matemática.

Aprovada por:

____

Presidente, Prof. Victor Augusto Giraldo

____

Prof. Carlos Eduardo Mathias Motta

____

Profa. Claudia Segadas Vianna

____

Prof. Ladário da Silva

____

Profa. Rosana Nogueira de Lima

RIO DE JANEIRO

2011

Dedico esta pesquisa a meu pai Adão e meu avô Jovelino, a busca pela vida os tornam exímios guerreiros da perseverança. Que Deus os abençoe durante os obstáculos enfrentados.

Agradecimentos

À Deus, pois através de sua intervenção tudo é possível.

À minha esposa Bárbara, pelo e amor e compreensão em todas as horas que estive ausente.

Aos meus filhos Lucas e Lívia, que nos momentos de maior dificuldade me acalmaram com seus sinceros sorrisos, abraço e beijos.

À minha mãe Zulmira, que sempre será minha inspiração, exemplo de trabalho e humanidade.

Ao Instituto de Matemática da UFRJ por me receber no Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática, proporcionando-me um enriquecimento conceitual, didático e pedagógico de fundamental importância em minha carreira profissional.

Ao meu professor e orientador Victor Giraldo, minha referência como Matemático e Educador, pelas excelentes aulas ministradas e pela orientação a este trabalho de pesquisa.

Aos professores Carlos Eduardo Mathias, Ladário da Silva e Jacqueline Bernardo, que são fontes de inspiração, sempre me motivaram à formação continuada e são peças fundamentais em minha formação como professor.

Às professoras Rosana Nogueira de Lima e Claudia Segadas Vianna pelas excelentes contribuições a este trabalho.

Aos meus alunos do UBM que apesar das dificuldades em conciliar faculdade, trabalho e família se dispuseram em participar da pesquisa apenas pela vontade de aprender.

Aos meus professores e colegas do mestrado que estiveram comigo durante esta caminhada.

Resumo

EQUAÇÕES INDETERMINADAS E LUGARES GEOMÉTRICOS: uma proposta alternativa para o estudo de equações em $\Re^2$

André Seixas de Novais

Orientador: Victor Augusto Giraldo

Resumo da Dissertação de Mestrado submetida ao Programa de Pós-graduação em Ensino de Matemática, Instituto de Matemática, da Universidade Federal do Rio de Janeiro - UFRJ, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Ensino de Matemática.

O objetivo deste trabalho é discutir e avaliar os efeitos de uma proposta alternativa para o estudo das representações das soluções de equações e sistema de equações em $\Re^2$, sobre a Imagem de Conceito de alguns estudantes. As dificuldades encontradas pelos alunos em relacionar as representações gráficas e algébricas de equações e funções foi um dos problemas que motivaram a estruturação desta pesquisa. A teoria de Imagem de Conceito é utilizada como embasamento teórico para a discussão dos resultados. A metodologia de pesquisa envolve um estudo empírico qualitativo, realizado com estudantes do 6º período do curso de Matemática e é baseada em testes semi-estruturados baseados em tarefas.

Palavras-chave: Imagem de Conceito, Raiz Cognitiva, Geometria Dinâmica, Equações Indeterminadas, Sistemas de Equações, Lugares Geométricos, Representações.

Abstract

INDETERMINATE EQUATIONS AND GEOMETRICAL PLACES: uma proposta alternativa para o estudo de equações em $\Re^2$

André Seixas de Novais

Orientador: Victor Augusto Giraldo

Abstract da Dissertação de Mestrado submetida ao Programa de Pós-graduação em Ensino de Matemática, Instituto de Matemática, da Universidade Federal do Rio de Janeiro - UFRJ, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Ensino de Matemática.

The aim of this work is to discuss and evaluate the effects of an alternative proposal for the study of representations of the solutions of equations and system of equations in $\Re^2$, on the Concept Image of some students. The difficulties encountered by students in relating the graphical and algebraic equations and functions were one of the problems that led to the structuring of this research. The theory of Concept Image is used as theoretical background for the discussion of the results. The research methodology involves a qualitative empirical study, conducted with students of 6th semester of the Mathematics course and it is based on semi-structured task tests.

Keywords: Concept Image, Cognitive Root, Dynamic Geometry, Indeterminate Equations, Simultaneous Equations, Geometric Places, Representations.

Sumário

Introdução

Durante os anos que venho lecionando aulas de Matemática no Ensino Médio e Superior, venho percebendo uma grande dificuldade enfrentada pelos meus alunos em relacionar as representações gráficas e algébricas de equações e funções. Este foi o problema que motivou o levantamento desta pesquisa.

Nas discussões tidas durante as aulas da especialização em Educação Matemática que conclui no ano de 2005, cheguei à conclusão que esta problemática não era apenas de meus alunos, mas sim dos estudantes em geral, um problema de grande discussão entre a comunidade de Educação Matemática.

Todavia apenas nas aulas do Mestrado em Ensino de Matemática, em discussões promovidas durante as aulas de Tendência em Educação Matemática, Análise I e II, percebi que a sequência curricular adotada por muitos livros do ensino médio, assim como do ensino superior, não favoreciam um encadeamento natural entre muitos conceitos da Matemática.

Uma grande surpresa que tive nesta época, durante as aulas de História da Matemática, é que a sequência que ensinamos atualmente, Funções $\rightarrow$ Geometria Analítica $\rightarrow$ Cálculo, na transição entre o Ensino Médio e Superior, promove em certos momentos uma artificialidade no desenvolvimento destes conceitos. Formalmente falando, podemos dizer que, historicamente, a sequência natural de evolução[1] entre esses conceitos foi, Geometria Analítica (sec. XVII) $\rightarrow$ Cálculo (sec. XVII) $\rightarrow$ Funções (sec. XVIII). Não estou aqui em defesa de uma construção da forma em que ocorreu historicamente, pois isto não garantiria, didaticamente, uma melhora cognitiva na compreensão dos conceitos, no entanto, acredito que a construção atual adotada na educação básica, não facilita em momento algum o desenvolvimento desses conceitos.

Ainda no mestrado, nas aulas de Equações Diferenciais, conheci o método qualitativo para solucionar equações, que envolve uma forte noção sobre o gráfico de equações e funções.

---

[1] Sabemos que noções sobre funções e cálculo, já eram utilizadas em períodos antes de Cristo por Babilônios, Egípcios e Gregos, todavia as definições formais como conhecemos hoje foram construídas entre os séculos XVI e XIX.

De minhas experiências em sala de aula, das reflexões que tive durante a especialização e o mestrado, foi possível levantar algumas hipóteses que, possivelmente, agravam o problema em questão:

- A falta de uma abordagem de coordenadas na reta antecipadamente ao estudo de coordenadas no plano;
- A abordagem extremamente reducionista de sistema de eixos ortogonais;
- A apresentação de propriedades e objetos matemáticos sem a devida argumentação matemática;
- A sequência pouco natural e muito distante entre os tópicos de geometria analítica e funções;
- A falta de uma abordagem sobre Lugares Geométricos;
- A falta de uma abordagem qualitativa sobre o número de soluções de sistemas de equações em $\Re^2$.

Outra hipótese levantada é a de que o uso de softwares de geometria dinâmica e planilhas eletrônicas podem minimizar as dificuldades enfrentadas pelos estudantes na compreensão de conceitos mais complexos sobre equações e seus gráficos.

Com base nesta problemática e nas hipóteses, resolvemos desenvolver uma sequência mais natural para o ensino de equações e sistemas de equações em $\Re^2$, delimitando o tema da pesquisa em *"Equações indeterminadas e Lugares Geométricos uma proposta alternativa para o estudo de equações em $\Re^2$, para alunos universitários ou do ensino médio".*

Esse trabalho é justificável à medida que inúmeros problemas vêm sendo enfrentados pelos ingressantes em disciplinas como o cálculo, álgebra linear, geometria analítica, entre outras do ensino superior. Uma das bases para um bom desenvolvimento em disciplinas como estas, é a interpretação das relações existentes entre as representações gráficas e algébricas de equações e funções. Acreditamos que a sequência didática[2] atualmente encontrada em alguns livros do ensino médio, assim como o tipo de abordagem extremamente informal agrava a compreensão dos significados dos conceitos, disponibilizando ao futuro ingressante na área de exatas um repertório disperso e sem conexão entre os tópicos estudados.

Tomaremos como proposta alternativa para o tema em questão a seguinte sequência didática: coordenadas na reta, coordenadas no plano, lugares geométricos, equações indeterminadas e sistemas de equações. Desta forma, buscamos estender as noções adquiridas em $\Re$ para $\Re^2$, a conjectura e a generalização das principais propriedades relacionadas a pontos do plano, à compreensão do significado de lugar geométrico como conjunto de pontos, o reconhecimento do gráfico de uma equação como o lugar geométrico das soluções da equação e a interpretação do número de soluções de um sistema de equações a partir dos pontos de interseção entre os lugares geométricos das equações.

Não pretendemos de forma alguma esgotar toda a apresentação possível para este tema, nem tão pouco mudar a estrutura atualmente encontrada na educação básica, todavia objetivamos apresentar uma proposta alternativa que sirva de reflexão e complementação do estudo de equações em $\Re^2$ e seus gráficos. Não discutiremos também, as relações existentes entre as equações polinomiais e as funções analíticas, o que deixaremos como objeto de futuros estudos, contudo acreditamos que a proposta alternativa a ser apresentada servirá como um bom pré-requisito para o estudo de funções.

As conclusões pretendidas com esta pesquisa ocorrerão a partir da elaboração de um estudo empírico qualitativo e semi-estruturado de forma a analisar e comparar o repertório teórico anterior à proposta e posterior à sua aplicação.

Para o capítulo 1 apresentaremos uma revisão bibliográfica, referente a algumas pesquisas voltadas ao tema Álgebra, que de certa forma estimularam a reflexão crítica e propuseram estímulos para a elaboração da sequência didática. Destacaremos nesta seção os três níveis da álgebra descritos por Tall & Thomas (2001), assim como os trabalhos de Tabach & Friedlander (2008) que discutem a possibilidade do uso de

---

[2] O termo Sequência Didática estará sendo utilizado neste trabalho como um conjunto encadeado de procedimentos planejados para ensinar determinado conceito.

planilhas eletrônicas para o tratamento inicial da álgebra, Weigand & Weller (2001) que procuram analisar o estilo do estudante ao resolver um problema, Malisani & Spagnolo (2008) que discutem o conceito de variável na transição entre a aritmética e a álgebra, Bloch (2003) que discute os efeitos da informalidade extrema na apresentação dos conteúdos de matemática e as ambiguidades das representações, Eraslan (2008) que apresenta a teoria sobre redução da abstração e Abramovitza et. al. (2009) que descreve os processos de compreensão de um teorema. No capítulo 2, faremos um resumo do referencial teórico que fundamentará a análise dos resultados da pesquisa, baseado na teoria de Imagem de Conceito de Tall & Vinner (1981); na noção de Unidade Cognitiva, levantada por Banard e Tall (1997) e aplicadas por Crowley e Tall (1999); e na noção de Raiz Cognitiva, sugerida por Tall (1989) e descrita nos trabalhos de MacGowen, DeMarois e Tall (2000) e Giraldo (2004). No capítulo 3, discutiremos a proposta alternativa para o estudo de equações indeterminadas e sistemas de equações, assim como as referências que forneceram noções para o planejamento e elaboração das atividades. Destacaremos ainda nesse capítulo a análise de um livro didático da educação básica que apresenta uma abordagem essencialmente tradicional. No capítulo 4, descreveremos a metodologia empregada em nosso estudo empírico. No capítulo 5, relataremos a análise comparativa dos resultados individuais, finalizando com uma conclusão geral dos resultados obtidos.

1. Algumas visões da Álgebra

Tall & Thomas (2001) discutem o desenvolvimento cognitivo do significado dos símbolos na álgebra, iniciando com os **Símbolos na Aritmética** e, em seguida, passando por três níveis da álgebra: **Álgebra de Atribuição, Álgebra de Manipulação** e **Álgebra Axiomática (**termos apresentados pelos autores neste trabalho de 2001).

Inicialmente, em seu trabalho, os autores destacam o desenvolvimento cognitivo na aritmética que conduz ao pensamento algébrico. Esse desenvolvimento mostra um aumento constante na sutileza dos procedimentos de contagem a longo prazo, passando por processos cada vez mais eficientes. Gray & Tall (1994), amparados em Thurston (1990), descrevem um desenvolvimento cada vez mais sofisticado na compreensão dos processos de adição e dos conceitos de soma, como por exemplo, ao realizar a soma 3+4:

- **Contar tudo:** contam-se três objetos, "1, 2, 3", e depois quatro objetos, "1, 2, 3, 4", em seguida contam-se todos os objetos, "1, 2, 3, 4, 5, 6, 7" obtendo assim sete objetos.
- **Contar ambos:** Para se obter o 3, contam-se "1, 2, 3", depois dessa contagem, partindo do 4, conta-se “4, 5, 6, 7."
- **Contar a partir de:** conta-se 4 unidades a partir de 3, “4, 5, 6, 7."
- **Contar a partir do maior:** conta-se 3 unidades a partir do 4, "5, 6, 7."
- **Fato derivado:** "3+4” é menor que 8, portanto é 7."
- **Fato conhecido:** "3+4” é 7.

Essas diferentes formas de realizar a adição exigem uma série de diferentes níveis de compreensão, como destacam Tall & Thomas (2001).

Davis (1983) apud Tall & Thomas (2001), distingue com eficiência os termos “processo” e “procedimento”, destacando que é útil reservar o termo “procedimento”, como um algoritmo passo-a-passo específico, ficando o termo “processo” o que inclui vários diferentes procedimentos que têm o mesmo efeito. Sendo assim, “contar tudo”, “contar ambos”, “contar a partir de” e “contar a partir do maior” são procedimentos específicos para realizar o processo de adição. *“Em álgebra 2(a+3) e 2a+6 são dois processos distintos de atribuição, mas são processos equivalentes.”* (TALL; THOMAS, 2001, p. 591, tradução nossa)

Foster (1994) apud Tall & Thomas (2001), analisou a solução das equações, (A) 4+3=x, (B) 4+x=7, e (C) x+4=7.

Foster (1994) destaca que são três formas primitivas de álgebra, todavia as crianças menores evocam muitos procedimentos diferentes. A equação (A) pode ser solucionada por qualquer um dos processos de contagem apresentados, a equação (B) requer, pelo menos, “contar a partir de”, já a equação (C) pode causar mais problemas, pois algumas crianças podem pensar "a partir de que número devo começar a contar 4 unidades para chegar em 7?”. Para uma criança que conhece a comutatividade da adição, isso não importa, pois as equações (B) e (C) são equivalentes.

Segundo Tall & Thomas (2001), é comum nos referirmos à álgebra como aritmética generalizada. Isso pode ser natural para algumas crianças que possuem uma “rica compreensão da aritmética” o que torna essa transição entre a aritmética generalizada e a álgebra essencialmente natural. *“No entanto, não se pode presumir que cada criança que passou pela aritmética está pronta para noções generalizadas de expressões aritméticas.”* (TALL; THOMAS, 2001, p. 592, tradução nossa). A notação algébrica viola a sequência natural de leitura no ocidente (da esquerda para direita), como por exemplo, a expressão 2+3x4, deveria transmitir a idéia que se queira somar duas unidades ao triplo do número quatro, ou seja, 2+12. Porém muitas vezes a noção de leitura que parece normal para essas crianças os levam a somar 2 com 3, resultando a 5, e em seguida fazendo o quíntuplo de 4, resultando erroneamente a 20.

A passagem da aritmética para o simbolismo sintético da aritmética generalizada e álgebra leva o estudante a expressões mais complexas que causam em muitos casos uma transição muito difícil. Tall & Thomas (2001), trazem como exemplo, o caso da expressão 7+4 que na aritmética retorna ao resultado 11, todavia, na álgebra expressões do tipo 7+x, que é uma expressão de um processo de atribuição, não pode ser resultada; a partir do momento que não se conhece o valor de x. Davis, Jockush & McKnight (1978) apud Tall & Thomas (2001, p. 592, tradução nossa) destacam em seu trabalho que essa é uma grande dificuldade que os alunos do sétimo ano precisam enfrentar, eles dizem: “*Mas como posso adicionar 7+x, quando eu não sei o que é x?*”. Dentro desta mesma idéia, Matz (1980) apud Tall & Thomas (2001, p. 592, tradução nossa) comenta que a fim de trabalhar com expressões algébricas, as crianças devem *"relaxar as expectativas aritméticas sobre o bom-formato da resposta, ou seja, que a resposta é um número"*

Serão discutidos a seguir os três níveis da álgebra, segundo artigo de Tall & Thomas (2001): Álgebra de Atribuição, Álgebra de Manipulação e Álgebra Axiomática.

1.1. A Álgebra de Atribuição

Neste nível, podem ser atribuídos a expressões algébricas do tipo 4x-2y valores reais para x e para y. Por exemplo, para x=-1 e y=+2, temos $4\cdot(-1)-2\cdot(+2)=-8$. Neste tipo de atribuição de valores, os alunos podem perceber a diferença entre expressões algébricas do tipo 4x-2y e (4x-2)y, assim como a equivalência entre as expressões 4x-2y e 2(2x-y).

Tall & Thomas (1991) utilizam o trabalho com computador e posteriormente as calculadoras e papel-lápis para executar as tarefas da Álgebra de Atribuição. Procurando dar sentido a expressões do tipo "a+3", os autores usam o computador para variar os valores de "a", fazendo com que o computador gere implicitamente o processo de atribuição de valores na expressão. Neste trabalho é possível que o alunos percebam que a expressão 2(a+1), produz a mesma saída numérica que a expressão 2a+2, dando sentido à idéia de equivalência algébrica. Os autores destacam que o processo de atribuição de valores feito no computador permite aos alunos perceberem a diferença entre as expressões, sendo assim, as expressões "2+3·a" e "(2+3)·a" são diferentes, pois geram saídas numéricas diferentes, já as expressões "(2+3)·a" e "5·a", são equivalentes. Este processo leva os estudantes iniciantes em álgebra a exercerem um papel reflexivo frente ao uso de variáveis.

Os autores destacam dois resultados importantes deste tipo de abordagem:

- Com a utilização do computador, a Álgebra de Atribuição ganha uma importância jamais vista anteriormente, pois é possível proporcionar um ambiente em que o estudante possa estabelecer novas relações, fazer cálculos e previsões sem a necessidade de realizar qualquer manipulação com símbolos.

- Esta abordagem tem o potencial para dar sentido às expressões algébricas como processos de atribuição de valores, podendo lançar as bases para expressões equivalentes com diferentes procedimentos que representam o mesmo processo.

O trabalho de Tabach & Friedlander (2008) pode ser relacionado ao trabalho de Tall & Thomas (1991) e Tall & Thomas (2001), pois estes autores também exploram a possibilidade de tratar a álgebra em planilhas eletrônicas, promovendo assim a generalização de padrões e considerações dos aspectos conceituais na aprendizagem e habilidade das transformações algébricas.

Eles destacam um modelo de conceitualização da atividade algébrica resumido em três atividades: Geração, Transformação e Nível Meta-Global.

- Nas atividades de **Geração** temos a formação de expressões e equações envolvendo situações problemas quantificáveis padrões geométricos, sequências numéricas, etc. Um exemplo para este tipo de atividade seria "A soma de dois números é +6 e o produto entre esses números é -40. Determine um sistema de equações para encontrar esses números."
- Nas atividades de **Transformação** temos a mudança nas formas das expressões e equações, mantendo a equivalência. Um exemplo para este tipo de atividade seria "Escreva a equação $x=2y^2+8y-6$ na forma canônica."
- Já as atividades de **Nível Meta-Global** envolvem a resolução de problemas, modelagem, conjecturas, generalização e justificativas. Um exemplo para este tipo de atividade seria "Para $m \in \Re$, quais são as possíveis soluções para o sistema $\begin{cases} x^2 + y^2 - 2y = 4 \\ x + y = m \end{cases}$".

Tabach & Friedlander (2008) citam outros autores que discutem a transição entre a aritmética e a álgebra, indicando as planilhas eletrônicas como ferramentas com potencial de reduzir a demanda cognitiva no estágio inicial de transição.

Além disso, esse tipo de software possibilita a criação de inúmeras tabelas numéricas envolvendo expressões e uma grande quantidade de gráficos, tratando com muita eficiência a investigação de variações (atividade que se inclui no Nível Meta-Global).

As atividades destacadas no trabalho desses autores fazem parte de um projeto curricular denominado "*Compu-Math"*, que envolve atividades no laboratório de informática em 1/3 do tempo destinado à aprendizagem de matemática. As atividades eram realizadas combinando o computador com o papel-lápis, procurando que os alunos fizessem um paralelo entre os dois sistemas de notação (software e matemática).

A sequência de atividades apresentadas no *"Compu-Math"* leva Tabach & Friedlander (2008, p. 41-44) a uma discussão dos resultados de sua proposta de trabalho com planilha eletrônica:

- O uso das planilhas permite que os alunos implementem um aspecto intuitivo e operativo da equivalência simbólica. Segundo os autores há duas definições alternativas para o conceito de equivalência de expressões: *"a) duas expressões que apresentem o mesmo resultado quando qualquer número é substituído em ambas; b) uma expressão que pode ser derivada de uma expressão dada por meio de operações dadas."* (TABACH; FRIEDLANDER, 2008, p. 41, tradução nossa). Por ter um aspecto contextual mais numérico, a primeira definição é mais significativa para os iniciantes em álgebra, porém a infinidade de números exigidos nesta definição torna-se uma problemática em sua aplicação. Embora, em geral seja possível demonstrar essa equivalência sem passar por uma infinidade de números, esta não é uma prática comum para principiantes. Já a segunda definição é mais operacional, todavia depende de uma capacidade de transformação simbólica mais apurada. As planilhas eletrônicas permitem aos alunos praticarem a primeira definição, numa escala maior de números, dando-lhes um significado para o conceito de equivalência e, assim, fornecer uma transição mais acessível à segunda definição que é mais abstrata.
- Os alunos tendem a considerar as atividades em planilha como Geracional. A propriedade de produção de grandes massas de dados numéricos incentiva os alunos a procurar por padrões numéricos.
- A sequência de atividades permite aos alunos uma abordagem conceitual simbólica básica, usando uma variedade de trajetórias de aprendizagem. Esta sequência permite também uma transição gradual entre as atividades de Geração e de Transformação.
- As características das planilhas fornecem um *Feedback* entre algumas preocupações pedagógicas e cognitivas.

- As planilhas enfatizam o significado numérico de expressões equivalentes e promovem conexões e transições entre sequência numéricas e suas correspondentes simbolizações usando variáveis e expressões.
- Criam um ambiente de laboratório que permite aos que testarem e validarem seus resultados.
- Permitem aos alunos criarem várias trajetórias de aprendizagem, embora exercendo atividades simbólicas significativas.
- Promovem um autêntico ambiente de discussão espontânea e reflexiva sobre o significado dos processos e de seus resultados.

1.2.A Álgebra de Manipulação

Neste nível, as *"expressões são manipuladas algebricamente e a letra assume o papel de incógnita ou variável, em situações como resolução de equações ou trabalho com funções, respectivamente"* (LIMA, R, 2007). Neste nível há um trabalho com os números e com a manipulação entre símbolos matemáticos.

Por exemplo, em equações da forma $3x-2(4x^2-y)=5x-3y$, para que os alunos encontrem seu conjunto solução (ou pelos um subconjunto do conjunto solução) é necessário que haja uma manipulação entre símbolos e não apenas a utilização da Álgebra de Atribuição.

Para Tall & Thomas (2001, p. 593, tradução nossa), esse nível *"É a forma da álgebra que se encontra nos programas escolares tradicionais."*. É tida pelo público em geral, como uma das partes da Álgebra de maior dificuldade cognitiva.

Na Álgebra de Manipulação, os alunos são capazes de compreender igualdades do tipo $x^2-y^2=(x-y)(x+y)$ e ainda que equações da forma $y=ax^2+bx+c$, são equivalentes com a equação de 2º grau da forma $y=a(x-m)^2+k$ na forma canônica.

Dentro deste contexto, estudantes bem sucedidos em álgebra possuem facilidade na conexão entre as representações de uma equação. No universo de conversão entre as diversas representações, os níveis da Álgebra de Atribuição e da Álgebra de Manipulação devem estar em consonância.

1.2.1. A Álgebra de Manipulação, as Representações e o Computador

Apesar de não relacionado diretamente aos trabalhos de Tall & Thomas (2001), sobre a Álgebra de Manipulação, é possível relacionar o trabalho de Weigand & Weller (2001) a esse nível da Álgebra. Em seu trabalho, esses autores apresentam uma investigação empírica com alunos do 11º ano de escolaridade na Alemanha. Foi realizada uma investigação usando Sistemas de Computação Algébrica - CAS[3] com os estudantes, nos conceitos sobre a função quadrática foi utilizado o "Derive" e com funções trigonométricas foi usado o 'Mathplus'. O interesse principal foi no estilo dos estudantes na resolução de problemas e a procura por mudanças nesses estilos, como atividades em relação ao tradicional papel-lápis. Houve um interesse nas possibilidades de desenvolver um método de pesquisa com base nos "protocolos de computador"[4]. O estudo deve ser visto como de caráter exploratório para o desenvolvimento de novas hipóteses de investigações empíricas.

Weigand & Weller (2001) citam vários autores que buscam uma melhor base para o desenvolvimento de um conceito ao trabalhar com diferentes representações. Eles deixam claro que as propostas não são novas e têm sido discutidas há anos pela comunidade de Educação Matemática. Porém há novas ferramentas para se tratar o assunto, o que traz novas esperanças na possibilidade de cumprir as expectativas de forma mais eficaz.

Algumas importantes questões colocadas por Weigand & Weller (2001, p. 88):

- Os alunos realmente usam os métodos oferecidos pelas novas tecnologias? Como eles trabalham com os CAS? E como é seu trabalho de mudança de estilo em relação ao tradicional papel-lápis?
- Eles alcançam uma melhor compreensão do conceito de função?

[3] CAS – Computer Algebra System.

[4] Programa que grava as ações feitas pelos estudantes no computador, o autor destaca as vantagens deste tipo de metodologia frente a entrevistas e filmagens.

Estas questões dizem respeito a um relacionamento que tem uma importância central no processo de aprendizagem: por um lado a relação entre ações e estilos de trabalho, e por outro a compreensão e desenvolvimento de conceitos.

Esses autores vêem os estilos de trabalho em Matemática de três maneiras (WEIGAND; WELLER, 2001, p. 88):

- Primeiro, a análise no Nível de Ferramentas, como por exemplo, o trabalho com papel-lápis, computadores ou modelos físicos;
- Segundo, a análise no Nível de Representação, tais como: gráficos, tabelas, esquemas ou imagens.
- Terceiro, a análise no Nível do Objeto Matemático, onde vemos um estilo de trabalho como uma sequência de ações que operam em objetos e os transformam.

Um **objeto** pode ser, por exemplo, uma equação, uma função, ou uma figura geométrica; já uma **ação** pode ser multiplicar (ambos os lados de uma equação), diferenciar (função), ou rotacionar (uma figura geométrica). Às vezes, um passo desta sequência pode ser dividido em vários sub-passos, por exemplo, uma multiplicação de equação por um número pode envolver a multiplicação de vários termos da equação.

Investigações empíricas são apresentadas pelos autores, mostrando que a relação entre compreensão conceitual e atividades do aluno precisa ser enquadrada em um novo caminho. As possibilidades complexas da nova ferramenta, a facilidade de gerar gráficos apenas pressionando um botão, e as dificuldades técnicas dos estudantes mostram que o computador tem um papel especialmente novo, em comparação a outros meios de comunicação em sala de aula. Dessa forma, os autores destacam a mudança nos estilos de trabalho dos alunos enquanto eles estão envolvidos com um CAS, comparado ao tradicional trabalho com papel-lápis.

As seguintes perguntas sobre as mudanças de estilos de trabalho estavam no centro da investigação proposta por Weigand & Weller (2001, p. 90-91):

- No trabalho com funções, pertinente a hipótese de que um computador reorganiza as ações matemáticas: como um CAS, afeta os estilos de trabalho dos alunos?

- Na utilização das estratégias de pesquisa: Como a interação expressão-gráfico afeta o desenvolvimento de estratégias de busca quando se trabalha com funções?
- A característica essencial da interação com o software é que o aluno recebe um *feedback* do computador. As respostas do computador devem ser lidas e interpretadas pelo aluno, e esta interpretação depende de conhecimentos matemáticos básicos pelo aluno. Isso leva à terceira pergunta: Como é que os conhecimentos básicos de matemática do aluno afetam a sua interpretação no *feedback* do CAS?

1.2.2. A Álgebra de Manipulação e as Variáveis

Outro trabalho que pode ser relacionado à Álgebra de Manipulação é o artigo de Malisani & Spagnolo (2008, p. 19, tradução nossa), que destacam *"a introdução do conceito de variável representa um ponto crítico na transição entre a aritmética e a álgebra"*. É um conceito complexo, pois é utilizado com diferentes significados e em diferentes situações. Em seu artigo, é feita uma análise da noção de "desconhecido" interferindo na interpretação de variável "em relações funcionais" e os tipos de linguagens utilizadas pelos alunos na resolução de problemas. É analisado também o papel do conceito de variável no processo de tradução da linguagem algébrica para a linguagem natural.

Segundo os autores, desde o início da década de 1980, em todo o mundo, vários pesquisadores têm estudado os obstáculos que os estudantes encontram quando começam a estudar álgebra. Os resultados de muitos desses estudos já se tornaram parte da cultura de pesquisadores em educação matemática.

Alguns obstáculos epistemológicos são destacados pelos autores na transição entre a aritmética e a álgebra (MALISANI; SPAGNOLO, 2008, p. 22-23):

- A construção da linguagem simbólica foi muito lenta e difícil, passando de certos nomes que denotam as relações desconhecidas e indeterminadas, através da abreviatura destas palavras e de códigos intermediários entre as linguagens retórica sincopada e, finalmente, os símbolos.
- A ausência de uma linguagem algébrica adequada condicionou a evolução de procedimentos matemáticos de resolução, pois se teve que recorrer a outras

formas de linguagem, como: natural, aritmética ou geométrica, que eram semanticamente mais ricas do que a linguagem algébrica. Com a elaboração de uma linguagem algébrica mais adequada, as linguagens de apoio foram gradualmente sendo abandonadas.

- A noção do desconhecido tem sua origem na resolução de problemas que vem do cálculo de uma ou mais quantidades. Foi introduzido por Diofanto com o nome "Arithmos", que em grego significa "Número", que ele utilizava no sentido de a incógnita de um problema.
- A noção de variável como uma coisa que varia é muito antiga, por isso é difícil estabelecer exatamente a origem dessa concepção na história da álgebra. Sua evolução foi muito lenta: a partir da relação entre os números contidos em tabelas (Babilônios, Ptolomeu, Indus), através das quantidades dinâmicas, mas discretas indicadas pelo conceito de fórmula (Diofanto), através da variável em quantidades contínuas no estudo das leis físicas (Oresme, Galileu), através das curvas descritas em termos cinemáticos (século 17), através da descrição da relação entre variáveis (Gregory, Newton, Leibniz, Bernoulli, Cauchy), que leva precisamente ao conceito de função.

Dessa forma, para Malisani & Spagnolo (2008, p. 23, tradução nossa), destacar "*a álgebra como aritmética generalizada*" é demasiadamente redutor, porque se destina a ignorar a influência que outras áreas tiveram sobre o desenvolvimento da álgebra, tais como a geometria. A posição desses autores é no mínimo controversa com a posição de Tall & Thomas (2001), que assumem a álgebra como aritmética generalizada na transição inicial entre esses dois campos da matemática.

Outra proposta em seu trabalho é estudar o conceito da variável no processo de tradução da linguagem algébrica para a linguagem natural, partindo desta ótica e das questões epistemológicas levantadas pelos autores, estes elaboraram quatro questões de investigação (MALISANI; SPAGNOLO, 2008, p. 24):

- **1º grupo de questões (Q1)**: Qual a concepção de variável que os alunos utilizam no contexto de uma situação problema? Eles podem evocar mais concepções? Será que a noção de "desconhecido" interfere na noção de variável funcional? São evocadas concepções dependendo da situação problema? Será que isso depende do contexto?

- **2º grupo de questões (Q2)**: Se os alunos não dominam a linguagem padrão da álgebra simbólica, qual a linguagem que eles usam para resolver problemas?

- **3º grupo de questões (Q3)**: Será que os estudantes conseguem encontrar um significado entre o contexto dado e as equações? Eles usam a concepção do desconhecido ou da variável como relação funcional? Será que eles conseguem identificar as variáveis? Como eles interpretam os termos de uma equação linear?

- **4º grupo de questões (Q4):** [...] será que a presença de registros visuais permite a concepção de variável em relação funcional, evocando-a e/ou utilizando-a com mais facilidade na resolução de problemas?

Um dos quatro problemas apresentados em sua pesquisa, que pretende responder as questões Q1 e Q2 foi:

> *Charles e Lucy ganharam o montante de $300 na loteria. Sabemos que Charles ganhou o triplo do dinheiro apostado, enquanto Lucy ganhou o quádruplo do dinheiro que ela mesma apostou. a) Calcule a soma de dinheiro que Carlos e Lucy apostaram. Comente sobre o procedimento que você utilizou. b) Quantas soluções possíveis existem? Justifique a sua resposta. (MALISANI; SPAGNOLO, 2008, p. 25, tradução nossa).*

A segunda questão visa responder a questão Q3, em que foi solicitada ao aluno a formulação de um problema. Isso deve ser resolvido por meios de uma equação dada, ou seja, o aluno deve converter da linguagem algébrica para natural. *"Invente uma situação problema que poderia ser resolvida utilizando a seguinte equação: 6x-3y=18. Comente sobre o procedimento que você adotou."* (MALISANI; SPAGNOLO, 2008, p. 25, tradução nossa).

A terceira questão é de verificação e visa responder à segunda parte da Q1, querendo comparar os modelos com o contexto evocados pelos alunos. *"[...] Interprete com uma resposta "curta" as seguintes expressões: a) ax+by+c=0 e b) y=mx+q"*. (MALISANI; SPAGNOLO, 2008, p. 25, tradução nossa).

Quanto à quarta questão, uma situação/problema, sobre: "despesas mensais com telefone", pediu-se para os alunos refletirem sobre o conjunto solução do seguinte problema:

> *Para usar o telefone de outra pessoa, um homem se compromete a pagar uma taxa mensal de $5 e, além disso, $2 por hora para as ligações feitas por ele. Seja x o número de horas mensais de chamadas telefônicas feitas por ele e y total que ele vai pagar mensalmente. a) Estabeleça uma relação entre x e y e represente-a graficamente no plano cartesiano. b) Calcule o total que ele paga mensalmente e o número de horas mensais de chamadas feitas. Justifique a sua resposta. Quantas soluções possíveis existem? Justifique a sua resposta.* (MALISANI; SPAGNOLO, 2008, p. 25, tradução nossa).

Enquanto no primeiro problema o aluno tem liberdade para escolher o contexto de resolução, no quarto, o contexto é dado (geometria analítica). Há um objetivo de comparar os resultados dos problemas de 1 e 4, para analisar a influência do contexto, ou seja, o objetivo deste problema é encontrar respostas para Q4.

Esses autores tratam em seu artigo as equações lineares de duas variáveis por dois motivos. Primeiramente, porque esse tipo de equação representa um ponto de congruência a partir do qual decorrem aos alunos as concepções de letras como incógnitas ou coisas que variam. Em segundo lugar, porque essa equação é bem conhecida dos alunos, pois eles a estudam em diferentes pontos de vista: função linear, equação de uma reta e como uma componente do sistema linear.

Após análises qualitativa e quantitativa das questões de Q1 a Q4, novos grupos de questões surgiram (MALISANI; SPAGNOLO, 2008, p. 36):

- **5º grupo de questões (Q5):** "Como a concepção do desconhecido e variável funcional é ativada e usada? A passagem de uma concepção para outra é possível? Se sim, como isso acontece?"

- **6º grupo de questões (Q6):** Quais são as linguagens utilizadas? Está presente uma linguagem simbólica? Se sim, com que função?

- **7º grupo de questões (Q7):** Como é que acontece o processo de tradução da linguagem algébrica para a linguagem natural? Qual a dificuldade que os alunos encontram na interpretação do conceito de variável no processo de tradução?

1.3. A Álgebra Axiomática

Tall & Thomas (2001), assim como Lima R. (2007), destacam que, neste nível, encontram-se as estruturas algébricas, tais como os espaços vetoriais, anéis, grupos, sistemas lineares, etc. Neste tipo de desenvolvimento, são levadas em consideração duas formas contrastantes de processo:

- A idéia de estender uma experiência (estrutura matemática) anterior passando para uma posterior;
- Iniciar a nova construção a partir de uma nova Axiomatização.

A diferença cognitiva entre esses dois caminhos é explanada por Harel & Tall (1991) apud Tall & Thomas (2001, p. 595, tradução nossa), *"O primeiro envolve expansão da estrutura cognitiva, o segundo envolve a reconstrução e, portanto, é cognitivamente mais difícil."* Estas, portanto, conduzem a duas formas distintas de álgebra axiomática, uma delas com uma estrutura técnica que expande a experiência de lidar com mais variáveis, a outra de ter uma estrutura axiomática baseada em definições e deduções.

1.3.1. A Álgebra Axiomática e Representações

Dentro do contexto da Álgebra Axiomática, um trabalho que pode ser relacionado é o de Bloch (2003) que destaca que em muitos países, os primeiros conceitos de cálculo (tal como funções) são ensinados a partir de exemplos, observando algumas propriedades, generalizando-as partir dessas de forma implícita. "*Os estudantes não têm meios para discutir a verdade geral de uma declaração, ou examinar a validade de um teorema, em relação ao campo matemático.*" (BLOCH, 2003, p. 3, tradução nossa).

A autora propõe em seu trabalho a seguinte questão: "*é possível organizar atividades para alunos iniciantes de cálculo que os levariam a trabalhar em demonstrações e na validade dos teoremas?"* (BLOCH, 2003, p. 3, tradução nossa). Dessa forma, ela apresenta uma abordagem relacionada ao conceito de função, que pretende direcionar os estudantes que trabalham dentro de um ambiente gráfico para produzir, discutir e testar a validade de propriedades matemáticas, demonstrações e teoremas. A intenção da abordagem foi utilizar o aspecto processual dos gráficos para proporcionar um ambiente favorável para ligar o conhecimento intuitivo ao formal.

As principais questões colocadas pela autora são:

> *Que tipo de conhecimento é necessário para que os estudantes sejam capazes de produzir e, ou provar demonstrações matemáticas sobre as funções e para testar a sua validade? Que tipo de situações podem levar a este conhecimento" (BLOCH, 2003, p. 4, tradução nossa).*

O trabalho dela está dividido em três partes. Na primeira parte é questionada a abordagem usual para o ensino de funções e é descrito o tipo de conhecimento matemático que está faltando nesta organização. Na segunda parte, são analisadas as definições matemáticas para se trabalhar com funções e suas múltiplas representações. Na terceira, é apresentado um painel de tarefas para os alunos que os induz ao trabalho com as propriedades e demonstrações matemáticas de forma adequada.

Para Bloch, diferentemente dos anos 70, quando os alunos eram convidados a ingressar no cálculo usando as definições de limite com épsilons e deltas (o que já não é mais o caso, tanto na França como em outros países), hoje a sequência didática mais encontrada nos livros é a apresentação aos estudantes do gráfico de uma função, em que os próprios devem "generalizar" algumas propriedades de funções a partir daquele exemplo. A autora destaca:

> *[...] muitos estudantes que foram ensinados dessa forma não são capazes de compreender corretamente a natureza dos objetos matemáticos (tais como funções e limites) e não produzem demonstrações em problemas do cálculo.* (BLOCH, 2003, p. 5, tradução nossa).

Isso não quer dizer que a apresentação com épsilons e deltas seja a ideal, porém uma apresentação extremamente informal pode levar o estudante ao não conhecimento de uma argumentação matemática válida.

> *[...] para o início da graduação há pelo menos dois pontos de vista: na maioria dos casos, ainda falta a clareza conceitual a ser utilizada ativamente nos conceitos relevantes de um argumento matemático e, mais geralmente, os alunos têm pouca oportunidade de aprender quais são as características de uma argumentação matemática. (DREYFUS, 1999 apud BLOCH, 2003, p. 5, tradução nossa)*

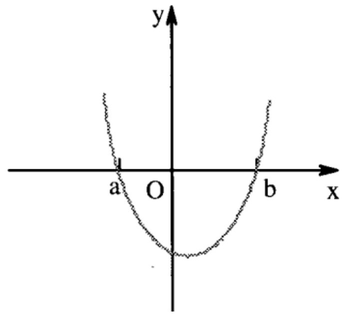


Gráfico 1: Uma típica tarefa sobre funções limitadas (inferiormente)

A autora descreve, usando como exemplo o gráfico acima, um tipo de trabalho que geralmente é concedido aos estudantes no ensino secundário, e que não lhes dá qualquer oportunidade de aprender algo sobre as explicações e provas matemáticas: Os estudantes recebem o gráfico com uma instrução, "Este é um gráfico de uma função, observem o limite inferior - no eixo y, esta é uma função limitada inferiormente" (estatuto de uma definição) ou outra instrução, como "mostra-se assim que a função é limitada inferiormente" (estatuto de uma prova).

A autora salienta que, no período da pesquisa (em 2003), na França, o ensino era organizado como segue: Primeiro, o professor faz uma tarefa padrão na sala de aula com seus alunos, usando uma variedade de representantes do conceito e, em seguida, os alunos devem fazer um trabalho semelhante, com outras representações emblemáticas do mesmo conceito. Os alunos devem interpretar as representações usadas (gráficos, tabelas de números, fórmulas...) da mesma forma que o professor fez anteriormente.

Destaco ainda que essa também é uma prática comum no Brasil, esta forma intuitiva e menos formal de apresentação na verdade, não traz algum conhecimento fundamentalmente matemático. É preciso estabelecer uma sequência de atividades intuitivas que sejam complementadas por aspectos formais, levando o estudante a um conhecimento realmente efetivo sobre o conceito em questão. Neste contexto, a observação, intuição, análise e conjectura devem ser complementadas pela generalização, dedução e indução, ou seja, a demonstração.

Bloch (2003) destaca ainda que a apresentação exemplificada anteriormente, sobre conceitos de funções (gráfico 1) faz com que os alunos não aprendam realmente o que são as funções (ou classes de funções), o que é o uso de uma propriedade na organização matemática, ou seja, por que é útil estudar as funções, como é possível distinguir essa propriedade de outras, quais são as funções (ou classes de funções) que não são limitadas, o que é o oposto de ser limitado. Nenhum trabalho adicional é feito sobre essas questões. Em outras palavras, esta maneira ostensiva de ensino não leva para o trabalho real sobre as demonstrações matemáticas: que é uma especificidade dos enunciados matemáticos que nos permitem saber o que determinam as propriedades, os objetos matemáticos que satisfazem tais propriedades e quais são aqueles que não satisfazem. Mas, para isso, precisamos de ferramentas para validar a propriedade. E, se sabemos validar uma propriedade, também podemos conhecer o seu oposto, o que não é possível na atual organização.

Schwarz & Dreyfus (1995, apud BLOCH, 2003, p. 6, tradução nossa) dizem que, na matemática, *"a aprendizagem é reduzida ao mapeamento entre vários sistemas de notação que significam o mesmo objeto abstrato"*. No mesmo trabalho, os autores apontam para o fato da investigação sobre a aprendizagem de funções e as persistentes dificuldades na relação entre os sistemas de notação diferentes. Eles salientam que os alunos não têm êxito nas tarefas de articulação entre as informações de representações diferentes.

Estes autores insistem no trabalho com as diversas representações de funções, e no fato de que muitas vezes o ensino não aborda explicitamente essa ambiguidade. Ambiguidade, neste contexto está relacionado às diversas representações de uma função (relação entre conjuntos, tabelas, fórmulas, gráficos, etc.). *“Apenas ambiguidades algébricas são tratadas, pois é da natureza algébrica o trabalho de ver se duas fórmulas representam a mesma função.”* (SCHWARZ; DREYFUS, 1995, BLOCH, 2003, p. 6, tradução nossa). Na maioria dos casos, a manipulação das ambiguidades sobre funções depende de fatores externos, tais como objetivos curriculares e o nível de ensino. Todavia, futuramente, essas ambiguidades serão tratadas como se tivessem pertencido, desde o início, ao contrato didático. Por exemplo, num caso em que os estudantes são treinados a construir uma tabela com valores de x e y, a partir da fórmula de uma função quadrática e em seguida traçar seu gráfico, não significa que futuramente esses alunos sejam capazes de consolidar a parábola com o lugar geométrico dos pontos que satisfazem à lei de formação de tal função, nem sejam capazes de inverter o processo de construção, ou seja, a partir do gráfico determinar a lei da função. Porém, em muitos casos, isto será exigido deste estudante como se fosse parte do contrato didático inicial.

Schwarz & Dreyfus (1995, apud BLOCH, 2003, p. 6-7) concluem que *"os problemas de ambiguidade são evitados no currículo padrão, porque os alunos não têm as ferramentas para lidar com elas"*

Ao mesmo tempo, Duval (1993, 1996) apud Bloch (2003) estudou a parcialidade e ambiguidade das representações, concluindo que devemos considerar as interações entre as diferentes representações de um mesmo objeto matemático como sendo absolutamente necessárias para a construção do conceito. O mapeamento entre os vários sistemas de notação que significam o mesmo objeto abstrato é necessário para a construção do conceito de função.

Bloch (2003) explicita que, na abordagem padrão, os gráficos são usados porque são vistos como uma forma mais fácil de mostrar as funções, ou seja, como "bons" representantes de funções: bom para o ensino, para a apresentação do conceito de função, economizando tempo e evitando o tédio do cálculo. Espera-se que os alunos possam ver nas funções e suas propriedades por meio de gráficos. No entanto, tem-se notado que o tratamento apenas com gráficos não parece adequado para os objetivos posteriores. Algumas questões levantadas pela autora:

> *Existem outras possibilidades, no mesmo ambiente ou em um ambiente diferente? E como cada representante pode abrir o caminho para o conceito? Quais são as possibilidades de ligação entre as várias representações em configurações diferentes?* (BLOCH, 2003, p. 8, tradução nossa)

Algumas representações diferentes sobre funções são levantadas pela autora, a fim de se ter um parâmetro organizacional para propor uma sequência didática (BLOCH, 2003, p. 9-10):

- Na representação gráfica, pode-se ver apenas o que está na janela, não se pode ver na medida em que os limites tendem ao infinito, o gráfico é discreto e a continuidade deve ser pressuposta. Entretanto a curva pode ser vista como um objeto matemático interessante para perceber propriedades. Todavia essa representação não pode ser usada para validar e provar, e é por isso que temos de introduzir outras ferramentas para operar com funções; caso contrário, o aluno perde a base de conhecimentos importantes sobre as funções.
- Na representação algébrica, pode-se caracterizar o tipo de função, por exemplo, uma função polinomial. Pode-se ainda deduzir propriedades conjecturadas,

transformar a fórmula por meio da equivalência, contudo não se pode ver a curva, nem seus valores e em alguns casos as suas raízes. A definição algébrica é muito útil para provar, mas não é tão boa para revelar intuições, destacando suas limitações no caso de funções mais complicadas.

- A representação geométrica: os problemas de variação geométrica entre magnitudes não são mais objetos de trabalho atualmente, como eram entre os anos 50 e 60. Os alunos não estão acostumados a trabalhar com este tipo de problema. "*Seria muito dispendioso, em termos de estratégia de ensino, reintroduzir essa configuração no trabalho em sala de aula.*" (BLOCH, 2003, p. 9, tradução nossa).
- A representação numérica tem benefícios importantes para os pré-requisitos dos estudantes, mas é muito parcial aos objetos representados. Em uma tabela numérica, pode-se ver apenas alguns valores, e pode-se inferir se a função é linear ou tem um valor extremo, mesmo que isso não seja verdade. Além disso, este cenário não é conveniente para a prova, porque é discreto. Essa configuração é útil para desenhar gráficos.
- A representação formal: os alunos são mal familiarizados com a definição formal, que é o melhor para validação e irá receber a maior atenção na universidade. Alguém poderia pensar que um dos objetivos no ponto de entrada do cálculo é tentar familiarizar os alunos com o trabalho neste cenário. Mas a definição formal não é suficiente para dar sentido aos conceitos de forma que deve ser conjugada com outras configurações, em que os alunos podem ser confrontados com fórmulas e gráficos. Nesta representação estão os símbolos como f, f^{-1}, fog, ...

Para a escolha das tarefas, Bloch destaca que as representações gráfica e formal parecem promissoras e que a representação algébrica deverá ser útil.

Reconhecidas as configurações úteis, foi preparado um inventário de possíveis tarefas e escolhidas aquelas que satisfazem pelo menos duas condições. Primeiro, as tarefas devem ser adequadas para envolver os alunos na construção das leis de formação de algumas funções específicas e o trabalho com suas propriedades, de modo a garantir aos estudantes conhecimentos matemáticos, na medida do possível. Em segundo lugar, as tarefas devem ser fáceis de serem introduzidas na sala de aula. Esta condição ergonômica é essencial para dar a chance de a abordagem ser alcançada.

Bloch (2003, p. 10-11) destaca que a conversão entre as configurações fornece muitas tarefas incomuns, como por exemplo:

- Encontrar informações sobre as propriedades de uma classe de funções em um gráfico;
- Encontrar a fórmula algébrica de uma função conhecendo o gráfico, os valores, e o tipo de função,
- Construir gráficos que satisfaçam determinadas condições;
- Investigar como um gráfico ou uma equação pode ser um representante de uma função composta;
- Compor os gráficos para encontrar o gráfico de uma função composta;
- Encontrar o gráfico da função inversa;
- Operar com as funções por meio de gráficos;

Posteriormente à etapa de organização da sequência didática pro meio das configurações, a autora apresenta tarefas que induzem ao trabalho com propriedades, conceitos e demonstrações.

1.3.2. A Álgebra Axiomática e a Redução da Abstração

Eraslan (2008) destaca em seu trabalho uma possível abordagem dos alunos para lidar com os conceitos da álgebra abstrata que é a redução da abstração.

> *Em Educação Matemática, o tema redução da abstração foi desenvolvido por Hazzan (1999) como um referencial teórico e, em seguida, utilizado como uma ferramenta para analisar as atividades mentais dos alunos de graduação em álgebra abstrata. (ERASLAN, 2008, p. 1051, tradução nossa)*

Esta situação ocorre quando os alunos são incapazes de adotar estratégias mentais em certos níveis de abstração, e para tornar esses conceitos acessíveis a si, inconscientemente, aprendem a reduzir o nível de abstração.

Redução da abstração é um referencial teórico que pode ser utilizado para entender o processo de pensamento dos alunos. Eraslan analisa o processo de pensamento de alunos nos conceitos de função quadrática, objetivando apresentar como a noção de redução da abstração pode auxiliar na análise de processos mentais dos alunos, como fica evidenciado em seu trabalho, "*[...] a noção de redução da abstração* *pode ser utilizada para analisar os processos mentais dos alunos que estudam os conceitos de funções quadráticas no ensino médio”.* (ERASLAN, 2008, p. 1052, tradução nossa).

Eraslan discute em seu artigo trabalhos de uma série de autores que tratam da noção de abstração em geral e de redução da abstração, destacando que esses temas estão presentes em diversas discussões da comunidade de educação matemática. Com base no comportamento dos alunos em como lidar com os níveis de abstração, o tema foi interpretado e categorizado em três grupos (ERASLAN, 2008, p. 1051-1052):

- Abstração em nível de qualidade das relações entre o objeto de pensamento e o pensamento pessoal. A idéia desta perspectiva é quando os alunos são incapazes de compreender uma idéia matemática e acabam tratando os conceitos mais familiares, tornando-os mais acessíveis para si;
- Abstração em nível de reflexão da dualidade processo-objeto. Nesta perspectiva, a concepção de processo precede a concepção de objeto. Aqui os alunos tendem a trabalhar com os procedimentos desencadeados automaticamente de uma tarefa, sem analisar as conexões, propriedades matemática e os conceitos;
- Abstração em nível e grau de complexidade do pensamento do conceito. Nesta perspectiva, quanto mais complexa é uma entidade mais abstrata ela é. Nesta concepção, os alunos procuram trabalhar apenas com poucos elementos de um conjunto em vez do conjunto todo, que é mais complexo.

1.3.3. Álgebra Axiomática e a Compreensão de um Teorema

Abramovitza, Berezinaa, Berman & Shvartsmana (2009, p. 577), descrevem os processos de compreensão de um teorema, do estudo das hipóteses, tese e demonstração de teoremas. As seguintes questões são discutidas:

- Quais são as hipóteses e tese de um teorema?
- Qual é o significado geométrico de um teorema?
- O que acontece quando uma ou mais hipóteses do teorema não são satisfeitas?
- O que são suposições necessárias e o que são suficientes?

Os autores afirmam que vários estudantes sentem dificuldades na aprendizagem da teoria, devido à abstração dos conceitos e à maneira formal de como os assuntos são apresentados na linguagem de teoremas e definições. Destacam ainda que os alunos vêem a teoria matemática como algo desvinculado da “matemática de cálculos”. Ou seja, os alunos aprendem a realizar vários procedimentos para se chegar a determinado resultado sem compreender plenamente os conceitos, tendo muita dificuldade em resolver problemas nunca vistos anteriormente.

Desta forma, os autores apresentam um processo em cinco etapas para compreensão de um teorema (que podem ser chamados de “*Método da Auto-Aprendizagem-SLM*”[5]), (ABRAMOVITZA et al., 2009, p. 577-578) :

- Deixar que os estudantes acessem os conceitos, definições e teoremas que são pré-requisitos a um teorema específico;
- Lidar com um problema que possibilite a formulação da conjectura desejada;
- Formular o teorema a partir da conjectura anterior;
- Estudar as hipóteses e a tese do teorema;
- Demonstrar o teorema.

O foco do trabalho desses autores é a quarta etapa (Estudar as hipóteses e a tese do teorema) e as questões apresentadas inicialmente.

Os problemas apresentados na SLM, no trabalho de Abramovitza et al. (2009, p. 578), estão centrados em dois teoremas do cálculo: Teorema de Fermat e Teorema de Rolle.

Os pontos principais da abordagem são:

- Apresentação de exemplos, relativamente simples, para encontrar contra-exemplos;
- Ao resolverem problemas aparentemente simples, os alunos adentraram em questões teóricas e se envolveram no processo de investigação;
- A aprendizagem dos alunos foi motivada por seus sucessos.

Inicialmente, é trabalhado o Teorema de Fermat utilizando o método SLM. Nesta etapa, foram apresentados alguns exercícios focados no teorema e revisados alguns itens como vizinhança, extremos locais, extremos absolutos e derivada.

[5] SLM - Self Learning Method

Em seguida, o autor apresentada algumas funções e questiona os alunos sobre mínimos locais, máximos locais, pontos onde a derivada se anula, pontos onde a derivada não existe. A partir desses exemplos os alunos conjecturam o Teorema de Fermat (esquema 1), concluindo que as hipóteses são suficientes, mas não são necessárias. Os exemplos deixaram as hipóteses do teorema mais compreensíveis e menos abstratas. A formulação das hipóteses da conjectura e da tese são apresentadas no esquema 1.

Assumptions

$\boxed{1.\ f(x) \text{ is differentiable at point } x_0}$

$\boxed{2.\ x_0 \text{ is a local extremum point of } f(x)}$

$$\Downarrow$$

Conclusion

$\boxed{f'(x_0) = 0}$

Esquema 1: Teorema de Fermat

Teorema de Fermat (Proposição) - Se f(x) é diferenciável no ponto x_o e x_o é um extremo local de f(x), então $f'(x_o)=0$. Este Teorema indica que se uma função real tem derivada num ponto e esse ponto é extremo local da função isto acarreta que a derivada da função neste ponto é zero. A dupla implicação está descartada neste caso.

Em seguida, há uma análise para verificar a necessidade de todas as hipóteses do teorema, foram apresentados exercícios para que houvesse uma compreensão geométrica do teorema e, por último, foi verificado se a recíproca do teorema era verdadeira ou falsa. Um procedimento análogo foi utilizado para apresentar o Teorema de Rolle.

Das idéias discutidas neste capítulo, que correlacionam temas da Educação Matemática com os três níveis de desenvolvimento da álgebra, é possível estruturar o esboço de sequências didáticas que partem do ensino de conceitos básicos até mais avançados da álgebra.

No capítulo seguinte, serão destacadas algumas teorias do pensamento matemático avançado, que junto aos temas já discutidos até aqui, servirão de fundamentação teórica para análise e estruturação metodológica desta pesquisa.

2. Fundamentação Teórica

Tall (1988) destaca que o “Movimento da Matemática Moderna" dos anos 60 foi baseado em uma abordagem estrutural da Matemática, acreditando-se que se as definições e deduções fossem corretamente formuladas, então isso acarretaria uma melhora na aprendizagem da Matemática. Porém, mesmo quando isto foi feito, as dificuldades persistiram.

Dentro da atividade matemática, noções matemáticas não são apenas utilizadas de acordo com a sua definição formal, mas também por meio de representações mentais que podem diferir entre as pessoas. Para destacar o papel desempenhado pela estrutura conceitual do indivíduo, os termos "Imagem de Conceito" e "Definição de Conceito", foram introduzidos em Vinner & Hershkowitz (1980) e, mais tarde, descritos por Tall & Vinner (1981).

Tall & Vinner (1981), baseados em seus estudos sobre a aprendizagem de limites e continuidade, descrevem a teoria denominada de Imagem de Conceito e Definição de Conceito. A teoria sugere que, especialmente em Matemática avançada, a Definição Formal[6] pode não ser a melhor maneira de introduzir um conceito matemático. Este fato é ilustrado pela própria história da Matemática, haja visto que muitos conceitos matemáticos tidos atualmente por definições formais precisas foram anteriormente concebidos através de conjecturas e a aquisição de suas propriedades.

Para que haja uma aquisição satisfatória da Definição Formal, deve haver uma familiarização prévia com o conceito, envolvendo, por exemplo, problemas, exercícios, hipóteses, propriedades, imagens gráficas, etc.

> *Afirmar que a definição formal não deve ser considerada um ponto de partida adequado para a introdução de um conceito matemático, como sugere a teoria discutida até aqui, de forma nenhuma deve significar que esta definição é dispensável. A definição deve ser considerada como um objeto muito importante, pois possui um papel central no ensino. No entanto, esse papel não pode ser o de ponto de partida para a introdução de um conceito matemático, como em geral, no ensino ocorre atualmente. A definição deve representar um objetivo. Mas, para que isso ocorra, é necessária uma familiarização previa com o conceito em questão. (ESCARLATE, 2008, p. 15)*

[6] Entenderemos por Definição Formal aquela aceita pela comunidade matemática em geral.

Dificuldades dos estudantes com as definições formais não são um fenômeno novo, e já ocupavam a mente de um dos grandes matemáticos, na virada do século:

> *O que é uma boa definição? Para o filósofo ou o cientista, é uma definição que se aplica a todos os objetos a serem definidos, e só se aplica a eles, é aquela que satisfaz as regras da lógica. Mas na educação não é isso, é aquela que pode ser compreendida pelos alunos. (POINCARÉ, 1908, p.117)*

Silva (2009) destaca que, em muitos casos, há nítidas discrepâncias entre um conceito matemático formalmente definido e aquilo que entendemos sobre tal conceito, ou ainda, sobre aquilo que explicamos em aula e aquilo que realmente é entendido pelo aluno.

Para Tall & Vinner, "*O cérebro humano não é uma entidade puramente lógica. Ele funciona de um modo complexo contrastando com a lógica matemática*." (1981, p. 151, tradução nossa).

Neste capítulo serão tratados: as bases da teoria de Imagem de Conceito e Definição de Conceito definidas por Tall & Vinner (1981), retomada por Tall (1988) e discutida ainda em Tall (1989); as idéias sobre Unidade Cognitiva levantadas por Banard e Tall (1997) e aplicadas por Crowley e Tall (1999) e as Raízes Cognitivas sugeridas por Tall (1989) e descritas ainda nos trabalhos de MacGowen, DeMarois e Tall (2000) e Giraldo (2004).

2.1.Imagem de conceito e definição do conceito

A partir de resultados observados no trabalho de pesquisa dos autores, que vai ao encontro à complexidade de funcionamento do cérebro humano, estes fazem uma distinção entre conceitos matemáticos formalmente definidos e os processos cognitivos pelos quais eles são concebidos. Justificando essa distinção os autores destacam:

> *Muitos conceitos que usamos felizmente não são formalmente definidos, contudo, nós aprendemos a reconhecê-los pela experiência e o uso em contextos apropriados. Mais tarde estes conceitos podem ser refinados no seu significado e interpretação, com aumento e sutileza, com ou sem o luxo de uma definição precisa. Normalmente, neste processo, é dado ao conceito um símbolo ou um nome que lhe permite ser comunicado e auxilia na sua manipulação mental. Mas a estrutura cognitiva total, que dá vida aos significados do conceito é muito maior do que a evocação de um único símbolo. É mais do que qualquer imagem mental, seja ela pictórica, simbólica ou de outra forma. Durante o processo mental de recordação e manipulação de*

> *um conceito, muitos processos associados são colocados em jogo, conscientemente e inconscientemente afetam o seu significado e uso. (TALL; VINNER, 1981, p. 151, tradução nossa)*

Dessa forma Tall & Vinner, definem a Imagem de Conceito como:

> [...] *a estrutura cognitiva total associada ao conceito, incluindo todas as figuras mentais, processos e propriedades associados. É construída através dos anos por experiência de todos os tipos, mudando à medida que o indivíduo encontra novos estímulos e amadurece. (1981, p.152, tradução nossa)*

Por exemplo, a Imagem de Conceito sobre uma equação de duas variáveis pode ser considerada como tudo aquilo que o indivíduo tem em mente sobre essas equações. Essa imagem é constantemente transformada à medida que o indivíduo enfrenta novas experiências com relação a tais equações. Essas experiências vêm por meio de exercícios, problemas, conjecturas, teoremas, etc. A Imagem de Conceito de um indivíduo sobre essas equações pode englobar várias propriedades, exemplos, imagens e processos, tais como: a equação $y=mx+q$, a relação entre dois conjuntos numéricos A e B, uma tabela na qual se exprimem valores arbitrários para uma das variáveis, determinando, assim, a outra, o gráfico da parábola associado à equação quadrática em uma variável, etc. Neste contexto, a Imagem de Conceito pode conter atributos inconsistentes, equivocados e até errados sobre determinado conceito, como por exemplo, um estudante pode conter em sua Imagem de Conceito a seguinte idéia: equação e função é a mesma coisa.

Vale ressaltar ainda que experiências externas à Matemática também influenciam a Imagem de Conceito do indivíduo, como é o exemplo do conectivo “ou”, para Teoria dos Conjuntos. Em Matemática, este representa a idéia de união entre dois ou mais conjuntos “o que está em um, o que está no outro e o que está em ambos”. Porém é comum no dia a dia utilizarmos com o sentido de exclusão “escolha, pirulito ou bala”.

Um exemplo apresentado por Tall & Vinner (1981), é sobre o conceito de subtração entre dois números; normalmente esse fato é ensinado, inicialmente, envolvendo números naturais. Nessa fase, pode-se observar que a diferença entre dois números causa uma diminuição em relação ao minuendo. Isto faz parte da Imagem de Conceito da criança, o que pode causar problemas mais tarde assim que a subtração de números negativos for desenvolvida. Desta forma, atributos mentais associados incluídos à Imagem de Conceito do indivíduo, sejam estes consistentes ou inconsistentes, podem conter sementes de futuros conflitos. Além de nem sempre serem globalmente coerentes, as estruturas cognitivas podem conter aspectos bastantes diferentes da Definição Formal do conceito.

A Definição de Conceito (se houver) é uma expressão utilizada para especificar determinado conceito. Pode ser uma reconstrução pessoal, pelo estudante, de uma definição. É a forma com que o estudante usa as palavras para se referir ao conceito. "*Se a Definição de Conceito é dada a ele ou construída por ele mesmo, esta pode variar ao longo do tempo*" (TALL; VINNER, 1981, p. 152, tradução nossa). Sendo assim, a Definição de Conceito pode diferir da Definição Formal e, além disso, pode ser inconsistente com a Imagem de Conceito. Ser coerente com a Definição Formal e ser consistente com a Imagem de Conceito são características independentes, ou seja, uma não implica a outra. Um indivíduo pode ter uma excelente Definição de Conceito de um determinado tema em virtude da simples memorização da Definição Formal, todavia essa Definição pode não ser consistente com uma pobre Imagem de Conceito de seu repertório. Em contra partida, um indivíduo com uma Definição de Conceito incoerente com a Definição Formal pode ter uma Imagem de Conceito rica em detalhes, processos, procedimentos, propriedades, etc.

Cada Definição de Conceito pode gerar sua própria Imagem de Conceito, fornecendo, assim, um papel de ligação entre uma parte da Imagem de Conceito com o restante da Imagem. Quando a Definição está desconectada da Imagem há uma simples "decoreba" da definição.

Há uma distinção nos trabalhos de Tall e Vinner após a co-autoria de 1981, nos trabalhos posteriores destes autores. Após a definição inicial, Vinner (1991) passa a considerar a Definição de Conceito como externa à Imagem de Conceito, enquanto Tall (2000) continua a considerar a Definição de Conceito como um atributo interno à Imagem de Conceito, como visto no parágrafo anterior. Neste trabalho, será adotada a formulação de Tall.

Dessa forma, as Imagens de Conceitos com suas respectivas Definições de Conceito podem ser inconsistentes com a Definição Formal, fornecendo assim uma fonte de conflitos cognitivos. Embora existam ainda casos em que a Definição de

Conceito é coerente com a Definição Formal e consistente com a Imagem de Conceito, porém inconsistências internas na Imagem podem gerar esses fatores de conflito.

2.1.1. Fatores de Conflito Potencial e Fatores de Conflito Cognitivo

Outro termo que é introduzido por Tall & Vinner (1981) é Imagem de Conceito Evocada, descrevendo assim toda a parte da Imagem de Conceito que é ativada em certo momento. Para eles:

> *"Em diferentes momentos, aparentemente imagens conflitantes podem ser evocadas. Apenas quando aspectos conflitantes são evocados simultaneamente precisa haver qualquer sentido real de conflito ou confusão." (TALL; VINNER, 1981, p. 152, tradução nossa)*

Um Fator de Conflito Potencial (Tall; Vinner, 1981) é uma parte da Imagem de Conceito que pode entrar em conflito com outra parte da Imagem de Conceito. Por exemplo, quando se ouve a palavra "função de 2º grau" instantaneamente pode vir à mente do indivíduo a imagem da parábola, pode vir a lei *"$f(x)=x^2$"*, pode vir a equação $y=x^2$. Num outro momento o mesmo indivíduo, ao ouvir a palavra "equação de 2º grau com duas variáveis", pode evocar a expressão *"$f(x)=ax^2+bx+c$"*, pode evocar a concavidade, a taxa de variação da curva gerada pelas soluções desta equação, a expressão $y=x^2$. Porém evocando simultaneamente aspectos da equação de 2º grau com duas variáveis e aspectos da função de 2º grau, vários conflitos e confusões podem surgir, como por exemplo: "parábolas com concavidade à direita ou à esquerda podem representar funções?".

Dessa forma, um Fator de Conflito Potencial (Tall; Vinner, 1981) é uma parte da Imagem de Conceito que pode entrar em conflito com outra parte da Imagem de Conceito. *"Quando a imagem de conceito evocada contém um fator de conflito potencial, temos o Fator de Conflito Cognitivo"* (Tall & Vinner, 1981, p. 153, tradução nossa). Ou seja, a Imagem de Conceito Evocada, que é ativada a partir de estímulos como os de resolver um exercício, fornecer um contra-exemplo, demonstrar um teorema, promove porções da mesma Imagem de Conceito que podem ser contraditórias em determinados momentos, gerando assim os Fatores de Conflito Cognitivo.

Em certos momentos evocar tais conflitos pode-se tornar interessante, fazendo assim com que o estudante abandone concepções equivocadas. Fatores de Conflito Potencial devem ser convertidos em Fatores de Conflitos Cognitivos, podemos citar como exemplo a Imagem de Conceito de um suposto aluno sobre a raiz quadrada de um número real, uma porção desta Imagem pode conter a seguinte estrutura: $\sqrt{1/4} = 1/2$, $\sqrt{4} = 2$, $\sqrt{81} = 9$, $\sqrt{2} \approx 1{,}41$, $\sqrt{S}$ é o lado do quadrado de área S, o resultado da raiz quadrada é sempre menor que o radicando. Observe que este suposto aluno tem uma boa Imagem de Conceito sobre a raiz quadrada de um número real, porém há um Fator de Conflito Potencial, pois o mesmo não percebe que a fração 1/4 é menor que 1/2. Questionar sobre o resultado da raiz quadrada de 1/4 e a relação de maior entre o radicando e a raiz pode-se fazer com que o aluno evoque simultaneamente as porções de sua Imagem de Conceito que estão em conflito, gerando o Fator de Conflito Cognitivo. Seria interessante ainda pedi-lo para calcular a $\sqrt{0{,}25}$ na calculadora e logo ele se depara com 0,50, que é maior que o radicando. Dessa forma, converter Fator de Conflito Potencial em Fator de Conflito Cognitivo é uma opção para reconstruir a Imagem de Conceito do estudante.

A própria estrutura do currículo de Matemática pode levar a crenças implícitas que são verdades num contexto, porém gerar conflitos cognitivos em outro contexto. Por exemplo, Vinner (1983) observa que muitos estudantes acreditam que uma tangente a uma curva é uma reta que toca a curva sem atravessá-la. Esta é a uma verdade implícita na geometria do círculo que gera um Fator de Conflito Potencial no contexto do cálculo. O pesquisador verificou que quando os alunos foram convidados a desenhar a tangente à curva $y=x^3$ na origem, muitos desenharam retas que não passam pela curva.

2.1.2. Unidades Cognitivas

Alguns anos após o desenvolvimento inicial da teoria de Imagem de Conceito, Tony Banard & David Tall (1997), introduzem o termo Unidade Cognitiva como sendo uma parte da Imagem de Conceito que o indivíduo pode manter no foco da atenção em um determinado momento. Apesar de serem idéias surgidas em momentos e contextos diferentes, os termos Unidades Cognitivas e Imagem de Conceito se complementam, apresentando uma relação estrita entre si.

Uma Unidade Cognitiva pode ser um símbolo (*f(x)*), um fato específico (f(3)=9), um fato geral ($f(x)=x^2$), uma relação (f: A em B), um teorema (o gráfico da função dada pela lei $f(x)=ax^2+bx+c$, com $a, b, c \in \Re$ e $a \neq 0$ é uma parábola), e etc.

Para Banard & Tall (1997, p. 41, tradução nossa), "*[...] a capacidade de conceber e manipular unidades cognitivas é uma facilidade vital para o pensamento matemático*". Esses autores destacam que dois fatores complementares que são importantes na construção de uma poderosa estrutura de pensamento são (1997, p. 41):

1) a capacidade de comprimir informações em unidades cognitivas;

2) a habilidade de fazer conexões entre as unidades cognitivas tal que informações pertinentes possam ser colocadas ou retiradas do foco da atenção quando for conveniente.

Tall (2000) destaca que a quantidade de informação que um indivíduo é capaz de manter no foco de sua atenção num período curto de tempo é limitada. Neste sentido Giraldo, completa:

> *[...] Desta forma, a teoria de unidades cognitivas enfoca a capacidade humana de comprimir estruturas de informação matemática, formando novas estruturas que, conforme a demanda do pensamento do indivíduo, podem, por sua vez, ser usadas como elementos de um raciocínio mais geral ou reabertas, dando acesso aos elementos primários que as compuseram originalmente. (2004, p. 16-17)*

Silva (2009, p. 26) apresenta vários diagramas que representam muito bem a relação Imagem de Conceito, Definição de Conceito e Unidades Cognitivas. Na figura 1, destacamos um dos diagramas, o retângulo maior representa a IC - Imagem de Conceito do indivíduo contendo suas UC - Unidades Cognitivas representadas por círculos, as UC em negrito seriam as Imagens de Conceito Evocado. Percebem-se ainda, pelas setas, as conexões entre as UC, a DC - Definição de Conceito destacada no retângulo em pontilhado seria as expressões ou palavras que o indivíduo utilizaria para expressar sua Imagem de Conceito.

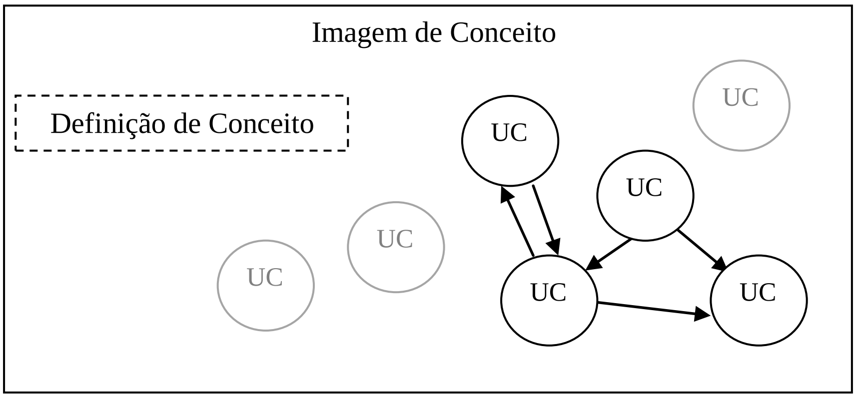


Figura 1: Relação entre Imagem de Conceito, Definição de Conceito e Unidades Cognitivas

Outro dos diagramas de Silva (2009, p. 30), apresentando o que o autor considera como o tipo de pensamento desejável de um aluno, está na figura 2. Observe que neste há na entrada uma tarefa cognitiva que serve de estímulo à IC do indivíduo e à sua respectiva DF, são evocadas assim várias UC que se conectam estimulando a DC que é influenciada pela DF - Definição Formal, promovendo como saída um comportamento intelectual.

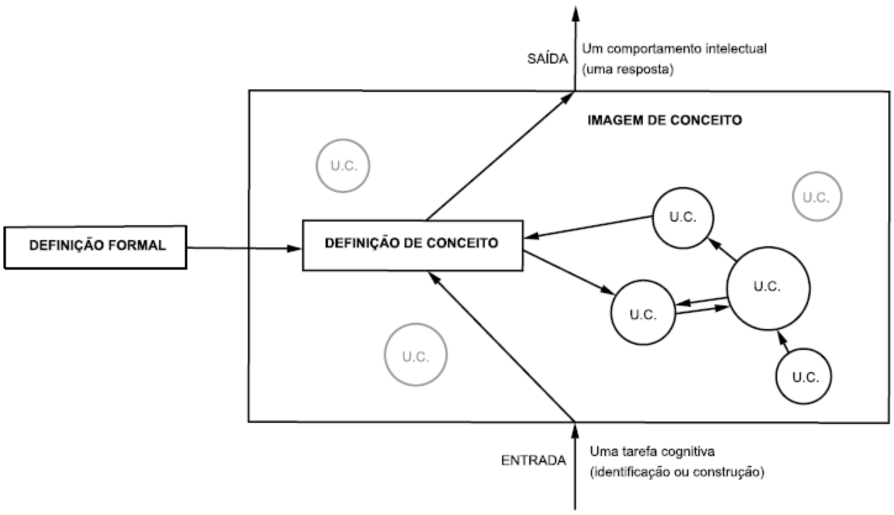


Figura 2: Tipo de Pensamento Desejável

2.1.3. Raízes Cognitivas

Tall salienta que:

> *Parece evidente que a maneira de ensinar matemática é começar a partir de conceitos simples familiares para o aluno e construir idéias mais complexas através de uma sequência de atividades que crescem continuamente em sofisticação*. (1989, p. 1, tradução nossa)

Porém destaca que "*É uma experiência salutar saber que um currículo cuidadosamente construído desta forma pode causar sérias dificuldades na aprendizagem.*" (1989, p. 1, tradução nossa). O autor destaca que, apresentando ao aluno um contexto simplificado da Matemática, inadvertidamente estamos simplificando regularidades que se tornam parte da Imagem de Conceito do indivíduo. Mais tarde, estas estruturas profundamente arraigadas ao subconsciente podem causar sérios Conflitos Cognitivos, atuando como obstáculos para a aprendizagem.

Giraldo (2004, p. 21) apresenta a seguinte questão, relacionada à apresentação de conceitos matemáticos mais complexos no início de um desenvolvimento teórico, *"[...] como motivar nos estudantes a inserção em contextos matemáticos teóricos mais complexos, sem pecar pela simplificação excessiva nem pelo formalismo excessivo?"*. O autor acrescenta ainda que a noção de Raiz Cognitiva é uma tentativa de responder à seguinte pergunta *"uma vez que a definição formal de um conceito não se caracteriza como referência pedagógica inicial adequada, que características deve satisfazer tal referência inicial?"* (2004, p. 21)

Partindo desse contexto, apresentaremos a definição de Raiz Cognitiva apresentadas por Tall (1989, p. 9), é *"um conceito de ancoragem, que o aluno considera de mais fácil compreensão, formando uma base sobre a qual uma teoria pode ser construída"*.

Tall (1989) sugere ainda que o computador oferece novas possibilidades, ao invés de construir do simples ao complexo, é possível construir ambientes de software adequados para o aluno explorar mais idéias complexas desde o início. Esta forma de aprendizagem envolve uma negociação do significado dos conceitos matemáticos modelados por computador no qual a organização do currículo e o papel do professor são cruciais. Para elaboração do novo currículo, Tall (1989) orienta que a organização em um computador permite desenvolver novas sequências para o currículo tomando como desenvolvimento inicial a Raiz Cognitiva, não os fundamentos matemáticos. Embora a noção Raiz Cognitiva tenha surgido inicialmente no trabalho de Tall (1989) motivado pelo uso do computador, as duas características principais da definição, ser acessível ao aluno e permitir desenvolvimentos teóricos posteriores; não incluem, necessariamente, o ambiente computacional.

Tall, McGowen & DeMarois, exemplificam isto muito bem quando apresentam o uso da Caixa de Função, como Raiz Cognitiva para introduzir o conceito de funções:

> *A caixa de função pode funcionar como uma Raiz Cognitiva, porque é um conceito que é significativo para um grande número de estudantes, incluindo a maioria das pessoas que têm dificuldade em matemática[...]. (2000, p. 255, tradução nossa)*

e completam,

> *A Caixa de Máquina de Função foi introduzida como uma representação visual do conceito de função visto como uma entrada/saída do processo, em que, quando um elemento específico entra, há uma única saída para essa entrada. (2000, p. 255, tradução nossa)*

Tall redefine Raiz Cognitiva apresentando a sua relação com a Imagem de Conceito do indivíduo, ele escreve que é:

> *[...] uma unidade cognitiva que tem significado para o estudante no estágio em questão, e ainda assim contém as sementes de expansões cognitivas para definições formais e desenvolvimento teórico posterior. (2000, p. 11, tradução nossa)*

Dessa forma, Tall caracteriza a Raiz Cognitiva como uma unidade cognitiva, consolidando-a como pertencente à Imagem de Conceito do indivíduo.

Tall, McGowen & DeMarois (2000, p. 255), partindo da idéia inicial de Tall (1989), caracterizam a Raiz Cognitiva como um conceito encontrado no início de uma sequência de currículo que:

1) é uma Unidade Cognitiva significativa e fundamental para conhecimento do aluno no início da sequência de aprendizagem,

2) permite o desenvolvimento inicial por meio de uma estratégia de expansão significativa em vez de uma reconstrução cognitiva,

3) contém a possibilidade de um significado a longo prazo, no desenvolvimento teórico posterior do conceito matemático,

4) é robusta o suficiente para permanecer útil quando uma compreensão mais significativa se desenvolve.

Podemos exemplificar a Raiz Cognitiva pela noção de número de soluções de um sistema de equações com duas incógnitas a partir do gráfico dessas equações. Partido da idéia que a Imagem de Conceito do estudante já reconhece o Lugar Geométrico das soluções de uma equação em $\Re^2$, isto é, mais especificamente, o estudante já reconhece o gráfico da equação $ax+by+c=0$ com $a\neq 0$ ou $b\neq 0$ e $a, b, c \in \Re$, como uma reta e $ax^2+by^2+cx+dy+e=0$, $a\neq 0$ ou $b\neq 0$ e $a, b, c, d, e \in \Re$, como uma parábola, elipse, hipérbole ou circunferência. Um software gráfico pode auxiliá-lo na construção da teoria sobre o número de soluções de um sistema de equações, utilizando a Raiz Cognitiva que estas soluções são dadas pelas interseções entre os gráficos. Ou seja, se a Imagem de Conceito de um indivíduo reconhece que os Lugares Geométricos das soluções das equações $x^2+y^2=4$ e $x+y=m$, com $m\in\Re$ são respectivamente uma circunferência e uma reta, o indivíduo pode variar o valor de m (em de um software gráfico), verificando assim os casos de tangência, secância e em que os gráficos não se tocam. Pode-se observar que esse ponto de partida atende as características apresentadas por Tall, McGowen & DeMarois (2000, p. 255):

- Pressupondo-se que o estudante já reconhece o Lugar Geométrico das soluções de uma equação, a interseção entre os gráficos de duas equações é uma unidade cognitiva significativa e fundamental para conhecimento do aluno no início da sequência de aprendizagem;

- A noção inicial sobre a solução de um sistema de equações a partir dos pontos de interseção entre as curvas permite uma estratégia de expansão significativa entre o estudo de sistemas lineares e não-lineares;

- Esse ponto de partida contém um significado cognitivo a longo prazo, que favorece um desenvolvimento teórico posterior de conceitos matemáticos mais avançados como a solução de sistemas lineares e não-lineares em $\Re^3$.

- Esse referencial é robusto o suficiente para permanecer útil, mesmo quando se desenvolve uma compreensão algébrica do número de soluções e quando se caracteriza os sistemas como determinados, indeterminados e impossíveis.

Concluí-se assim que o número de soluções de um sistema de equações em $\Re^2$, obtidos a partir da interseção entre os gráficos das equações é uma Raiz Cognitiva para a teoria de Sistemas de Equações.

A teoria de Imagem de Conceito, discutida neste capítulo, terá uma importância central na análise das relações existentes entre as variáveis da pesquisa, que serão exploradas com maior profundidade nos capítulos 5 e 6 desta dissertação.

3. Uma proposta alternativa para o estudo de Equações e Sistemas

O estudo sobre Equações Indeterminadas e Lugares Geométricos não é tratado na educação básica com essa denominação. Na verdade, na grande maioria dos livros didáticos do ensino médio as Equações Indeterminadas (que em nosso caso seriam as equações com duas variáveis) são tratadas singularmente no 1º ano do ensino médio ao se abordar o tema Funções, e no 3º ano do ensino médio quando se aborda a Geometria Analítica. No entanto, não é estabelecida qualquer correlação entre essas áreas, o que acreditamos tornar muito inapropriado para assimilação de propriedades e a generalização de conceitos, trazendo consequências insatisfatórias para futuros ingressantes em áreas da matemática superior, como o Cálculo.

Desta forma, buscam-se estratégias alternativas que levem os estudantes ao enriquecimento de sua Imagem de Conceito sobre a correlação entre as Equações e os Lugares Geométricos, assim como uma futura correlação com as funções analíticas. Na proposta alternativa que será apresentada, o tema será discutido a partir da seguinte estrutura: Coordenadas na Reta, Coordenada no Plano, Lugares Geométricos, Equações Indeterminadas e Sistema de Equações.

Entretanto, para compreender melhor esta proposta alternativa, a apresentação da estrutura de uma abordagem tradicional utilizada no ensino médio faz-se necessária. Tomaremos um livro didático do ensino médio para apresentar uma sequência didática comumente encontrada em alguns livros desta etapa da escolaridade, relacionada com o tema em questão.

3.1. Uma abordagem essencialmente tradicional

Para ilustrar a abordagem encontrada em alguns livros tradicionais, utilizaremos como referência a coleção **Matemática: Ciência e Aplicações** volumes 1, 2 e 3 de IEZZI, DOLCE, DEGENSZAJN, PÉRIGO & ALMEIDA (2004), aprovado pelo PNLEM/2006 “Programa Nacional do Livro para o Ensino Médio 2006”, que representa singularmente a estrutura encontrada em alguns livros didáticos.

3.1.1. Coordenadas na Reta

Embora não utilizando as noções de Coordenadas na Reta, a representação geométrica dos números reais é apresentada no capítulo 1 do primeiro volume desta coleção, denominado *"Conjuntos Numéricos"*. Nesta seção são apresentados os conjuntos IN, Z, Q, I, $\Re$ e sua representação geométrica na reta real. Nela, a discussão sobre o módulo de um número inteiro resume-se à seguinte descrição:

> *Damos o nome de módulo, ou valor absoluto, de **a** à distância da origem ao ponto que representa o número **a**. Assim, dizemos que módulo de -2 é 2, e que o módulo de 2 também é 2; indicamos* $|-2| = 2$ *e* $|2| = 2$. *(IEZZI et. al., 2004, vol. 1, p.10).*

Seguem-se, a partir daí, os exercícios. Apesar de apresentar uma definição essencialmente geométrica, nenhum exercício que envolva idéias geométricas é proposto, apenas atividades da forma *"Calcule: a)* $|-7|$ *[...]"*.

No capítulo 5 (primeiro volume), denominado "*Função Modular*", que provavelmente será abordada aproximadamente quatro meses depois de se ter visto a primeira descrição sobre módulo, retorna-se a essas idéias. Nesta etapa, a seguinte definição é apresentada:

> *Dado um número real x, chama-se módulo ou valor absoluto de x, e se indica como* $|x|$, *o número real não negativo tal que:* $|x| = x, \text{se } x \geq 0 \text{ ou } |x| = -x, \text{se } x < 0$. *(IEZZI et. al., 2004, vol.1, p. 146)*

Seguem daí mais alguns comentários sobre a definição e exercícios, sem qualquer menção a uma representação geométrica para tal definição.

3.1.2. Coordenadas no Plano

No capítulo 2 (primeiro volume), denominado *"Funções"*, na seção 6 é tratado *"Noções básicas de Plano Cartesino"*, descrevendo *"Um par ordenado de números é o conjunto formado por dois números em certa ordem. Usa-se a notação (a, b) para indicar o par ordenado em que **a** é o primeiro elemento e **b** é o segundo."* IEZZI et al (2004, p. 46). Posteriormente, os autores descrevem passos para representar tais "conjuntos" geometricamente. A primeira menção ao termo **coordenada** é feita na frase, *"A numeração dos quadrantes é feita em sentido anti-horário, a contar do quadrante correspondente aos pontos que possuem ambas as **coordenadas** positivas."*, como se fosse um conhecimento prévio do estudante. Seguem a partir daí alguns exercícios envolvendo coordenadas no plano e posteriormente a seção de construção do gráfico de funções.

No 3º ano do ensino médio, aproximadamente dois anos após o primeiro contato com as Coordenadas no Plano, é retomado esse tema no terceiro volume desta coleção. No capítulo 2, denominado *"O Ponto"*, inicia-se a construção dos conceitos de Geometria Analítica, sem qualquer correlação com o capítulo 2 do primeiro volume. Primeiramente, é apresentada uma breve introdução sobre o que é Geometria Analítica e seus idealizadores históricos. Posteriormente, é destacada em quatro parágrafos a sistematização do Plano Cartesiano, seguida por alguns exercícios.

A distância entre dois pontos, ponto médio e condição de alinhamento entre três pontos é devidamente deduzida, seguida por exercícios e testes vestibulares. Vale destacar que para a verificação do alinhamento entre três pontos, é dada ênfase à fórmula:

> *[...] calcular um determinante de terceira ordem que contenha em cada linha a abscissa de um dos pontos dados, a respectiva ordenada e o número 1, mantida nesta ordem. Se tal determinante for nulo, e só neste caso, os pontos estarão alinhados. (IEZZI et. al., 2004, vol. 2, p. 88).*

3.1.3. Lugares Geométricos

Os autores destacados não tratam, em nenhum de seus volumes, tópicos sobre o tema Lugar Geométrico.

3.1.4. Equações Indeterminadas

Apesar de não tratar esse tema, com essa denominação, os autores apresentam vários tópicos relacionados.

No capítulo 2 (primeiro volume), denominado Funções, iniciam-se as noções intuitivas sobre esse tema a partir de exemplos contextualizados, seguidos por exercícios nesta mesma linha de conduta. A partir daí os autores definem:

> *Em Matemática, se x e y são duas variáveis tais que para cada valor atribuído a x existe, em correspondência, um único valor para y, dizemos que y é uma função de x. O conjunto D de valores que podem ser atribuídos a x é chamado de domínio da função. A variável x é chamada de variável independente. O valor de y, correspondente a determinado valor atribuído a x, é chamado de imagem de x pela*

> *função e é representado por f(x). A variável y é chamada de variável dependente, porque y assume valores que dependem dos correspondentes valores de x. (IEZZI et. al., 2004, vol. 1, p. 33)*

Seguem daí exemplos e exercícios envolvendo funções definidas por fórmulas. Após a apresentação de vários exemplos de gráficos cartesianos retirados de revistas e jornais, os autores apresentam as noções básicas de Plano Cartesiano, já mencionadas no item 3.1.2 desta seção, e apresentam a construção do gráfico de uma função, como segue:

> *Como podemos construir o gráfico de uma função conhecendo a sua lei de correspondência y=f(x) e seu domínio D? Vejamos: Um método bem simples é apresentado: 1º passo: construímos uma tabela na qual aparecem os valores de x (variável independente) e os valores do correspondente y, calculando através da lei y=f(x). 2º passo: representamos cada par ordenado (a, b) da tabela por um ponto no plano cartesiano. 3º passo: ligamos os pontos construídos no passo anterior por meio de uma curva, que é o próprio gráfico da função y=f(x). (IEZZI et. al., 2004, vol. 1, p. 47)*

Seguem daí, como exemplos, a construção do gráfico de algumas funções e algumas conclusões:

- $y=2x$ com domínio real: são utilizados os passos citados, concluindo-se que o gráfico é uma reta;
- $y=3$ para x real: são discutidos os motivos da função ser chamada de constante;
- $y=x^2-4$ com domínio real: são utilizados os passos citados e denomina-se a curva de parábola;
- $y=12/x$ com domínio $\Re^*$: são utilizados os passos citados e denomina-se a curva de hipérbole.

Após alguns exercícios inicia-se o capítulo 3, deste mesmo volume, denominado Função Afim, com uma introdução sobre a modelagem de um problema envolvendo a corrida de um táxi e o valor a pagar e se define a partir daí:

> *Chama-se função polinomial do 1º grau, ou função afim, a qualquer função f de $\Re$ em $\Re$ dada por uma lei da forma $f(x)=ax+b$, em que a e b são números reais dados e a≠0. Na função $f(x)=ax+b$,*

> *o número a é chamado de coeficiente de x e o número b é chamado de termo constante.* (IEZZI et. al., 2004, vol. 1, p. 68)

Seguem assim os exemplos e a afirmação *"O gráfico de uma função polinomial do 1º grau,* $y = ax + b$, *com* $a \neq 0$, *é uma reta oblíqua aos eixos OX e OY."* (IEZZI et, al., 2004, vol. 1, p. 69), em seguida, vários exercícios envolvendo modelagem de problemas contextualizados e construção de gráficos são apresentados.

Em poucas linhas, descreve-se que o coeficiente de x será chamado de coeficiente angular e destaca-se que, posteriormente, será mostrada a sua relação com a inclinação que a reta faz com o eixo OX. Entretanto, essa relação não foi encontrada neste primeiro volume. Já o termo constante será chamado de coeficiente linear, e, pela primeira vez, é encontrada na sequência didática dos autores uma argumentação matemática sobre o motivo pelo qual o coeficiente linear é a ordenada em que a reta corta o eixo OY.

Para determinação dos zeros da função ou raízes, os autores apresentam a fórmula $x = -\frac{b}{a}$, com a devida argumentação matemática para tal fato. Porém, só a partir de um exemplo que é comentado que esse valor é a abscissa em que o gráfico corta o eixo OX.

Quanto ao crescimento e decrescimento da função e a sua relação com o sinal do coeficiente angular é apresentada uma justificativa matemática válida.

No capítulo 4 (primeiro volume), denominado "*Função Quadrática*", os autores apresentam uma construção similar ao capítulo anterior: introdução com modelagem, definição de função polinomial de 2º grau. Afirma-se, sem justificativa, que o gráfico é uma parábola, que se a>0 a parábola tem concavidade para cima e se a<0, a concavidade é para baixo. Apresenta-se, sem demonstração, a fórmula para o cálculo dos zeros da função, assim como a relação entre a quantidade de raízes e o discriminante $\Delta = b^2 - 4ac$.

Seguem daí inúmeros exercícios envolvendo todos os conceitos mencionados no parágrafo anterior e a fórmula para o cálculo das coordenadas do vértice com a devida justificativa matemática, reescrevendo a função $y = ax^2 + bx + c$ na sua forma canônica

$y = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right]$ e estudando a coordenada do ponto máximo da função, quando a<0, e a coordenada do ponto mínimo da função quando a>0.

Aproximadamente dois anos após terem estudado tais conceitos, os estudantes retomarão, nos capítulos 3 e 5 do terceiro volume da coleção, os conceitos de reta e parábola inseridos nos tópicos de Geometria Analítica, porém sem qualquer relação com o tópico de Funções estudado anteriormente.

Nesta etapa, o capítulo 3 apresenta as diferentes formas da equação da reta, tomando os seguintes pressupostos:

> *Para que uma reta fique perfeitamente determinada, é necessário que seja satisfeita uma das condições: 1ª) Dois de seus pontos sejam conhecidos. 2ª) Um ponto da reta e sua direção sejam conhecidos. (IEZZI et. al., 2004, vol. 3, p. 94).*

É válido destacar aqui que apenas as interpretações geométricas com as suas representações algébricas são focalizadas. As idéias de número de soluções da equação, representação gráfica das soluções, lugar geométrico das soluções da equação, as relações entre a equação da reta e a função polinomial de 1º grau, a modelagem, entre outros, não são mencionados.

Seguem a partir das condições de determinação de uma reta e da dedução da equação $y=mx+q$, inúmeros exemplos e exercícios em: são dados dois pontos e pede-se a reta, são dados o ângulo com o eixo *OX* e um ponto e pede-se a reta, dá-se o coeficiente angular e um ponto e pede-se a reta, etc. Para determinação da equação geral da reta o foco fica na fórmula do determinante citada anteriormente.

No capítulo 4 do terceiro volume denominado *"A Circunferência"* é apresentada a equação reduzida e geral da circunferência, com a devida argumentação matemática de que, dados o raio e o centro C da circunferência, é possível determinar a equação $x^2+y^2+Ax+By+C=0$. Porém a recíproca de tal afirmação não é demonstrada, e é justificada apenas por meio de um exemplo, que utiliza a técnica de completar quadrados. Mesmo assim, posteriormente inúmeros exercícios que dependem da dupla implicação são apresentados.

No capítulo cinco (volume 3), denominado *"Cônicas"*, define-se pela primeira vez o que é uma parábola, utilizando o termo "Conjunto de Pontos" ao invés de "Lugar Geométrico".

Tanto para a equação da reta, como para a da circunferência e a da parábola, é dado foco aos aspectos geométricos e não ao número de soluções das equações.

3.1.5. Sistema de Equações

No primeiro volume não há menção ao tema Sistema de Equações, entretanto foram encontrados vários exercícios que envolvem tal conceito, como por exemplo,

> *Uma companhia de telefones celulares oferece a seus clientes duas opções: na primeira opção, cobra R$38,00 pela assinatura mensal e mais R$0,60 por minuto de conversação; na segunda, não há taxa de assinatura, mas o minuto de conversação custa R$1,10. a) Qual é a opção mais vantajosa para 1 hora de conversação mensal? b) A partir de quanto tempo deve-se optar pela primeira opção? (IEZZI et. al., 2004, vol. 1, p. 83)*

e

> *Construa num mesmo sistema cartesiano, os gráficos das funções reais f e g, definidas por $f(x)=x^2$ e $g(x)=-x+2$. Determine também o(s) ponto(s) de interseção dos gráficos de f e g. (IEZZI et. al., 2004, vol. 1, p. 113)*

No capítulo 8 do segundo volume desta coleção, há uma seção dedicada especialmente aos Sistemas de Equações, porém são enfocado apenas os Sistemas Lineares, utilizando-se os conceitos de matrizes e determinantes para o estudo das soluções.

As interseções entre retas, reta e circunferência, e reta e cônica são apresentadas no volume três do livro, respectivamente nos capítulos 3, 4 e 5, por meio de exemplos.

3.1.6. Análise da sequência didática tradicional apresentada

Para a noção de Coordenadas na Reta, o que não é a proposta de IEZZI et. al. (2004), acreditamos que a abordagem dos autores é demasiadamente algébrica e formalista, acompanhada de exercícios meramente mecânicos, inviabilizando o desenvolvimento conceitual de duas importantes características da abordagem sobre número real:

1) a assimilação de um número real como a coordenada de um ponto da reta, possibilitando a futura extensão desta experiência para a noção de coordenadas no plano;

2) e a interpretação geométrica da noção de módulo como a distância entre pontos da reta, que posteriormente pode ser estendida para a noção de distância entre dois pontos do plano.

Destacamos ainda, que tal abordagem não permite o desenvolvimento de uma das formas do processo da Álgebra Axiomática, apresentada no capítulo 1, deste trabalho: “A idéia de estender uma experiência (estrutura matemática) anterior passando para uma posterior”.

Para a noção de Coordenadas no Plano, a grande distância imposta entre os temas, plano cartesiano/funções e plano cartesiano/geometria analítica, sem apresentação entre as correlações existentes entre esses tópicos é o que consideramos de maior dificuldade na apresentação de futuras propostas para a análise de propriedades, generalizações, conjecturas e provas. Pois munidos, de ferramentas como o cálculo de distância entre dois pontos e a condição de alinhamento entre três pontos, podemos conjecturar propriedades e até provar que o gráfico de funções reais da forma $f(x)=ax+b$ e $g(x)=ax^2+bx+c$, com a, b, $c \in \Re$ e $a \neq 0$, são respectivamente uma reta e uma parábola, o que na sequência didática dos autores isto não é possível.

Os temas referentes a Equações e Funções apresentam vários pontos de fragilidade frente à análise de propriedades, generalizações, conjecturas e provas, evitando, assim, um amadurecimento da Imagem de Conceito do estudante e um desconhecimento dos fundamentos que diferenciam um objeto matemático de um objeto de outro ramo do conhecimento. Dessa forma, levantamos alguns destes pontos que podem dificultar a aquisição das propriedades de objetos matemáticos, pelos alunos:

- A afirmação que para se construir o gráfico de uma função *f*, basta encontrar alguns pares ordenados da forma (x, $f(x)$), marcá-los no Plano Cartesiano e, em seguida, ligar tais pontos. Esse fato pressupõe uma incerta continuidade e é ineficaz em casos onde não se conhece previamente o Lugar Geométrico das soluções de *f*.

- Algumas afirmações sobre a função polinomial de 1º grau, sem a devida justificativa matemática, entre elas: o gráfico é uma reta; o coeficiente angular relaciona-se com o ângulo que a reta faz com o eixo *OX*; etc.

- A falta de exercícios de modelagem envolvendo o coeficiente linear da Função Afim, em que a variação deste valor fornece um movimento de translação no gráfico.

- Para a função polinomial de 2º grau, afirma-se que o gráfico é uma parábola, sem definir o que é uma parábola. Apresenta afirmações sobre concavidade sem justificativa matemática e analisa a quantidade de raízes pelo sinal do discriminante, sem argumentar matematicamente sobre tal fato.

- Várias ferramenta da Geometria Analítica que poderiam ser utilizadas para demonstrar as afirmações acima são deixadas para o último ano de escolaridade, distantes do tópico de Funções e sem qualquer correlação entre estes campos da Matemática.

3.2. Uma proposta alternativa

Em virtude das análises apresentadas nos itens anteriores, procurou-se estabelecer uma sequência didática sobre o conceito de equações em que se viabilizem as seguintes idéias:

- O estudo de estruturas unidimensionais para uma posterior extensão para estruturas bidimensionais;

- A assimilação de um número real como a coordenada de um ponto na reta;

- Noções de geometria analítica que favorecessem a análise, conjectura, generalização e prova de várias propriedades sobre as equações e seus gráficos;

- A compreensão das noções sobre Lugar Geométrico, possibilitando a futura definição de LG’s como a reta, circunferência, parábola, elipse, etc;

- O reconhecimento do gráfico de uma equação como o Lugar Geométrico das soluções desta equação;
- O entendimento que a solução de um sistema de equações é dada pelos pontos de interseção entre os Lugares Geométricos de cada uma das equações.

Dessa forma, foi elaborada uma proposta alternativa para o estudo de Equações Indeterminadas e Sistemas de Equações (Apêndices B, C, D, E e F). Foram tomados como foco da proposta as soluções de uma equação de duas variáveis e o Lugar Geométrico destas soluções num sistema de eixos ortogonais. A partir disto, vários exercícios são apresentados, buscando a conjectura de propriedades e a sua posterior generalização.

A estrutura apresentada por Tall & Thomas (2001), que descreve a Álgebra de Atribuição, Álgebra de Manipulação e Álgebra Axiomática, é utilizada como embasamento teórico na elaboração desta proposta alternativa. Este trabalho é motivado ainda, pelos trabalhos de Tabach & Friedlander (2008), que utilizam as planilhas eletrônicas para tratar a atribuição de valores em expressões algébricas; Malisani & Spagnolo (2008), que discutem as idéias de variáveis no contexto de equações lineares com duas variáveis; Bloch (2003), que destaca que o ensino de propriedades matemáticas focado apenas em exemplos específicos torna os estudantes incapazes de compreender corretamente a natureza de um objeto matemático, e acrescenta, amparado por Duval (1993), que considera as interações entre as diferentes representações de um mesmo objeto matemático durante a construção do conceito; e Abramovitza et. al. (2009), que descrevem os processos de compreensão de um teorema por meio do método SLM. Para elaboração e planejamento das atividades encontradas na proposta alternativa (Apêndices de B a F), os autores utilizados como referência foram Dante (2003), Lima E. (2007), Lima et. al. (2009a) e Lima et. al. (2009b).

A estrutura desta proposta alternativa divide-se em 3 eixos norteadores:

- Noções Fundamentais de Geometria Analítica;
- Lugares Geométricos;
- Equações Indeterminadas e Sistema de Equações.

Espera-se que esta proposta seja um complemento no trabalho do professor do ensino médio e/ou universitário, fortalecendo a Imagem de Conceito dos estudantes frente às equações com duas variáveis, pois acredita-se que, além de ser uma sequência mais natural no desenvolvimento destes conceitos, a análise de propriedades e suas demonstrações evidencia o papel singular do objeto matemático. A proposta servirá também como preparação para a inserção em disciplinas como cálculo, geometria analítica vetorial e álgebra linear, no ensino superior.

3.2.1. Noções Fundamentais de Geometria Analítica

Esse eixo foi dividido em dois módulos: Coordenadas na Reta e Coordenadas no Plano. No primeiro módulo (Apêndice B) o estudante é levado a compreender o número real como a coordenada de um ponto na reta, sendo estabelecida, assim, uma concepção inicial sobre estruturas unidimensionais, para uma posterior inserção em estruturas bidimensionais e tridimensionais.

É também construída a noção de módulo de um número real a partir da noção de distância entre coordenadas da reta, o que favorece a visualização geométrica, fornece um sentido concreto à definição de módulo e permite uma posterior generalização na noção de distância de coordenadas da reta para distância de coordenadas do plano, favorecendo, assim, a generalização deste conceito em $\Re$ para o desenvolvimento de conceito em $\Re^2$.

Nesta etapa apresentamos a seguinte definição para coordenadas na reta:

> *[...] Entenderemos medida orientada como o comprimento de OP na unidade O1, em que x terá sinal positivo se o sentido de O para P coincidir com o sentido positivo de percurso, ou sinal negativo caso contrário. O número real x será chamado de coordenada do ponto P. (Apêndice B, p. 177)*

Seguem daí alguns exercícios envolvendo construção com lápis, régua e compasso, neste mesmo Apêndice:

> - *1) Marque sobre o eixo abaixo pontos A, B e C de coordenadas -3; 3/4 e 1,25*
> - *3) Os pontos P= √2, Q=-3 √2 e R= √3, são irracionais, construa um eixo e marque a localização de suas coordenadas (dica: use uma calculadora). Seria possível marcar esses pontos sem o auxílio de uma calculadora".*

- *6) Represente as soluções das equações x-3=0, 3x-7=5x-4, 2x²-5x–3=0 e (x-√2)(x+1)=0 como pontos no eixo abaixo. (Apêndice B, p. 178-179)*

Descreve-se a definição de módulo (ou valor absoluto) de um número, como a distância entre dois pontos da reta, ou seja, a distância entre dois pontos A e B é a diferença em módulo de suas coordenadas, exemplo*, "Desta forma se dois pontos A e B tiverem coordenadas -3 e 5 respectivamente, a distância entre estes pontos é dada por* $d(A,B)=|-3-5|=|-8|=8$*."* (Apêndice B, p. 177). Destacam-se alguns exercícios deste Apêndice:

- *7) Sejam os pontos e suas coordenadas* $A=-2\sqrt{2}$*,* $B=-3/5$*, C=-1, D=0,* $E=\sqrt{2}$ *e F=3, calcule d(C, F), d(A, E), d(D, B) e d(C, B).*
- *8) Marque os pontos do exercício anterior no eixo abaixo e escreva o significado geométrico das expressões abaixo: a)*$|-1-(+3)|$ *[...]*
- *9) Sabendo que a distância do ponto P ao ponto A=-2 é 5 unidades, determine as possíveis coordenadas dos ponto P. Faça um eixo para encontrar a resposta.*
- *10) Sabendo que o ponto P equidista dos pontos A=5 e B=-4, determine as possíveis coordenadas do ponto P. Faça um eixo para encontrar a resposta". (Apêndice B, p. 179-180)*

Logo em seguida são apresentados a definição usual de módulo $|x|=\begin{cases} x, & se\ x\geq 0 \\ -x, & se\ x<0 \end{cases}$, encontrada nos livros didáticos e outros exercícios, como por exemplo:

- *11) A partir da definição de módulo podemos resolver os exercícios 9 e 10, através de uma equação. Resolva esses exercícios dessa forma (use a definição).*
- *12) A partir dos exercícios anteriores procure explicar o significado geométrico da expressão* $|x-a|=\begin{cases} x-a, & \text{se } x\geq a \\ -x+a, & \text{se } x<a \end{cases}$.
- *14) Sabe-se que certo restaurante encontra-se às margens da Rodovia Presidente Dutra. Sua distância ao Km 158 desta rodovia é 23Km. Use uma equação modular para encontrar as possíveis localizações deste restaurante. Considerando como x a localização do restaurante e que x<158, qual é a localização exata deste restaurante?*
- *15) O ano de nascimento do matemático Grego da antiguidade Arquimedes difere do ano de nascimento do filósofo grego Platão (428 a.C.) em 141 anos. Já a diferença entre os anos de nascimento de Arquimedes e do matemático grego Ptolomeu (100 dC) é de 387*

> *anos. Dessa forma qual seria o ano de nascimento de Arquimedes? (monte um sistema de equações para resolver)*[7].
>
> - *16) Suponha que neste momento a temperatura cidade de Roma difira equivalentemente das cidades do Rio de Janeiro e Moscou, onde os termômetros registram 26°C e -17 °C respectivamente. Monte uma equação modular e encontre a temperatura de Roma.*
> - *17) Sabe-se que a distância entre um carro e o Km 35 de uma auto-estrada é menor que 12km. Determine as possíveis posições deste carro. (Apêndice B, p. 180-181)*

No segundo módulo (Apêndice C), é apresentada uma abordagem em que as noções iniciais de geometria analítica são desenvolvidas a partir de uma generalização das noções de coordenadas na reta. Vários problemas que buscam a conjectura de propriedades são apresentados, e, a partir de tais conjecturas, os teoremas são provados. O foco deste tipo de desenvolvimento culmina, como anteriormente, na noção de distância entre dois pontos, porém agora no plano. Destacam-se neste módulo o teorema sobre a distância entre dois pontos no plano e o teorema que relaciona o coeficiente angular entre dois pontos e a condição de alinhamento entre três pontos, pois estes serão de fundamental importância para a estrutura do desenvolvimento almejado no módulo sobre equações indeterminadas. Apesar de não ser uma estrutura axiomática, esta conduta de trabalho encontra-se no nível da Álgebra Axiomática descrita por Tall & Thomas (2001), pois pratica a idéia de estender uma experiência anterior passando para uma posterior.

Após a definição e a construção do sistema de eixos ortogonais, é definida a coordenada de um ponto no plano e são apresentados alguns exercícios contextualizados, como por exemplo, o mapa do Brasil posto sobre um sistema de eixos ortogonais, ver Apêndice C.

---

[7] Para adequação do conceito de módulo de um número real ao problema em questão, foi considerado o nascimento de Cristo como ponto zero e as datas de nascimento dos Matemáticos, são meras aproximações.

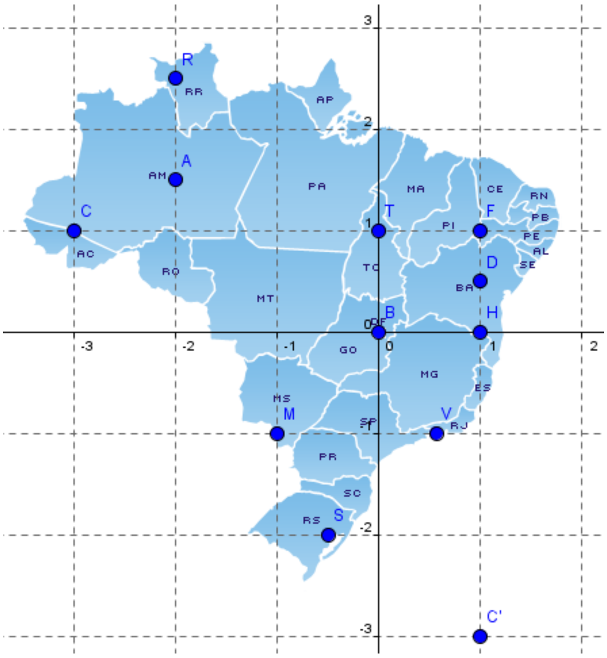


Figura 3: Mapa do Brasil sobre o Plano Cartesiano

Tomando como gancho para se chegar a uma fórmula que permita o cálculo da distância entre coordenadas na reta é levantada a seguinte questão no exercício 1, item g do Apêndice C, "*Qual seria a distância entre os pontos B e F? E entre os pontos M e F?*" (Apêndice C, p. 187). É conjecturado a partir daí o teorema sobre a distância entre dois pontos no plano que é demonstrado em seguida.

Nesta mesma linha de conduta são apresentados, no Apêndice C, exercícios como "*4) Considerando que a unidade dos eixos OX e OY é 1cm e que a escala do mapa é de 1: 10.000.000, qual é a distância aproximada em quilômetros de Volta Redonda ao Distrito Federal?*" e "*6) O ponto Z(x, 2), equidista aos pontos M e F, que estão respectivamente em Mato Grosso do Sul e divisa de Piauí com Pernambuco. Determine a abscissa do ponto Z e o estado em que se encontra*" (Apêndice C, p. 187).

Seguem a partir desta linha, alguns exercícios que têm como objetivo a posterior conjectura das propriedades de ponto médio entre dois pontos, a definição de coeficiente angular e a conjectura da condição de alinhamento entre três pontos, com as devidas demonstrações dos teoremas.

No diagrama 1, podemos resumir as conexões neste tipo de abordagem, que favorecerá posteriormente a conjectura e demonstrações de proposições relacionadas às equações, como veremos posteriormente.

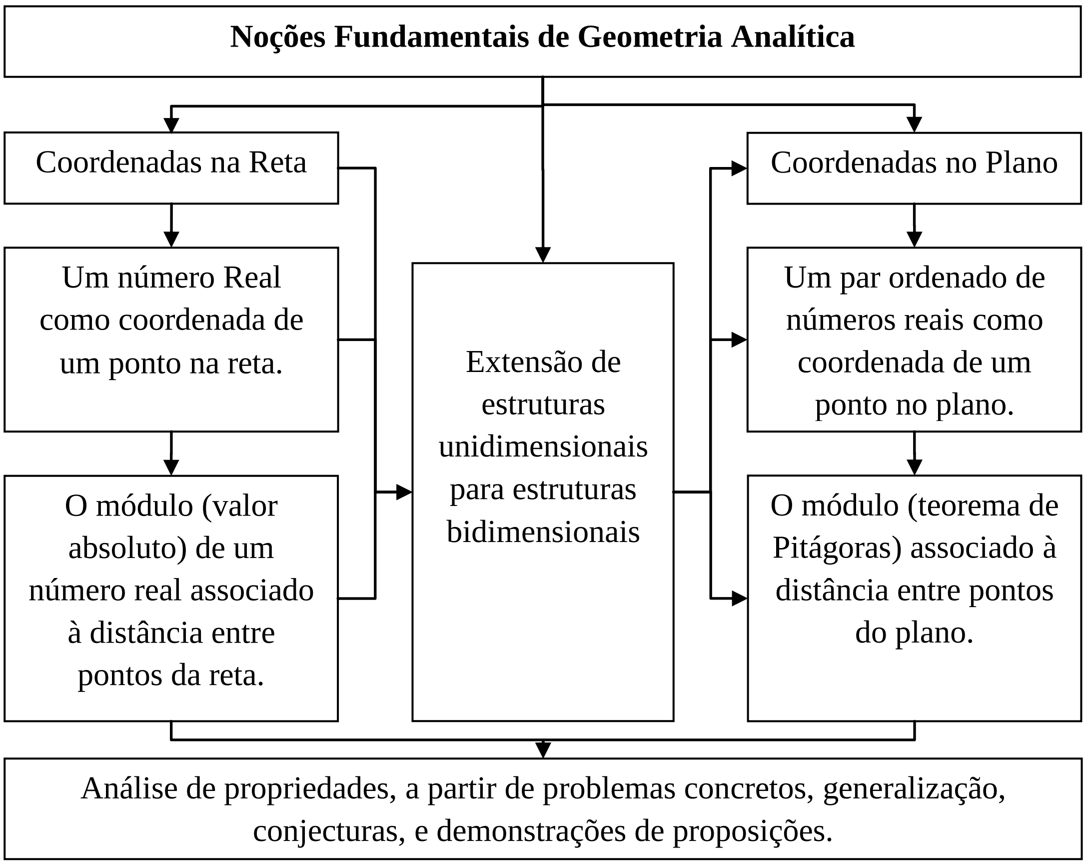


Diagrama 1: Resumo das conexões fornecidas pelo primeiro eixo norteador

Podemos resumir as idéias centrais deste eixo norteador, amparado pelo diagrama 1, em: extensão de estruturas unidimensionais para bidimensionais, noções de coordenadas na reta e no plano, noções de módulo como distância entre dois pontos e análise de propriedades com as devidas justificativas matemáticas.

3.2.2. Lugares Geométricos

Neste módulo (Apêndice D), o software de geometria dinâmica “Geo-Gebra” é utilizado com os estudantes, buscando-se a compreensão da definição de Lugar Geométrico (LG), assim como as definições de reta, reta mediatriz, circunferência, parábola e elipse.

Da definição “*Um lugar geométrico é um conjunto de pontos que satisfazem a uma ou mais condições.*”, vários exercícios são resolvidos com o auxílio do Geo-Gebra, entre eles temos (Apêndice D, p. 189-190):

- *1) Vamos construir o lugar geométrico dos pontos que distam $\sqrt{2}$ unidades do ponto O(0, 0) do planos cartesiano. Que lugar geométrico é esse?*

- *2) Construa o lugar geométrico dos pontos que distam 1 unidade do ponto A(-2, 1) do planos cartesiano. Que lugar geométrico é esse?*
- *3) Qual é o lugar geométrico encontrado nos exercícios 1 e 2? Use a distância de* ***r*** *unidades e o ponto* ***O*** *para definir esse Lugar Geométrico.*
- *4) Qual é o lugar geométrico dos pontos que satisfazem os exercícios 1 e 2 (simultaneamente)? Que conclusão você pode chegar a partir deste exercício?* (figura 4)
- *5) Qual é o lugar geométricos dos pontos colineares aos pontos A(-1, 2) e B(3, -2)? Que lugar geométrico é esse?*
- *6) Qual é o lugar geométrico dos pontos colineares aos pontos C(-4, 3) e D(5, 0)? Que lugar geométrico é esse?*
- *7) Qual é o lugar geométrico encontrado dos exercícios 5 e 6? Defina com suas palavras esse Lugar Geométrico.*
- *8) Qual é o lugar geométrico dos pontos que satisfazem os exercícios 5 e 6 (simultaneamente)? Que conclusão você pode chegar a partir deste exercício?*
- *9) Qual é o lugar geométrico dos pontos que satisfazem os exercícios 1 e 5? Que conclusão você pode chegar a partir deste exercício?* (figura 5)
- *10) Qual é o lugar geométrico dos pontos que equidistam dos pontos A(-3, 2) e B(-1, -4)? Defina, com suas palavras, esse Lugar Geométrico.*
- *11) Qual é o lugar geométrico dos pontos P, tais que dados a reta r, paralela ao eixo OX e o ponto F(1,2), não pertencente a r, a distância de P a F seja igual a distância de P a r? Defina esse Lugar Geométrico.* (figura 6)
- *12) Qual é o lugar geométrico dos pontos P, tais que dados os pontos* $F_1(-4,0)$ *e* $F_2(4, 0)$*, a soma das distâncias* $d(P,F_1)$ *e* $d(P,F_2)$ *é igual a 10 unidades? Defina esse Lugar Geométrico.* (figura 7)
- *13) Use a linguagem de conjuntos para escrever as definições de reta, circunferência, reta mediatriz, parábola e elipse.*

Para os exercícios 1, 2 e 3, pretende-se que o estudante reconheça a circunferência como um LG e tenha condições de defini-la formalmente.

Na figura 4, é apresentada a solução do exercício 4, aqui o estudante pode observar que os pontos D e E, são os únicos pontos que satisfazem ambas as condições (exercícios 1 e 2). Dá-se aqui uma idéia inicial do que será mais tarde a solução de um sistema de equações, com base no conceito de Raiz Cognitiva proposto por Tall (1989).

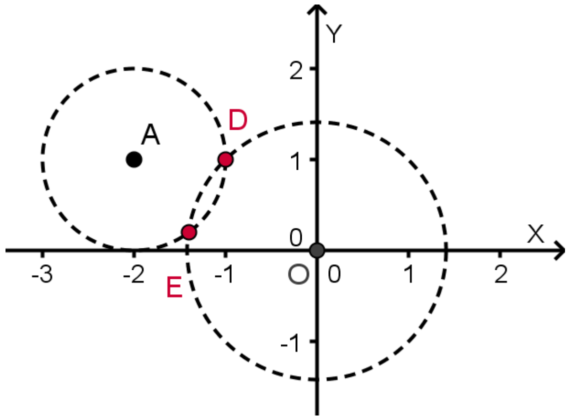


Figura 4: Soluções do exercício 4, pontos D e E.

Com os exercícios 5, 6 e 7, espera-se também que o estudante reconheça a reta como um lugar geométrico e possua plenas condições de defini-la (dentro deste contexto). Para o exercícios 8, leva-se novamente o aluno a perceber que o único ponto que é simultaneamente colinear com A e B e colinear com C e D, é o ponto de interseção entre as retas que passam por AB e por CD.

Na figura 5, observa-se que os pontos C e D além de serem colineares com A e B, distam $\sqrt{2}$ unidades do ponto O, ou seja, os pontos de interseção entre o LG do exercício 1 e o LG do exercício 5, atendem às duas condições. Dessa forma o Lugar Geométrico do exercício 9 são dois pontos.

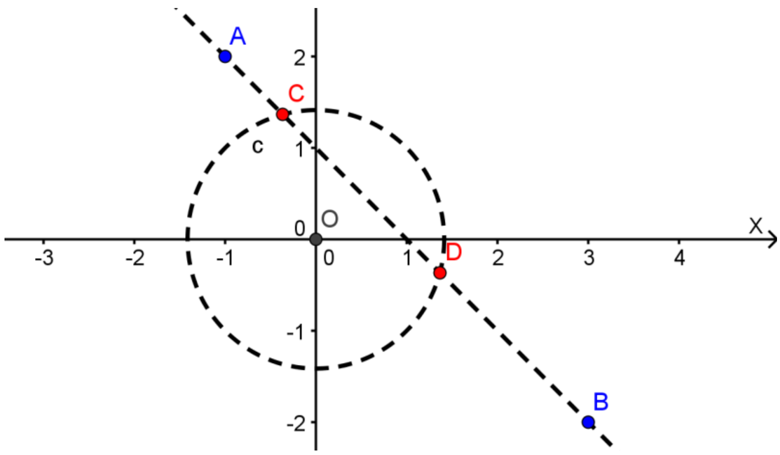


Figura 5: Solução do exercício 9, pontos C e D.

No exercício 10, o aluno é levado a definir a Reta Mediatriz e reconhecê-la como um Lugar Geométrico de extrema importância em problemas envolvendo equidistância.

A partir do exercício 11, figura 6, é possível definir parábola, como *"[...] o lugar geométrico dos pontos que equidistam de um ponto fixo F(denominado foco) e de uma reta dada d (denominada diretriz), onde $F \notin d$*". (Apêndice D, p. 191)

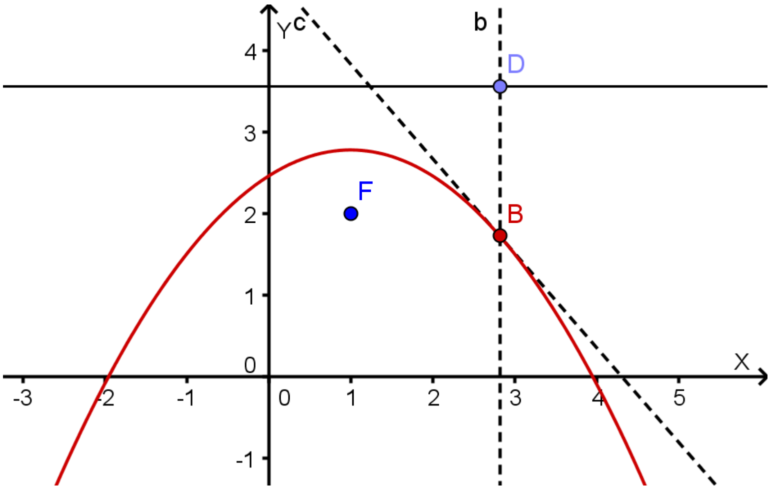


Figura 6: Solução do exercício 11, todos os pontos sobre a curva vermelha (parábola).

A partir do exercício 12, figura 7, é possível definir elipse, como *"[...]o lugar geométrico dos pontos, tal que a soma das distâncias a dois pontos fixos (denominados focos) é igual a uma constante k, com $k \in \Re_+$.*". (Apêndice D, p. 191)

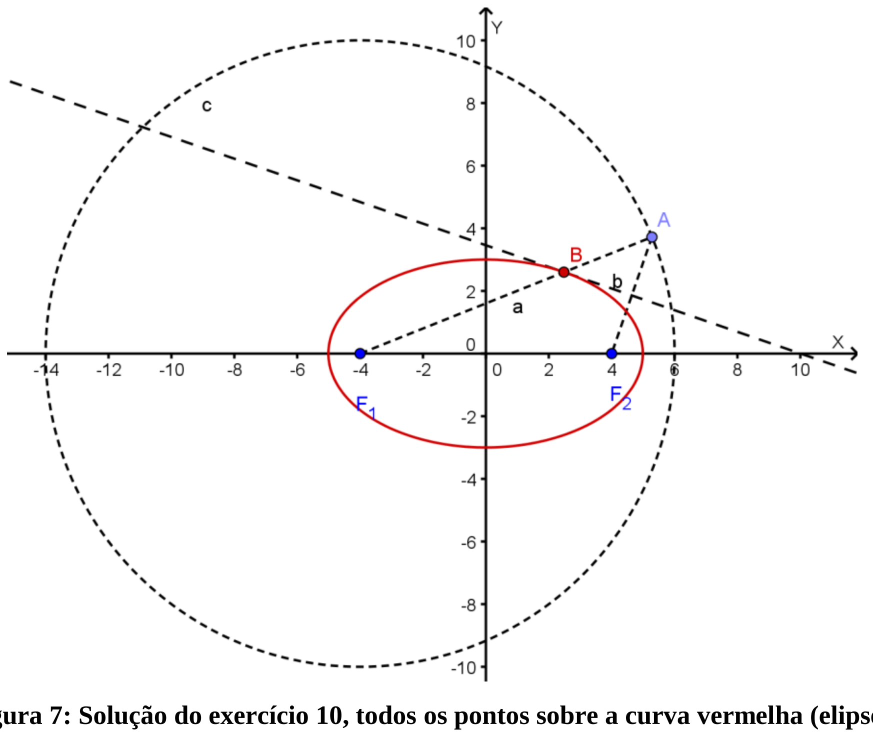


Figura 7: Solução do exercício 10, todos os pontos sobre a curva vermelha (elipse).

Para os exercícios 11 e 12, a definição obtida anteriormente no exercício 10 (Reta Mediatriz) é de fundamental importância para a construção da parábola e da elipse.

No diagrama 2, encontramos um resumo das principais aquisições obtidas pelo estudante após ter passado pelo Módulo 3, pretendidas nesta proposta, de sequência didática, que descreveremos a seguir:

- Compreensão da noção de Lugar Geométrico;
- Condições plenas de definir reta, circunferência, parábola e outros LG's;
- Reconhecer que a interseção entre dois ou mais LG's é o Lugar Geométrico dos pontos que satisfazem simultaneamente condições de cada LG.
- Disponibilizar mecanismos para futuras justificativas matemáticas envolvendo gráficos de equações.

Lugares Geométricos

Reconhecimento que pode-se ter: nenhum, finitos ou infinitos pontos que satisfazem determinada condição.

Plenas condições de definir: reta, circunferência, reta mediatriz, parábola e elipse como LG's.

Reconhecimento que dados as condições 1, 2, ..., n e seus respectivos LG-1, LG-2, ..., LG-n, o LG que atende simultaneamente a todas condições é formado pelos pontos de interseção entre todos os LG's.

Com as definições de reta, parábola, circunferência e etc., será possível posteriormente provar afirmações sobre o gráfico de equações.

Diagrama 2: Resumo das conexões fornecidas pelo segundo eixo norteador.

3.2.3. Equações Indeterminadas e Sistemas

Esse eixo também foi dividido em dois módulos: Equações Indeterminadas e Sistema de Equações.

No primeiro (Apêndice E) os conceitos de equações de duas variáveis, isto é, equações em $\Re^2$ são tratados de forma a desenvolver uma compreensão do gráfico de uma equação como Lugar Geométrico das soluções desta equação. É utilizado o termo Equações Indeterminadas, pois neste caso o conjunto solução pode ser tanto finito quanto infinito. Vários exercícios a serem realizados no Geo-Gebra e com papel-lápis são apresentados levando os alunos a conjecturarem propriedades que, em seguida, são demonstradas algebricamente.

Como gancho para iniciarmos esse módulo, optamos pelas seguintes questões "*[...] Um exemplo de equação indeterminada seria x+y=6. Quantas soluções reais você poderia listar para esta equação?*" e *"Como poderíamos representar todas as soluções para a equação x+y=6?"* (Apêndice E, p. 195). Nesta etapa, as diversas representações das soluções desta equação serão abordadas. A representação por meio de uma tabela com os pares ordenados das soluções mostra-se ineficiente à medida que apresenta um subconjunto limitado e discreto do conjunto solução, o mesmo acontece com a representação gráfica a partir dos pares ordenados da tabela, conforme mostrado na figura 8.

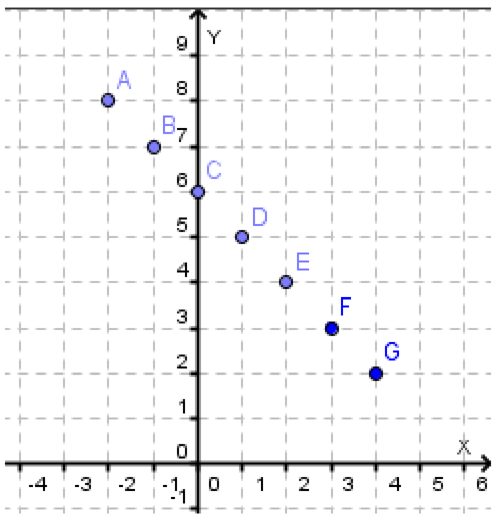


Figura 8: Subconjunto "discreto" do conjunto solução da equação *x+y=6*.

A partir dessas idéias são apresentados sete exercícios nos quais o estudante é levado a representar um subconjunto do conjunto solução, exibindo os pares ordenados e, em seguida, marcando-os sobre um sistema de eixos ortogonais. Nesta etapa, um software de planilha eletrônica foi utilizado para facilitar e agilizar os cálculos. Um dos exercícios que representa esta linha de conduta é *“Descreva as soluções para a equação $2x^2+y=3x+2$, use as três técnicas explicitadas.”* (Apêndice E, p. 217), é importante destacar que as três técnicas mencionadas são:

- A representação das soluções via conjuntos $S=\left\{(0,2),(1,3),\left(\sqrt{2},3\sqrt{2}-2\right),\left(\frac{1}{2},3\right),\ldots\right\}$, que é apenas um subconjunto limitado e discreto das soluções ou $S=\left\{(x,y)\in IR \mid 2x^2+y=3x+2\right\}$ que é mais geral, todavia não é possível visualizar as soluções;
- A representação das soluções com o uso de uma tabela com alguns pares ordenados da solução, que também acaba sendo um subconjunto limitado e discreto;
- A representação por meio de um gráfico obtido a partir da tabela anterior (sem ligar os pontos), porém o que se tem ainda é um subconjunto limitado e discreto.

Os objetivos principais dessa sequência de exercícios são provocar no aluno a sensação de ineficiência das representações citadas e analisar as regularidades dos “pontos solução” de cada uma das equações no plano cartesiano. A idéia de ligar os pontos do gráfico só será permitida a partir do momento que as regularidades forem provadas.

A noção de ponto genérico de uma equação é estabelecida no exercício número 8 (Apêndice E, p. 217), em que o Geo-Gebra é amplamente utilizado, por exemplo, o ponto genérico da equação $2x^2+y=3x+2$ é dado por $P=(x,3x+2-2x^2)$. Estabelecido tal ponto no software, é possível variar o valor de x e observar o comportamento do ponto P na tela do computador.

A generalização entre o subconjunto “discreto”, apresentado na Figura 8 e o subconjunto “contínuo” apresentado na Figura 9, faz-se presente à medida que se conjectura e se prova que dadas três soluções quaisquer da equação $y=mx+q$, tem-se que estas são colineares, concluindo, assim, que temos, neste caso, como LG, a reta. Para esta demonstração, foi utilizada a condição de alinhamento entre três pontos, igualdade entre os coeficientes angulares, que foi considerada de mais fácil compreensão para o estudante. A recíproca deste teorema é demonstrada a partir de algumas conjecturas posteriores. É importante destacar que a noção de ponto genérico foi utilizada em ambas as demonstrações.

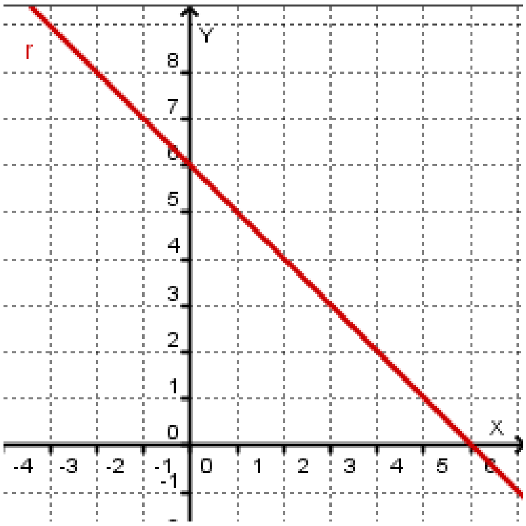


Figura 9: Subconjunto "contínuo" do conjunto solução da equação *x+y=6*.

A partir da definição "*Dados uma reta r de inclinação α (no sentido anti-horário) em relação ao eixo OX. O coeficiente angular ou declividade de uma reta r é o número real m=tg α.*" (Apêndice E, p. 201) e de exercícios como:

- *16) No campo entrada do GeoGebra digite, m=1 (tecle enter) e q=0 (tecle enter), exiba os objetos m e q, em seguida digite a equação y=m*x+q construindo assim o gráfico com as soluções da equação.*
- *17) Com relação ao exercício 16, varie o valor de* ***m*** *no intervalo [-5, 5], descreva o comportamento do gráfico.*
- *18) Com relação ao exercício anterior, varie o valor de* ***q*** *no intervalo [-5, 5] e descreva o comportamento do gráfico" (Apêndice E, p. 219)*

Foi possível tratar os efeitos de declividade na reta proporcionados por alterações no coeficiente angular e os efeitos de translação da reta proporcionados por variações no coeficiente linear. A partir daí, foi possível observar também que equações da forma *x-p=0* que na reta representavam um ponto, no plano passam a representar uma reta paralela ao eixo OY.

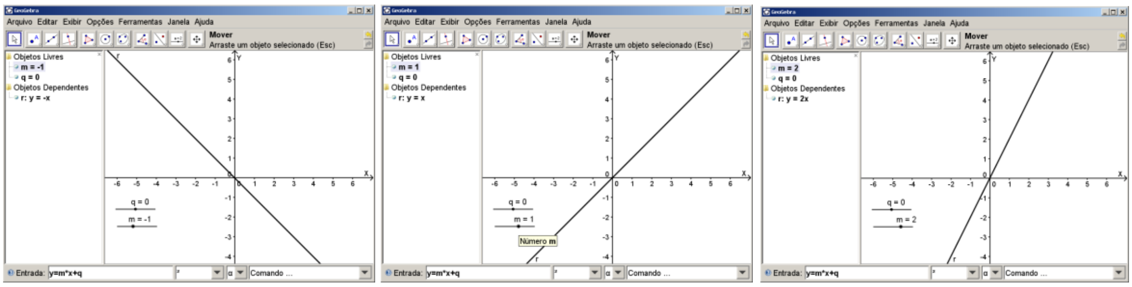


Figura 10: Variações no coeficiente angular da equação *y=mx+q*.

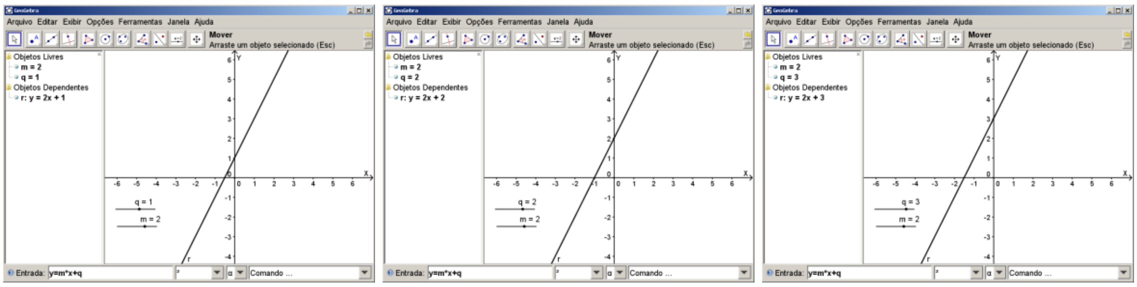


Figura 11: Variações no coeficiente linear da equação *y=mx+q*.

A partir de exercícios e idéias semelhantes aos explicitados anteriormente, foi possível conjecturar, generalizar e demonstrar várias propriedades de equações indeterminadas da forma $ax^2+ay^2+bx+cy+d=0$, $ax^2+bx+cy+d=0$ e $ay^2+bx+cy+d=0$, em que os lugares geométricos das soluções foram: conjunto vazio, ponto, circunferência e parábola.

Os principais objetivos propostos pelo Módulo 4 “Equações Indeterminadas” em correlação com os módulos anteriores são:

- Reconhecer o gráfico de uma equação em $\Re^2$ como o Lugar Geométrico das soluções desta equação;

- Perceber que a condição de alinhamento entre três pontos e a distância entre dois pontos são ferramentas fundamentais da Geometria Analítica que fornecem subsídios para generalizar a reta, a parábola e a circunferência como Lugares Geométricos de equações polinomiais de 1º e 2º graus;

- Reconhecer o Lugar Geométrico de uma equação específica polinomial de 1º ou 2º grau;

- Conjecturar, generalizar e demonstrar propriedades de equações indeterminadas de 1º e 2º grau e de seus respectivos gráficos.

Para iniciar o segundo módulo deste eixo, Sistema de Equações (Apêndice F), foram retomados alguns exercícios semelhantes àqueles do módulo Lugar Geométrico. Entretanto, naquela etapa, o objetivo era construir o LG utilizando apenas construções geométricas em geometria dinâmica, e agora o objetivo é encontrar as equações dos Lugares Geométricos, como exemplificado pelo exercício “*1) Determine a equação do LG dos pontos que são colineares com os pontos A(-2, 1) e B(1, -1)”* e “*3) Determine a equação do LG dos pontos que equidistam ao ponto F(1, -4) e da reta d: x=2*”. (Apêndice F, p. 229)

Várias equações são encontradas e, em seguida, são digitadas no GeoGebra para visualização de seus LG’s, como por exemplo, a Reta, a Circunferência, a Parábola, a Elipse, a Hipérbole e a Lemniscata.

Porém o exercício que serve como um gancho para a formalização das idéias sobre os sistemas de equações é “*10) Qual é o lugar geométrico dos pontos que equidistam ao ponto A(2, 0) e a reta r: y=2 e são colineares aos pontos B(-5, -5) e C(4, 1)?*” (Apêndice F, p. 230). É interessante observar que nos exercícios anteriores deste módulo, havia apenas uma condição imposta para o LG, fornecendo assim, na maioria dos casos, um conjunto infinito de soluções. Já no caso do exercício 10, há duas condições simultâneas para o LG, neste caso será necessário determinar a equação referente à primeira condição e, em seguida, a equação referente à segunda condição, para depois determinar o conjunto solução que satisfaz ambas as equações. A solução do LG será dada por S={(x, y): $d(P, A)=d(P, D)$ e $m_{PB}=m_{PC}$, onde $D \in r$ e m é o coeficiente angular}. Deste gancho é apresentada uma resolução algébrica e geométrica deste exercício. Os pontos D e E são a solução neste caso, conforme pode ser observado na Figura 12.

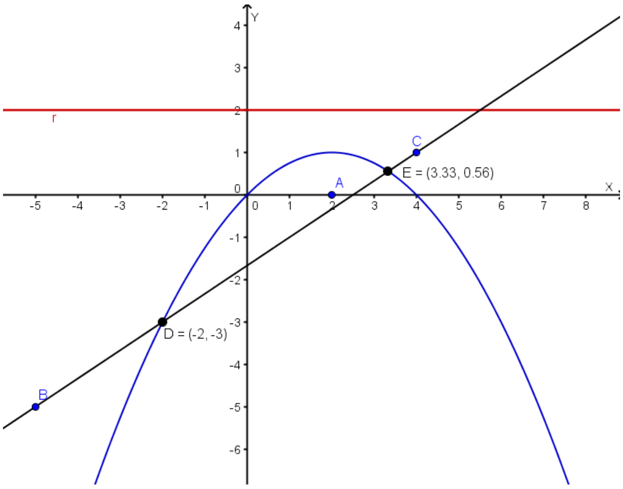


Figura 12: Soluções do exercício 10, ponto D e E.

Em seguida vários exercícios envolvendo sistemas de equações são apresentados. Observe o exercício 11 (Apêndice F, p. 231-232).

Vale destacar nesta etapa que uma abordagem mais geral (envolvendo sistemas lineares e não lineares) e menos reducionista, como as vistas nos livros didáticos atuais em que apenas sistemas lineares são destacados. A definição a seguir exemplifica bem esta generalização:

> *Um sistema de equações admite três tipos de soluções: i) Possível e determinado: Quando há soluções comuns (porém finitas) entre as equações; ii) Indeterminado: Quando há infinitas soluções comuns entre as equações; iii) Impossível: Quando não há soluções comuns entre as equações." (Apêndice F, p. 228)*

Outra questão levantada no Apêndice F que impulsiona a generalização comentada é "*Será que é possível analisar quantas soluções tem o sistema de equações sem resolvê-lo algebricamente? Para responder essa questão, vamos a algumas definições e exercícios.*" (Apêndice F, p. 228)

A partir daí, vários exercícios de análise do número de soluções de um sistema de equações são apresentados e as relações entre retas paralelas, coincidentes e concorrentes, são abordadas. Observe o exercício 18 e as Figuras 13 e 14.

> *18) No GeoGebra plote os objetos m_1=1, q_1=1, m_2=1, q_2=1 (tecle enter após cada uma das entradas), exiba esses objetos e em seguida digite as equações r:y=m_1*x+q_1 e s:y=m_2*x+q_2, em seguida: a) Varie o coeficiente q_2, o que podemos conjecturar sobre as soluções do sistema; b) Varie o coeficiente m_2, o que podemos conjecturar sobre as soluções do sistema. (Apêndice F, p. 234)*

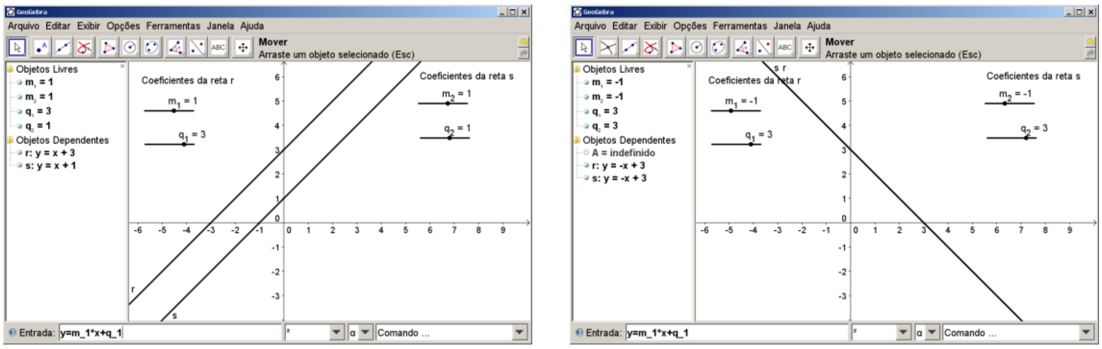


Figura 13: Primeira figura, retas paralelas (sistema impossível) e segunda figura, retas coincidentes (sistema possível e indeterminado).

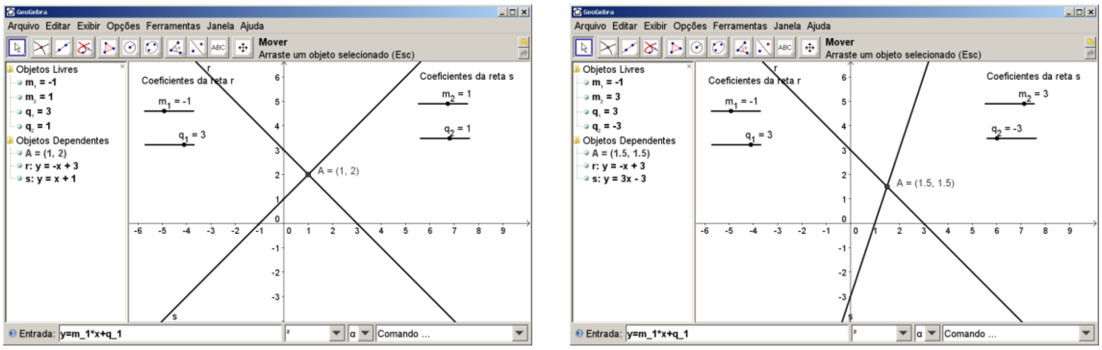


Figura 14: Primeira figura retas concorrentes perpendiculares (sistema possível e determinado) e segunda figura reta concorrentes (sistema possível e determinado).

Após as observações feitas no software, é oferecida ao estudante a possibilidade de generalizar as idéias conjecturadas, "*20) Determine condições sobre os coeficientes para que o sistema* $\begin{cases} y = m_1 x + q_1 \\ y = m_2 x + q_2 \end{cases}$ *seja :a) Possível e determinado;b) Indeterminado; c) Impossível*". (Apêndice F, p. 234)

Na definição abaixo, é utilizada a mesma linha de conduta para analisar, conjecturar e generalizar o número de soluções de um sistema de equações formado por uma reta e uma parábola ou uma reta e uma circunferência. Vale destacar que esta postura assemelha-se ao método SLM adotado por Abramovitza et. al. (2009).

> *"Com relação à posição relativa entre uma reta no plano cartesiano e uma circunferência ou parábola, podemos dizer que são: i) Tangente: Quando possuem apenas um ponto em comum; ii) Secante: Quando possuem dois pontos em comum; iii) Externa: Quando não possuem pontos em comum."* (Apêndice F, p. 229)

Posteriormente à definição acima e à definição sobre o número de soluções de um sistema de equações são apresentados alguns exercícios que solidificam a noção de número de soluções de um sistema de equações, seja ele linear ou não, entre eles destacam-se:

> *22) No GeoGebra plote o objeto m=1, exiba esses objetos e em seguida digite as equações c:$x^2+y^2=4$ e s:x+y=m, em seguida varie o coeficiente m e escreva as possíveis soluções:"* e *"Seja o sistema* $\begin{cases} x^2+y^2=4 \\ x+y=m \end{cases}$*, determine para quais valores de m o sistema é:a) Tangente; b) Secante; c) Externa.".* (Apêndice F, p. 235)

Os principais objetivos propostos pelo Módulo 5 "Sistema de Equações" em correlação com os módulos anteriores são:

- Correlacionar os conhecimentos desenvolvidos nos módulos 3 e 4, Lugares Geométricos e Equações Indeterminadas, respectivamente, com a noção de número de soluções de um sistema de equações;

- Identificar a solução gráfica de um sistema de equações como uma Raiz Cognitiva para o desenvolvimento da teoria sobre sistema lineares ou não-lineares, pressupondo-se que as noções sobre Equações Indeterminadas já fazem parte da Imagem de Conceito do estudante;

- Reconhecer que o conjunto solução de um sistema de equações é dado pelos pontos de interseção entre os LG's de cada uma das equações;

- Reconhecer que os pontos de interseção entre os gráficos das equações são os únicos pontos que satisfazem todas as equações do sistema;

- Utilizar o software de geometria dinâmica Geo-Gebra para uma melhor compreensão de conceitos complexos sobre sistemas, analisar e generalizar propriedades sobre sistemas.

No diagrama 3, podemos resumir as principais conexões existentes nos dois módulos do 3º eixo norteador, que em sua grande maioria foram tratados com o auxílio de software de geometria dinâmica.

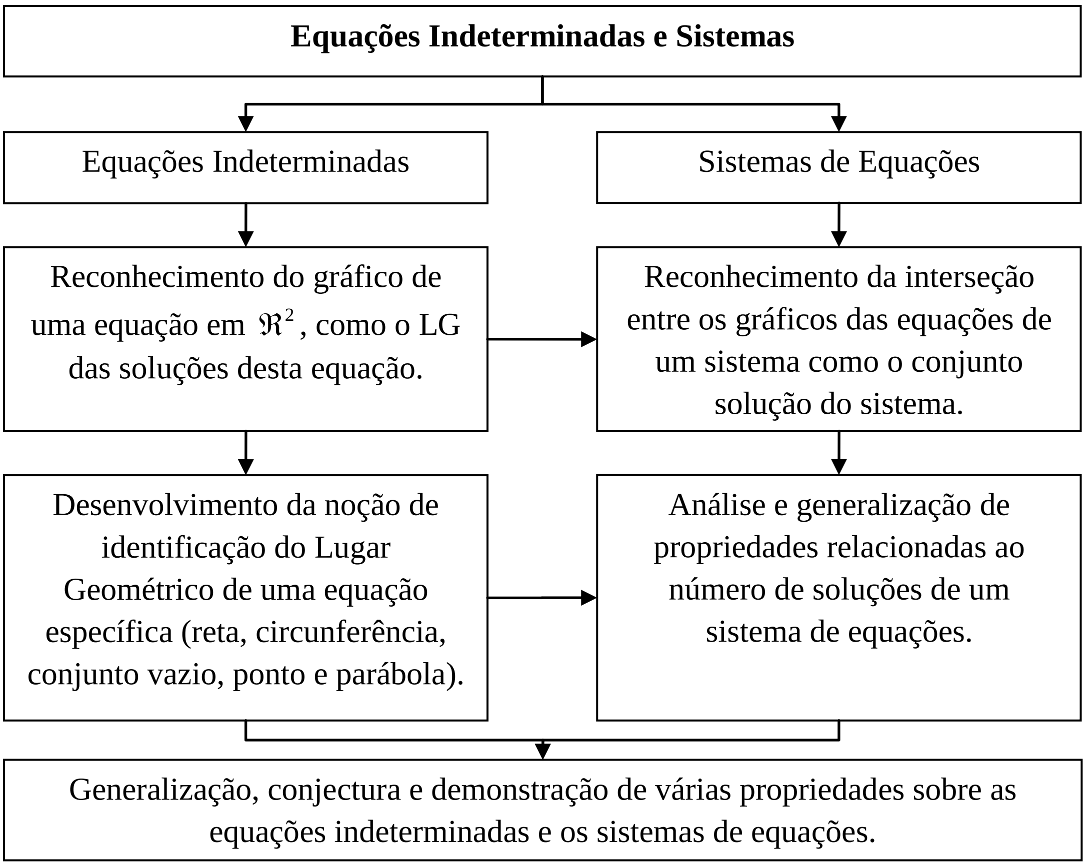
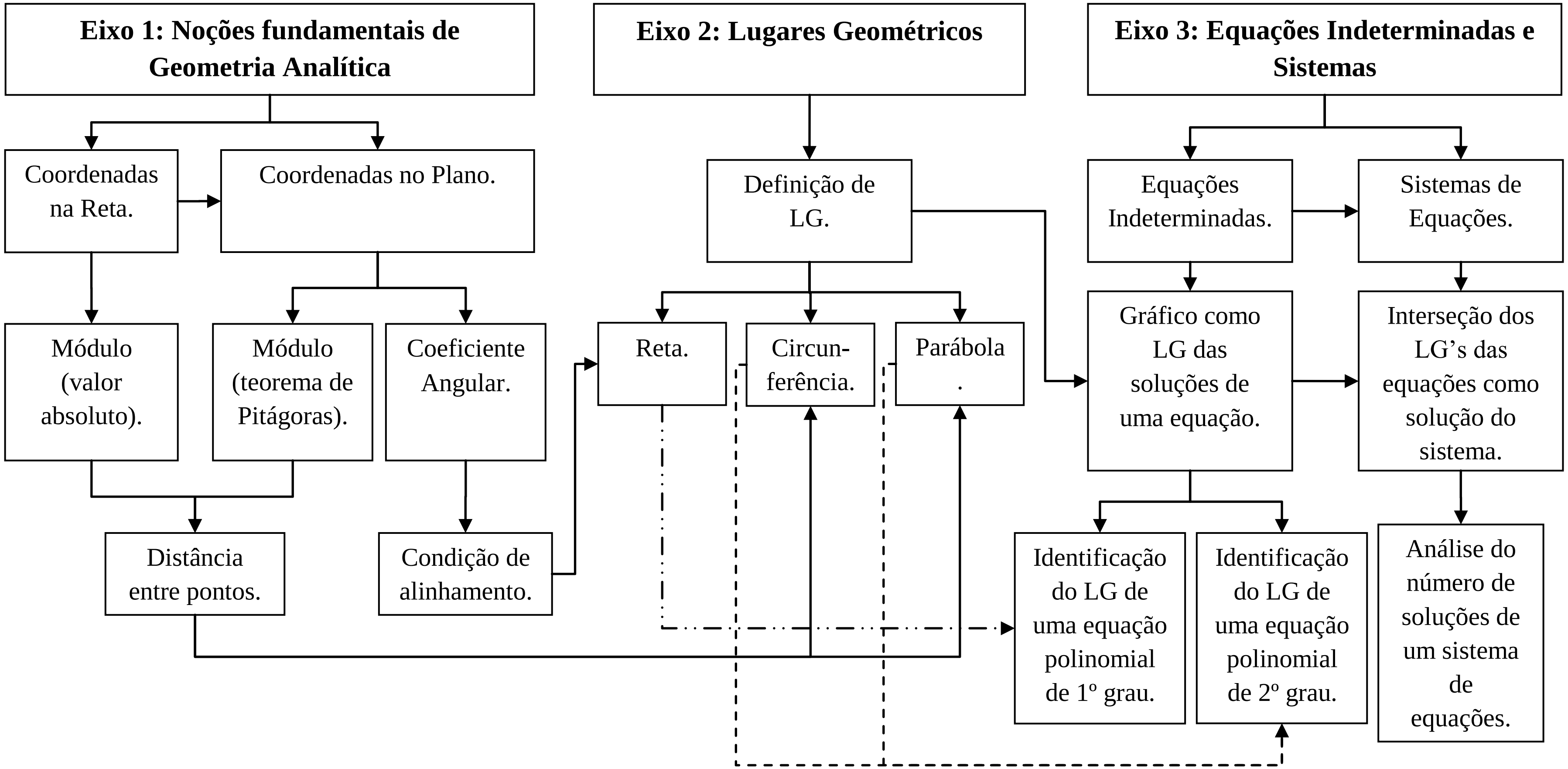


Diagrama 3: Resumo das conexões fornecidas pelo terceiro eixo norteador.

Para finalizar essa seção, iremos apresentar o Diagrama 4, que destaca as principais conexões entre os três eixos norteadores, assim como seus respectivos módulos e algumas observações sobre tais conexões.



A análise, generalização, conjectura e demonstrações de inúmeras propriedades sobre Coordenadas, Lugares Geométricos, Equações Indeterminadas e Sistema de Equações foram exploradas em todos os eixos norteadores.

Diagrama 4: Conexões entre os eixos norteadores.

Do diagrama 4, observam-se várias conexões conforme discriminamos:

- As noções de coordenadas na reta se estendem para as noções de coordenadas no plano;

- A distância entre pontos no plano e a condição de alinhamento entre pontos servem de fundamentos para se definir reta, circunferência e parábola como Lugar Geométrico e servem ainda como ferramenta para conjecturar e provar que equações polinomiais de 1º grau tem como gráfico uma reta e equações polinomiais de 2º grau tem como LG uma circunferência, parábola, ponto ou conjunto vazio (os casos de hipérbole e elipse não foram tratados nesta parte);

- O reconhecimento do gráfico de uma equação como o LG das soluções desta equação é um ferramental para solidificar que os pontos de interseção entre os gráficos das equações de um sistema formam o conjunto solução desse sistema.

4. Metodologia

A metodologia deste trabalho deve permitir a possibilidade de uma análise capaz de auxiliar na obtenção de respostas referentes às questões levantadas na pesquisa.

Serão desenvolvidas uma pesquisa bibliográfica e uma pesquisa de campo. E o foco será fundamentado em uma análise qualitativa dos dados coletados, o que acreditamos ser necessário para obter uma conclusão mais detalhada acerca das discussões dos efeitos da abordagem sobre as Imagens de Conceito dos participantes. Como discutido no capítulo dois deste trabalho, a Imagem de Conceito é individual, subjetiva e nela não estão contidas apenas informações isoladas, mas também relações e conexões entre idéias. Dessa forma, sem um desenho metodológico de caráter qualitativo, seria impossível analisar as direções tomadas por cada participante. Uma breve análise quantitativa estará presente em poucas conclusões, como nas relações existentes entre o pré-teste e pós-teste aplicado ao início e fim da experiência, apenas em casos de parâmetros que sejam significativos para as conclusões.

Os participantes desta pesquisa foram selecionados entre alunos da graduação em Licenciatura em Matemática do Centro Universitário de Barra Mansa – UBM.

4.1. Planejamento das Atividades de Trabalho

O planejamento das atividades consistiu em oito etapas:

- Pesquisa bibliográfica, objetivando o estudo e a análise de teorias que viessem fundamentar a construção de uma sequência mais natural para o ensino de equações em $\Re^2$. Nesta etapa, foram levantados alguns trabalhos relacionados ao tema, conforme pode ser observado nos capítulos 1 e 2 deste trabalho;

- Pesquisa bibliográfica, com os objetivos de: 1) analisar uma coleção de livros didáticos do ensino médio que apresentassem uma sequência didática considerada inadequada para o desenvolvimento do conceito de equações e seus gráficos e 2) preparar para o planejamento dos conteúdos a serem incluídos numa proposta alternativa para o estudo de equações indeterminadas (capítulo 3);

- Elaboração de uma proposta alternativa para o estudo de equações indeterminadas e sistema de equações a ser apresentado sob a forma de curso de extensão universitária;

- Aplicação de um questionário de pesquisa objetivando conhecer um pequeno perfil de cada um dos participantes do curso;

- Aplicação de um pré-teste de forma a diagnosticar uma parte da Imagem de Conceito dos cursistas sobre o tema equações;

- Desenvolvimento do curso denominado “Equações Indeterminadas e Lugares Geométricos”. Este curso foi dividido em cinco módulos, totalizando uma carga horária de 40 horas que foi oferecido no UBM pela pró-reitoria comunitária, sob a forma de curso de extensão, ocorrido entre os meses de novembro e dezembro de 2010;

- Aplicação de um pós-teste de forma a analisar o desenvolvimento da Imagem de Conceito sobre equações do cursista pós-curso;

- Análise dos resultados da pesquisa e conclusões.

O diagrama a seguir apresenta simplificadamente as etapas de planejamento da pesquisa.

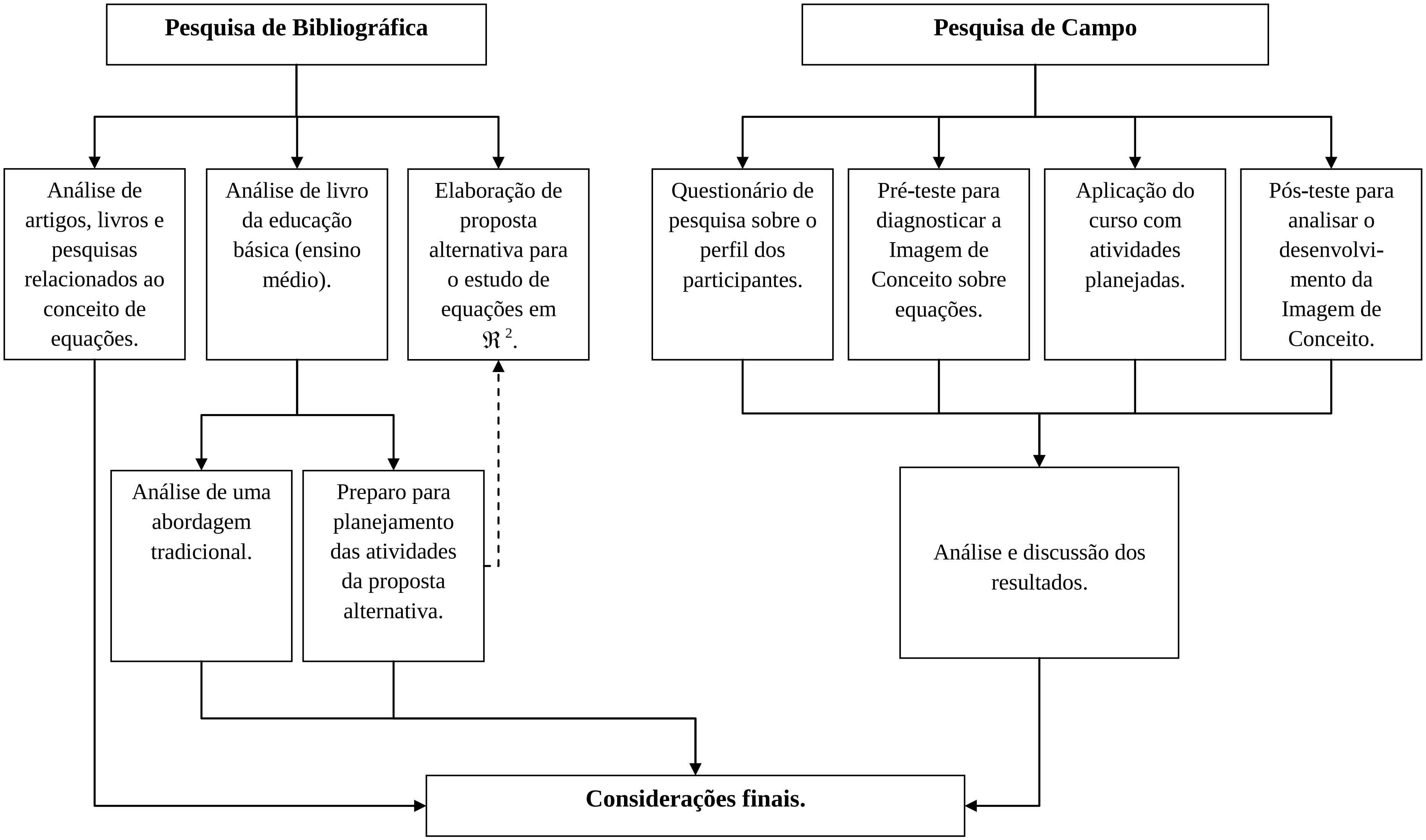


Diagrama 5: Etapas de planejamento do trabalho

4.2. Pesquisa Bibliográfica

Inicialmente, foram levantados diversos artigos, livros e pesquisas relacionadas ao tema "Álgebra e Equações". Essa pesquisa foi realizada através da biblioteca de Pós-Graduação do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro – UFRJ (biblioteca Professor Leopoldo Nachbin), do Portal de Periódicos da CAPES (com acesso oferecido através da biblioteca Professor Leopoldo Nachbin), da biblioteca do Centro Universitário de Barra Mansa - UBM e de livros, artigos e revistas do acervo pessoal do autor da pesquisa.

A primeira parte desta investigação foi de cunho plenamente teórico, buscando uma fundamentação de processos e procedimentos delineados por pesquisas de vários autores relacionados à conceitos de álgebra, em particular conceitos de equações (capítulo 1) e a instrumentos de teoria do pensamento matemático avançado (capítulo 2). Esse levantamento foi de fundamental importância para a elaboração de uma proposta alternativa para o ensino de equações e para embasar a análise de resultados sobre a Imagem de Conceito dos participantes.

Já para a segunda parte da pesquisa foi analisada uma coleção do ensino médio, que continha uma sequência didática tradicional, que pouco contribui para o desenvolvimento de conceitos sobre relações existentes entre equações e seus gráficos.

E, por último, foram analisados diversos livros de ensino da matemática que ajudaram a preparar e planejar as atividades da proposta alternativa para o ensino de equações e sistemas.

4.3. Pesquisa de Campo

A pesquisa de campo se dividiu em quatro partes, conforme podemos observar no Diagrama 5. Foram aplicados: um questionário visando obter uma descrição individual dos participantes, um pré-teste de forma a diagnosticar a Imagem de Conceito individual, 40 horas de aulas modulares com atividades planejadas (proposta alternativa) e um pós-teste de forma a analisar o desenvolvimento conceitual sobre equações indeterminadas e sistemas de equações.

4.3.1. Descrição dos participantes

Os participantes de curso foram voluntários interessados em participar do curso de extensão denominado "Equações Indeterminadas e Lugares Geométricos" oferecido para acadêmicos do curso de Matemática do UBM. O curso teve início em Novembro de 2010 e as inscrições foram realizadas pela Pró-Reitoria Comunitária desta IES. Os participantes inscritos foram alunos do sexto período do curso de Matemática, totalizando sete pessoas.

Para se conhecer o perfil dos participantes, foi elaborado um questionário e enviado por email a cada um dos cursistas. Neste questionário, foram levantadas as seguintes variáveis:

- Nome do participante;
- Idade do participante;
- Em qual escola você cursou o Ensino Médio (pública ou privada)? Em que ano concluiu?
- Você já leciona aulas de Matemática?
- Já estudou funções e geometria analítica? Quando?
- Quais são as suas primeiras impressões sobre gráfico de equações e funções? Você gosta de fazê-los? Acha difícil? Entende o seu significado?
- Descreva a sua experiência com computadores. Você tem computador em casa? Usa-o com frequência?
- Você já usou computador para estudar Matemática? Quando e com que conteúdos?
- Você acha que o computador pode ajudar no ensino de Matemática? Por quê?

Deste questionário, foi possível caracterizar os participantes conforme informações a seguir, todavia vale ressaltar que as observações individuais destacadas são pontos de vista dos próprios entrevistados. Por motivo de privacidade, os nomes apresentados a seguir são fictícios.

Pedro: Tem 45 anos, concluiu o ensino médio em escola pública no ano de 2002. Ainda não se formou em Matemática, cursa o 6º período do curso e ainda não leciona. Já estudou funções e geometria analítica no ensino médio e na faculdade. Ele considera gráficos de funções muito complicados, afirma que não acha difícil de fazer, porém não entende o seu significado. Ele tem computador em casa, entretanto não o utiliza com frequência. Considera que o computador pode ajudar no ensino de Matemática, pois ele *"nos auxilia em efetuar cálculos"*.

João: Tem 30 anos, concluiu o ensino médio em 1998 em escola pública no Curso Técnico de Administração de Empresas. Cursa o 6º período de Matemática e ainda não leciona. Quanto ao estudo de funções, ele afirma que *"Já estudei funções, mas não me lembro em qual foi a série, mas foi no ensino fundamental."*. Com relação às impressões sobre o gráfico de funções e equações, ele destaca que *"Parece os gráficos utilizados por jornais para comparar determinados valores em determinados períodos. Gosto de fazê-los, não acho difícil, mas não entendo muito bem o seu significado acho que é relação entre alguns valores."*. João afirma que, apesar de possuir um computador, não possui muita prática de uso, resumindo a sua utilização em fazer download de músicas e imprimir documentos. Além disso, ele nunca utilizou o computador para estudar Matemática, entretanto acha que essa ferramenta pode auxiliar na pesquisa de determinados temas da Matemática.

Laura: Tem 41 anos, concluiu o ensino médio em 1989 em escola pública. Ainda não é formada em Matemática, atualmente cursa o 6º período do curso de Matemática e não leciona. Já estudou funções na 8ª série do ensino fundamental e geometria analítica na faculdade. Para ela os gráficos são complicados de fazer, porém nos dias atuais já encontra mais facilidades em construí-los, "*os gráficos mais simples são mais fáceis de entender o que representam*". Ela possui computador em casa e utiliza-os para pesquisas de assuntos gerais. Já usou o computador para estudar conteúdos de Matemática e acredita que o computador pode auxiliar no estudo de gráficos.

Ricardo: Tem 27 anos, concluiu o ensino médio em 2002 em escola pública federal. Ainda não é formado em Matemática, cursando atualmente o 6º período do curso. Trabalha com aulas particulares de Matemática em casa. Já estudou funções e geometria analítica durante um curso de engenharia não concluído. Com relação ao gráfico de equações e funções, ele destaca *"Acho muito interessantes, ma não consigo correlacionar muito bem o gráfico com as funções"*. Quanto ao uso do computador ele coloca que *"[...] tenho computadores em casa e tenho bastante facilidade em utilizá-los. Utilizo todos os dias, juntamente com a internet."*. Ricardo destaca ainda que, já utilizou o computador para estudar Matemática, manipulando o software Winplot para o cálculo de funções de várias variáveis. Ele acredita que *"O computador é uma ferramenta somente pra facilitar a visualização dos gráficos e estudo de mudança de variáveis"*.

Júlia: Tem 20 anos, estudou em escola pública e concluiu o ensino médio em 2007. Ainda não leciona, porém foi aprovada em concurso publico para lecionar em 2011. Está no sexto período do curso de Matemática. Garante que estudou funções e geometria analítica apenas no curso de Matemática na faculdade. Ela considera os gráficos de equações e funções um pouco complicado e, às vezes, gosta de fazer, porém, dependendo do gráfico, considera difícil a sua construção e, em alguns casos, não compreende o seu significado. Quanto sua experiência com computadores descreve que tem em casa e o utiliza com muita frequência. Nunca utilizou o computador para estudar Matemática. Acredita que o computador pode ajudar no ensino de Matemática e declara *"Já ouvi falar de programas que auxiliam na explicação do conteúdo"*.

Alan: Tem 21 anos, concluiu o ensino médio em escola pública em 2007. Já leciona aulas de Matemática. Ele destaca que já estudou funções e geometria analítica no ensino médio e nos períodos iniciais do curso de Matemática. Quanto suas impressões sobre o gráfico de equações e funções, ele coloca que *"são os gráficos que transmitem certas realidades sobre os conteúdos e servem como base para tomadas de decisões."*. Apesar de gostar de construir os gráficos, tem muitas dificuldades em fazer aqueles mais complexos e, segundo ele, a sua compreensão sobre significado é *"mais ou menos"*. Para o uso do computador Alan coloca que *"Uso frequentemente, embora não tenha domínio de certos aplicativos. Tenho computador em casa [...]"*. Destaca ainda que utilizou o computador para estudar Matemática durante algumas disciplinas do curso superior e ratifica a sua importância com a afirmação *"claro que sim..o* *computador nos dias de hoje se tornou [sic] ferramenta fundamental não só no ensino da Matemática mais [sic] de modo geral como objeto facilitador no cotidiano, para o ensino da Matemática são diversos os benefícios como apresentação de gráficos, construção de modo mais dinâmico, além, é claro, de deixar a aula mais descontraída e mostrar para o aluno um lado diferente da Matemática e onde ela pode ser utilizada no cotidiano"*

Jorge: Tem 44 anos, concluiu o ensino médio em escola pública no ano de 1986. Ainda não leciona, porém está no 6º período do curso de Matemática. Estudou tópicos de funções e geometria analítica no ensino médio e na faculdade. Quanto às impressões sobre o gráfico de equações e funções, ele destaca *"tenho dificuldades em interpretar os dados que o gráfico mostra"*. Quanto ao uso do computador, ele destaca que tem uma *"experiência média, utilizo softwares específicos no trabalho na área de eletrônica, tenho computador em casa e utilizo muito, para lazer, estudo e trabalho."*. Ele afirma ter usado o computador para estudar Matemática apenas na faculdade.

4.3.2. O pré-teste

No primeiro dia de aula, foi entregue aos participantes um teste (Apêndice A), objetivando diagnosticar as Imagens de Conceito dos participantes com relação os conhecimentos sobre Equações Indeterminadas e Lugares Geométricos.

Este teste foi composto por oito questões, que objetivavam diagnosticar:

- A definição de conceito, imagem de conceito evocada e unidades cognitivas estimuladas ao se ouvir a palavra "Equações" (questão 1);
- A habilidade em interpretar geometricamente a definição de módulo de um número real (questão 2);
- A competência em reconhecer o número de soluções de uma equação polinomial de 1º grau em $\Re^2$ (questão 3);
- A compreensão sobre a representação gráfica da equação x-a=0, com $a \in \Re$, de acordo com o universo em que se encontram as soluções (questão 4);

- A competência ao se ter que argumentar matematicamente sobre a relação entre a equação $y=ax+b$ e a reta (questão 5);

- A capacidade de identificar Lugares Geométricos a partir das condições impostas ao LG (questão 6);

- A perícia em identificar o LG das soluções de uma equação indeterminada e representá-la graficamente (questão 7);

- A capacidade de estabelecer o número de soluções de um sistema de equações em $\Re^2$ a partir da identificação dos Lugares Geométricos das soluções das equações (questão 8).

4.3.3. As atividades no computador e as aulas modulares

As aulas contaram de atividades em salas de aula convencional (sem o computador) e aulas em ambiente computacional. O programa utilizado foi o Geo-Gebra, um software de geometria dinâmica que proporciona a integração entre a construção geométrica com régua e compasso e a facilidade da geometria analítica e suas equações. As atividades com software foram integradas com as atividades de demonstração e resolução de problemas em papel-lápis, de forma a não ser possível mensurar o tempo de utilização do computador pelos cursistas.

As aulas foram divididas em 5 módulos, de forma a construir a teoria não axiomática, mas generalizando um conhecimento anterior para um posterior. A divisão dos módulos se deu em três eixos norteadores: Noções fundamentais de Geometria Analítica; Lugares Geométricos; e Equações Indeterminadas e Sistemas de Equações. O diagrama a seguir apresenta a divisão dos módulos nos três eixos norteadores.

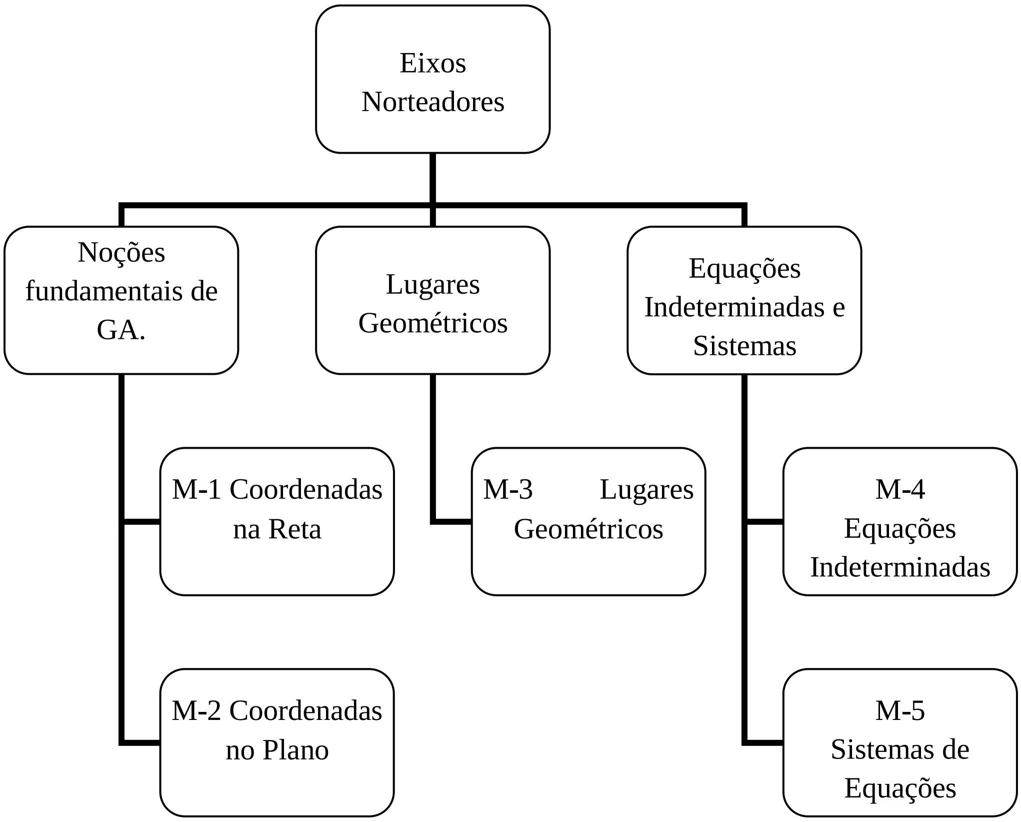


Diagrama 6: Divisão dos módulos em eixos norteadores.

M-1 "Coordenadas na reta" (Apêndice B): Nesta abordagem, as concepções de números reais e reta numérica são desenvolvidas objetivando como foco a noção de distância entre coordenadas da reta, culminado na definição de módulo de um número real.

Acreditamos que esta forma de abordagem possibilita ao estudante conceber o número real como a coordenada de um ponto na reta, sendo assim uma compreensão inicial sobre estruturas unidimensionais, para posterior inserção em estruturas bidimensionais e tridimensionais. Além disso, a construção do conceito de módulo de um número real a partir da noção de distância entre coordenadas da reta favorece a visualização geométrica, dá um sentido mais prático a tal definição e permite um desenvolvimento linear e sequencial da noção de distância entre pontos na reta para a noção de distância entre pontos no plano, favorecendo, assim, a generalização deste conceito em $\Re$ para o desenvolvimento deste conceito em $\Re^2$.

Esta abordagem se diferencia da abordagem tradicionalmente encontrada em alguns livros didáticos do Ensino Médio, que apresentam o conjunto dos números reais e sua representação geométrica na reta, sem lhe atribuir o papel de coordenada de um ponto da reta, enfatizando apenas a idéia de módulo como valor absoluto de um número real, conforme foi discutido no capítulo 3 deste trabalho (na seções 3.1.1 e 3.2.1).

M-2 "Sistemas de eixos ortogonais" (Apêndice C): Nesta abordagem, as noções iniciais de geometria analítica são desenvolvidas a partir de uma generalização das noções de coordenadas na reta. Vários problemas que buscam a conjectura de propriedades são apresentados e, a partir de tais conjecturas, os teoremas são provados. O foco deste tipo de desenvolvimento culmina, como anteriormente, na noção de distância entre dois pontos do plano.

Acredita-se que, neste tipo de abordagem, seja possível estabelecer uma generalização das idéias apresentadas no módulo anterior, por meio de argumentações matemáticas válidas. Assim, é possível conjecturar propriedades sobre os gráficos de funções e equações.

Alguns livros didáticos do Ensino Médio apresentam, sem qualquer formalidade, a noção básica de Plano Cartesiano no 1º ano de escolaridade, para posterior construção de gráficos de funções. Alguns livros destacam o gráfico da função Afim como uma reta e da função Quadrática como uma parábola, sem qualquer tipo de formalismo ou argumentação matemática válida de qualquer tipo. Em geral, esses livros retomam o conceito de Plano Cartesiano no 3º ano de escolaridade com mais formalismo, como tópico inicial da unidade de Geometria Analítica, descrevendo assim as noções de: ponto médio, distância entre pontos e colinearidade entre pontos. Formalizando nesta etapa o gráfico da equação $ax+by+c=0$ como uma reta e das equações $y=ax^2+bx+c$ e $x=ay^2+by+c$ como parábolas, sem fazer qualquer correlação com os tópicos estudados no 1º ano do ensino médio.

M-3: "Lugares Geométricos" (Apêndice D): Neste módulo, o software de geometria dinâmica "Geo-Gebra" é utilizado com os estudantes buscando a compreensão da definição de Lugar Geométrico e das definições de reta, circunferência, parábola, elipse, etc. Vários problemas envolvendo lugares geométricos são propostos e suas construções são realizadas diretamente em geometria dinâmica, fornecendo, assim, a movimentação dos elementos da construção. Objetiva-se, desta forma, a procura de conjecturas e a generalização de idéias.

A noção de Lugar Geométrico, na maioria dos livros do Ensino Médio, não é trabalhada ou é tratada apenas como último tópico desta fase de escolaridade.

Acreditamos que a apresentação deste tópico permite, futuramente, ao estudante conceber a interpretação do gráfico de uma equação como o Lugar Geométrico das soluções desta equação.

M-4 "Equações Indeterminadas" (Apêndice E): Aqui as definições de equações de duas incógnitas são tratadas, de forma a desenvolver uma compreensão de que o gráfico de uma equação corresponde ao Lugar Geométrico das soluções desta equação. Vários exercícios a serem realizados no Geo-Gebra e com papel-lápis são apresentados levando os alunos a conjecturarem propriedades, que, em seguida, são demonstradas algebricamente.

Inicialmente os estudantes são convidados a construir o conjunto solução de uma equação específica, como, por exemplo, $x+y=6$. Nesta etapa, são escolhidos valores arbitrários para uma das variáveis e, em seguida, é calculada a imagem desses valores escolhidos. A partir daí, é possível generalizar experimentalmente que o número de soluções de tal equação é infinito, e que sua apresentação na forma de tabela limita-se a apenas um subconjunto discreto do conjunto solução.

Como cada elemento do conjunto solução é um par ordenado, estes podem ser apresentados no Plano Cartesiano de forma discreta. Todavia, a limitação imposta pelos valores discretos do subconjunto apresentado impede a apresentação plena do conjunto solução da equação dada.

Por meio de visualizações obtidas a partir do gráfico com soluções discretas da equação dada e das idéias apresentadas em M-2 e M-3, é possível conjecturar e provar que o lugar geométrico das soluções da equação do exemplo é uma reta.

Este procedimento é utilizado durante todo M-4 para conjecturar e provar que a reta, a circunferência e a parábola correspondem aos Lugares Geométricos das soluções das respectivas equações $ax+cy+d=0$, $ax^2+ay^2+cx+dy+e=0$ e $ax^2+cx+by+d=0$, com $a, b\neq 0$.

M-5 "Sistema de equações" (Apêndice F): neste módulo, é consolidado que a solução de um sistema de equações é a interseção entre os gráficos das curvas que representam os lugares geométricos das soluções dessas equações. O software "Geo-Gebra" é fundamental na construção dessa teoria.

Vários problemas que, anteriormente, tinham sido resolvidos por métodos geométricos no M-3, são retomados neste módulo, porém solucionados de forma algébrica e geométrica, fortalecendo, assim, a relação entre Geometria e Álgebra.

A partir das generalizações obtidas em M-4, é possível estabelecer critérios para o número de soluções de um sistema de equações, por exemplo, no sistema $\begin{cases} y = x^2 - 2x + 1 \\ y - x = m \end{cases}$, onde $m \in \Re$. Temos, a partir das generalizações obtidas no M-4, que a primeira equação é uma parábola e a segunda é uma reta. Dessa forma, o número de soluções do sistema pode ser nenhuma, uma ou duas, de acordo com o parâmetro *m*.

Nos livros tradicionais do ensino médio, a única abordagem sobre o tema "Sistemas" é feita no 2º ano de escolaridade, em que o estudo do número de soluções baseia-se em conceitos da Álgebra Linear como Matrizes, Determinantes e Sistemas Lineares; é valido destacar que, neste tratamento, o foco limita-se às equações de 1º grau em $\Re^2$.

A diferença significativa entre a abordagem tradicional e a proposta alternativa apresentada neste trabalho é a possibilidade de proporcionar um tratamento mais geral sobre o tema sistemas, por uma abordagem focada em Lugares Geométricos, visto que nesta, as idéias não limitam-se apenas a equações de 1º grau em $\Re^2$, mas também a equações de 2º grau em $\Re^2$. Além disso, este tratamento pode ser estendido a quaisquer sistemas de equações, sejam eles lineares ou não-lineares e também podem ser estendidos a sistemas de equações em $\Re^3$.

4.3.4. O pós-teste

As mesmas questões do pré-teste foram aplicadas num pós-teste, objetivando analisar o desenvolvimento da Imagem de Conceito sobre equações indeterminadas e sistemas. Em virtude do longo tempo de realização do curso, 5 módulos a serem ministrados em 40 horas divididas em 10 dias de aula (ocorridas em algumas terças-feiras e sábados dos meses de novembro e dezembro de 2010), as questões do pós-teste foram solucionadas em quatro momentos distintos do curso:

- A questão número 2, foi solucionada na transição entre os módulos 1 e 2, ou seja, no início da primeira aula do Módulo 2;

- A questão 6, foi solucionada na transição entre os módulos 3 e 4, o seja, no início da primeira aula do Módulo 4;

- As questões 3, 4, 5 e 7, foram solucionadas na transição entre os módulos 4 e 5, ou seja, na primeira aula do Módulo 5;

- As questões 1 e 8; foram solucionadas no último dia de aula do curso, ou seja, a término do Módulo 5.

4.4. Análise dos Resultados

Procuramos estruturar e organizar a análise dos resultados em dois blocos: 1) a análise dos resultados individuais, procurando estabelecer assim o desenvolvimento da Imagem de Conceito de cada um dos participantes da pesquisa e 2) considerações gerais, que finaliza o trabalho destacando um balanço global dos efeitos da proposta alternativa sobre a Imagem de Conceito de equações e sistemas em $\Re^2$.

4.4.1. Discussão dos resultados individuais

Primeiramente, será feita a correção dos testes aplicados no início do curso, objetivando descrever Imagem de Conceito de cada aluno com relação aos conteúdos de Equações, Gráficos e Sistemas de Equações. As respostas dadas por cada aluno serão discriminadas, conforme SILVA (2009, p.102):

> *C Resposta correta com justificativa correta;*
> *CI Resposta correta, porém incompleta;*
> *CE Resposta correta, porém com justificativa errada;*
> *E Resposta errada;*
> *D Que o estudante escreveu afirmações corretas, mas que não têm relação como que foi perguntado, isto é, o estudante desviou do que foi pedido na questão;*
> *B Resposta em branco.*

De forma a mensurar a pontuação obtida por cada um dos participantes nos testes, foi considerado um grau por resposta obtida, de acordo com a tabela 1.

Respostas	Grau
C – Resposta Correta	1,00
CI – Resposta Correta, porém com justificativa incompleta	0,75
CE – Reposta correta, porém com justificativa errada	0,25
E – Resposta errada	0,00
D – Desvio do que foi pedido	0,00
B – Resposta em branco	0,00

Tabela 1: Grau de pontuação por resposta nos testes.

Posteriormente à correção e estruturação das respostas do primeiro teste, será realizada a análise das atividades da proposta alternativa, a fim de apresentar um esboço da Imagem de Conceito de cada um dos participantes, de forma a possibilitar uma futura comparação entre o desenvolvimento da Imagem de Conceito pós-atividades. Para Silva, destaca-se “esboço” da Imagem de Conceito, pois é:

> *[...] impossível mapear com extrema precisão qualquer imagem de conceito, pois há vários fatores a serem considerados: o estado emocional das pessoas analisadas, o nível de atenção do participante, o nível de comunicação que está sendo desenvolvida entre entrevistador e entrevistado e diversas outras possíveis razões. (2009, p. 102).*

Em seguida, os pós-testes serão corrigidos, obedecendo à estrutura imposta sobre a correção do pré-teste (tabela 1) e uma análise comparativa entre Imagem de Conceito anteriormente esboçada e posterior.

4.4.2. Considerações gerais

Finalizando a análise dos resultados, serão apresentadas as considerações gerais, com base nos testes, estruturalmente organizadas da seguinte forma:

- Quantidade de repostas por tipo (C, CI, CE, B, D, E) e por questão;
- Número de acertos por questão. Foram considerados como acertos apenas a respostas C e CI;
- Média de pontuação por questão. Neste caso será calculada a média aritmética dos conceitos obtidos pelos participantes em cada questão;
- Média de pontuação por participante. Aqui será calculada a média aritmética entre os conceitos obtidos nas questões de cada participante.

5. Análise e discussão dos resultados

Tomando como referência a análise de resultados de Silva (2009), neste capítulo serão analisados os pontos mais importantes entre as variáveis colocadas nos pré/pós-teste e atividades dos M-1, M-2, M-3, M-4 e M-5. Será feita uma correlação entre a teoria descrita no capítulo três e as variáveis em questão.

Inicialmente, serão apresentados alguns resultados comuns entre os participantes, nas atividades modulares, para, em seguida, ser realizada uma análise de resultados individuais relevantes para os objetivos da pesquisa, tomando como sequência a seguinte estrutura:

- Relato dos resultados das questões do pré-teste (Apêndice A), cada índice apresentado neste tópico se referenciará ao número da questão do teste;

- Relato dos resultados das observações individuais mais importantes em cada módulo (Apêndices B, C, D, E e F);

- Relato dos resultados das questões do pós-teste (Apêndice A), cada índice apresentado neste tópico se referenciará ao número da questão do teste;

- Análise comparativa entre o pré-teste e o pós-teste de forma a analisar o desenvolvimento da Imagem de Conceito de cada participante. Nesta análise será apresentada uma tabela e um gráfico, para cada participante, relacionando as questões dos testes com a teoria de Imagem de Conceito, assim como os resultados obtidos, tomando como referência os conceitos já mencionados no item 4.4.1: C – Correto com justificativa correta, CI – Resposta correta, porém incompleta, CE – Resposta correta, porém com justificativa errada, E – Resposta errada, D – Desvio do foco da questão, B – Resposta em Branco.

No Apêndice A, além das questões do pré e pós-teste, estão destacadas as respostas esperadas em cada uma das questões, de forma a facilitar a leitura e compreensão das análises realizadas nas respostas dos participantes.

5.1. Resultados comuns relevantes para a pesquisa

Módulo 1 (ver Apêndice B)

As conjecturas obtidas neste módulo são frutos da manipulação dos objetos matemáticos utilizando apenas papel-lápis.

Nas questões de 1 a 6, os participantes são orientados a construir os pontos solicitados utilizando-se de construções geométricas com régua e compasso (sem o computador), envolvendo o Teorema de Tales e o Teorema de Pitágoras, reconhecendo, dessa forma, a representação gráfica de equações e inequações em $\Re$ como pontos, segmentos de reta, semi-retas e retas sobre o eixo.

Na questão 7, é iniciada a noção de distância entre coordenadas da reta, de forma a estabelecer conexões entre a representação algébrica e geométrica, além de proporcionar um sentido prático para idéia de módulo de um número real.

As questões de 9 a 11 e de 13 a 18 seguem uma sequência evolutiva da noção de módulo, iniciando por soluções envolvendo interpretações geométricas dos problemas, para, em seguida, ir evoluindo para resoluções algébricas com base na definição formal do módulo de um número real.

As análises das questões 8 e 12 serão realizadas individualmente entre cada participante da pesquisa (ver seções 5.2 a 5.8).

Módulo 2 (Apêndice C)

As conjecturas obtidas neste módulo são frutos da manipulação dos objetos matemáticos utilizando apenas papel-lápis.

Na questão 1, os participantes são conduzidos a compreender as noções de coordenadas de pontos no plano, utilizando como referência o mapa do Brasil sob um sistema de eixos ortogonais. No item g desta atividade, o participante deve calcular a distância entre dois pontos em $\Re^2$, chegando à conclusão que as noções obtidas no módulo anterior não são suficientes, e uma nova estrutura deve ser criada para satisfazer as condições impostas por um universo bidimensional.

Embora deixemos a análise da questão 2 para ser feita individualmente, destacaremos que as justificativas obtidas pelos participantes durante a aplicação deste módulo serviram de motivação para a demonstração do teorema 3, que apresenta a fórmula para o cálculo da distância entre pontos no plano. A aplicação deste teorema será consolidada pela resolução das questões de 3 a 6.

Utilizando a mesma linha metodológica, é demonstrado o teorema 4, que apresenta a fórmula para determinação do ponto médio entre dois pontos no plano, acrescidos das atividades 7 e 8, que visam concretizar a aplicação deste teorema.

Após esses exercícios, é apresentada a definição de coeficiente angular da reta que liga dois pontos do plano, inicialmente sem qualquer correlação com alguma aplicação prática. Porém, após o exercício 9, é demonstrado o teorema 5, que apresenta a condição de colinearidade entre pontos no plano, utilizando como referência a definição de coeficiente angular. Logo em seguida, são realizados os exercícios de 10 a 14 que envolvem a aplicação deste teorema.

Os resultados individuais serão analisados nas seções 5.2 a 5.8.

Módulo 3 (Apêndice D)

As conjecturas obtidas nas atividades deste módulo são frutos da manipulação dos objetos matemáticos e das construções geométricas em geometria dinâmica.

Os exercícios 1 e 2 visam o reconhecimento da circunferência como um Lugar Geométrico. Todos os participantes chegaram às mesmas soluções nestes exercícios. Uma análise individual será realizada nas questões 3 e 4, que são consequências imediatas dos exercícios anteriores e da definição de Lugar Geométrico.

As questões 5 e 6 objetivam o reconhecimento da reta como um LG e as sua soluções são comuns entre os participantes.

Como consequência imediata dos exercícios anteriores, será realizada uma análise individual das questões 7, 8 e 9.

A fim de verificar o desenvolvimento dos participantes em definir formalmente objetos matemáticos relacionados a lugares geométricos, será realizada também uma análise individual das questões 10 e 11.

O exercício 12 (elipse) apresenta algumas analogias com os LG’s das questões 10 (reta mediatriz) e 11 (parábola), a sua inserção entre as atividades deste módulo visa o fortalecimento dos conceitos adquiridos, desta forma uma análise específica para esta atividade é desnecessária e tornaria redundantes as considerações individuais.

Os resultados individuais serão analisados nas seções 5.2 a 5.8.

Módulo 4 (Apêndice E)

Os exercícios deste módulo foram solucionados combinando as construções em geometria dinâmica com as resoluções com papel-lápis, com exceção dos exercícios de 1 a 8 que foram solucionados com o auxílio de uma planilha eletrônica (Excel).

Por uma limitação de tempo, nem todos os exercícios deste módulo puderam ser solucionados pelos participantes. Dessa forma, foram selecionados apenas aqueles que tinham uma importância fundamental para a construção da teoria. Explanaremos sobre os exercícios que vieram a ter soluções comuns entre os participantes ou seus resultados são extremamente mecânicos e uma análise individual seria desnecessária.

Para os exercícios de 1 a 7 (figura 15), os participantes foram orientados a utilizar uma planilha eletrônica para construir uma tabela com valores do domínio de cada uma das equações, encontrando assim suas respectivas imagens.

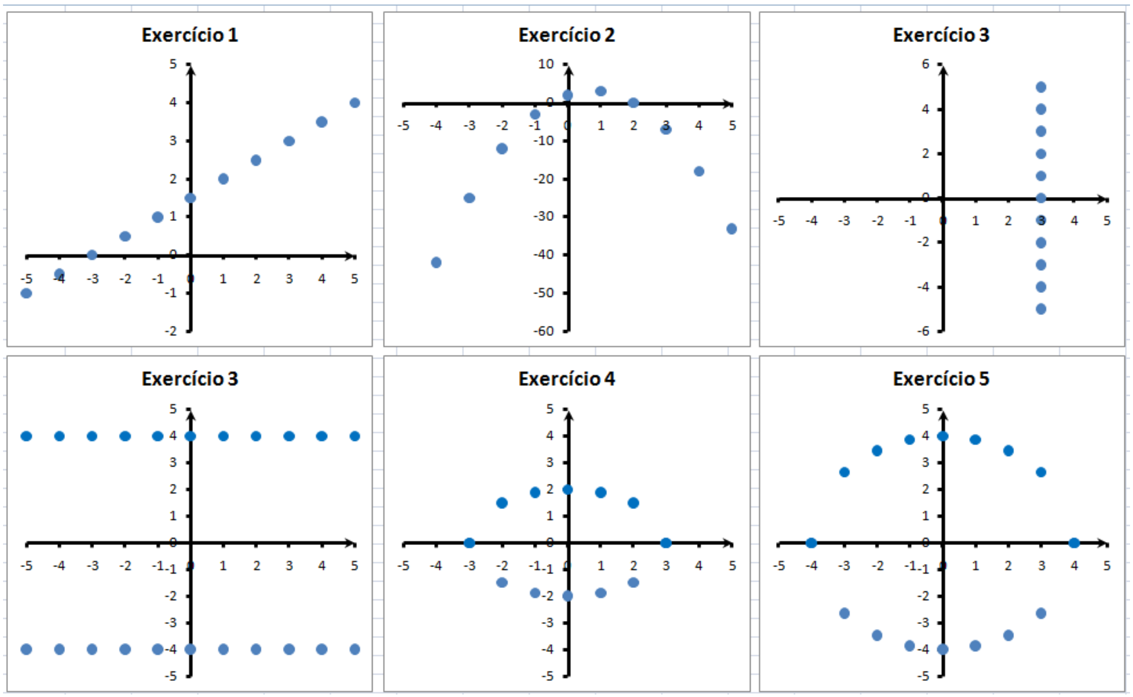


Figura 15: Soluções dos exercícios de 1 a 6 do Módulo 4 no Excel

Nestas atividades, os pares ordenados soluções das equações foram associados a pontos do plano e marcados num sistema de eixos ortogonais (no próprio computador). Como o objetivo destas questões era associar as soluções das equações a determinados lugares geométricos e estabelecer uma base conceitual sólida sobre essa relação, houve uma intensa intervenção do professor de forma a estabelecer respostas e conjecturas comuns entre os participantes, sendo assim os alunos chegaram às seguintes e aparentes conclusões sobre lugar geométrico das soluções das equações dadas (ver Apêndice E): no exercício 1 uma reta, no exercício 2 uma parábola; no exercício 3 duas retas; no exercício 4 alguns colocaram uma circunferência e outros colocaram uma elipse, no exercício 5 aconteceu o mesmo que no exercício 4 e para o exercício 6 não houve conclusões corretas.

A participante Julia levantou uma interessante questão referente ao lugar geométrico das soluções da equação $x-3=0$, *"No módulo um o gráfico da equação* $x-3=0$ *era um ponto e agora é vai ser uma reta?"*. Aqui houve uma intervenção do professor discutindo as mudanças provenientes ao universo em que se encontram as equações, no caso do Módulo 1 nossas soluções estavam em $\Re$, no módulo atual as soluções estão em $\Re^2$.

Na questão 8, que introduz a idéia de ponto genérico[8], Jorge comenta *"é muito legal, poder variar o valor de m e observar os as alterações no valor de y e o movimento do ponto no computador"*, ele referia-se à nova resolução da questão 1 proposta na questão 8, em que um ponto genérico da equação $2x+6=4y$ foi determinado como $P=\left(x,\dfrac{2x+6}{4}\right)$, porém, no GeoGebra, o ponto foi digitado como $P=\left(m,\dfrac{2m+6}{4}\right)$ e toda variação no parâmetro *m* fornecia uma movimentação no ponto *P* na tela do computador, projetando a reta.

As questões de 9 a 20 buscaram conjecturar, generalizar e provar as relações existentes entre a equação $ax+by+c=0$ e a reta. As demonstrações dos teoremas 6 e 7 foram feitas pelos próprios participantes com intervenções do professor, usando como referencial a condição de colinearidade entre três pontos (Módulo 2), a definição de reta como LG (Módulo 3) e a noção de ponto genérico (Módulo 4), solidificando, assim, a reta como lugar geométrico das soluções da equação polinomial de 1º grau em $\Re^2$.

As questões 21 a 26 visaram a conjectura, generalização e prova das relações existentes entre as soluções da equação $ax^2+ay^2+cx+dy+e=0$ e a circunferência,

---

[8] Chamaremos de Ponto Genérico um ponto condicionado por uma equação ou propriedade, dependente de um ou mais parâmetros. Exemplo: o ponto $P=(m,\ 2-m)$ é um ponto genérico condicionado pela equação y=2-x e dependente do valor atribuído ao parâmetro *m*.

ponto e conjunto vazio. A demonstração do teorema 8, que formaliza a relação entre esses objetos, foi realizada pelos participantes utilizando a fórmula da distância entre dois pontos no plano (Módulo 2) e a definição de circunferência como LG (Módulo 3).

Quanto às generalizações relativas à parábola, nem todos os exercícios puderam ser feitos por limitação de tempo. Dessa forma, alguns foram selecionados de maneira a não perder a estrutura planejada para construção da teoria sobre sistema de equações. Os exercícios solucionados foram 27, 28, 30 a 37, 48 a 51.

Do exercício 27, foi possível conjecturar o teorema 9, que destaca a parábola com reta diretriz horizontal ou vertical, como o lugar geométrico das soluções da equação $y = ax^2 + bx + c$ ou $x = y^2 + by + c$, com $a \neq 0$. Essa demonstração foi desenvolvida pelos próprios participantes a partir da manipulação de ferramentas já conquistadas em módulos anteriores como a distância entre pontos, definição de parábola como LG e a noção de ponto genérico. Entretanto, por limitação de tempo, a recíproca deste teorema não foi demonstrada.

Dos exercícios 28, 30 e 31 os participantes puderam conjecturar o teorema 10 e prová-lo, além de analisar os efeitos, no gráfico, de variações no coeficiente *a*, da equação $y = ax^2$. Em seguida, foram resolvidos os exercícios de 32 a 37 que são consequências imediatas desse teorema.

Foi demonstrado o teorema 13, que reescreve a equação $y = ax^2 + bx + c$, na sua forma canônica $y = a(x - m)^2 + k$ e discutida a importância dessa equivalência para determinação das fórmulas para as coordenadas do vértice da parábola, para as raízes e para demonstração da recíproca do teorema 9. Consequentemente, foram resolvidos os exercícios 48 a 51, que estudam os efeitos gráficos de mudanças nos parâmetros *a, m* e *k* da equação $y = a(x - m)^2 + k$ e nos coeficientes *a, b* e *c* da equação $y = ax^2 + bx + c$.

Módulo 5 (Apêndice F)

Assim como no módulo anterior, as conjecturas obtidas nas atividades deste módulo são frutos de uma combinação entre a manipulação dos objetos matemáticos com papel-lápis e construções geométricas em ambiente de geometria dinâmica.

Inicialmente, foi solicitado aos participantes que resolvessem os problemas de 1 a 6, simplesmente com o intuito de revisar os conceitos estudados nos módulos anteriores. Durante a resolução do exercício 6 (figura 16), eles tiveram uma surpresa ao digitar a equação $112x^2 - 144y^2 - 1008 = 0$, que corresponde a um lugar geométrico ainda não definido durante o curso, a hipérbole. Fizemos também a sua construção utilizando apenas ferramentas da geometria dinâmica.

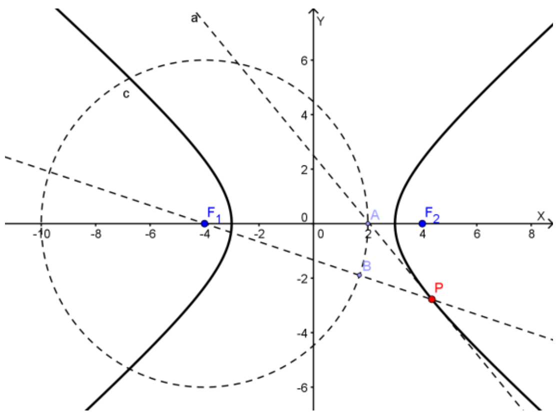


Figura 16: Exercício 6, hipérbole construída no GeoGebra.

Outra surpresa para os participantes aconteceu durante a resolução do exercício 8, ao digitarem a equação $\left((x+3)^2 + y^2\right) \cdot \left((x-3)^2 + y^2\right) = 81$ no GeoGebra.

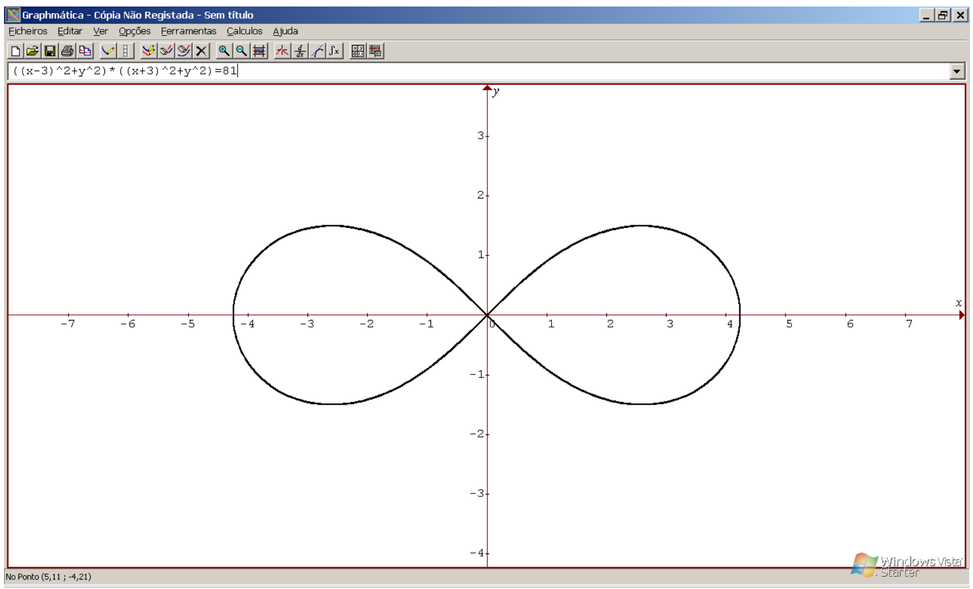


Figura 17: Lemniscata no Graphmática.

O software não suportou a equação exibindo uma mensagem de erro. Neste momento, vários participantes me questionaram *"O que aconteceu?"*, *"Onde errei?"* e *"Qual é o lugar geométrico?"*, ao perceber que era uma falha do programa, pedi-lhes que abrissem o Graphmática (software gráfico que suporta a entrada de uma gama de funções e equações em $\Re^2$) e digitassem a equação no campo entrada, dessa forma eles puderam apreciar a Lemniscata (Figura 17).

A questão 10 solicitava o lugar geométrico dos pontos equidistantes a um ponto *A* e a uma reta *r*, e colineares a dois pontos *B* e *C*, semelhantemente a inúmeras questões feitas no Módulo 3. No entanto, foi proposta uma resolução diferente a daquele módulo. Primeiramente, os participantes foram conduzidos a encontrar a equação do LG dos pontos que fossem equidistantes a *A* e a *r*, em seguida foram orientados a encontrar a equação do LG dos pontos colineares a *B* e *C*, e por fim solicitamos que resolvessem o sistema composto pelas duas equações $\begin{cases} x^2 - 4x + 4y = 0 \\ 2x - 3y - 5 = 0 \end{cases}$, encontrando como conjunto solução e consequentemente lugar geométrico solicitado $S = \left\{(-2,-3),\left(\frac{10}{3},\frac{5}{9}\right)\right\}$.

Por limitação de tempo, nas questões 11 e 12, que envolviam a determinação de LGs e resoluções de sistemas relacionados à localização de pessoas e locais da cidade Alegria, foi solicitado que solucionassem apenas os itens *a*, *b*, *e*, e *f*, que foram considerados em si, a nosso ver, suficientes para compreensão da relação solução algébrica/solução geométrica.

As questões 13 e 14 foram solucionadas graficamente. Todos os participantes conseguiram encontrar o conjunto solução dos sistemas e classificá-los de acordo com a definição 9, que descreve os três tipos de soluções de um sistema.

Da definição 10, que determina a posição relativa entre retas, foi possível analisar, conjecturar e generalizar várias condições referentes aos sistemas lineares em $\Re^2$, propostos pelos exercícios de 15 a 21.

Para finalizar esse módulo, foram feitos os exercícios 22 e 23, com base na definição 10, que destaca a posição relativa entre reta e parábola ou reta e circunferência.

5.2. Pedro

5.2.1. Pré-Teste (Apêndice A)

1) Nesta questão ele apresenta uma Definição de Conceito inconsistente com a Definição Formal sobre equações, destacando em seguida um exemplo para representar seu pensamento: *"É tudo que envolve uma ou mais variáveis igualando a zero. Ex.:* $2x+2=0$*"*, ver respostas esperadas (Apêndice A, p. 172).

2) Pedro erra a questão, pois ele apresenta um exemplo numérico errado e sem qualquer relação com o que está sendo pedido na questão (interpretação geométrica).

3) Ele apresenta uma resposta correta assinalando que uma equação de 1º grau com duas variáveis possui infinitas soluções, justificando que *"Porquê depende dos valores da primeira variável".*

4) Consideramos que ele respondeu corretamente que a representação gráfica da equação $x-a=0$, é um ponto. Porém a resposta está incompleta, pois isso depende do universo em que se encontram as soluções da equação. Ele destaca ainda que *"Isolando x temos apenas um ponto".* Um fator de conflito potencial parece estar presente em sua Imagem de Conceito.

5) Essa questão Pedro deixa em branco.

6) Ele erra marcando que o LG em questão é uma reta mediatriz, justificando que *"Pois a linha férrea com o mastro forma um triângulo"*.

7) Novamente, Pedro erra argumentando que a equação possui quatro soluções, duas para *x* e duas para *y*.

8) Com o mesmo argumento utilizado na questão anterior, Pedro erra esta questão.

5.2.2. Atividades Modulares

Módulo 1 (Apêndice B)

Para a questão 8, que envolve a interpretação geométrica de expressões como $\left|-1-(+3)\right|$, Pedro descreve *"Determina a distância do ponto -1 a 3"*. Apesar dele ainda considerar -1 e 3 como pontos, e não como coordenadas de pontos, essa interpretação é bastante rica, pois favorece a futura interpretação de definições matemáticas mais complexas que envolvem noções geométricas das idéias sobre módulo.

Na questão 12, em que Pedro deveria expressar o significado geométrico da expressão $|x-a| = \begin{cases} x-a, & \text{se } x \geq a \\ -x+a, & \text{se } x < a \end{cases}$, ele apresenta apenas uma ilustração, que, de certa forma, relaciona-se com o significado geométrico. Porém, pretendia-se uma resposta verbal dos participantes, sendo assim evitaremos fazer qualquer tipo de análise sobre tal resultado, na figura abaixo podemos observar a ilustração de Pedro.

Figura 18: Ilustração de Pedro para interpretar o módulo

Módulo 2 (Apêndice C)

Na questão 2, em que Pedro é questionado se a noção de distância entre dois pontos, obtida no Módulo 1, é suficiente para se calcular a distância entre dois pontos no Módulo 2, ele escreve *"Não, pois no módulo anterior tem apenas uma coordenada e no módulo atual têm 2 coordenadas e no módulo atual usaremos figura plana como o triângulo retângulo e usando o Teorema de Pitágoras."* . Apesar de muito confusa, as suas colocações deixam claro a necessidade de uma mudança entre as noções obtidas anteriormente para as atuais.

Módulo 3 (Apêndice D)

Na questão 3, referente à definição de circunferência como LG, Pedro escreve *"Circunferência é o lugar geométrico dos pontos que fazem um raio com o ponto dado"*. Para a questão 4, que envolve o lugar geométrico dos pontos que distam $\sqrt{2}$ unidades do ponto *(0, 0)* e *1* unidade do ponto *(-2, 1)*, ele escreve *"É a interseção das duas circunferências"*. Com relação à questão 7, que visa descrever uma definição para reta Pedro coloca que *"Reta é o lugar geométrico dos pontos que estão alinhados* *com os pontos dados"*. Para o exercício 8, que solicita ao participante o LG os pontos colineares com os pontos *(-1, 2)* e *(3, -2)* e colineares com os pontos *(-4, 3)* e *(5, 0)*, ele escreve *"O ponto A que está colinear com A e B e também está colinear com C e D"* . Para o exercício 9, que questiona qual é o LG dos pontos que distam $\sqrt{2}$ unidades do ponto *(0, 0)* e são colineares com os pontos *(-1, 2)* e *(3, -2)*, Pedro coloca *"É a interseção da circunferência com a reta"*. Na questão 10, que questiona qual é o LG dos pontos equidistantes a dois pontos fixos *A* e *B*, e, além disso, solicita a definição desse LG, Pedro deixa a questão em branco. Finalizando com a questão 11, em que ele é questionado sobre qual é o LG dos pontos *P* equidistantes a um ponto *F* e uma reta *r* não contendo *F* e é solicitado também que defina tal lugar, ele coloca *"É uma parábola. É o lugar geométrico onde a distância do ponto P ao ponto F, seja igual à distância do ponto P à reta r"*.

Podemos perceber que, apesar de Pedro acertar a grande maioria das questões que envolvem valores específicos, ele enfrenta muita dificuldade em definir os objetos matemáticos. De qualquer forma, há uma evolução entre as definições escritas por ele na sequência dos exercícios 3, 7 e 11 (respectivamente circunferência, reta e parábola). Percebe-se também que Pedro reconhece que um LG pode ter finitos ou infinitos pontos, pois no exercício 3 e 7 ele escreve que *"[...] é o lugar geométrico dos pontos [...]"*, já nos exercícios 4 e 9 ele escreve que é a interseção entre as figuras. Para a questão 8, aparentemente ele tem uma conclusão um pouco confusa. Porém, como os exercícios foram resolvidos com o auxílio do computador e o ponto *A* é a interseção entre a reta que passa por *A* e *B* e a reta que passa por *C* e *D*, concluímos que ele percebeu essa interseção na tela do computador. Não é possível saber os motivos que o levaram a deixar a questão 10 em branco.

Módulo 4 (Apêndice E)

Uma boa observação colocada por Pedro na resolução do exercício 3, que envolve a representação gráfica da equação $x-3=0$ *é "em $\Re$ é um ponto, em $\Re^2$ é uma reta paralela ao eixo x e em $\Re^3$ é um plano paralelo ao eixo y".* Percebe-se que Pedro já começa a estender informalmente idéias de uma estrutura para outra. Porém ele comete uma pequena falha, pois em $\Re^3$ essa equação é um plano paralelo ao plano YOZ .

Para a questão 9, em que ele deve argumentar sobre a relação entre a equação $y = ax + b$ e a reta, escreve *"Pego 3 pontos da equação e vejo se eles são colineares,* $P_1 = (x_1,\ mx_1 + q)$, $P_2 = (x_2,\ mx_2 + q)$ *e* $P_3 = (x_3,\ mx_3 + q)$ *temos que* $m_{P_1P_2} = m$ *e* $m_{P_1P_3} = m$*"*. Pedro já formaliza bem as idéias adquiridas nos módulos anteriores para argumentar matematicamente sobre essa relação.

Nos exercícios 17 e 18 ele escreve respectivamente *"variando o coeficiente angular estará mudando o ângulo em relação ao eixo x"* e *"variando o coeficiente linear não mudará o ângulo em relação ao eixo x"*, apesar de já apresentar melhores argumentos ao se expressar sobre os objetos matemáticos, Pedro não percebe que a variação do coeficiente linear provoca uma translação no gráfico.

Módulo 5 (Apêndice F)

Para a questão 11a, que procura localizar Joana sobre um mapa sabendo a sua colinearidade com dois pontos, pergunta-se a Pedro se é possível localizá-la, e ele responde *"Não. Joana poderá estar nos possíveis pontos relacionados à equação* $x - y = 2$*"*. Já na questão 11b que complementa a questão anterior, apresentando mais dois pontos colineares à Joana, Pedro é questionado sobre a possibilidade de localização da moça. Ele argumenta *"Sim. Achando o ponto de interseção entre as duas equações. Ponto de interseção (5, -3)"*. Além de apresentar uma boa argumentação sobre a localização de Joana, Pedro soluciona o problema algebricamente.

Na questão 15, que envolve a análise da posição relativa entre as retas *r*, *s* e *t*, Pedro responde que as retas *"são paralelas"*, entretanto com relação aos coeficientes da equação na forma normal ele escreve *"Para serem paralelas os coeficientes precisam ser proporcionais"*, o que não é verdade, pois o termo independente não pode ser proporcional no caso do paralelismo. Já com as equações na forma reduzida ele coloca que *"os coeficientes angulares das retas r, s e t são iguais"*. Apesar de boa, a sua conjectura está incompleta, a medida que neste caso há a necessidade que os coeficientes lineares sejam diferentes.

5.2.3. Pós-Teste (Apêndice A)

1) Pedro escreve a seguinte Definição de Conceito com alguns exemplos *"Equação é uma sentença aberta expressa por uma igualdade, envolvendo*

expressões matemáticas, sendo equação da reta, da parábola e de uma circunferência". Neste caso, Pedro apresentou uma definição de conceito consistente com a definição formal, acrescido de algumas unidades cognitivas (exemplos), ver respostas esperadas (Apêndice A, p. 172).

2) Pedro acerta a questão, apresentando a seguinte interpretação geométrica *"Quando x<2 subtrai x de 2, quando x≥2 subtrai 2 de x.".*

3) Ele acerta ao assinalar que há infinitas soluções para a equação de 1º grau em $\Re^2$, entretanto apresenta um argumentando incompleto ao escrever *"Porque é uma reta em* $\Re^2$ *".*

4) Novamente Pedro acerta, uma vez que ele continua considerando a representação gráfica da equação $x-a=0$ como um ponto. Porém a incompletude de sua resposta se dá por uma falta de reflexão sobre o universo em questão.

5) Apesar de apresentar os resultados de dois teoremas demonstrados no curso, consideramos que ele se desviou do foco da questão, pois deveria comprovar que o gráfico de $f(x)=ax+b$ é uma reta. Ele escreveu *"Toda equação de 1º grau é uma reta e toda reta é o lugar geométrico das soluções da equação de 1º grau"*.

6) Aqui ele acerta ao assinalar que o LG em questão é uma parábola, contudo argumenta incompletamente que *"[...] a distância de Gustavo ao mastro é igual a distância de Gustavo a linha férrea"*.

7) Nova resposta correta, porém incompleta, pois ele coloca que a equação dada é uma *"Circunferência→ infinitas soluções",* reconhecendo o LG das soluções da equação, porém sem justificar porque há infinitas soluções.

8) Consideramos também uma resposta correta, porém incompleta, pois ele se esquece de mencionar que o sistema pode ser impossível, como podemos observar em suas colocações *"*$\Delta=0$ *apenas uma solução é tangente a circunferência,* $\Delta>0$ *duas soluções são os pontos de interseção da reta cortando a circunferência"*.

5.2.4. Evolução da Imagem de Conceito nas atividades do pré e pós-teste

Na primeira questão dos testes, Pedro apresenta uma evolução em sua capacidade de definir equações e descrever exemplos. Todavia, um aspecto negativo em suas observações no pós-testes é que todos os exemplos apresentados limitam-se a equações em $\Re^2$, que, apesar de terem sido o alvo da pesquisa em questão, não esgotam os inúmeros exemplos de equações em outros universos.

Questão	**Relação com a Teoria**	**Pré-Teste**	**Pós-Teste**
1) Equações.	Imagem de Conceito Evocada e Definição de Conceito.	E	C
2) Módulo.	Definição de Conceito e Unidades Cognitivas.	E	C
3) Equações indeterminadas.	Imagem de Conceito Evocada e Unidades Cognitivas.	C	CI
4) Equação *x-a=0*.	Imagem de Conceito Evocada, Unidades Cognitivas e Fatores de Conflitos Potenciais.	CI	CI
5) Função *f(x)=ax+b*.	Imagem de Conceito Evocada, Definição de Conceito e Unidades Cognitivas.	B	D
6) Lugar Geométrico.	Imagem de Conceito Evocada e Unidades Cognitivas.	E	CI
7) Equações Indeterminadas.	Imagem de Conceito Evocada e Unidades Cognitivas.	E	CI
8) Sistemas de Equações.	Imagem de Conceito Evocada, Unidades Cognitivas e Raiz Cognitiva.	E	CI

Tabela 2: Análise dos resultados do pré/pós-teste de Pedro

Claramente há um desenvolvimento em sua habilidade de interpretar expressões envolvendo o módulo da diferença entre números reais, pois, anteriormente ele apresentou um exemplo numericamente errado e, posteriormente, uma interpretação geométrica correta do módulo como a distância entre pontos da reta.

Um fato intrigante ocorre quando é necessário justificar que uma equação de 1º grau em $\Re^2$ possui infinitas soluções, Pedro muda a sua justificativa do pré-teste, em que acertou, para o pós-teste, onde sua colocação fica incompleta. O mesmo acontece na questão 7 do pós-teste, em que ele afirma que a equação dada possui infinitas soluções, justificando apenas que é uma circunferência.

Outro aspecto negativo na Imagem de Conceito de Pedro é o fato de reconhecer a representação gráfica da equação $x - a = 0$ apenas como um ponto, sem refletir previamente sobre o universo em que se encontra a equação. Um dos fatores que pode ter agravado o não desenvolvimento desta noção durante o curso é a pequena quantidade de exercícios envolvendo este caso.

Podemos acreditar, também, que a habilidade de comprovar que a função polinomial de 1º grau é uma reta continua inalterada na Imagem de Conceito de Pedro, pois, inicialmente, ele deixou a questão em branco. Já no pós-teste, ele se desviou do foco da questão, apresentando apenas a descrição de dois resultados já demonstrados durante o curso.

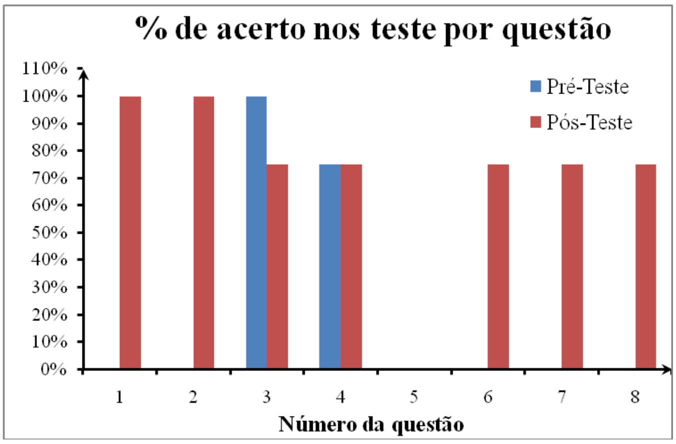


Gráfico 2: Análise da evolução de Pedro por questão

Pedro evolui em sua capacidade de reconhecer lugares geométricos. Isto fica evidente em sua colocação sobre o LG do exercício 6 do pós-teste, contudo ele não destaca se o *"mastro"* é ou não o foco da parábola. Podemos consolidar o progresso desta capacidade pela análise na questão sete, em que ele reconhece que o LG das soluções da equação em questão é uma circunferência.

Quanto ao número de soluções de um sistema de equações, há um progresso na Imagem de Conceito de Pedro, pois na atividade 8 ele faz uma análise gráfica sobre o número de soluções do sistema, porém sua análise é incompleta.

5.3. João

5.3.1. Pré-Teste (Apêndice A)

1) João apresenta a seguinte Definição de Conceito para equações *"É a igualdade entre duas expressões."*, sem apresentar nenhum exemplo. Dessa forma foi considerado que a definição de João é inconsistente com a Definição Formal, ver respostas esperadas (Apêndice A, p. 172).

2) Ele desvia do foco da questão não apresentando uma interpretação geométrica para a expressão. Ele escreve *"No módulo, todas as equações terão resultado positivo."*.

3) Ele acertou ao assinalar que há infinitas soluções para a equação de 1º grau com duas variáveis, porém apresenta uma justificativa errada que segue *"O valor da equação dependerá dos valores atribuídos a x e y"*.

4) Ele acertou ao reconhecer a representação gráfica da equação $x - a = 0$ como um ponto. Entretanto sua conclusão é incompleta, pois essa representação depende do universo em que se encontram as soluções da equação, ele justifica ainda que *"Qualquer que seja o valor atribuído a 'a', indicará a formação de um ponto"*.

5) João erra nesta questão, porém apresenta em alguns momentos argumentos próximos da justificativa matemática correta, ele escreve que *"Porque qualquer valor que você atribua a 'b', não altera o ângulo"*.

6) Ele errou, colocando que o LG é uma circunferência, apresentando a seguinte justificativa *"A distância entre a linha férrea e o mastro são iguais, portanto o Gustavo é o ponto central."*.

7) Apesar de colocar que a equação em questão possui *“Infinitas soluções”*, não apresentou uma justificativa para tal fato, dessa forma consideramos que ele respondeu corretamente, porém com uma justificativa errada.

8) Errou, escrevendo apenas *“Infinitas Soluções”*.

5.3.2. Atividades Modulares

Módulo 1 (Apêndice B)

Para a questão 8, que envolve a interpretação geométrica de expressões como $|-1-(+3)|$, João escreve que é a *“ distância entre os pontos de coordenadas -1 e 3”*. Dessa forma, ele apresenta uma interpretação de acordo com o esperado para tal questão, consolidando, assim, a idéia de módulo como a distância entre pontos na reta de forma a favorecer uma futura extensão da noção de distância entre pontos no plano.

Na questão 12, João deve expressar o significado geométrico da expressão $|x-a| = \begin{cases} x-a, & \text{se } x \geq a \\ -x+a, & \text{se } x < a \end{cases}$. Novamente, conforme o participante anterior, ele apresenta uma figura com uma pequena observação *“Se x está a direita de a”.* Poderíamos até concluir que ele estava relacionando a noção de distância com a expressão $x-a$, porém por falta de clareza na resposta do participante, evitaremos fazer tal inferência. De qualquer forma deixamos na figura abaixo a ilustração de João.

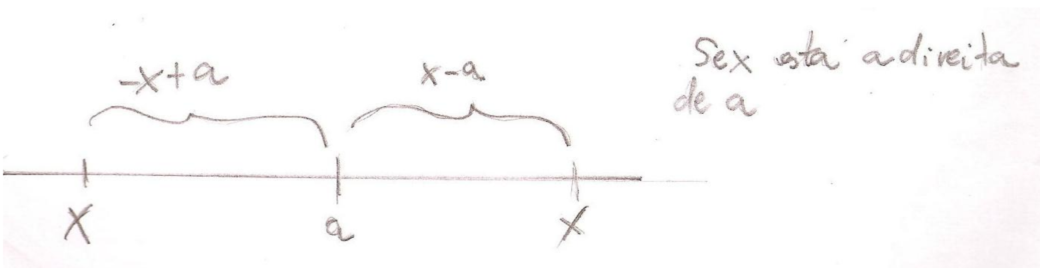


Figura 19: Ilustração de João para interpretar o módulo

Módulo 2 (Apêndice C)

Na questão 2, em que João é questionado se a noção de distância entre dois pontos obtida no Módulo 1 é suficiente para se calcular a distância entre dois pontos no Módulo 2, ele escreve apenas que *“Não”*, sem justificar. Assim, não é possível obter qualquer tipo de análise de sua posição.

Módulo 3 (Apêndice D)

Na questão 3, referente à definição da circunferência como LG, João descreve *"Circunferência é o lugar geométrico onde os pontos distam r unidades em relação ao ponto dado"*. Para a questão 4, envolvendo o lugar geométrico dos pontos que distam $\sqrt{2}$ unidades do ponto *(0, 0)* e *1* unidade do ponto *(-2, 1)*, ele escreve *"Interseção das duas circunferências A=(-1, 1) e B=(-1,4; 0,2)"*. Com relação à questão 7, que visa descrever uma definição para reta, João coloca que *"Reta é o lugar geométrico dos pontos colineares em relação aos dois pontos dados"*. Para o exercício 8, que solicita ao participante o LG os pontos colineares aos pontos *(-1, 2)* e *(3, -2)* e colineares aos pontos *(-4, 3)* e *(5, 0)*, ele escreve *"Um ponto. Interseção das duas retas"* . Para o exercício 9, que questiona qual é o LG dos pontos que distam $\sqrt{2}$ unidades do ponto *(0, 0)* e são colineares com os pontos *(-1, 2)* e *(3, -2)*, João coloca *"2 pontos. Interseção da reta e da circunferência"*. Na questão 10, que argúi sobre o LG dos pontos equidistantes a um ponto *A* e a um ponto *B* e solicita a definição desse LG, ele escreve *"Reta Mediatriz aos pontos A e B. É o lugar geométrico dos pontos equidistantes aos pontos A e B"*. Finalizando com a questão 11, em que ele é questionado sobre qual é o LG dos pontos *P* equidistantes a um ponto *F* e uma reta *r* não contendo *F* e é solicitado também que defina tal lugar, ele coloca *"Parábola. É o lugar geométrico dos pontos do plano equidistantes a um ponto fixo e a uma reta que não contém o ponto"*.

Percebe-se que João vem tendo um excelente desenvolvimento nas atividades modulares propostas. Além de acertar todos os exercícios, ele definiu muito bem a circunferência, a reta, a reta mediatriz e a parábola. Essas definições serão aproveitadas para futuras demonstrações sobre equações. Ele reconhece o LG como um conjunto finito ou infinito de pontos, conforme é possível notar em suas definições nas questões 3, 7, 10 e 11 e nas resoluções dos exercícios 4, 8 e 9. Além disso, ele usou o comando ponto de interseção do GeoGebra, para encontrar as coordenadas do LG do exercício 4.

Módulo 4 (Apêndice E)

Nos exercícios 17 e 18, referentes a variações no coeficiente angular e linear da equação da reta ele escreve respectivamente *"Variando a tangente do ângulo, logo varia o ângulo da reta com o eixo x"* e *"O gráfico se desloca paralelamente pois varia-se o valor com que o gráfico corta o eixo x"*. Essas são duas boas colocações de João.

Na primeira, ele relaciona o coeficiente angular com a tangente do ângulo, provável fruto da definição 5 (generalizada – Módulo 4). Na segunda, ele analisa com eficácia a alteração no gráfico, no entanto finaliza seu argumento de forma incorreta, pois o coeficiente linear é a interseção da reta com o eixo y.

Na questão 31, envolvendo a análise gráfica provocada por variações no coeficiente *a* da equação $y = ax^2$, ele escreve *"Quando negativo concavidade voltada para baixo e quando positivo concavidade para cima"*. Essa relação é interpretada por ele também em parábolas com concavidade à direita e à esquerda, contudo ele não faz indagações sobre o efeito gráfico de aumentos sucessivos em *a*.

Para a questão 49, relacionada a mudanças nos parâmetros da equação $y = a(x-m)^2 + k$ ele coloca que alterações em *a*, *"varia a concavidade do gráfico"*, mudanças em *m*, *"está movimentando o x do vértice"* e mudanças em k *"está movimentando o y do vértice"*. Essas colocações de João análogas a indagações de outros participantes, sobre a translação da parábola (no caso de alterações em *m* e *k*), foram motivadoras para concluir que as coordenadas do vértice da parábola são dadas por $V = (m, k)$.

Módulo 5 (Apêndice F)

Para a questão 15, em que se deve analisar a posição relativa entre as retas *r*, *s* e *t*, ele coloca *"São paralelas";* quanto aos coeficientes da equação na forma normal, ele escreve *"São proporcionais";* e na forma reduzida completa *"coeficientes angulares são iguais, 'q' são diferentes"*. Apesar de econômico em sua análise, boas conjecturas foram feitas, com exceção de uma pequena falha com relação à proporcionalidade, em retas paralelas *a* e *b* são proporcionais e *c* não.

Na questão 18, que envolve a variação dos coeficientes angulares e lineares das equações do sistema $\begin{cases} y = m_1 x + q_1 \\ y = m_2 x + q_2 \end{cases}$, João coloca no item a (variação de q_2) que se *"$q_1 = q_2$ são coincidentes (possível e indeterminado) e $q_1 \neq q_2$ são paralelas (impossível)"*, já no item b (variação de m_2) ele destaca que se "*$m_1 = m_2$ são retas coincidentes (possível e indeterminado) e $m_1 \neq m_2$ são concorrentes (possível e determinado)"*. Uma pequena falha é observada aqui, pois, no caso em que os coeficientes angulares são iguais, o sistema pode ser possível e indeterminado ou impossível.

5.3.3. Pós-Teste (Apêndice A)

1) João não apresenta uma Definição de Conceito, mas destaca alguns exemplos sobre equações *"Possui infinitas soluções, variáveis, igualdade, reta, elipse, circunferência"*. Dessa forma, lhe conferimos uma resposta correta, porém de forma incompleta, ver respostas esperadas (Apêndice A, p. 172).

2) Ele deixa esta questão em branco.

3) Aqui ele acerta, ao assinalar que uma equação de 1º grau com duas variáveis possui infinitas soluções e argumentar que *"Infinitos pares ordenados satisfazem uma equação com duas variáveis"*.

4) Novamente uma questão em branco.

5) João acerta ao argumentar que para justificar que a função $f(x) = ax + b$ é uma reta, basta *"pegarmos três pontos quaisquer, esses pontos serão colineares"*.

6) Ele acerta assinalando que o LG em questão é uma parábola e acrescentando *"equidistante de um ponto fixo e de uma reta"*.

7) João escreve corretamente que a equação tem um número de soluções "*Infinitos,* $S = \{(x, y) \in IR^2 / x^2 + (y-2)^2 = 14\}$*"*, destacando ainda o conjunto formado por essas soluções, porém não justifica esse fato.

8) Ele acerta ao escrever *"Possível e Determinado ou Impossível. Variando m temos: se for tangente 1 solução, secante 2 soluções e externa nenhuma"*.

5.3.4. Evolução da Imagem de Conceito nas atividades do pré e pós-teste

Apesar de não apresentar uma Definição de Conceito para equações, João apresenta uma modesta evolução ao apresentar algumas Unidades Cognitivas, por meio de exemplos. Uma preocupação nesta evolução é o fato de todos os seus exemplos limitarem-se a equações em $\Re^2$, sem destacar os casos de equações em outros universos.

Questão	Relação com a Teoria	Pré-Teste	Pós-Teste
1) Equações.	Imagem de Conceito Evocada e Definição de Conceito.	E	CI
2) Módulo.	Definição de Conceito e Unidades Cognitivas.	E	B
3) Equações indeterminadas.	Imagem de Conceito Evocada e Unidades Cognitivas.	CE	C
4) Equação *x-a=0.*	Imagem de Conceito Evocada, Unidades Cognitivas e Fatores de Conflitos Potenciais.	CI	B
5) Função *f(x)=ax+b*.	Imagem de Conceito Evocada, Definição de Conceito e Unidades Cognitivas.	E	C
6) Lugar Geométrico.	Imagem de Conceito Evocada e Unidades Cognitivas.	E	C
7) Equações Indeterminadas.	Imagem de Conceito Evocada e Unidades Cognitivas.	CE	CE
8) Sistemas de Equações.	Imagem de Conceito Evocada, Unidades Cognitivas e Raiz Cognitiva.	E	C

Tabela 3: Análise dos resultados do pré/pós-teste de João

João precisou faltar uma das aulas modulares, o que o impediu de solucionar as questões dois e quatro do pós-teste, dessa forma não será feita qualquer análise sobre o seu desenvolvimento nestes itens.

A justificativa apresentada por ele sobre o número de soluções de uma equação de 1º grau em $\Re^2$, sofreu uma ligeira evolução. Entretanto, na questão similar sobre o número de soluções da equação $3x^2 - 12y + 3 = 33 - 3y^2$, ele não apresenta uma justificativa. Dessa forma, consideramos que seu desenvolvimento neste quesito foi superficial.

A sua capacidade de argumentar sobre a relação entre a função $f(x)=ax+b$ e a reta apresentou um bom desenvolvimento, a medida que, no pré-teste, ele não soube apresentar uma comprovação razoável sobre a relação. Já no pós-teste ele acerta a questão apresentando a justificativa esperada para tal questão.

A capacidade de João em reconhecer e definir Lugares Geométricos apresentou um bom desenvolvimento, visto que, no pós-teste, ele acerta o LG da questão 6. Além de descrever a definição da parábola, porém com um pequeno erro: não expressou que o foco não pode pertencer à reta diretriz.

Outro progresso observado nas atividades do pós-teste é que João já possui condições, a serem aprimoradas, de analisar o número de soluções de um sistema de equações a partir dos pontos de interseção entre os lugares geométricos das soluções destas equações.

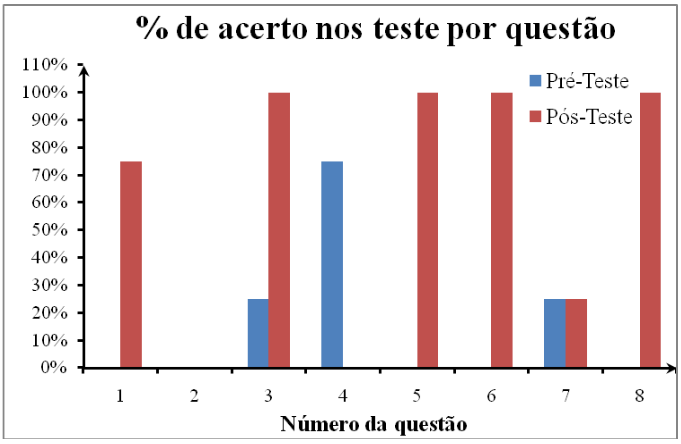


Gráfico 3: Análise da evolução de João por questão

5.4. Laura

5.4.1. Pré-Teste (Apêndice A)

1) Laura não apresenta uma definição para equações, destacando apenas um pequeno comentário *“Lembra-me uma igualdade”*. Dessa forma consideramos que ela errou, ver respostas esperadas (Apêndice A, p. 172).

2) Laura erra esta questão, pois não apresenta uma interpretação geométrica para o fato, descrevendo apenas alguns pontos do gráfico da função $f(x)=|x-2|$.

3) Ela acerta ao assinalar que tal equação possui infinitas soluções, todavia apresentou a seguinte justificativa errada *"Pode-se obter infinitas soluções dependendo do valor atribuído às variáveis"*.

4) Aqui consideramos que Laura respondeu corretamente, porém justificou errado e de forma incompleta, ou seja, ela assinala correto que a representação gráfica da equação $x-a=0$ é um ponto, porém correlaciona erroneamente com o plano cartesiano, justificando *"porque se a é um valor real ele pode assumir qualquer ponto no plano cartesiano"* e ainda deixa de fazer uma reflexão sobre o universo em que se encontram as soluções desta equação.

5) Laura responde corretamente que poderia comprovar a relação entre a função *f(x)=ax+b* e a reta por meio da proporcionalidade entre as variáveis, entretanto ela não justifica completamente seus argumentos, destacando que *"se você aumenta o valor de x, sua resposta final também aumentará proporcionalmente."*.

6) Aqui ele erra marcando que o LG, em questão, é uma reta mediatriz, justificando que *"Porque ela se encontra na mesma distância a linha férrea e da praça."*.

7) Ela responde corretamente que há infinitas soluções para a equação em questão, porém não apresenta qualquer justificativa para tal fato.

8) Ela erra, pois destacou que existe apenas uma solução, o que até pode ser verdade, porém seu argumento é falho *"1 par ordenado porque o valor de x corresponde a um valor de y."*.

5.4.2. Atividades Modulares

Módulo 1 (Apêndice B)

Para a questão 8, envolvendo a interpretação geométrica de expressões como $\left|-1-(+3)\right|$, Laura escreve *"A distância dos pontos de coordenadas -1 até 3 corresponde a 4 unidades"*. Uma pequena falha nesta interpretação e o fato de colocar *"[...] de coordenadas -1 até 3 [...]"*, não podemos ter uma coordenada de -1 até 3. Porém um comentário deixado por Laura durante as aulas foi *"é fácil compreender o significado dos conceitos, mas colocar uma explicação no papel é muito difícil"*. De qualquer forma há uma grande evolução nas noções sobre o módulo da diferença entre números reais, pois, na questão 2 do pré-teste, ela não relacionou a noção de módulo com uma interpretação geométrica.

Para a questão 12, a dificuldade em se expressar continua evidente na interpretação de Laura. Ela destacou o seguinte significado geométrico para a expressão $|x-a| = \begin{cases} x-a, & \text{se } x \geq a \\ -x+a, & \text{se } x < a \end{cases}$, junto de uma figura ilustrativa: *"Se a for >que x ele estará a direita de x. Se a for > que x ele estará a esquerda de x."*. Observa-se aqui uma confusão de idéias, porém a figura abaixo destaca que suas idéias estão de acordo com a definição.

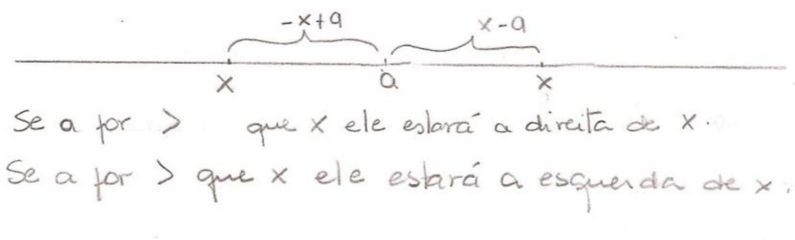


Figura 20: Ilustração de Laura para interpretar o módulo

Módulo 2 (Apêndice C)

Na questão 2, em que Laura é questionada se a noção de distância entre dois pontos obtida no Módulo 1 é suficiente para calcular a distância entre dois pontos no Módulo 2, ele escreve *"Não, porque agora usamos o plano cartesiano que é bidimensional"*. Mesmo não explicitando claramente que há uma mudança estrutural entre representações unidimensionais e bidimensionais, implicitamente ela deixa essa impressão quando destaca que o plano cartesiano é bidimensional. Porém, ela não explica como essa nova noção de distância será empregada.

Módulo 3 (Apêndice D)

As conjecturas obtidas nas atividades deste módulo são frutos da manipulação dos objetos matemáticos e das construções geométricas em geometria dinâmica.

Na questão 3, referente à definição da circunferência como LG, Laura descreve *"Uma circunferência é o lugar geométrico que atende à condição do ponto estar na mesma distância do centro O e ter o raio de r unidades iguais"*. Para a questão 4, que envolve o lugar geométrico dos pontos que distam $\sqrt{2}$ unidades do ponto *(0, 0)* e *1* unidade do ponto *(-2, 1)*, ela escreve *"O lugar geométrico são dois pontos que estão na interseção das circunferências"*. Com relação à questão 7, que visa descrever uma definição para reta, Laura coloca que *"É um ponto de coordenadas (-1, 2) que é a interseção das retas"*. Para o exercício 8, que solicita ao participante o LG os pontos colineares com os pontos *(-1, 2)* e *(3, -2)* e colineares com os pontos *(-4, 3)* e *(5, 0)*, ela escreve *"Um ponto e para isso é preciso que ambas atendam uma mesma condição, ou seja, uma interseção das retas através de um ponto"*. Para o exercício 9, que questiona qual é o LG dos pontos que distam $\sqrt{2}$ unidades do ponto *(0, 0)* e são colineares com os pontos *(-1, 2)* e *(3, -2)*, Laura coloca *"São dois pontos de interseção entre a reta e a circunferência. Cujo os pontos de interseção são (1,37; -0,37) e (-0,37; 1,37)"*. Na questão 10, que questiona qual é o LG dos pontos equidistantes a um ponto *A* e a um ponto *B* e solicita a definição desse LG, ela escreve *"É uma reta mediatriz é uma reta formada pelo ponto médio do segmento AB, onde o ponto P tem a mesma medida do ponto P a A e P a B"*. Finalizando com a questão 11, onde ela é questionada sobre qual é o LG dos pontos *P* equidistantes a um ponto *F* e uma reta *r* não contendo *F* e é solicitada a definir tal LG, ela coloca *"Parábola. É o lugar geométrico em que a distância do ponto P ao ponto F é igual à distância do ponto P a reta"*.

Novamente, as dificuldades em se expressar mostram-se presentes nas conclusões de Laura; apesar de acertar a questão 3, sua definição é pouco precisa matematicamente. Na questão 11, ela define bem a parábola, mas na questão 7, não define a reta, confundindo o enunciado com a questão 8 e exprimindo uma conclusão incoerente com o solicitado. Por meio de algumas ilustrações feitas por ela, verifica-se que reconhece o LG com infinitos pontos, porém suas definições não deixam isso claro. Quanto às questões 4, 8 e 9 ela reconhece esses LGs como os pontos de interseções entre as curvas, descrevendo, na questão 9, as coordenadas desses pontos. Porém, a sua conclusão na questão 8 é desconecta e confusa. Para a questão 10, ela não define a reta mediatriz nos moldes de lugar geométrico, apresentando apenas como seria a sua construção.

Módulo 4 (Apêndice E)

Nos exercícios 17 e 18, referentes a variações no coeficiente angular e linear da equação da reta, ela escreve respectivamente *“Deslocando o coeficiente angular varia a tangente do ângulo do eixo OX”* e *“q translada a reta 5 unidades para baixo e 5 unidade para cima”*. Com relação ao primeiro comentário, ela não deslocou o coeficiente angular, mas variou-o. Todavia essa sua colocação provavelmente deve-se ao fato de que no GeoGebra a opção de variar um parâmetro é realizada deslizando um ponto sobre um segmento de reta. Essa observação sobre a translação é uma excelente colocação, pois relaciona a visualização gráfica com a variação numérica sofrida pelas ordenadas de cada ponto da equação.

Na questão 37, relacionada à variação do parâmetro *c* na equação $y = x^2 + c$, ela escreve *“A parábola se deslocou em relação ao eixo y. Conforme variamos ‘c’ há uma translação da parábola e o vértice é dado por (0, c)”*. Aparentemente, Laura começa a ter uma melhor desenvoltura ao se expressar verbalmente sobre os objetos matemáticos. Ela destaca efetivamente a translação da parábola e como consequência apresenta o vértice como um ponto genérico dependente da ordenada *c*.

Módulo 5 (Apêndice F)

Na questão 11a, que solicita a localização de Joana sabendo que ela está colinear a dois pontos do mapa, Laura escreve *“Joana pode estar em qualquer lugar da reta formada pelas coordenada (-2, -4) e (1, -1)”*. Para a questão 11b que complementa a anterior, colocando mais dois pontos colineares a Joana, ela escreve *“Joana encontra-se no ponto de interseção do sistema formado pelas retas. No ponto (5, 3)”*. Laura interpreta bem o problema, encontra com destreza as equações e soluciona-o, utilizando as técnicas desenvolvidas nos módulos.

Para a questão 18 e 19, que buscam a conjectura sobre o número de soluções do sistema $\begin{cases} y = m_1 x + q_1 \\ y = m_2 x + q_2 \end{cases}$ ela destaca *“Quando m_1 e m_2 ; q_1 e q_2 são iguais as retas são coincidentes (indeterminado). Quando m_1 e m_2 forem iguais e q_1 e q_2 forem diferentes elas são paralelas (impossível). Quando m_1 for diferente de m_2 elas são concorrentes independente de q ser igual ou não (possível e determinado).”*. Laura conjectura e generaliza bem as condições sobre os coeficientes em questão.

5.4.3. Pós-teste (Apêndice A)

1) Laura apresenta a sua Definição de Conceito com algumas Unidades Cognitivas como exemplos *"É uma igualdade de valores quando relacionamos duas ou mais variáveis e podemos associar a uma reta, circunferência, parábola, etc."*. Consideramos sua resposta correta, porém com argumentos errados, pois seus exemplos relacionam-se às equações em $\Re^2$, mas sua Definição de Conceito não é consistente com a Definição Formal, ver respostas esperadas (Apêndice A, p. 172).

2) Laura acerta, ilustrando muito bem e explicando que *"Se x estiver à direita de 2, a distância é igual a:* $x-2$*, se x estiver à esquerda de 2, a distância é igual a:* $-x+2$*"*.

3) Novamente acerta, ao assinalar que há infinitas soluções e argumentando que *"Existe um conjunto de pontos que atendem a solução da equação (pares ordenados)"*.

4) Ela acerta ao colocar que a representação gráfica da equação $x-a=0$ é *"um ponto na reta"*, contudo sua resposta está incompleta, pois, na medida em que o universo não foi dado, a equação pode ser uma reta em $\Re^2$, um plano em $\Re^3$, etc.

5) Laura acerta ao argumentar que, para comprovar a relação entre a função $f(x)=ax+b$ e a reta, usaria que *"São pontos colineares, pois tem o mesmo coeficiente angular"*.

6) Ela acerta assinalando parábola e acrescentando *"Porque a distância do ponto da praça é o mesmo da linha férrea à reta mediatriz"*, apesar de errar o nome da reta.

7) Novo acerto ao reconhecer o LG da equação em questão e colocar *"É uma circunferência com infinitas soluções. Existem infinitos pontos, a cada valor determinado para x (domínio) teremos um valor para y, ou seja, infinitos pares ordenados"*.

8) Consideramos que ela respondeu corretamente, porém de forma incompleta, pois suas colocações são desconexas *"Δ=0 temos uma solução é a tangente, Δ>0 temos duas soluções é a secante, Δ<0 não tem solução é externa"*.

5.4.4. Evolução da Imagem de Conceito nas atividades do pré e pós-teste

Laura apresenta, na primeira questão do pós-teste, uma capacidade maior em exemplificar idéias sobre equações; todavia, a sua dificuldade em se expressar continua evidente. A tentativa fracassada de definir equações não desmerece as suas inúmeras Unidades Cognitivas apresentadas em sua Imagem de Conceito Evocada ao ouvir a palavra equações, como fica evidente nesta questão.

Questão	Relação com a Teoria	Pré-Teste	Pós-Teste
1) Equações.	Imagem de Conceito Evocada e Definição de Conceito.	E	CE
2) Módulo.	Definição de Conceito e Unidades Cognitivas.	E	C
3) Equações indeterminadas.	Imagem de Conceito Evocada e Unidades Cognitivas.	CE	C
4) Equação x-a=0.	Imagem de Conceito Evocada, Unidades Cognitivas e Fatores de Conflitos Potenciais.	CE	CI
5) Função f(x)=ax+b.	Imagem de Conceito Evocada, Definição de Conceito e Unidades Cognitivas.	CI	C
6) Lugar Geométrico.	Imagem de Conceito Evocada e Unidades Cognitivas.	E	C
7) Equações Indeterminadas.	Imagem de Conceito Evocada e Unidades Cognitivas.	CE	C
8) Sistemas de Equações.	Imagem de Conceito Evocada, Unidades Cognitivas e Raiz Cognitiva.	E	CI

Tabela 4: Análise dos resultados do pré/pós-teste de Laura

Quanto à sua noção de módulo, ela apresenta um bom desenvolvimento ao apresentar corretamente, no pós-teste, uma interpretação geométrica para a expressão em questão.

Apesar de já possuir uma boa compreensão sobre o número de soluções de uma equação em $\Re^2$, a sua dificuldade em argumentar matematicamente sobre tal fato parece ter diminuído, à medida que as justificativas apresentadas tanto na questão 3 como na 7 são excelentes colocações que destacam o conjunto de pontos que atendem a equação.

Embora Laura tenha apresentado uma boa justificativa no pré-teste, porém incompleta sobre a relação existente entre a função $f(x) = ax + b$ e a reta, envolvendo a proporcionalidade, ela abandona tal posição no pós-teste argumentando sobre os pontos da função e a colinearidade entre eles, apresentando, assim, um modesto desenvolvimento entre os testes.

A sua capacidade de reconhecer lugares geométricos também sofreu um desenvolvimento favorável, pois, além de reconhecer o LG do exercício 6 como parábola e a equação do exercício 7 como circunferência no pós-teste, ela associa os objetos do exercício 6 à definição de parábola cometendo um pequeno erro ao chamar a reta diretriz de mediatriz. É importante destacar que ela não acertou nenhum desses exercícios no pré-teste.

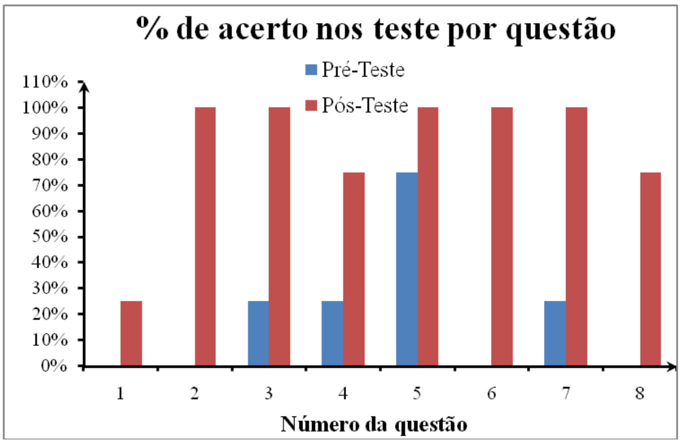


Gráfico 4: Análise dos resultados de Laura por questão

Quanto à habilidade em reconhecer o número de soluções de um sistema, aparentemente ela apresentou no pós-teste uma resolução correta relacionada à posição relativa entre os LGs das soluções das equações do sistema, o que é muito favorável ao passo que ela não conseguiu interpretar essa questão no pré-teste.

5.5.Ricardo

5.5.1. Pré-Teste (Apêndice A)

1) Ricardo apresenta uma Definição de Conceito que possui pequenas relações com a definição formal, e em sua definição se enquadram apenas as equações em $\Re$, como podemos perceber no comentário *"Equações são igualdades em que há uma incógnita cujo valor deve ser achado."*. Dessa forma, consideramos que ele respondeu certo, porém com justificativa errada, ver respostas esperadas (Apêndice A, p. 172).

2) Foi considerado que ele se desviou do fato de ter que apresentar uma interpretação geométrica para o módulo, pois ele destaca que *"O módulo representa o valor absoluto, sem sinal, da expressão. Portanto, a expressão pode ser tanto com o sinal positivo, o que não altera a expressão, ou o sinal negativo, o que altera o valor da expressão."*. Ele apresenta ainda o gráfico da equação $y = |x|$, o que não era pedido na questão.

3) Ele acerta ao assinalar que uma equação de 1º grau com duas variáveis possui infinitas soluções, argumentando que "*As soluções da equação de 1º grau são pares ordenados, onde o valor de uma variável varia dependendo da outra. Portanto, como uma variável pode assumir um valor, a outra também assumirá vários valores de acordo"*.

4) Ele teve um acerto ao assinalar que o gráfico da equação $x - a = 0$ é uma reta paralela ao eixo *OY*, descrevendo *"A equação está na forma $x = a$, ou seja, independente do valor de y, x será o valor de a"*. Porém sua resposta foi considerada incompleta, pois em nenhum momento há uma discussão sobre o universo em que se encontram as soluções da equação.

5) Ele erra novamente ao apresentar uma justificativa sobre a relação entre a função $f(x) = ax + b$ e a reta, sem qualquer argumento matemático válido e sem conexão, ele escreve *"No plano cartesiano, ao se traçar uma reta, então essa reta*

determina um conjunto de pares ordenados. Esses valores variam um de acordo com o outro seguindo uma regra. Essa regra é a função afim”.

6) Ele erra novamente, acreditando que tal LG é a reta mediatriz, justificando que *“A reta é um conjunto de pontos. Quando determinamos os pontos que servem para a questão, os pontos vão resultar em uma reta.”*.

7) Ricardo apresenta nesta questão uma resposta certa, porém incompleta à medida que acerta ao colocar que a equação dada é uma circunferência com infinitas soluções, porém sua justificativa não fica clara: *“Infinitas soluções, pois haverá um número real para todo outro número determinado. Sua representação é uma circunferência.”*. É válido destacar que nem todo número real faz parte do domínio de uma circunferência.

8) Ricardo erra, ao descrever que o sistema possui infinitas soluções e destacando que *“Infinitas soluções, pois independente do valor de m, os valores de x e y serão números reais.”*.

5.5.2. Atividades Modulares

Módulo 1 (Apêndice B)

Para a questão 8, envolvendo a interpretação geométrica de expressões como $|-1-(+3)|$, Ricardo escreve *“distância do ponto de coordenada -1 a 3”*. Na verdade não há um ponto e sua coordenada e sim dois pontos e duas coordenadas e essas coordenadas não vão de -1 a 3. Essas observações podem ser simples falhas de comunicação ou falhas de interpretação do conceito. Se considerarmos como uma falha de comunicação, podemos concluir, com seu comentário, que, apesar de ainda rudimentar, sua interpretação geométrica sobre o módulo começa a se formar.

Para a questão 12, Ricardo ainda não apresenta uma explicação geométrica para a expressão $|x-a| = \begin{cases} x-a, & \text{se } x \geq a \\ -x+a, & \text{se } x < a \end{cases}$. Sua noção de módulo parece ser uma mera memorização de um procedimento, sem a compreensão plena da definição de módulo. Ele descreve *“O módulo de um número significa que o seu valor pode ser tanto negativo quanto positivo dentro do módulo. Portanto, ao resolver o módulo, se o sinal* *dentro do módulo for negativo, deve-se inverter o sinal para resolvê-lo, enquanto basta manter o valor original para resolvê-lo se seu valor for positivo"*.

Módulo 2 (Apêndice C)

Na questão 2, em que Ricardo é questionado se a noção de distância entre dois pontos obtida no Módulo 1 é suficiente para se calcular a distância entre dois pontos, ele escreve *"Não, pois o módulo trabalha somente unidimensionalmente."*. A ambiguidade na justificativa de Ricardo nos impede de fazer qualquer análise sobre sua posição, pois quando destaca que o Módulo trabalha *"unidimensionalmente"*, ele não especifica se está falando do Módulo 1 ou 2.

Módulo 3 (Apêndice D)

Na questão 3, referente à definição da circunferência como LG, Ricardo descreve *"Circunferência é o conjunto de pontos equidistantes a um ponto O, com distância r"*. Para a questão 4, que envolve o lugar geométrico dos pontos que distam $\sqrt{2}$ unidades do ponto *(0, 0)* e *1* unidade do ponto *(-2, 1)*, ele escreve *"Dois pontos de coordenadas (-1; 1) e (-1,4; 0,2). Duas circunferências não concêntricas possuem como interseção dois pontos"*. Com relação à questão 7, que visa descrever uma definição para reta, Ricardo coloca que *"Reta é o conjunto de pontos colineares a dois pontos"*. Para o exercício 8, que solicita ao participante o LG os pontos colineares com os pontos *(-1, 2)* e *(3, -2)* e colineares com os pontos *(-4, 3)* e *(5, 0)*, ele escreve *"Um ponto de coordenadas (-1, 2). A interseção de duas retas não paralelas é um ponto"*. Para o exercício 9, que questiona qual é o LG dos pontos que distam $\sqrt{2}$ unidades do ponto *(0, 0)* e são colineares com os pontos *(-1, 2)* e *(3, -2)*, Ricardo coloca *"Dois pontos de coordenadas (-0,37; 1,37) e (1,37; -0,37). A interseção entre uma circunferência e uma reta cuja a distância do centro da circunferência é menor que o raio da circunferência"*. Na questão 10, que questiona qual é o LG dos pontos equidistantes a um ponto *A* e a um ponto *B* e solicita a definição desse LG, ele escreve *"Reta mediatriz é o conjunto de pontos equidistantes a dois pontos fixos"*. Finalizando com a questão 11, em que ele é questionado sobre qual é o LG dos pontos *P* equidistantes a um ponto *F* e uma reta *r* não contendo *F* e é solicitado também que se defina tal lugar, ele coloca *"Parábola é o conjunto de pontos equidistantes de um ponto fixo e a uma reta, que não contém o ponto"*.

Ricardo procura, na maioria das definições, não utilizar a palavra lugar geométrico e sim conjunto de pontos. Entretanto, como neste caso temos expressões equivalentes, suas definições para circunferência, reta, reta mediatriz e parábola (respectivamente as questões 3, 7, 10 e 11) estavam corretas. A exatidão em suas definições, provavelmente, facilitará a sua compreensão em futuras demonstrações relacionadas às equações em $\Re^2$. Para as questões 4, 8 e 9, ele também acerta, descrevendo que os LGs são as interseções entre as curvas, fornecendo, ainda, as coordenadas dos pontos de interseção. Conclui-se assim que Ricardo desenvolveu uma boa noção de Lugar Geométrico inclusive que esses conjuntos de pontos podem ser finitos ou infinitos.

Módulo 4 (Apêndice E)

Para uma argumentação que justifique a reta como o lugar geométrico das soluções da equação $y = ax + b$, questão 9, ele escreve *"Todo e qualquer ponto que satisfaz essa equação será colinear a dois outros pontos que também a satisfaçam."*. Apesar de apresentar uma ótima justificativa sobre o caso, Ricardo não aponta o critério que utilizaria para verificar a colinearidade, todavia isto não ficou explícito no enunciado da questão.

Nos exercícios 17 e 18, referentes a variações no coeficiente angular e linear da equação da reta ele escreve respectivamente *"O gráfico da reta rotaciona"* e *"O gráfico se desloca ao longo de y"*. Em nenhum dos dois casos Ricardo deixa precisos os seus comentários. Em particular no caso do gráfico deslocar ao longo de y, provavelmente ele queria dizer se desloca ao longo do eixo y.

Com relação à variação do coeficiente *a* da equação $y = ax^2$, no exercício 31, ele escreve *"O gráfico se afunila conforme aumenta o valor de a em módulo e muda a concavidade ao mudar de sinal"*. Novamente Ricardo não deixa claras as suas colocações. Ao escrever que o gráfico se afunila, provavelmente está querendo dizer um aumento na concavidade e quando diz que a concavidade muda aparentemente é uma mudança de sentido, concavidade para baixo ou para cima.

Para a questão 49, relacionada a mudanças nos parâmetros da equação $y = a(x - m)^2 + k$, ele coloca *"a concavidade varia conforme o sinal e o valor de a",* com relação ao valor de m destaca *"a concavidade desliza sobre o eixo x"* e após variar k ele coloca *"a concavidade desliza sobre o eixo y"*. Novamente Ricardo apresenta dificuldades em se comunicar, apesar de apresentar análises mais elaboradas que nos módulos anteriores. Quando coloca que a concavidade desliza sobre o eixo, aparentemente queria dizer a parábola translada paralelamente ao eixo.

Módulo 5 (Apêndice F)

Para a questão 11a, que procura localizar Joana sobre um mapa sabendo a sua colinearidade com dois pontos, pergunta-se a Ricardo se é possível localizá-la, e ele escreve *"Não. Existem infinitos pontos onde ela possa estar",* já na questão 11b que complementa a questão anterior, apresentando mais dois pontos colineares a Joana, Ricardo é questionado sobre a possibilidade de localização da moça, e ele responde *"Sim. Só existe um ponto que satisfaz as duas restrições."*. Ricardo apresenta muito bem suas colocações, entretanto não soluciona o problema algebricamente.

Na questão 19, que envolve a procura de condições sobre os coeficientes das equações do sistema $\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$, Ricardo, junto a intervenções do professor, usa a álgebra linear para destacar que o sistema será possível e determinado se "$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$", possível e indeterminado se "$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0$ e $\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} = 0$" e impossível se "$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0$ e $\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} \neq 0$". Ótimas observações que fizeram os participantes compreenderem com mais facilidade noções já estudadas em álgebra linear.

5.5.3. Pós-teste (Apêndice A)

1) Ricardo apresenta como Definição de Conceito que *"Equações são igualdades em que há duas ou mais incógnitas desconhecidas, de tal forma que uma será independente e as outras dependentes. O estudo do comportamento das variáveis e coeficientes leva ao estudo de funções"*. Consideramos um acerto acompanhado de uma justificativa errada, pois além de ser pouco consistente com a definição formal, ver respostas esperadas (Apêndice A, p. 172), ele destaca uma relação entre equações e funções que aparentemente é um Fator de Conflito Potencial.

2) Ele se desvia do foco da questão, não apresentando uma interpretação geométrica, descrevendo informações confusas: *"O valor da equação dentro do módulo não mudará de sinal se o seu valor for positivo e seu sinal será invertido se o seu sinal for negativo".*

3) Ele acerta ao assinalar que há infinitas soluções e argumentar que *"Infinitos pares ordenados serão solução da equação podendo satisfazê-la".*

4) Ele responde certo, porém com uma justificativa incompleta sobre a interpretação gráfica da equação $x - a = 0$, ele escreve: *"Porque para qualquer valor de y, x será sempre o número real a"*. Como não foi dado o universo em que se encontram as soluções da equação, uma análise mais profunda deveria ter sido feita sobre tal fato.

5) Ele erra ao colocar que para comprovar a relação entre a função $f(x) = ax + b$ e a reta argumentaria que: *"Se você pegar dois pontos quaisquer da equação, eles vão pertencer sempre a mesma reta, que é a reta do gráfico da função afim".* Ele deveria justificar sobre três pontos da reta e não dois.

6) Ele acerta assinalando parábola e acrescentando *"O lugar geométrico dos pontos cuja distância a um ponto fixo e a uma reta a qual o ponto não pertence é uma parábola"*.

7) Ele acerta ao colocar que a equação em questão possui um número de soluções *"Infinitas.* $S = \{(x, y) \in IR^2 / x^2 + (y-2)^2 = 14\}$*".* Porém foi considerado que sua justificativa está errada ao passo que ele não argumentou sobre a infinidade de soluções.

8) Ele acerta ao escrever que o sistema em questão admite três tipos de soluções, em destaque coloca: *"Tangente 1 solução, Secante 2 soluções, Externa impossível"*.

5.5.4. Evolução da Imagem de Conceito nas atividades do pré e pós-teste

Entre os participantes do curso, aparentemente Ricardo foi o que obteve menor desenvolvimento entre o pré o pós-teste, apesar de apresentar excelentes colaborações durante as atividades modulares. Essa colocação se deve ao fato de, na grande maioria dos resultados do pós-teste, ele ter apresentado observações análogas ao teste anterior, acrescidas de pequenos detalhes, como veremos na análise a seguir.

Questão	**Relação com a Teoria**	**Pré-Teste**	**Pós-Teste**
1) Equações.	Imagem de Conceito Evocada e Definição de Conceito.	CE	CE
2) Módulo.	Definição de Conceito e Unidades Cognitivas.	D	D
3) Equações indeterminadas.	Imagem de Conceito Evocada e Unidades Cognitivas.	C	C
4) Equação *x-a=0*.	Imagem de Conceito Evocada, Unidades Cognitivas e Fatores de Conflitos Potenciais.	CI	CI
5) Função *f(x)=ax+b*.	Imagem de Conceito Evocada, Definição de Conceito e Unidades Cognitivas.	E	E
6) Lugar Geométrico.	Imagem de Conceito Evocada e Unidades Cognitivas.	E	C
7) Equações Indeterminadas.	Imagem de Conceito Evocada e Unidades Cognitivas.	CI	CE
8) Sistemas de Equações.	Imagem de Conceito Evocada, Unidades Cognitivas e Raiz Cognitiva.	E	C

Tabela 5: Análise dos resultados do pré/pós-teste de Ricardo

Ricardo muda de argumento da primeira questão do pré-teste para sua equivalente no pós-teste. De qualquer forma, usa alguns argumentos errados tanto em um como no outro, limitando-se no primeiro a apresentar uma definição de conceito sobre equações em $\Re$ e no segundo uma definição de conceito limitada a $\Re^2$.

Assim como desviou de uma interpretação geométrica da definição de módulo na questão 2 do pré-teste, fez o mesmo no pós-teste. Apresentando informações confusas e desconexas que sugerem uma memorização mecânica da definição formal do módulo de um número real.

Com relação ao número de soluções de uma equação de 1º grau em $\Re^2$, mesmo antes das atividades, ele já reconhecia que tal equação possuía infinitas soluções e argumentava corretamente sobre tal fato. Dessa forma, manteve a linha de conduta no pós-teste, apresentando um argumento diferente, porém correto. Todavia, na questão 7, que envolve o número de soluções da equação $3x^2 - 12y + 3 = 33 - 3y^2$, apresenta um argumento incompleto no pré-teste e não apresenta qualquer argumento no pós-teste.

Novamente, ele reproduz suas observações sobre a representação gráfica da equação $x - a = 0$, destacando que é uma reta paralela ao eixo *y*, sem fazer qualquer tipo de análise sobre a representação de tal equação em universos diferentes (como $\Re$, $\Re^2$, $\Re^3$, etc).

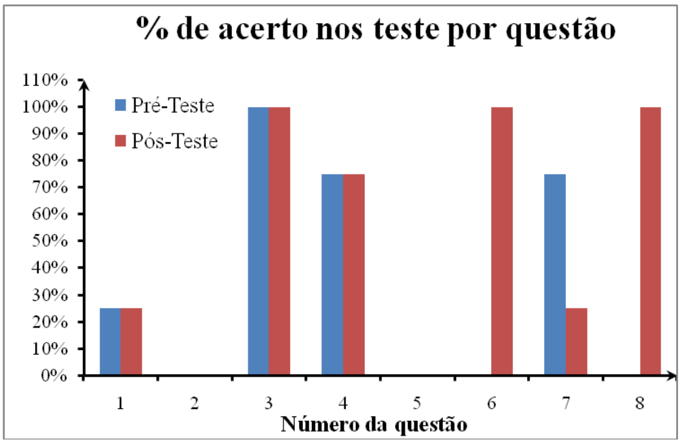


Gráfico 5: Análise dos resultados de Ricardo por questão

Seus argumentos sobre a comprovação que o gráfico da função $f(x) = ax + b$ é uma reta foram errados em ambos os testes. Ele acertaria tal comentário no pós-teste se houvesse feito sua observação sobre a colinearidade entre três pontos. Porém, em seu comentário, destaca a colinearidade entre dois pontos, o que é evidente. Aparentemente pode ter ocorrido uma falha de atenção durante a escrituração da justificativa.

Quanto à sua capacidade de reconhecer lugares geométricos, percebemos uma moderada evolução. Ao passo que ele errou o LG da questão 6 no pré-teste, acertando e definindo corretamente a parábola no pós-teste. Porém reconheceu que a equação da questão 7 é uma circunferência no pré-teste e não comentou isso no pós-teste, o que também não foi solicitado no enunciado do exercício.

Para a análise do número de soluções de um sistema de equações em $\Re^2$, ele evolui ao acertar a questão 8, apresentando uma observação sobre a posição relativa entre os gráficos das equações.

5.6. Julia

5.6.1. Pré-Teste (Apêndice A)

1) Julia não apresenta qualquer definição para equações, porém ela descreve que, ao ouvir a palavra equações, ela pensa em *"igualdade, variáveis, soluções e raiz"*. Dessa forma consideramos que Julia respondeu corretamente a questão, porém de forma incompleta.

2) Ela se desvia do foco da questão, repetindo apenas o que já está escrito na expressão dada.

3) Ela responde corretamente, porém apresenta uma justificativa errada, ou seja, acerta ao marcar que há infinitas soluções. Porém apresenta a seguinte justificativa *"Porque pode ser indeterminada, pode ter solução"*. Provavelmente ela associou o nome do curso à questão.

4) Nesta questão, consideramos que ela teve um acerto acompanhado de uma justificativa errada. Ele descreve que a representação gráfica da equação $x - a = 0$ é um ponto e apresenta uma ilustração deste ponto no Plano Cartesiano, o que está errado, pois para ser um ponto a ilustração deveria estar em um sistema unidimensional.

5) Foi considerado que Julia errou, pois ela escreveu apenas que *"Eu daria um exemplo numérico."*, sem exemplificar como seria isso.

6) Ela errou, colocando que o LG é a reta mediatriz, apresentando a justificativa que *"Se encontra no ponto médio"*.

7) Errou. Tentou resolver a equação sem qualquer sucesso.

8) Errou. Escrevendo que *"Tem como solução todos os números reais diferente de zero."*.

5.6.2. Atividades Modulares

Módulo 1 (Apêndice B)

Para a questão 8, envolvendo a interpretação geométrica de expressões como $|-1-(+3)|$, Julia escreve *"A distância entre os pontos de coordenada -1 e 3"*. Aqui ela apresenta uma interpretação de acordo com o esperado, mostrando, assim, uma boa noção geométrica da interpretação de módulo como distância entre pontos.

Para a questão 12, Julia também apresenta uma explicação conforme o esperado, deixando ainda uma ilustração relacionada à expressão $|x-a| = \begin{cases} x-a, & \text{se } x \geq a \\ -x+a, & \text{se } x < a \end{cases}$. Ela destaca *"Se x estiver à direita de a então a distância é igual a* $x-a$*, se x estiver à esquerda de a então a distância é igual a* $-x+a$*"*. Isso mostra que, aparentemente, ela absorveu uma boa noção sobre a interpretação geométrica para o módulo da diferença entre dois números reais.

Módulo 2 (Apêndice C)

Na questão 2, em que Julia é questionada se a noção de distância entre dois pontos obtida no Módulo 1 é suficiente para se calcular a distância entre dois pontos no Módulo 2, ele escreve *"Não, pois no módulo anterior trabalhamos distância numa reta, neste módulo estamos trabalhando a distância no plano."*. Ela apresenta desta forma uma boa justificativa para a mudança de postura entre a noção de distância na reta e no plano, porém não descreve qual será a mudança, critério que parece não ter ficado muito claro no enunciado da questão.

Módulo 3 (Apêndice D)

Na questão 3, referente à definição da circunferência como LG, Julia descreve *"Circunferência é um lugar geométrico dos pontos de distância r unidades do ponto O"*. Para a questão 4, que envolve o lugar geométrico dos pontos que distam $\sqrt{2}$ unidades do ponto *(0, 0)* e *1* unidade do ponto *(-2, 1)*, ela escreve *"O lugar geométrico são dois pontos B e C, que são os pontos de interseção das circunferências"*. Com relação à questão 7, que visa descrever uma definição para reta Julia coloca que *"Reta é o lugar geométrico dos pontos colineares a dois pontos dados"*. Para o exercício 8, que solicita ao participante o LG dos pontos colineares com os pontos *(-1, 2)* e *(3, -2)* e colineares com os pontos *(-4, 3)* e *(5, 0)*, ela escreve somente *"Um ponto A, que é o ponto de interseção das duas retas"*. Para o exercício 9, que questiona qual é o LG dos pontos que distam $\sqrt{2}$ unidades do ponto *(0, 0)* e são colineares com os pontos *(-1, 2)* e *(3, -2)*, Julia coloca *"Dois pontos C e D, que são os pontos de interseção entre a reta e a circunferência"*. Na questão 10, que questiona qual é o LG dos pontos equidistantes a um ponto *A* e a um ponto *B* e solicita a definição desse LG, ela escreve *"Reta mediatriz que é a reta que passa pelos pontos que equidistam A e B"*. Finalizando com a questão 11, em que se questiona sobre qual é o LG dos pontos *P* equidistantes a um ponto *F* e uma reta *r* não contendo *F* e é solicitado também que se defina tal lugar, ele coloca *"Uma parábola, é o lugar geométrico dos pontos P que equidistam de ponto fixo e de uma reta"*.

Consideramos que Julia acertou quase todas as questões deste módulo, apresentando definições corretas para circunferência, reta, reta mediatriz e parábola, apesar de, na questão 10, ela ter definido a reta mediatriz sem usar a idéia de lugar geométrico, e na questão 11 (parábola) não ter mencionado que o ponto dado não pode pertencer à reta dada. Contudo, suas definições poderão se enquadrar em futuras demonstrações sobre equações em $\Re^2$. As questões 4, 8 e 9 em que o LG é a interseção entre curvas, ela acertou todas, mostrando, assim, que adquiriu uma boa noção sobre lugares geométricos, inclusive a possibilidade de LGs com finitos e infinitos pontos.

Módulo 4 (Apêndice E)

Para a questão 3, que envolve a representação gráfica da equação $x-3=0$ e $y^2-16=0$, ela escreve *"$x=3$ reta paralela ao eixo y e $y=\pm 4$ duas retas paralelas ao eixo x",* consolidando assim a sua mudança de atitude com relação a estruturas em $\Re$ e em $\Re^2$.

Na questão 9, Julia destaca que o argumento que utilizaria para justificar que o LG das soluções da equação $y=ax+b$ é uma reta é *"Provar de forma genérica que os pontos solução da equação são colineares, através de $m=\dfrac{y_1-y_2}{x_1-x_2}$ "*. Ele já possui uma boa argumentação matemática apesar de não mostrar como faria para generalizar os pontos solução.

Nos exercícios 17 e 18, referentes a variações no coeficiente angular e linear da equação da reta, ela escreve respectivamente *"O gráfico rotacionou, pois variando a tangente do ângulo, logo varia o ângulo que a reta faz com o eixo x"* e *"O gráfico se desloca paralelamente, pois variou-se o valor em que o gráfico corta o eixo y"*, Julia associou bem o coeficiente angular com a tangente do ângulo que o gráfico faz com o eixo x, apresentando uma boa análise sobre a variação do coeficiente a. Porém se expressa mal ao colocar que *"[...] o gráfico se desloca paralelamente [...]"* sem discriminar com qual objeto encontra-se o paralelismo. Por outro lado, acerta ao colocar que *"[...] variou-se o valor em que o gráfico corta o eixo y [...]"*.

Módulo 5 (Apêndice F)

Para a questão 11e, que relata uma rodovia equidistante ao Campo e a Rodovia Venceslau (ver Figura 21) e questiona que rodovia seria esta, Julia escreve que é a *"Rodovia Cônica"* e a relação matemática que satisfaz seus pontos é "$y^2 - 6y - 4x + 17 = 0$". Dessa forma, podemos concluir que ela já possui um bom domínio de representações gráficas no plano cartesiano, pois precisou observar, no mapa, que o Campo estava no ponto *(3, 3)* e que a rodovia Venceslau era uma reta de equação $x = 1$, para em seguida concluir que o LG era uma parábola e determinar a sua equação.

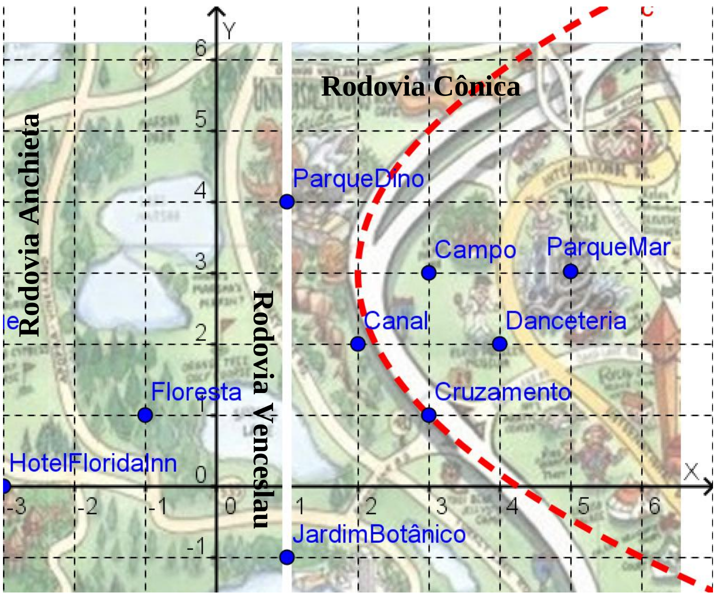


Figura 21: Solução do exercício 11e por Julia, Rodovia Cônica

5.6.3. Pós-teste (Apêndice A)

1) Julia não apresenta uma definição, mas destaca uma parte de sua Imagem de Conceito Evocada por meio de exemplos *"Infinitas soluções, pares ordenados, variáveis, soluções"*. Dessa forma consideramos que ela teve um acerto, porém com justificativa incompleta.

2) Julia erra a questão por um simples detalhe em sua interpretação, o que aparentemente sugere uma mecanização da idéias. Ela escreve: *"Se* $x-2$ *estiver a direita de 2 então a distância é igual a x-2, se* $x-2$ *estiver a esquerda de dois então a distância é igual a* $-x+2$*"*.

3) Ela acerta, ao assinalar que há infinitas soluções e argumentando que *"Infinitos pares ordenados satisfazem uma equação com duas variáveis"*.

4) Julia acerta ao assinalar nenhuma das respostas, justificando que *"Pois não informa se está em* $\Re$, $\Re^2$ *ou* $\Re^3$*, não dá para saber se é ponto, reta ou plano"*.

5) Ela acerta novamente ao colocar *"Se pegarmos três pontos quaisquer eles serão colineares"*.

6) Ela acerta assinalando a parábola e acrescentando: *"Parábola é o lugar geométrico dos pontos que equidistam a um ponto fixo e de uma reta"*.

7) Ela apresenta uma resposta certa, porém sem justificativa. Ela coloca: *"Infinitas.* $S=\{(x,y)\in IR^2 / x^2+(y-2)^2=14\}$*"*.

8) Ela acerta ao escrever *"Possível e determinado ou Impossível. Variando m se for tangente 1 solução, variando m se for secante 2 soluções, variando m se for externa nenhuma solução"*.

5.6.4. Evolução da Imagem de Conceito nas atividades do pré e pós-teste

Não é possível perceber qualquer evolução entre a primeira atividade dos testes, pois Julia apresenta apenas algumas palavras representando aquilo que ela pensa ao ouvir a palavra equações.

Quanto à sua noção sobre uma interpretação geométrica da noção de módulo da diferença entre números reais, as respostas de Julia sugerem que ela simplesmente memorizou mecanicamente as discussões sobre tal conceito tidas das atividades modulares, pois ela destaca erroneamente no pós-teste que:

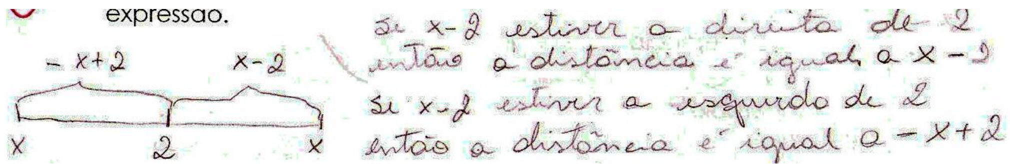


Figura 22: Interpretação errada da diferença do módulo

Questão	Relação com a Teoria	Pré-Teste	Pós-Teste
1) Equações.	Imagem de Conceito Evocada e Definição de Conceito.	CI	CI
2) Módulo.	Definição de Conceito e Unidades Cognitivas.	D	E
3) Equações indeterminadas.	Imagem de Conceito Evocada e Unidades Cognitivas.	CE	C
4) Equação x-a=0.	Imagem de Conceito Evocada, Unidades Cognitivas e Fatores de Conflitos Potenciais.	CI	C
5) Função f(x)=ax+b.	Imagem de Conceito Evocada, Definição de Conceito e Unidades Cognitivas.	E	C
6) Lugar Geométrico.	Imagem de Conceito Evocada e Unidades Cognitivas.	E	C
7) Equações Indeterminadas.	Imagem de Conceito Evocada e Unidades Cognitivas.	E	CE
8) Sistemas de Equações.	Imagem de Conceito Evocada, Unidades Cognitivas e Raiz Cognitiva.	E	C

Tabela 6: Análise dos resultados do pré/pós-teste de Julia

Para o número de soluções de uma equação de 1º grau com duas variáveis, Julia, que anteriormente não conseguia argumentar sobre as infinitas soluções desta equação, apresenta no pós-teste um argumento coerente, o que acaba comprovando uma modesta evolução neste quesito. Contudo, ela não apresenta um argumento análogo para a questão sete, que se relaciona ao número de soluções da equação $3x^2 - 12y + 3 = 33 - 3y^2$.

Quanto à representação gráfica da equação $x - a = 0$, ela apresenta um excelente desempenho ao colocar que depende do universo em que se encontra a equação, destacando que caso seja em $\Re$ ter-se-ia um ponto, em $\Re^2$ uma reta e em $\Re^3$ um plano. Análise inviável a ela no pré-teste.

Quanto à habilidade de argumentar sobre a relação existente entre a função $f(x) = ax + b$ e a reta, Julia apresenta aparente progresso, pois destaca que, através da colinearidade entre três pontos, isto pode ser comprovado.

Ela apresenta uma modesta evolução na capacidade de reconhecer lugares geométricos, à medida que acerta o LG da questão 6 do pós-teste, apresentando a definição de parábola. O mesmo não acontece na questão 7, em que ela não reconhece a equação dada como uma circunferência, embora esse reconhecimento não tenha sido enunciado no problema.

Para análise do número de soluções de um sistema de equações, Julia analisa as posições relativas entre os LGs das equações dadas, chegando à conclusão que o sistema pode ser possível e determinado ou impossível, apresentando, assim, uma melhora em sua habilidade de resolver equações de forma qualitativa.

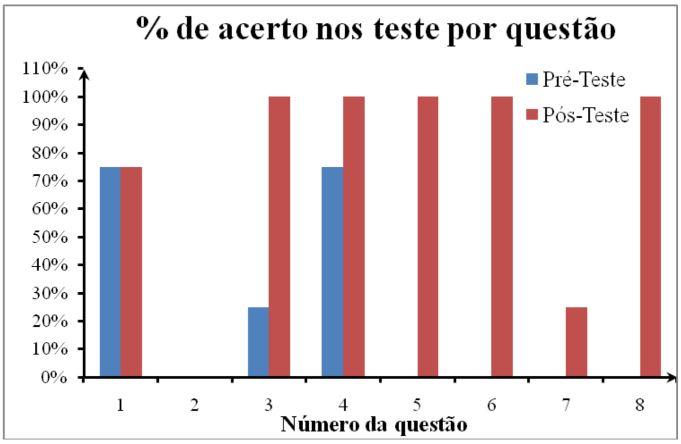


Gráfico 6: Análise dos resultados de Julia por questão

5.7. Alan

5.7.1. Pré-Teste (Apêndice A)

1) Alan não apresenta qualquer definição para equações, porém ele descreve que ao ouvir a palavra equações pensa em *"igualdade, variável, soluções de problemas"*. Dessa forma, consideramos a ele uma resposta correta, porém incompleta, ver respostas esperadas (Apêndice A, p. 172).

2) Ele se desvia do fato de ter que apresentar uma interpretação geométrica para a expressão em questão, escrevendo: *"módulo de* $x-2 \rightarrow |x-2|$ *é igual a* $x-2$ *para valores de x maior ou igual a 2, módulo de* $x-2 \rightarrow |x-2|$ *é igual a* $-x+2$ *para valores de x <2, é uma função modular"*.

3) Alan erra, pois marca que há uma única solução, descrevendo *"Numa equação temos uma igualdade com uma variável a ser encontrada, para a equação de 1º grau existe um único valor que satisfaz essa igualdade, embora esse valor possa ser qualquer valor real."*. Observa-se aqui que seu universo limita-se a equações em $\Re$.

4) Ele erra novamente, assinalando que nenhuma das alternativas está correta, e justificando que *"As alternativas acima citadas, referem-se a uma função de primeiro e segundo grau [...], visto que uma equação não é uma função."*. Existem aqui fatores de conflito cognitivo nas relações entre funções e equações.

5) Alan erra ao apresentar uma justificativa completamente equivocada, confusa e incoerente com sua resposta na questão anterior. Ele escreve *"Uma função de 1º grau é assim definida por se tratar de uma equação de 1º grau. Como uma equação de 1º grau admite apenas uma solução para qualquer valor de y eu terei um e apenas um valor de x, valores esses distintos e por esses pontos determinam uma reta."*.

6) Novamente ele erra, ao descrever o LG como uma circunferência, justificando que *"Uma circunferência que passa pela linha férrea e o mastro é onde a distância entre eles é igual ao raio"*.

7) Errou, escrevendo *"No máximo 4, duas para x e duas para y."*.

8) Errou, escrevendo *"No máximo 4: pois temos duas variáveis de segundo grau"*.

5.7.2. Atividades Modulares

Módulo 1 (Apêndice B)

Na questão 8, sobre a interpretação geométrica de expressões da forma $\left|-1-\left(+3\right)\right|$, Alan escreve *"A distância de -1 e 3"*. Foi considerado que ele apresentou uma interpretação muito reducionista que, apesar de possuir, implicitamente uma idéia geométrica, pois se fala em distância, os números -1 e 3 podem também representar quantidades negativas e positivas o que foge à idéia de distância.

Apesar de apresentar uma interpretação reducionista na análise anterior, Alan explica bem o significado da expressão $|x-a| = \begin{cases} x-a, & \text{se } x \geq a \\ -x+a, & \text{se } x < a \end{cases}$, junto a uma figura ilustrativa com pequenas falhas, ele escreve *"→Se x estiver a direita de a então a distância é igual a* $x-a$ *[...]→ Se x estiver a esquerda de a então a distância é igual a* $|-x+a|$ *"*. Apesar de boas observações há uma pequena falha no final da observação, onde ele repete o símbolo de módulo e algumas falhas na figura, como se ilustra.

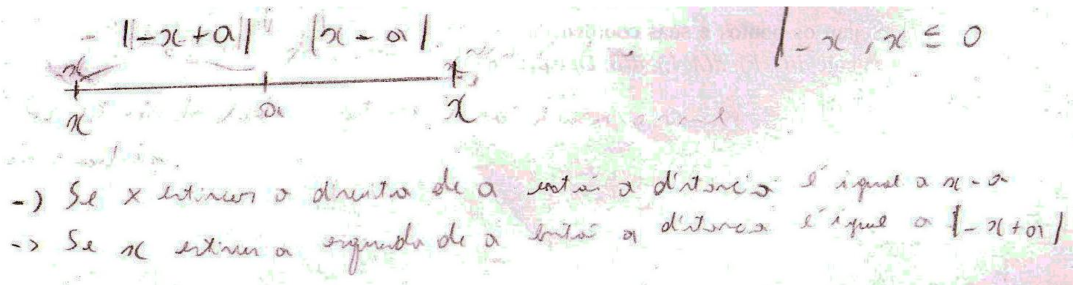


Figura 23: Ilustração de Alan para interpretar o módulo

Módulo 2 (Apêndice C)

Na questão 2, em que Alan é questionado se a noção de distância entre dois pontos obtida no Módulo 1 é suficiente para se calcular a distância entre dois pontos no Módulo 2, ele escreve *"Não. No módulo anterior usávamos o conceito de módulo para calcular a distância entre dois pontos porque esses tais pontos estavam sobre uma mesma reta. Já neste módulo os pontos estão num plano cartesiano, não bastando o conceito de módulo para o cálculo entre suas distâncias."*. Ele apresenta uma ótima justificativa sobre a insuficiência do conceito de módulo, para o cálculo da distância entre pontos do plano, porém não explicita sobre as estruturas em $\Re$ e $\Re^2$.

Módulo 3 (Apêndice D)

Na questão 3, referente à definição da circunferência como LG, Alan descreve *"Circunferência é o lugar geométrico dos pontos de distam r unidades do centro O"*. Para a questão 4, que envolve o lugar geométrico dos pontos que distam $\sqrt{2}$ unidades do ponto *(0, 0)* e *1* unidade do ponto *(-2, 1)*, ele escreve *"São dois pontos B(-1; 1) e C(-1,4; 0,2), são os pontos de interseção das duas circunferências"*. Com relação à questão 7, que visa descrever uma definição para reta, Alan coloca que *"Reta é um lugar geométrico entre os pontos colineares a dois pontos dados"*. Para o exercício 8, que solicita ao participante o LG dos pontos colineares com os pontos *(-1, 2)* e *(3, -2)* e colineares com os pontos *(-4, 3)* e *(5, 0)*, ele escreve *"É o próprio ponto A, achamos a equação das duas retas e solucionamos o sistema das equações e achamos o ponto de coordenada (-1, 2)"*. Para o exercício 9, que questiona qual é o LG dos pontos que distam $\sqrt{2}$ unidades do ponto *(0, 0)* e são colineares com os pontos *(-1, 2)* e *(3, -2)*, Alan coloca *"São os dois pontos que definem essa reta secante a circunferência"*. Na questão 10, que questiona qual é o LG dos pontos equidistantes a um ponto *A* e a um ponto *B* e solicita a definição desse LG, ele escreve *"A reta mediatriz, uma reta que passa pelo centro da reta definida pelos dois pontos, é uma reta que equidista os pontos A e B"*. Finalizando com a questão 11, em que é questionado sobre qual é o LG dos pontos *P* equidistantes a um ponto *F* e uma reta *r* não contendo *F* e é solicitado também que se defina tal lugar, ele coloca *"É um lugar geométrico dos pontos P que equidistam de um ponto fixo e de uma reta."*.

Alan coleciona erros e acertos ao definir os objetos matemáticos utilizando a idéia de Lugar Geométrico. Ele define corretamente a circunferência na questão 3, define sem muita precisão a reta na questão 7, quando destaca que *"[...] é o lugar geométrico* ***entre*** *os pontos [...]"*, se confunde totalmente ao definir a reta mediatriz e define de forma parcialmente correta o lugar geométrico do exercício 11, sem mencionar que é uma parábola. Essas falhas deflagram uma dificuldade em Alan em verbalizar matematicamente as propriedades analisadas pela manipulação dos objetos em geometria dinâmica. Contudo, ele acerta as questões 4, 8 e 9 que envolvem LGs que são interseções entre curvas e inusitadamente antecipa idéias que virão num módulo posterior ao colocar ao professor e para turma o seguinte comentário *"Professor, então podemos resolver um sistema de equações utilizando apenas o gráfico das equações e os pontos de interseção."*. Este comentário vem se concretizar com a sua posição na questão 8, quando destaca sem qualquer solicitação de uma resolução algébrica, *"[...] achamos a equação das duas retas e solucionamos o sistema das equações [...]"*.

Módulo 4 (Apêndice E)

Para a questão 49, relacionada a mudanças nos parâmetros da equação $y = a(x-m)^2 + k$, Alan coloca *"variando o valor de a altera-se a concavidade"*, com relação a variações em *m* destaca "*o valor de m é o x do vértice"*, e quanto à variação em *k* coloca "*o de k é o y do vértice"*. Apesar de conjecturar corretamente que *m* e *k*, formam as coordenadas do vértice da parábola, ele não descreve o comportamento do gráfico da parábola conforme variam esses parâmetros.

Módulo 5 (Apêndice F)

Na questão 22, que visa à conjectura sobre o número de soluções do sistema $\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ x + y = m \end{cases}$, com $m \in \Re$, Alan escreve *"O sistema será possível e determinado, nos caso secante e tangente. Sistema impossível no caso não secante e nem tangente. O sistema nunca será possível e indeterminado"*. Estas conjecturas são bem colocadas por Alan, apesar de não usar o termo apresentado na definição 10 (externa: quando não possuem pontos em comum).

Na questão 23 referente à determinação do parâmetro *m*, de forma que a posição relativa entre os LGs das soluções das equações do sistema $\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ x + y = m \end{cases}$ seja tangente, secante ou externa, Alan lança mão do discriminante da equação $2x^2 - 2mx + m^2 + 4 = 0$ para estudar os sinais, chegando à seguinte e correta conclusão *"Tangente* $m = \pm\sqrt{8}$, *secante* $-\sqrt{8} < m < +\sqrt{8}$ *e externa* $m < -\sqrt{8}$ *ou* $m > \sqrt{8}$ *"*. Isto poderia ser interpretado como tangente $|m| = \sqrt{8}$, *secante* $m < \left|\sqrt{8}\right|$ e externa $m > \left|\sqrt{8}\right|$.

5.7.3. Pós-teste (Apêndice A)

1) Alan não apresenta uma definição, porém destaca inúmeros exemplos de sua Imagem de Conceito *"Igualdade, sistema de equações, reta, circunferência, fórmula da equação de 2º grau"*. Dessa forma consideraremos que ele teve uma resposta correta, porém incompleta, ver respostas esperadas (Apêndice A, p. 172).

2) Ele acerta em alguns pontos de sua observação, porém utiliza o símbolo de módulo em locais inapropriados *"Se x estiver a direita de 2 então a distância é igual a* $|x-2|$*, se x estiver a esquerda de 2 então a distância é dada por* $|2-x|$ *que é igual a* $|-x+2|$*"*. Sendo assim, conferimos a ele um acerto acompanhado de uma justificativa incompleta.

3) Ele acerta, ao assinalar que há infinitas soluções e argumenta que *"Infinitos pares ordenados satisfazem uma equação de 1º grau com 2 variáveis"*.

4) Novo acerto, pois assinalou que nenhuma das alternativas estava correta e argumentou que *"Se fosse em* $\Re$ *seria um ponto, se fosse em* $\Re^2$ *seria uma reta e se fosse em* $\Re^3$ *um plano. Como não especifica, pode ser tanto um ponto, uma reta ou um plano"*.

5) Ele acerta novamente ao colocar que *"Se pegarmos três pontos quaisquer eles serão sempre colineares, bastaria demonstrar pegando pontos genéricos e desenvolver"*.

6) Ele acerta assinalando parábola e acrescentando *"A parábola é um lugar geométrico do ponto P que equidistam de um ponto fixo e de uma reta"*.

7) Alan escreve apenas: *"Infinitos"* sem justificar, consideramos neste caso uma resposta correta, porém com justificativa errada.

8) Ele acerta em alguns pontos, porém erra ao colocar que o sistema pode ser possível e indeterminado. Ele coloca *"Variando o valor de m temos: tangente 1 solução, secante 2 soluções, externa nenhuma solução. O sistema pode ser: Sistema possível e determinado, sistema possível e indeterminado e sistema impossível"*.

5.7.4. Evolução da Imagem de Conceito nas atividades do pré e pós-teste

Fazer uma análise sobre a evolução da Imagem de Conceito por Alan ao ouvir a palavra equações é muito prematuro, à medida que, no pré-teste, ele apresentou apenas as palavras *"igualdade, variável e solução de problemas"*, já no pós-teste ele fala em *"Igualdade, Sistema de equações, reta, circunferência, fórmula da equação de 2º grau"*. Acreditamos que o enunciado da questão poderia envolver uma definição para equação, coisa que outros participantes acharam melhor destacar.

Questão	**Relação com a Teoria**	**Pré-Teste**	**Pós-Teste**
1) Equações.	Imagem de Conceito Evocada e Definição de Conceito.	CI	CI
2) Módulo.	Definição de Conceito e Unidades Cognitivas.	D	CI
3) Equações indeterminadas.	Imagem de Conceito Evocada e Unidades Cognitivas.	E	C
4) Equação x-a=0.	Imagem de Conceito Evocada, Unidades Cognitivas e Fatores de Conflitos Potenciais.	E	C
5) Função $f(x)=ax+b$.	Imagem de Conceito Evocada, Definição de Conceito e Unidades Cognitivas.	E	C
6) Lugar Geométrico.	Imagem de Conceito Evocada e Unidades Cognitivas.	E	C
7) Equações Indeterminadas.	Imagem de Conceito Evocada e Unidades Cognitivas.	E	CE
8) Sistemas de Equações.	Imagem de Conceito Evocada, Unidades Cognitivas e Raiz Cognitiva.	E	CE

Tabela 7: Análise dos resultados do pré/pós-teste de Alan

Para a noção de módulo de um número real, aparentemente, Alan tem uma evolução moderada, pois, no pré-teste, ele simplesmente reescreve a expressão dada desviando do foco da questão. Já no pós-teste ele procura fazer uma análise geométrica da distância entre os pontos de coordenadas *x* e *2*, porém falha ao utilizar o símbolo de módulo inapropriadamente em seu discurso.

Há um bom desenvolvimento na noção de Alan sobre o número de soluções da equação de 1º grau em $\Re^2$, pois no pré-teste ele limitava suas observações a equações em $\Re$, descrevendo que só poderia ter uma única solução, já no pós-teste, ele destaca que há infinitas soluções e argumenta muito bem sobre tal fato. O mesmo não acontece para o número de soluções da equação da circunferência, exercício 7, em que ele descreve que há infinitas soluções, porém não justifica o porquê. De qualquer forma, há um progresso neste caso, pois no pré-teste ele erra completamente esta questão.

Quanto à representação gráfica da equação $x - a = 0$, é notória a sua evolução, pois, de uma questão que anteriormente ele não sabia resolver, no pós-teste ele argumenta que se o universo estiver em $\Re$ teremos um ponto, se for em $\Re^2$ uma reta e se for em $\Re^3$ um plano.

Alan argumenta muito bem, no pós-teste, a idéia de utilizar a colinearidade entre três pontos para comprovar que o gráfico da função $f(x) = ax + b$ é uma reta. Fato que ele não conseguia justificar no pré-teste, assinalando, assim, um progresso no desenvolvimento desta noção.

O reconhecimento de lugares geométricos é outro ponto de evolução nas idéias de Alan, ele reconhece no exercício seis que o LG em questão é uma parábola, descrevendo assim a sua definição.

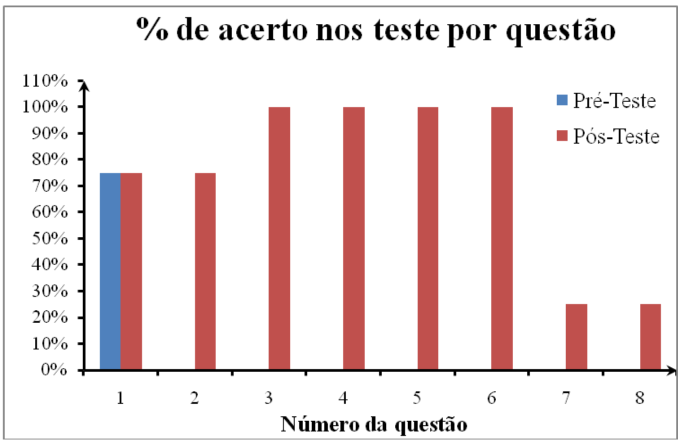


Gráfico 7: Análise dos resultados de Alan por questão

Alan realiza uma análise gráfica para concluir que a posição relativa entre os lugares geométricos das equações do sistema dado pode ser: tangente, secante ou externa. Porém, conclui erroneamente que o sistema pode ser: possível e determinado, possível e indeterminado e impossível. Não sabemos ao certo o motivo da falha ao colocar que o sistema pode ser possível e indeterminado. Todavia anteriormente no pré-teste ele errou a questão sem resolver algebricamente ou geometricamente.

5.8. Jorge

5.8.1. Pré-Teste (Apêndice A)

1) Jorge erra apresentando nesta questão uma Definição de Conceito sem qualquer correlação com a definição formal, ele escreve: *"Igualdade entre termos"*, ver respostas esperadas (Apêndice A, p. 172).

2) Ele erra, dizendo que neste caso há uma *"equação modular"*, tentando montar uma tabela para representar valores de y em função de valores de x.

3) Consideramos que Jorge acertou a questão, pois assinalou que há infinitas soluções e argumentou que *"Equação de 1º grau sempre dá uma reta e variando o valor de x, vamos também variar o valor de y."*.

4) Novo erro, ao assinalar que nenhuma das alternativas está correta, justificando que *"* $x - a = 0 \Rightarrow x = a$*, então o valor de a é o mesmo de x e ele se desloca sobre o eixo x"*.

5) Para a comprovação da relação entre a função $f(x) = ax + b$ e a reta ele responde corretamente, porém apresenta uma justificativa incompleta: *"x e y crescem e decrescem de forma proporcional"*.

6) Ele erra, ao assinalar o LG como uma reta mediatriz, justificando que *"Gustavo é o centro entre o mastro e a linha férrea e no caso Gustavo é o ponto médio entre o mastro e a linha férrea"*.

7) Erra novamente. Nesta questão ele tenta escrever a forma equivalente da equação, deixando-a como $3x^2 + 3y^2 - 12y + 3 - 33 = 0$ sem chegar a qualquer conclusão em seguida.

8) Novo erro, tentando solucionar o sistema e chegando a conclusão que *"a solução é um par ordenado (x, y)"*. Apesar de a solução poder ser um ponto, a resolução de Jorge não é coerente com tal conclusão.

5.8.2. Atividades Modulares

Módulo 1 (Apêndice B)

Na questão 8, referente à interpretação geométrica de expressões da forma $\left|-1-(+3)\right|$, Jorge escreve *"A distância de coordenadas (-1) e(+3) é de 4 unidades"*. Novamente existem falhas, que não podemos avaliar se são conceituais ou devidas a limitações de expressão verbal. Na verdade, a distância não possui coordenadas.

Apesar de confuso, nesta questão, Jorge apresenta uma explicação mais coerente com o que se esperava sobre o significado da expressão $|x-a| = \begin{cases} x-a, & \text{se } x \geq a \\ -x+a, & \text{se } x < a \end{cases}$, junto a uma figura ilustrativa. Ele escreve *"Se x for $\geq$ a então usaremos a distância $x-a$, se x for < a usaremos a distância $-x+a$"*. Um sutil cuidado que se deve tomar ao analisar a observação deste participante, é que ele poderia ter feito apenas uma releitura da expressão algébrica adaptando a palavra distância, porém a sua ilustração mostra que ele compreendeu o significado geométrico.

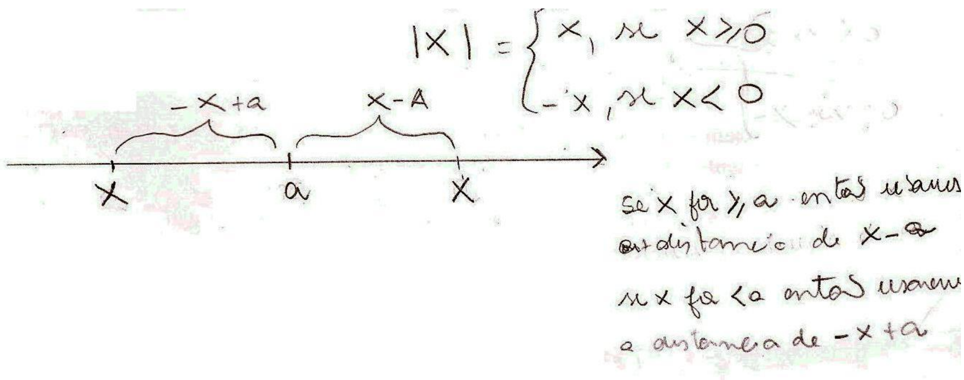


Figura 24: Ilustração de Jorge para interpretar o módulo

Módulo 2 (Apêndice C)

Na questão 2, em que Jorge é questionado se a noção de distância entre dois pontos obtida no Módulo 1 é suficiente para se calcular a distância entre dois pontos no Módulo 2, ele escreve *"Não, pois mudamos a dimensão de unidimensional para* *bidimensional".* A justificativa dele é coerente com o esperado, porém, assim como a maioria dos participantes, ele não explica como será essa mudança, fato que pode ter ocorrido por falta de clareza no enunciado da questão.

Módulo 3 (Apêndice D)

Na questão 3, referente à definição da circunferência como LG, Jorge descreve *"Circunferência é o lugar geométrico que tem o ponto O como centro (0, 0) e raio=*$\sqrt{2}$ *e o ponto A que tem o centro (-2, 1) e raio=1".* Para a questão 4, que envolve o lugar geométrico dos pontos que distam $\sqrt{2}$ unidades do ponto *(0, 0)* e *1* unidade do ponto *(-2, 1)*, ele escreve *"Que é a interseção das circunferências com as coordenadas (-1; 1) e (-1,4; 0,2)".* Com relação à questão 7, que visa descrever uma definição para reta, Jorge coloca que *"Reta é o lugar geométrico que passam por dois pontos dados colineares".* Para o exercício 8, que solicita ao participante o LG os pontos colineares com os pontos *(-1, 2)* e *(3, -2)* e colineares com os pontos *(-4, 3)* e *(5, 0)*, ele escreve *"Um ponto".* Para o exercício 9, que questiona qual é o LG dos pontos que distam $\sqrt{2}$ unidades do ponto *(0, 0)* e são colineares com os pontos *(-1, 2)* e *(3, -2)*, Jorge coloca *"Dois pontos de coordenadas D=(-0,37; 1,37) e E=(1,37; -0,37)".* Na questão 10, que questiona qual é o LG dos pontos equidistantes a um ponto *A* e a um ponto *B* e solicita a definição desse LG, ele escreve *"Reta mediatriz. É o lugar geométrico dos pontos equidistantes a dois pontos dados".* Finalizando com a questão 11, em que ele é questionado sobre qual é o LG dos pontos *P* equidistantes a um ponto *F* e uma reta *r* não contendo *F* e é solicitado também que se defina tal lugar, ele coloca *"É uma parábola: É o lugar geométrico dos pontos que: dados o ponto e uma reta r seja tal que a distância do ponto F ao ponto P é idêntica ao ponto P a reta r.".*

Em suas definições sobre circunferência, reta, reta mediatriz e parábola, Jorge apresenta algumas incoerências pontuais, fornecendo informações que ora sugerem a compreensão sobre o que é o lugar geométrico, ora sugerem o contrário. É o caso da questão 3, no qual ele apresenta uma definição de conceito sem correlação com a definição formal, usando o termo lugar geométrico desvinculado da idéia de conjunto de pontos. Também, na questão 7, em que ele apresenta uma idéia completamente confusa sobre reta. Já na questão 10, ele usa corretamente a noção de lugar geométrico para definir a reta mediatriz. Na questão 11, define a parábola de forma correta mas imprecisa, por não mencionar que o ponto *F* não pode pertencer à reta *r*. Pode-se inferir assim que Jorge obteve uma evolução em sua noção sobre LG.

Quantos às questões 4, 8 e 9, envolvendo LGs finitos, ou seja, interseção entre curvas, apesar de acertar, em nenhum momento Jorge conclui sobre a interseção entre os lugares geométricos, o que pode dificultar uma futura compreensão sobre a solução de sistemas de equações.

Módulo 4 (Apêndice E)

Nos exercícios 17 e 18, referentes a variações no coeficiente angular e linear da equação da reta, ele escreve respectivamente *"Variando m, varia-se a tangente do ângulo e consequentemente varia o ângulo do eixo OX"* e *"Se variar q, variamos o ponto em que a reta intercepta o eixo OY. Translada a reta em 5 unidades para cima e para baixo."*. Jorge explicita muito bem sobre as análises obtidas nestas questões, porém ainda com algumas falhas de expressão. Por exemplo, coloca que *"[...] varia o ângulo do eixo OX [...]"*, quando provavelmente queria dizer que há uma variação do ângulo que a reta faz com o eixo *OX*. Destaca-se que, além de reconhecer o coeficiente linear como ponto de interseção entre a reta e o eixo *OY*, ele percebe também que a translação é de toda a reta e não somente do ponto.

Módulo 5 (Apêndice F)

Na questão 11a, que argúi sobre a possibilidade de localização de Joana sabendo que ela está colinear a dois pontos do mapa, Jorge escreve que *"Não. Pode estar em infinitos pontos da reta* $x - y - 2 = 0$*"*. Para a questão 11b que complementa a anterior, colocando mais dois pontos colineares a Joana e questiona novamente sobre a possibilidade de localizá-la, ele escreve *"Sim. Joana está na solução do sistema* $\begin{cases} x - y - 2 = 0 \\ x - 3y + 4 = 0 \end{cases}$ *que é no ponto (5,3) Parque Mar"*. Jorge soluciona muito bem o problema, além de apresentar uma excelente argumentação matemática.

Para a questão 18, referente às condições sobre os coeficientes angulares e lineares das equações do sistema $\begin{cases} y = m_1 x + q_1 \\ y = m_2 x + q_2 \end{cases}$ de forma a estudar a posição relativa entre as retas, Jorge coloca *"*$m_1 = m_2$ *e* $q_1 = q_2$ *retas são coincidentes,* $m_1 = m_2$ *e* $q_1 \neq q_2$

retas são paralelas e $m_1 \neq m_2$ retas são concorrentes". As boas análises e conclusões de Jorge que forneceram-lhe noções mais aprofundadas sobre o número de soluções de um sistema linear.

5.8.3. Pós-teste (Apêndice A)

1) Nesta questão, Jorge apresenta uma Definição de Conceito com leve relação com a definição formal, porém limita-se a equações em dimensões maiores que 2, ele escreve *"É uma igualdade que relaciona duas ou mais variáveis e essas variáveis podem expressar retas, parábola, circunferências, etc."*. Dessa forma, conferimos a ele um acerto incompleto, ver respostas esperadas (Apêndice A, p. 172).

2) Ele acerta ao explicar que *"Se x estiver a direita de 2 a distância é igual a x-2, se x estiver a esquerda de 2 a distância é igual a* $-x+2$ *"*.

3) Novamente acerta, ao assinalar que há infinitas soluções e argumentando que *"Pois existem diversos pontos que atendem a equação com duas variáveis"*.

4) Consideraremos um acerto para Jorge, pois ele assinala que a interpretação gráfica da equação $x-a=0$ é um ponto, como não estipulamos o universo no enunciado da questão ele justifica que *"Se estiver numa reta será unidimensional* $\Re$ *"*.

5) Ele acerta novamente ao colocar *"Quando você pega três pontos quaisquer da reta eles serão colineares e terão o mesmo coeficiente angular"*.

6) Ele acerta assinalando parábola e acrescentando *"Pois a distância do ponto a praça é o mesmo da linha férrea, sendo que a parábola é o LG que equidista do foco a reta diretriz"*.

7) Novo acerto para Jorge, pois ele coloca que há *"Infinitas Soluções"* e justifica que *"Pois numa circunferência temos infinitos pontos a cada valor determinado para x teremos um valor de y"*.

8) Ele acerta ao escrever *"Pode ser tangente, secante ou externa. $\Delta=0$ tangente 1 ponto, $\Delta>0$ temos duas soluções, $\Delta<0$ não tem solução"*.

5.8.4. Evolução da Imagem de Conceito nas atividades do pré e pós-teste

Uma singela evolução é percebida na Imagem de Conceito Evocada por Jorge sobre o termo equações, pois, no pré-teste, ele, além de definir errado, evita apresentar qualquer tipo de exemplo. Já no pós-teste, ele apresenta uma definição, acompanhada de exemplos que, apesar de estarem limitados a equações em $\Re^2$, apresentam certa correlação com a Definição Formal.

Novo progresso pode ser observado nas noções sobre o módulo de um número real; Jorge apresenta mais facilidade em interpretar geometricamente expressões envolvendo módulo, utilizando como referência a distância entre pontos da reta.

Questão	**Relação com a Teoria**	**Pré-Teste**	**Pós-Teste**
1) Equações.	Imagem de Conceito Evocada e Definição de Conceito.	E	CI
2) Módulo.	Definição de Conceito e Unidades Cognitivas.	E	C
3) Equações indeterminadas.	Imagem de Conceito Evocada e Unidades Cognitivas.	C	C
4) Equação *x-a=0*.	Imagem de Conceito Evocada, Unidades Cognitivas e Fatores de Conflitos Potenciais.	E	C
5) Função *f(x)=ax+b*.	Imagem de Conceito Evocada, Definição de Conceito e Unidades Cognitivas.	CI	C
6) Lugar Geométrico.	Imagem de Conceito Evocada e Unidades Cognitivas.	E	C
7) Equações Indeterminadas.	Imagem de Conceito Evocada e Unidades Cognitivas.	E	C
8) Sistemas de Equações.	Imagem de Conceito Evocada, Unidades Cognitivas e Raiz Cognitiva.	E	C

Tabela 8: Análise dos resultados do pré/pós-teste de Jorge

Em sua noção sobre o número de soluções da equação de 1º grau em $\Re^2$, Jorge já apresentava um bom desempenho no pré-teste, o que não veio a ser prejudicado nas atividades modulares, conforme é possível verificar por meio de seus argumentos no pós-teste. Todavia, é possível notar uma evolução em suas conclusões sobre o número de soluções de outras equações em $\Re^2$, como é o caso da equação da circunferência, no exercício 7, em que ele argumenta, analogamente ao exercício 3, que existem infinitas soluções.

Apesar de não fazer uma análise das possíveis representações gráficas da equação $x - a = 0$, dependentes do universo em questão, é possível observar em Jorge uma noção de que o universo das soluções influencia na representação. Já que, embora reconheça a equação como um ponto, argumenta que esta sua representação se dará se estiver em $\Re^2$.

Um pequeno progresso é observável na postura de Jorge sobre a comprovação da relação entre a função $f(x) = ax + b$ e a reta. Anteriormente, ele coloca o efeito da proporcionalidade causada pela função, porém, de forma não muito clara. Agora, ele destaca a colinearidade existente entre quaisquer três pontos.

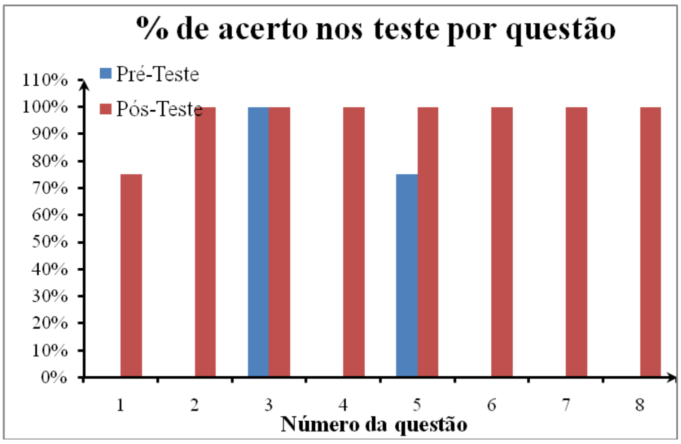


Gráfico 8: Análise dos resultados de Jorge por questão

Ele apresenta um desenvolvimento positivo em sua capacidade de reconhecer lugares geométricos, como pode ser observado nos exercícios 6 e 7, que o participante errou no pré-teste e, em seguida, apresentou acertos acompanhados de excelentes conclusões no pós-teste. Para o exercício 6, ele destaca a parábola e sua definição associada ao problema em questão. Para o exercício 7, ele reconhece a equação como uma circunferência sem mesmo ter sido questionado sobre isso.

Para a análise do número de soluções de um sistema de equações, ele apresenta corretamente seus argumentos, a partir de uma observação da posição relativa entre os LGs das soluções da equação.

Finalizamos, assim, a análise individual dos participantes da pesquisa. Uma análise geral faz-se necessário, à medida que, individualmente, fica impossível um julgamento reflexivo sobre a evolução da Imagem de Conceito proporcionada pela proposta alternativa para o estudo de equações em $\Re^2$. Desta forma, no capitulo posterior será realizado uma análise global com considerações gerais sobre os efeitos da proposta.

6. Considerações gerais

Após a análise comparativa dos resultados do pré e pós-teste por participante, é possível fazer uma balanço geral do efeito da proposta alternativa para o estudo de equações e sistemas no desenvolvimento da Imagem de Conceito dos participantes. Assim, apresentaremos uma análise global desse desenvolvimento. Além disso, discutiremos os pontos positivos e negativos observados durante a condução da proposta e, por fim, apresentaremos as considerações finais, correlacionando com o problema levantado na introdução deste trabalho *"As dificuldades enfrentadas pelos alunos em relacionar as representações gráficas e algébricas de equações e funções"*.

6.1. Desenvolvimento global da Imagem de Conceito

É possível observar que a capacidade de definir objetos matemáticos é uma das grandes dificuldades dos participantes. Aparentemente, a idéia de definir matematicamente, que apresenta um significado particular, se confunde com a idéia mais genérica de definir (como aquela correspondente às definições de dicionários).

O minidicionário da língua portuguesa de Ferreira (2000) destaca o significado de definição como: *"[...] Expressão com que se define"* e caracteriza definir como *"1. Determinar a extensão ou os limites de. 2. Explicar o significado de. 3. Fixar, estabelecer. 4. Dizer o que pensa a respeito de algo. 5. Decidir-se."*.

As respostas apresentadas pela maioria participantes no pré-teste (gráfico 9) se aplicam com maior conexão a idéia de definição como *"Dizer o que pensa a respeito de algo"*, que na verdade, conforme teoria de Tall & Vinner (1981), seria uma Definição de Conceito que pode ter ou não correlação com a definição formal. Podemos observar também que no pós-teste houve apenas uma resposta correta, neste caso o participante conseguiu apresentar uma definição de conceito para equação que se relaciona com a definição formal.

Para a questão 1 dos testes (Gráfico 9), apenas 1 aluno conseguiu acertá-la plenamente. Seu objetivo era absorver as características da Imagem de Conceito dos participantes, ou seja, Imagem de Conceito Evocada, assim como a Definição de Conceito sobre equações. Todavia, acreditamos que o enunciado da questão não estava claro o suficiente para atender tais objetivos. Embora durante a realização dos testes, o professor mediador tenha discutido com os participantes, o que era desejado na questão, isso não foi suficiente. De qualquer forma, a questão foi corrigida de acordo com os objetivos traçados durante o planejamento do trabalho, ver respostas esperadas (Apêndice A, p. 172).

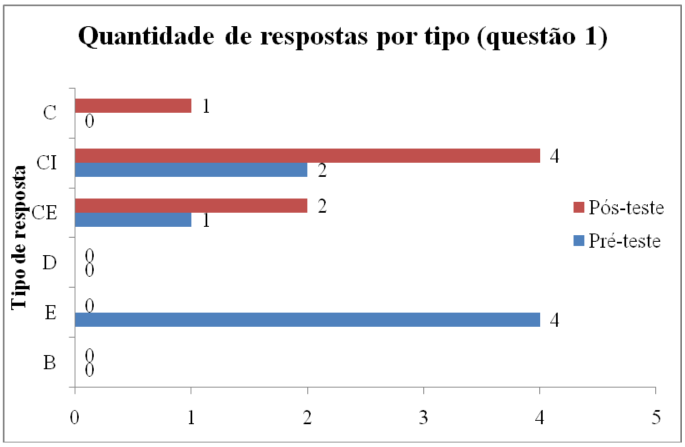


Gráfico 9: Quantidade de respostas por tipo (questão 1)

Ribeiro (2007) traz em sua tese, intitulada *"Equações e seus multisignificados no ensino de Matemática: contribuições de um estudo epistemológico"*, a diversidade de definições e noções sobre o conceito de equações, destaca inúmeras divergências entre os autores pesquisados.

Inicialmente essas definições dependeriam da classe de equações que está em estudo, ou seja, equações algébricas, equações transcendentes, equações diferenciais, etc. Todavia, alguns dos autores pesquisados por ele, não consideram as equações como um objeto matemático, como é o caso das funções, polígonos e integrais. Entre eles, destaca-se Rogalski (2001, p. 18) apud Ribeiro (2007, p. 92), que declara *"o termo equação é evocado quando existe a intenção, por parte de alguém, de se resolver um certo tipo de problema"*. Dessa forma, Ribeiro (2007), apresenta a seguinte reflexão:

> *Enquanto alguns autores nem definem o termo equação, outros, quando o fazem, definem um "tipo" específico de equação, mesmo que de forma implícita. Mais uma vez destaco:* ***Eles não definem equação por julgarem que essa idéia não é uma noção matemática e sim uma noção paramatemática?*** *(RIBEIRO, 2007, P. 114).*

O autor destaca, ainda, que *"Embora não seja um objeto do saber, a noção de equação possui vários significados e deve tomar lugar junto aos objetos de ensino"*. (Ribeiro, 2007, p. 89).

Entre os trabalhos discutidos por Ribeiro (2007), destacamos a definição de equações algébricas de Pires, Curi & Pietropaolo (2002, p. 211) apud Ribeiro (2007, p. 108), por consideramos de melhor enquadramento com a nossa proposta de pesquisa, *“Em Matemática, dizemos que equação é uma sentença aberta, porque nela há valores que não são conhecidos, que expressam uma igualdade. (...) O valor de x que transforma a sentença aberta em sentença verdadeira é chamado raiz da equação”.*

Embora não se tenha percebido uma evolução significativa na capacidade de definir, entre participantes de nossa pesquisa, alguns, no pós-teste, apresentaram uma boa Imagem de Conceito Evocada, destacando as suas definições de conceito e alguns bons exemplos.

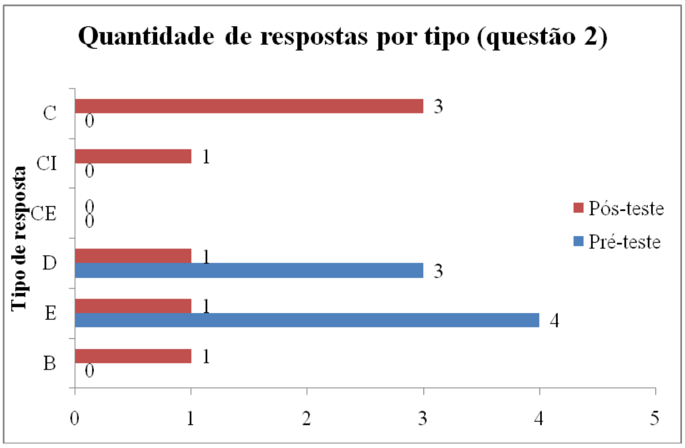


Gráfico 10: Quantidade de respostas por tipo (questão 2)

Conforme é possível analisar no gráfico 10, no pré-teste, todos os participantes erraram ou se desviaram do foco da questão, que visava verificar a competência em interpretar geometricamente a definição de módulo de um número real ou módulo da diferença entre dois desses números. Neste caso, é válido destacar que há uma insistência dos participantes em apenas memorizar a definição formal, associando-a apenas à noção de módulo como valor absoluto, ou seja, à idéia de transformar um número real qualquer, em um número real positivo. Apenas três participantes no pós-teste conseguiram apresentar uma interpretação de acordo com o esperado, onde $|x-2|$ seria a distância entre os pontos da reta de coordenadas *x* e 2, e essa distância poderia ser representada por *x-2* se *x* estiver à direita de *2* no eixo (ou seja, x>2), ou *2-x* se *x* estiver à esquerda de *2* no eixo (ou seja, *x<2*). Um dos participantes apresentou uma interpretação correta, porém incompleta errando apenas em pequenos detalhes.

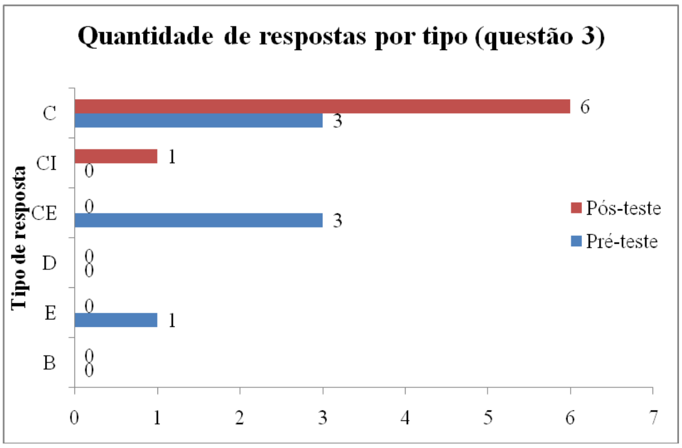


Gráfico 11: Quantidade de respostas por tipo (questão 3)

No pré-teste quatro participantes reconheciam que uma equação de 1º grau em $\Re^2$ possui infinitas soluções, porém não conseguiam justificar corretamente esta situação apresentando, assim, justificativas erradas, conforme é possível observar no gráfico 11. Uma melhora significativa nesta competência foi corroborada no pós-teste, em que seis participantes acertaram a questão e apresentaram justificativas relacionadas ao fato das soluções em $\Re^2$ serem infinitos pares ordenados.

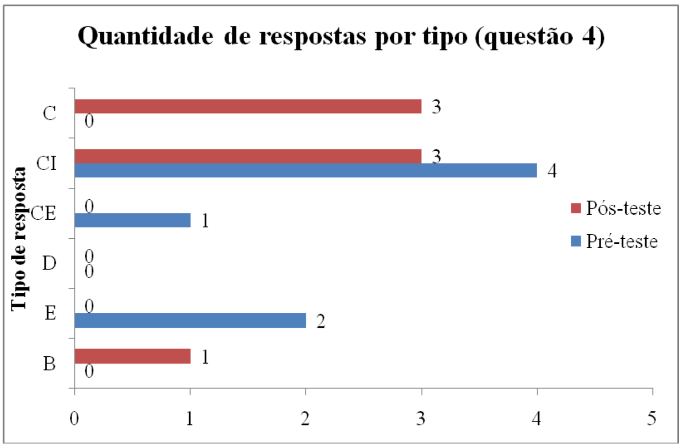


Gráfico 12: Quantidade de respostas por tipo (questão 4)

Apenas três participantes do pós-teste conseguiram apresentar justificativas corretas sobre a representação gráfica da equação *x-a=0* com $a \in \Re$, gráfico 12. Alguns participantes (quatro no pré-teste e três no pós-teste) reconheceram que a representação gráfica seria um ponto e outros colocaram que seria uma reta, conferindo-lhes assim um acerto parcial. Como o objetivo da questão era analisar a capacidade do indivíduo de reconhecer que a representação gráfica dependeria do universo em que se encontravam as soluções da equação, poderíamos ter um conjunto vazio, um ponto, uma reta, um plano, um hiperplano, etc.

Aos participantes que assinalaram que nenhuma das opções estava correta e apresentaram uma justificativa relacionada ao universo das soluções, foi conferido acerto. Acreditamos que esse baixo percentual de acertos deve-se ao fato da apresentação de poucos exercícios sobre o assunto nos módulos e o tema ter sido abordado apenas uma vez durante o curso.

A questão 5 (Gráfico 13), se apresenta como uma excelente oportunidade de constatação da capacidade dos participantes de argumentar matematicamente sobre a relação existente entre a equação (ou função) $y=ax+b$ e a reta. Uma melhora significativa nesta competência foi observada na comparação entre os testes: cinco participantes no pré-teste erraram a questão ou deixaram em branco; em contrapartida no pós-teste cinco apresentaram corretamente a justificativa de que três soluções quaisquer e distintas da equação são, no plano cartesiano, pontos colineares.

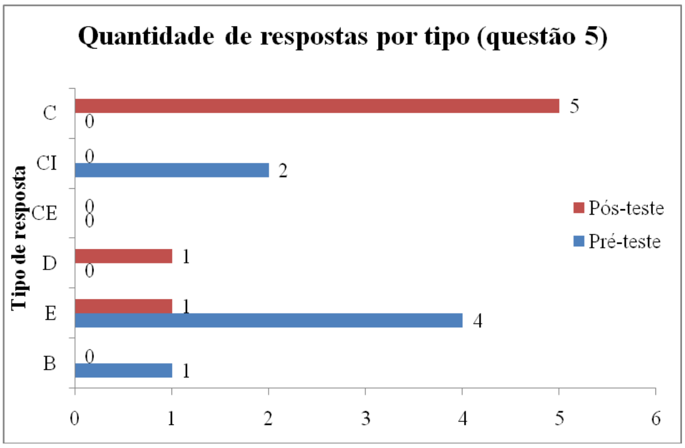


Gráfico 13: Quantidade de respostas por tipo (questão 5)

Dois participantes apresentaram, no pré-teste (gráfico 13), a justificativa correta da existência de uma relação de proporcionalidade entre os pontos que satisfazem a equação $y=ax+b$, porém não conseguiram apresentar com precisão as suas idéias. Desta forma, conferimos-lhes uma resposta correta, porém incompleta. Esses mesmos participantes abandonaram a justificativa anterior, e no pós-teste, argumentaram sobre a colinearidade das soluções da equação, o que, de certa forma, foi considerado de mais fácil compreensão pelos participantes.

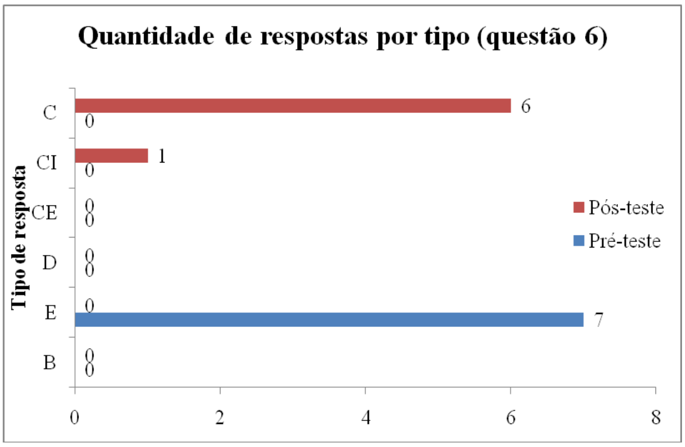


Gráfico 14: Quantidade de respostas por tipo (questão 6)

Apesar da grande dificuldade em definir equações, conforme discutido na questão 1 (gráfico 9), houve uma satisfatória melhora na capacidade de apresentar uma definição de conceito mais correlata com a definição formal no caso de lugares geométricos, questão 6 (gráfico 14), dos sete participantes que no pré-teste não reconheceram que o lugar geométrico em questão era uma parábola, seis (no pós-teste) além de conseguirem associar o problema da equidistância entre Gustavo o mastro e a linha férrea com o lugar geométrico da parábola, apresentaram uma definição razoavelmente boa para essa curva. Um dos participantes apenas reconheceu o LG sem justificar precisamente.

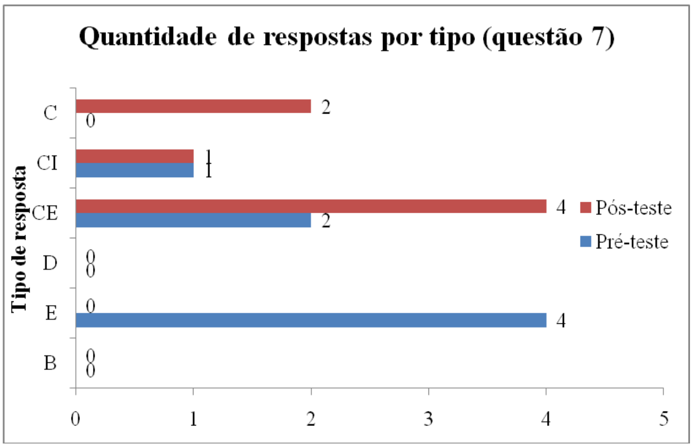


Gráfico 15: Quantidade de respostas por tipo (questão 7)

Apenas dois dos participantes conseguiram responder corretamente a questão 7 (gráfico 15). Esta envolvia a capacidade de reconhecer a infinidade de soluções da equação $3x^2 - 12y + 3 = 33 - 3y^2$ assim como apresentar uma representação para essas soluções. Os quatro participantes que obtiveram grau CE nesta atividade, acertaram ao expor que neste caso tinham-se infinitas soluções, além de representarem corretamente as soluções na forma de conjunto, entretanto, por terem omitido uma justificativa para tal fato, foi-lhes conferido tal conceito. Acreditamos que, neste caso, o enunciado da questão poderia ter delimitado melhor os fins pretendidos.

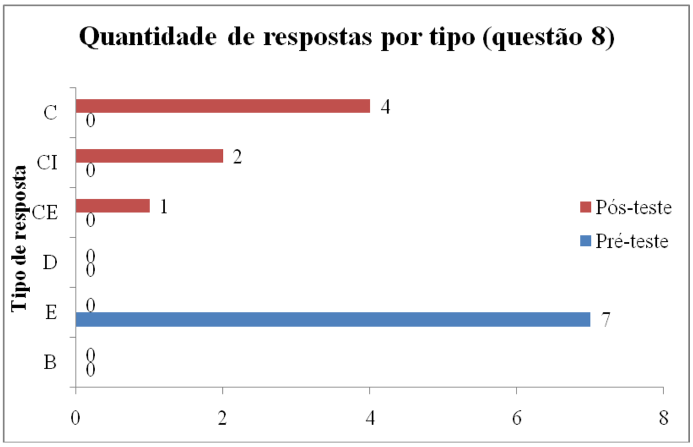


Gráfico 16: Quantidade de respostas por tipo (questão 7)

Dos sete participantes do pré-teste (gráfico 16) que não foram capazes de analisar o número de soluções do sistema de equações $\begin{cases} x^2 + y^2 - 2y = 4 \\ x + y = m \end{cases}$, com m$\in \Re$, quatro acertaram no pós-teste, apresentando argumentos corretos relacionados à posição relativa entre os lugares geométricos das soluções das equações, ou seja, os gráficos das equações, descrevendo os casos em que a reta e a parábola são tangentes, secantes e externas, logo o sistema seria possível e determinado ou impossível. Dois dos participantes apresentaram justificativas corretas, porém incompletas no pós-teste. Disso, é possível perceber que se agregou à Imagem de Conceito da maioria dos participantes a existência de uma relação estrita entre uma equação em $\Re^2$ e o lugar geométrico das soluções desta equação, e que esta relação entre a álgebra e geometria pode fornecer *insights* para a compreensão de problemas envolvendo essas equações.

No gráfico 17, apresentamos uma relação entre os acertos no pré-teste e no pós-teste por questão, neste caso consideramos acertos as questões onde os participantes obtiveram conceito C ou CI, respectivamente vinculados a resposta correta e resposta correta, porém incompleta. É possível perceber que em todas as questões houve uma evolução considerável.

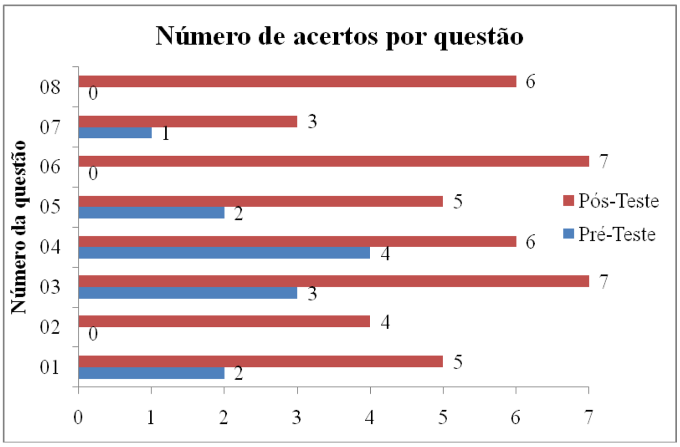


Gráfico 17: Quantidade de respostas por tipo (questão 7)

Os percentuais a serem apresentados na média de pontuação por questão (gráfico 18) e a média de pontuação por participante (gráfico 19), foram obtidos a partir dos graus estabelecidos na tabela 1, da seção 4.4.1.

A média de pontuação por questão (gráfico 18) foi calculada com base na média aritmética dos conceitos obtidos por cada participante. É notável a evolução do deste indicador. Destacam-se neste caso as questões 3, 6 e 8, em que a pontuação ultrapassa os 80%. Estas estão relacionadas respectivamente ao número de soluções de uma equação de 1º grau em $\Re^2$, o reconhecimento de um lugar geométrico a partir de algumas condições e o número de soluções de um sistema de equações em $\Re^2$. No caso das questões 2, 6 e 8, nenhum participante havia apresentado um conceito CE, CI ou C no pré-teste, a questão dois relaciona-se a interpretação geométrica na noção de módulo de um número real.

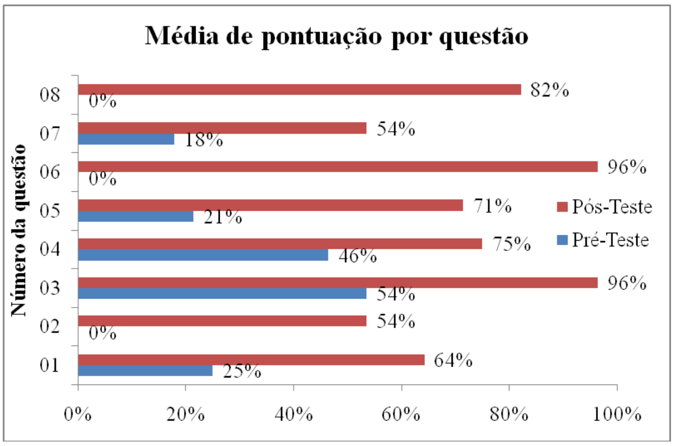


Gráfico 18: Média de pontuação por questão

Finalizando esta análise global, apresentamos a média de pontuação por participante (gráfico 19), em destaque temos Pedro, Laura, Julia, Alan e Jorge com evoluções que superam 50 pontos percentuais, João com uma evolução de 47 pontos e, em contrapartida, Ricardo com uma evolução de apenas 19%.

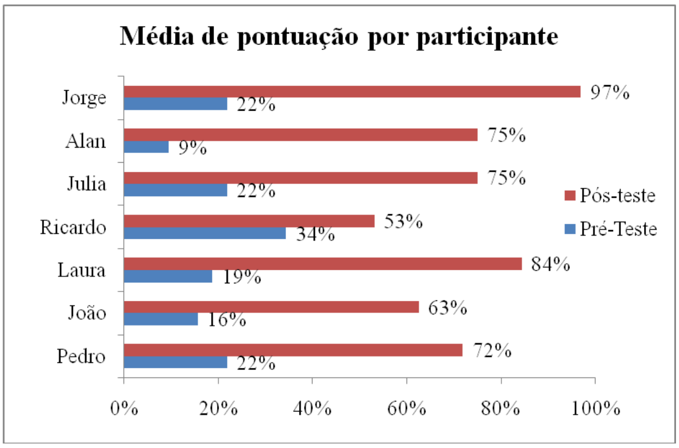


Gráfico 19: Média de pontuação por participante

Desta forma, concluímos que, em geral, a proposta alternativa enriqueceu a Imagem de Conceito dos participantes, fortalecendo a conexão entre as Unidades Cognitivas já existentes e as adquiridas ao longo dos Módulos. Um pequeno cuidado a ser tomado durante a aplicação da proposta é a apresentação constante de equações em diversos universos, evitando, assim, que os cursistas se limitem a um universo em $\Re^2$. Aparentemente, a capacidade de apresentar Definições de Conceito correlacionadas com a Definição Formal sofreu uma pequena evolução, o que não podemos considerar como um desenvolvimento significativo.

6.2. Considerações finais

Inicialmente, o problema que motivou a elaboração desta pesquisa foi *"As dificuldades encontradas pelos alunos em relacionar as representações gráficas e algébricas de equações e funções".* Além disso, em virtude da delimitação do tema, procuramos focar nossos trabalhos apenas na representação gráfica de equações em $\Re$ e $\Re^2$. Dentre as hipóteses levantadas que possivelmente agravam essa problemática, algumas puderam ser comprovadas ao longo da elaboração, aplicação e análise dos dados.

Apesar de poucos participantes terem reconhecido que há diversas interpretações para equações da forma $x\text{-}a=0$ e que isto dependeria do universo em que se encontram as soluções da equação, consideramos que uma abordagem de coordenadas na reta antecipadamente ao estudo de coordenadas no plano fortalece essa noção, além de proporcionar uma extensão de estruturas em $\Re$ para $\Re^2$. A hipótese de que esta sequência não é realizada adequadamente por alguns livros do ensino médio foi corroborada no capítulo 3 deste trabalho.

Nesse mesmo capítulo, na seção 3.1.2, consolidou-se a hipótese da apresentação extremamente reducionista para sistema de eixos ortogonais. Desta forma, a elaboração de uma sequência didática sobre plano cartesiano, envolvendo problemas contextualizados, conjectura de propriedades e demonstração das principais proposições envolvendo distância entre pontos e condição de colinearidade foi necessária.

Ainda no capítulo 3, foi comprovada a hipótese de que existem livros didáticos do ensino médio que apresentam as propriedades e objetos matemáticos sem a devida argumentação matemática. Por meio da proposta alternativa planejada, foi possível construir uma sequência didática que favorece a conjectura, generalização e demonstração de proposições relativas a equações em $\Re^2$, conforme o método SLM de Abramovitza, Berezinaa, Berman & Shvartsmana (2009).

Apesar de confirmarmos (Capítulo 3) a existência de sequências didáticas que pouco favorecem a conexão e a evolução de tópicos da matemática como funções e geometria analítica, além de causar um sentimento de informalidade excessiva ao objeto matemático, não foi possível, devido a diversas limitações da experiência, apresentar um trabalho adequado envolvendo funções. Contudo, acreditamos que o enriquecimento da Imagem de Conceito sobre as relações existentes entre as equações e o lugar geométrico de suas soluções servirá como um excelente fortalecedor da compreensão sobre as diversas representações das funções analíticas. Sendo assim, este trabalho deixa em aberto a possibilidade de estudo dos efeitos da proposta alternativa sobre o ensino de funções analíticas na educação básica ou superior.

A partir dos documentos analisados, percebemos a falta de uma abordagem adequada sobre Lugares Geométricos no ensino médio. Acreditamos que esse tipo de abordagem, associada ao uso de software de geometria dinâmica e planilha eletrônica, minimiza as dificuldades encontradas pelos estudantes na compreensão de conceitos mais complexos relativos às diversas representações das soluções de uma equação, como podemos observar nos resultados apresentados no capítulo 5 deste trabalho.

Não encontramos no livro didático pesquisado no capítulo 3, uma abordagem qualitativa sobre o número de soluções sistemas de equações em $\Re^2$, confirmando nossa hipótese. Após a estruturação das coordenadas em $\Re$ (Apêndice B), a demonstração de teoremas indispensáveis para a sequência proposta (Apêndice C), a compreensão adequada sobre Lugar Geométrico (Apêndice D), a conjectura, análise e demonstração das principais propriedades relacionadas a equações e seus gráficos (Apêndice E), foi possível realizar com os participantes uma análise qualitativa do número de soluções de um sistema de equações em $\Re^2$ (Apêndice F). Consideramos que esta análise foi extremamente importante para o enriquecimento de suas Imagens de Conceito, o que futuramente poderá contribuir para uma boa inserção em áreas mais avançadas da Matemática como o Cálculo Diferencial e Integral, a Álgebra Linear e a Análise.

Concluímos desta forma o trabalho, acreditando que uma proposta alternativa que envolva uma sequência didática bem estruturada, associada à utilização de software de Geometria Dinâmica, destacando as conexões entre coordenadas na reta, coordenadas no plano, lugares geométricos, equações indeterminadas e sistemas de equações, minimizará as dificuldades encontradas na compreensão das relações existente entre as equações e as diversas representações de suas soluções, assim como proporcionará a conjectura de propriedades que poderão ser discutidas através de uma argumentação matemática sólida. Deixaremos no diagrama 7, um resumo da sequência didática apresentada na proposta alternativa para o estudo de equações indeterminadas e sistemas de equações.

Coordenadas em $\Re$
(distância entre pontos)

Coordenadas em $\Re^2$
(distância entre pontos)
(colinearidade)

Lugares Geométricos
(colinearidade$\rightarrow$ reta)
(equidistância$\rightarrow$ circunferência)
(equidistância$\rightarrow$ parábola)

Equações em $\Re^2$
($ax+by+c=0$ $\rightarrow$colinearidade$\rightarrow$reta)
($ax^2+ay^2+bx+cy+d=0$ $\rightarrow$equidistância$\rightarrow$circunferência)
($y=ax^2+bx+c$ $\rightarrow$equidistância$\rightarrow$parábola)

Sistemas de Equações em $\Re^2$
(reta/circunferência/parábola$\rightarrow$posição relativa$\rightarrow$número de soluções)

Diagrama 7: Sequência didática apresentada na proposta alternativa para o estudo de equações indeterminadas e sistemas

Bibliografia

ABRAMOVITZ, B., BEREZINA, M., BERMAN, A., SHVARTSMAN, L. How to Understand a Theorem? International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 40, 5, 577 - 586, 2009.

BARNARD, A. D.; TALL, D. O. Cognitive Units, Connections, and Mathematical. Annual Conference for the Psichology of Mathematics Education, 2, 41-48, 1997.

BLOCH, I. Teaching Functions in a Graphic Milieu: What Forms of Knowledge Enable Students to Conjecture and Prove? Educational Studies in Mathematics, 52, 3-28, 2003.

CROWLEY, L., TALL, D., O., The Roles of Cognitive Units, Connections and Procedures in achieving Goals in College Algebra. Proceedings of the 23rd Conference of PME, Haifa, Israel, 2, 225-232, 1999.

DANTE, L. R. Matemática: contextos e aplicações. 3. ed. São Paulo: Ática, 2003. Volume Único.

DAVIS, R. B., JOCKUSCH, E., MCKNIGHT, C. Cognitive Processes in Learning Algebra. Journal of Children's Mathematical Behavior, 2, 1, 10-320, 1978.

DAVIS, R., B. Complex Mathematical Cognition. The development of mathematical thinking, p. 254–290, 1983.

DREYFUS, T. "Why Johnny can't Prove", Educational Studies in Mathematics 38, 85-109, 1999.

DUVAL, R. 'Quel Cognitif Retenir en Didactique des Mathématiques?' Recherches en Didactique des Mathématiques, 16, 3, 349–380, 1996.

DUVAL, R. 'Registres de Représentation Sémiotique et Fonctionnement Cognitif de la Pensée', Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, 5, 37–65, 1993.

ERASLAN, A. The Notion of Reducing Abstraction in Quadratic Functions. International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 39, 8, 1051- 1060, 2008.

ESCARLATE, A. Uma Investigação sobre a Aprendizagem de Integral. Rio de Janeiro: UFRJ/IM, 2008.

FERREIRA, A. B. H. Mini Aurélio Escolar: Século XXI. Rio de Janeiro: Nova Fronteira, 2002.

FOSTER, R. Counting on Success in Simple Arithmetic Tasks. Proceedings of the 18th annual conference of the international group for the psychology of mathematics education, Lisbon, Portugal, 360-367, 1994

GIRALDO, V. Descrições e conflitos computacionais: o caso da derivada. Tese (doutorado em ciências). Rio de janeiro: UFRJ, 2004.

GRAY, E., TALL, D. O. Relationships between embodied objects and symbolic procepts: an explanatory theory of success and failure in mathematics. Proceedings of the 25th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, 3, 65-72, 2001.

GRAY, E., TALL, D., O. Duality, Ambiguity and Flexibility: a Proceptual View of Simple Arithmetic. The Journal for Research in Mathematics Education, v. 26, n.2, p. 115-141, 1994.

HAZZAN, O. Reducing Abstraction Level When Learning Abstract Algebra Concepts. Education Studies Mathematics, 40, 71–90, 1999.

IEZZI, G., DOLCE, O., DEGENSZAJN, D., PÉRIGO, R., ALMEIDA, N. Matemática: Ciência e Aplicações. 2 ed. São Paulo: Atual, 2004. Volume 1.

IEZZI, G., DOLCE, O., DEGENSZAJN, D., PÉRIGO, R., ALMEIDA, N. Matemática: Ciência e Aplicações. 2 ed. São Paulo: Atual, 2004. Volume 2.

IEZZI, G., DOLCE, O., DEGENSZAJN, D., PÉRIGO, R., ALMEIDA, N. Matemática: Ciência e Aplicações. 2 ed. São Paulo: Atual, 2004. Volume 3.

LIMA, E. L. Coordenadas no Espaço. Coleção do Professor de Matemática. 4 ed. Rio de Janeiro: SBM, 2007.

LIMA, E. L., CARVALHO, P. C. P., WAGNER, E., MORGADO, A. C. A Matemática do Ensino Médio. Coleção do Professor de Matemática. 6 ed. Rio de Janeiro: SBM, 2009a. Vol. 1.

LIMA, E. L., CARVALHO, P. C. P., WAGNER, E., MORGADO, A. C. A Matemática do Ensino Médio. Coleção do Professor de Matemática. 6 ed. Rio de Janeiro: SBM, 2009b. Vol. 3.

LIMA, R. N. D. Equações Algébricas no Ensino Médio. Uma jornada por diferentes mundos da matemática. Doutorado em Educação Matemática. PUC: São Paulo, 2007.

MALISANI, E., SPAGNOLO, F. From Arithmetical Thought to Algebraic Thought: the Role of the "Variable". Educational Studies in Mathematics, 71, 19-41, 2009.

MATZ, M. Towards a Computational Theory of Algebraic Competence. Journal of Mathematical Behavior, 3, 1, 66-93, 1980.

MCGOWEN, M., DEMAROIS, P., TALL, D., O. The Function Machine as a Cognitive Root for the Function Concept. Proceedings of PME-NA, 1, 255-261, 2000.

POINCARÉ, H. Science et Méthode. Reedição de 1999. Paris: Kimé, 1908.

RIBEIRO, A., J. Equações e seus multisignificados no ensino da matemática: contribuições de um estudo epistemológico. São Paulo, 2007. 141 p. Tese (Doutorado em Educação Matemática). Pontífica Universidade Católica de São Paulo.

SCHWARZ, B., DREYFUS, T. 'New Actions Upon Old Objects: a New Ontological Perspective on Functions'. Educational Studies in Mathematics 29, 259–291, 1995.

SILVA, C., M. Um Estudo Qualitativo dos Efeitos de Descrições do Comportamento no Infinito de Funções Racionais. Rio de janeiro: UFRJ/ IM, 2009.

TABACH, M., FRIEDLANDER. A. Understanding Equivalence of Symbolic Expressions in a Spreadsheet-based Environment. International Journal Computer Mathematics Learning, 13, 27–46, 2008.

TALL, D. O. Biological Brain, Mathematical Mind & Computational Computers (how the computer can support mathematical thinking and learning). In Wei-Chi Yang, Sung-Chi Chu, Jen-Chung Chuan (Eds), Proceedings of the Fifth Asian Technology Conference in Mathematics, Chiang Mai, Thailand, 3–20, 2000.

TALL, D. O. Concept Image and Concept Definition. University of Warwick Published in Senior Secondary Mathematics Education, 37-41, 1988.

TALL, D. O. Concept Images, Computers, and Curriculum Change. For the Learning of Mathematics, 9, 3, 37-42, 1989.

TALL, D. O. VINNER, S. Concept Image and Concept Definition in Mathematics with Particular Reference to Limits and Continuity. Educational Studies in Mathematics, 12, 151-169, 1981.

THOMAS, M. O. J., TALL, D., O. The Long-Term Cognitive Development of Symbolic Algebra. International Congress of Mathematical Instruction (ICMI). Melbourne, v.2, 590-597, 2001.

THOMAS, M., TALL, D. O. Encouraging versatile thinking in algebra using the computer, Educational Studies in Mathematics, 22, 2, 125-147, 1991.

THURSTON, W., P. Mathematical Education. Notices of the American Mathematical Society, v. 37, n.7, 844–850, 1990.

VINNER S., HERSHKOWITZ R. Concept Images and Some Common Cognitive Paths in the Development of Some Simple Geometric Concepts. Proceedings of the Fourth International Conference of P.M.E., Berkeley, 177-184, 1980

VINNER, S. Concept definition, concept image and notion of function. The International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 14, 293-305, 1983.

VINNER, S. The Role of Definitions in the Teaching and Learning of Mathematics. Advanced Mathematical Thinking. 65-81, 1991.

Apêndice A – Pré-Teste / Pós-Teste / Respostas Esperadas

Nome: ____

1) Exprima com algumas palavras tudo o que você consegue lembrar quando ouve a palavra "Equações".

   Respostas Esperadas:

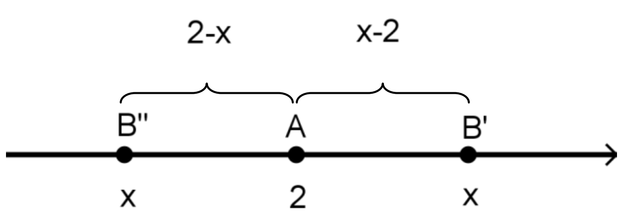
   - **Definição Formal:** É uma sentença matemática aberta, expressa por uma igualdade.
   - **Definição de Conceito consistente com a Definição Formal:** É uma igualdade entre expressões algébricas; é uma igualdade entre polinômios.
   - **Imagem de Conceito Evocada**: $3x-2=5$; $4x-2y^2=3$, gráfico de equações, reta, parábola, variáveis, incógnitas, universo das soluções, lugares geométricos, raízes, soluções, etc.

2) Explique o que você entende pela expressão $|x-2| = \begin{cases} x-2, \text{ se } x \geq 2 \\ -x+2, \text{ se } x < 2 \end{cases}$.

   Apresente um exemplo geométrico que se relacione com essa expressão.

   Resposta Esperada:

   - Suponha que A seja o ponto de abscissa 2 e B o ponto de abscissa x, o módulo de (x-2), é a distância entre os pontos A e B. Todavia, se B estiver a direita de A, ou seja, $x \geq 2$, para determinarmos a distância fazemos x-2 (número maior menos o número menor). Caso B esteja a esquerda de A, ou seja, $x<2$, a distância será determinada por 2-x ou –x+2.



3) Quantas são as possíveis soluções reais de uma equação de 1º grau com duas variáveis? Justifique.

( ) Uma única solução

( ) No máximo duas soluções

(x) Infinitas Soluções

( ) Nenhuma Solução

( ) Tem como solução todos os números reais

Justificativa:

Respostas Esperadas:

- Há uma infinidade de pares ordenados que satisfazem a equação.
- Os infinitos pontos da reta (gráfico) são soluções da equação.

4) Em qual das alternativas, encontra-se a representação gráfica da equação $x\text{-}a=0$, sendo $a \in \Re$? Justifique, com exemplos.

(x) Um ponto.

( ) Uma parábola.

(x) Uma reta paralela ao eixo OY.

(x) Um plano paralelo ao eixo YOZ.

( ) Todas as alternativas acima.

( ) Nenhuma das alternativas.

Justificativa:

Respostas Esperadas:

- Caso o universo da equação seja $\Re$, temos um ponto.
- Caso o universo da equação seja $\Re^2$, temos uma reta paralela ao eixo OY.
- Caso o universo da equação seja $\Re^3$, temos um plano paralelo ao eixo YOZ.

5) Suponha que um aluno seu do 1º ano do ensino médio, faça a seguinte pergunta: "Professor porque o gráfico de uma função afim $f(x)=ax+b$ é uma reta?". O que você responderia ao aluno de forma a comprovar esse fato?

Respostas Esperadas:

- Sejam A, B e C três pontos quaisquer, que satisfaçam a equação, o coeficiente angular entre os pontos A e B, é igual ao coeficiente angular entre os pontos A e C, ou seja, eles são colineares.
- Sejam A, B e C três pontos quaisquer, que satisfaçam a equação, a soma dos comprimentos dos segmentos AB e BC, é igual ao comprimento do segmento AC.

6) Gustavo encontra-se em uma posição que equidista a uma linha férrea retilínea e a um mastro em uma praça. Qual é o lugar geométrico dos possíveis pontos onde se encontra Gustavo? Justifique.

( ) Reta Mediatriz
(x) Parábola
( ) Circunferência
( ) Elipse
( ) Hipérbole

Justificativa:

Resposta Esperada:

- A reta diretriz é a linha férrea, o mastro é o foco e Gustavo é um ponto da parábola. A distância entre Gustavo e o foco é igual à sua distância à reta diretriz.

7) Quantas são as soluções possíveis para equação $3x^2-12y+3=33-3y^2$, como podemos representar essa(s) solução/soluções? Justifique.

Resposta Esperada:

- Infinitas soluções.
- Podemos representar como $S=\{(x,y)\in\Re^2/3x^2-12y+3=33-3y^2\}$;
- Podemos representar através de uma tabela com pares ordenados que satisfaçam a equação.
- Podemos representar através do LG das soluções da equação que é uma circunferência.
- Justificativa: há uma infinidade de pontos que satisfazem a equação.

8) Seja $m\in\Re$, no sistema $\begin{cases} x^2+y^2-2y=4 \\ x+y=m \end{cases}$, quantas são as possíveis soluções, justifique as suas colocações.

Resposta Esperada:

- O LG das soluções da primeira equação é uma circunferência, já o da segunda é uma reta. A variação do parâmetro *m* promoverá uma translação da reta plano, e os pontos de interseção entre a reta e a circunferência satisfarão ambas equações. Dessa forma, o sistema poderá ser:

✓ Impossível, caso a posição relativa entre a reta e a circunferência seja externa;

✓ Possível e Determinado, com uma única solução, caso a posição relativa entre os LG’s seja tangente;

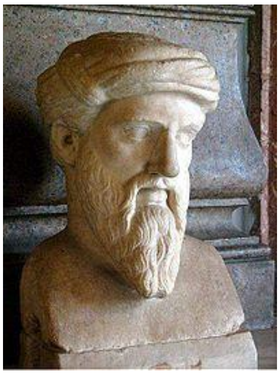
✓ Possível e Indeterminado, com duas soluções, caso a posição relativa entre os LG’s seja secante.

Apêndice B - Módulo 1: Coordenadas na Reta

Definição 1: Chamaremos de Reta Orientada uma reta no qual se escolheu um sentido de percurso chamado de positivo, o sentido inverso é chamado de negativo.

Definição 2: Um Eixo é uma reta orientada, no qual foi fixado um ponto *O*, denominado de origem.

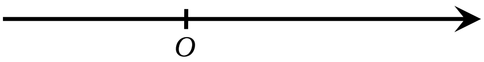
Podemos associar todos os números reais aos pontos do eixo, ou seja, da reta orientada. Este fato foi responsável por inúmeras controvérsias na Matemática, atravessando milênios desde os tempos de Pitágoras, matemático grego do século VI a.C., até os tempos de Dedekind, matemático alemão do século XIX, este último provou que todos os números reais poderiam ser colocados em relação biunívoca com a reta.


Pitágoras de Samos

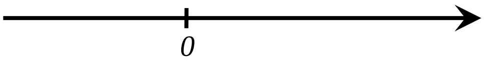

Richard Dedekind

Observe a construção:

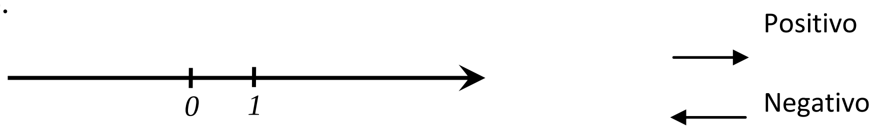
- Construímos um eixo (reta orientada), fixando a origem *O*;



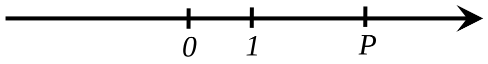
- Associamos a origem *O* ao número real *0* (zero).



- Escolhemos uma unidade de comprimento O*1* para o eixo e um sentido positivo de percurso.



- A cada ponto *P* do eixo, associamos a um número real *x* que representará a medida orientada do segmento *OP*.



- Entenderemos medida orientada como o comprimento de *OP* na unidade *O1*, onde *x* terá sinal positivo se o sentido de *O* para *P* coincidir com o sentido positivo de percurso, ou sinal negativo caso contrário. O número real *x* será chamado de coordenada do ponto *P*.

Faça os exercícios de 1 a 6, no final deste módulo.

A noção de distância é muito importante tanto na Matemática como no dia a dia. Para encontrarmos a distância entre dois pontos em um eixo, basta subtrairmos suas coordenadas e considerarmos o valor absoluto desta diferença. Usaremos a notação *d(A, B)* para simbolizarmos a distância entre os pontos *A* e *B*. Desta forma, se dois pontos A e B tiverem coordenadas -*3* e *5* respectivamente, a distância entre estes pontos é dada por $d(A,B) = |-3-5| = |-8| = 8$. Observe que para termos o valor absoluto usamos o símbolo$|\ |$que significa o módulo de um número, isto é, seu valor absoluto.

Faça os exercícios de 7 a 10, no final deste módulo.

Os exercícios 9 e 10 podem ser resolvidos por meio de equações. Este tipo de equações é chamado de equações modulares, pois envolvem algumas propriedades de valores absolutos. Observe a definição a seguir.

Definição 3: O módulo ou valor absoluto de um número real *x*, que denotaremos por $|\,x\,|$ é dado por $|x| = \begin{cases} x, & se\ \ x \geq 0 \quad\quad ou \\ -x, & se\ \ x < 0 \end{cases}$.

Faça os exercícios de 11 a 17, no final deste módulo.

Observe que o exercício 17 não se enquadra no universo das equações modulares. Desta forma como poderíamos formalizar algumas técnicas matemáticas para solucionar este tipo de problema? Como podemos resolver inequações da forma $|x-a|<b$? Experimente resolver a equação $|x-35|<12$.

Teorema 2: Dado um número real $a>0$, temos:

i. $|x|<a \Leftrightarrow -a<x<a$;

ii. $|x|\le a \Leftrightarrow -a\le x\le a$;

iii. $|x|>a \Leftrightarrow x<-a \;\; ou \;\; x>a$;

iv. $|x|\ge a \Leftrightarrow x\ge -a \;\; ou \;\; x\ge a$.

Prova (i):

Da definição 3, temos: $|x|<a \Leftrightarrow \begin{cases} x<a, \;\; se \;\; x\ge 0 \;\; ou \\ -x<a, \;\; se \;\; x<0 \end{cases}$ (**I**)

Na relação (I) temos dois conjuntos $A=\{x|\; 0\le x<a\}$ e $B=\{x|\; -a\le x<0\}$, a equivalência (I) pode ser traduzida pela seguinte equivalência $|x|<a \Leftrightarrow A\cup \mathrm{B}$, logo $|x|<a \Leftrightarrow -a<x<a$. ■

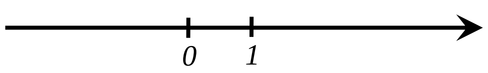
A demonstração dos itens ii, iii e iv, ficará a cargo do leitor.

Vamos resolver agora a inequação $|x-35|<12$, usando o teorema 2.

Refaça o exercício 17 usando o teorema 2 e faça o exercício de 18, no final deste módulo.

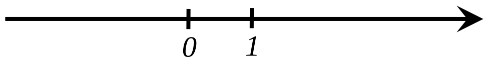
Atividades M-1

1) Marque sobre o eixo abaixo os pontos *A, B e C* de coordenadas *-3; 3/4 e 1,25*.

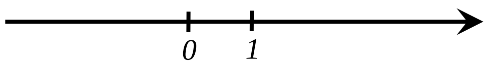


2) No eixo acima marque os simétricos dos pontos *A*, *B* e *C*.

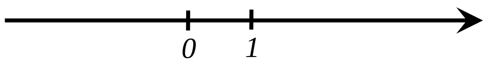
3) Os pontos $P=\sqrt{2}$, $Q=-3\sqrt{2}$ *e* $R=\sqrt{3}$, são irracionais, construa um eixo e marque a localização de suas coordenadas (dica: use uma calculadora). Seria possível marcar esses pontos sem o auxílio de uma calculadora.

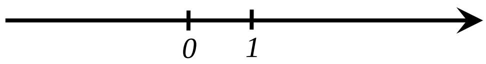


4) Represente as soluções das equações $x-3=0$, $3x-7=5x-4$, $2x^2-5x-3=0$ *e* $(x-\sqrt{2})(x+1)=0$ como pontos no eixo abaixo.



5) Represente as soluções das inequações $4(x-1)+3(2x-1)\leq 1$ *e* $7<2x-3\leq 10$ como pontos no eixo abaixo.

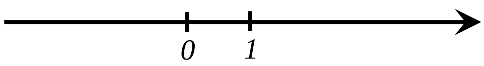


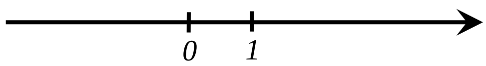


6) Dos eixos coordenados do exercício acima selecione um ponto fora da região sombreada, em cada caso, e substitua a coordenada deste ponto na respectiva equação. Quais conclusões você pode chegar a partir desta experiência?

7) Sejam os pontos e suas coordenadas $A=-2\sqrt{2}$, $B=-3/5$, $C=-1$, $D=0$, $E=\sqrt{2}$ e $F=3$, calcule $d(C, F)$, $d(A, E)$, $d(B, D)$ *e* $d(C, B)$.

8) Marque os pontos do exercício anterior no eixo abaixo e escreva o significado geométrico das expressões abaixo:





a) $\left|-1-(+3)\right|$ ____

b) $\left|-2\sqrt{2}-\left(+\sqrt{2}\right)\right|$ ____

c) $\left|-\frac{3}{5}\right|$ ____

d) $\left|-1-\left(-\frac{3}{5}\right)\right|$ ____

9) Sabendo que a distância do ponto P ao ponto *A=-2* é *5* unidades, determine as possíveis coordenadas dos ponto P. Faça um eixo para encontrar a resposta.

10) Sabendo que o ponto P equidista aos pontos *A=5* e *B=-4*, determine as possíveis coordenadas do ponto P. Faça um eixo para encontrar a resposta.

11) A partir da definição de módulo podemos resolver os exercícios 9 e 10, através de uma equação. Resolva esses exercícios dessa forma (use a definição).

12) A partir dos exercícios anteriores procure explicar o significado geométrico da expressão $|x-a| = \begin{cases} x-a, \text{ se } x \geq a \\ -x+a, \text{ se } x < a \end{cases}$

13) Resolvas as equações modulares:
   a) $|3x-4| = 7$
   b) $|x+5| = 2x-1$
   c) $|2x-1| = |x+3|$

Use a definição de módulo para solucionar os problemas abaixo de 14 a 16.

14) Sabe-se que certo restaurante encontra-se as margens da Rodovia Presidente Dutra. Sua distância ao Km 158 desta rodovia é 23Km, use uma equação modular para encontrar as possíveis localizações deste restaurante. Se pela definição de módulo x<158, qual é a localização exata deste restaurante?

15) O ano de nascimento do matemático Grego da antiguidade Arquimedes difere do ano de nascimento do filósofo grego Platão (428 aC) em 141 anos, já a diferença entre os anos de nascimento de Arquimedes e do matemático grego Ptolomeu (100

dC) é de 387 anos, dessa forma qual seria o ano de nascimento de Arquimedes? (monte um sistema de equações para resolver)

16) Suponha que neste momento a temperatura cidade de Roma difere equivalentemente das cidades do Rio de Janeiro e Moscou, onde os termômetros registram 26^{o}C e -17 ^{o}C respectivamente, monte uma equação modular e encontre a temperatura de Roma.

17) Sabe-se que a distância entre um carro e o Km 35 de uma auto-estrada é menor que 12km. Desta forma determine as possíveis posições deste carro.

18) Resolva as inequações modulares:

a) $|3x-4| > 7$
b) $|x+5| < 4$
c) $|3x+1| \leq 10$
d) $2 < |x+2| \leq 6$
e) $|x-6| \leq x$
f) $|2x-3| > x$

Apêndice C - Módulo 2: Sistema de Eixos Ortogonais (Coordenadas Cartesianas)

Uma forma muito útil de localizar pontos em um plano é utilizando um sistema de eixos. O primeiro a fazer isso com muita eficiência foi René Descartes, matemático francês do século XVI. A contribuição de Descartes que chamamos hoje de Geometria Analítica contribuiu efetivamente para evolução do pensamento matemático do século XVI em diante. Com sua teoria, as figuras geométricas puderam ser tratadas a partir da relação entre suas coordenadas em um sistema de eixos conveniente.

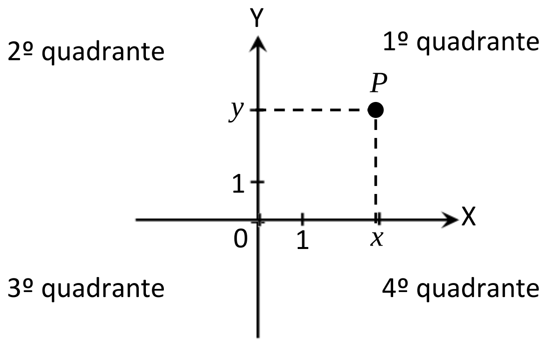
Definição 4: Duas retas no plano são ortogonais quando se interceptam formando um ângulo reto.

Um sistema de eixos ortogonais é construído da seguinte forma:

- Construímos dois eixos orientados ortogonais (perpendiculares) de interseção no ponto *O* (origem), denominamos os eixos de *OX* e *OY*.
- Escolhemos uma unidade de medida conveniente para o eixo *OX* e outra (ou a mesma) para o eixo *OY*. A partir destas unidades podemos associar todos os números reais ao eixo *OX* e o mesmo para o eixo *OY*, essa construção é análoga à obtida no módulo anterior.

É comum mais não obrigatório, no eixo *OX*, considerarmos os pontos a direita da origem positivos e a esquerda os negativos, já no eixo *OY*, acima da origem os positivos e abaixo os negativos.

- Observe na figura abaixo o sistema de coordenadas ortogonais, essa construção dividiu o plano em quatro regiões denominadas quadrantes.



Podemos localizar cada ponto *P* do plano por meio deste sistema procedendo da seguinte forma: traçam-se paralelas aos eixos *OX* e *OY* passando por *P*, o número *x* é a coordenada de *P* no eixo *OX* e o número *y* é a coordenada de *P* no eixo *OY*.

- Desta forma diremos que as coordenadas do ponto *P* são *(x, y)*, como temos duas coordenadas, chamaremos esses números de par ordenado. A coordenada *x* será chamada de abscissa e coordenada *y* de ordenada. É importante destacar que, na maioria dos casos, o par ordenado $(x, y) \neq (y, x)$.

Uma coordenada obtida a partir de um sistema de eixos ortogonais, como destacado acima é denominada Coordenada Cartesiana (em homenagem a Descartes) e o sistema de Plano Cartesiano.

É muito comum nos dias atuais utilizarmos esse tipo de sistema para: construção de gráficos com relação entre duas grandezas, coordenadas geográficas, sistemas de GPS (Sistema de Posicionamento Global), em máquinas de comandos numéricos como o CNC (Comando Numérico Computadorizado), radares, etc.

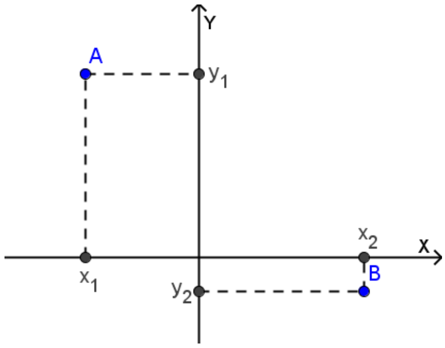
Já sabemos que a noção de distância é muito importante, inclusive aprendemos a calcular a distância entre dois pontos sobre uma reta orientada. Agora como podemos generalizar o cálculo da distância entre dois pontos no Plano Cartesiano?

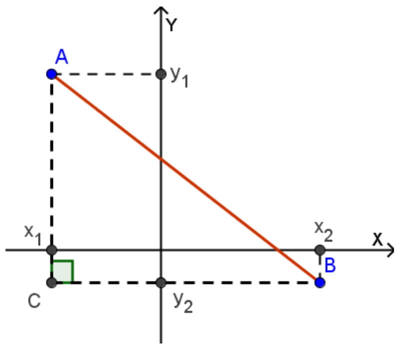
A colaboração de Pitágoras com seu ilustre teorema nos ajudará a resolver esse problema.

Faça os exercícios de 1 e 2 ao final deste módulo.

Teorema 3: A distância entre dois pontos $A(x_1, y_1)$ e $B(x_2, y_2)$ distintos, com $x_1 \neq x_2$ ou $y_1 \neq y_2$, num sistema de eixos ortogonais é dado por $d(A,B) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$.

Prova: Observe os pontos $A(x_1, y_1)$ e $B(x_2, y_2)$, para encontrarmos $d(A, B)$, ou seja, a distância de A a B,





Prolongamos a paralela a OX por B e a paralela a OY por A, encontramos o ponto C na interseção de ambas. Desta forma temos o triângulo retângulo ABC, de coordenadas $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ e $C(x_1, y_2)$. Os catetos AC e BC têm medidas (x_2-x_1) e (y_1-y_2) respectivamente. Considerando $x_2>x_1$ e $y_1>y_2$. Logo a medida da hipotenusa AB pelo Teorema de Pitágoras é dada por: $[d(A, B)]^2=(x_2-x_1)^2+(y_1-y_2)^2$, logo

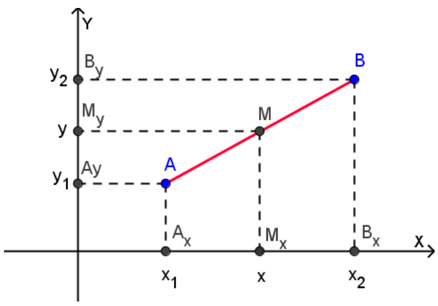
$$d(A,B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_1 - y_2)^2} = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \qquad \blacksquare$$

Podemos generalizar essa fórmula, nos casos em que $x_2=x_1$ ou $y_2=y_1$, usando a noção de distância da definição 3. Dessa forma a expressão acima será utilizada para encontrar a distância entre dois pontos no Plano Cartesiano.

Faça os exercícios de 3 a 6, no final deste módulo.

Teorema 4: As coordenadas do ponto médio de um segmento de extremos $A(x_1, y_1)$ e $B(x_2, y_2)$ distintos, num sistema de eixos ortogonais

são dados por $M = \left(\dfrac{x_1 + x_2}{2}, \dfrac{y_1 + y_2}{2}\right)$.



Prova: Aplicando o Teorema de Tales temos:

$$\frac{AM}{MB}=\frac{A_xM_x}{M_xB_x}=\frac{x-x_1}{x_2-x}=1\Leftrightarrow$$

$$x-x_1=x_2-x\Leftrightarrow 2x=x_1+x_2\Leftrightarrow x=\frac{x_1+x_2}{2} \qquad \textbf{(I)}$$

$$\frac{AM}{MB}=\frac{A_yM_y}{M_yB_y}=\frac{y-y_1}{y_2-y}=1\Leftrightarrow y-y_1=y_2-y\Leftrightarrow 2y=y_1+y_2\Leftrightarrow y=\frac{y_1+y_2}{2} \qquad \textbf{(II)}$$

Logo, os segundos membros das equações **(I)** e **(II)** são respectivamente a abscissa e a ordenada do ponto médio *M* do segmento *AB*. Ou melhor,

$$M=\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2}\right) \qquad \blacksquare$$

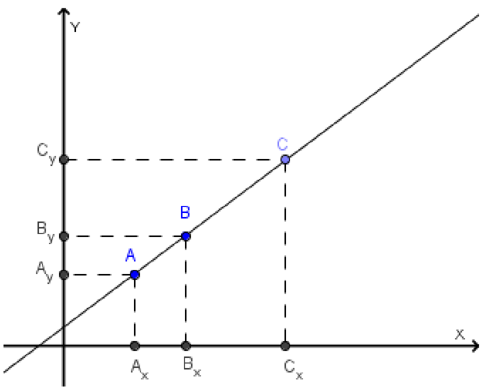
Faça os exercícios de 7 e 8, no final do módulo.

Definição 5: O coeficiente angular entre dois pontos $A(x_1, y_1)$ e $B(x_2, y_2)$, com $x_1 \neq x_2$ é o número *m* dado por: $m=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$.

Faça o exercício 9, no final deste módulo.

Teorema 5: Três pontos distintos $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ e $C(x_3, y_3)$, com $x_1 \neq x_2 \neq x_3$ são colineares, se e somente se dois a dois possuem o mesmo coeficiente angular.

Prova: Sejam os pontos colineares $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ e $C(x_3, y_3)$



Pelo Teorema de Tales temos:

$$\frac{AB}{AC}=\frac{A_yB_y}{A_yC_y}=\frac{y_2-y_1}{y_3-y_1} \quad \text{(I)}$$

$$\frac{AB}{AC}=\frac{A_xB_x}{A_xC_x}=\frac{x_2-x_1}{x_3-x_1} \quad \text{(II)}$$

Igualando as equações (I) e (II) temos :

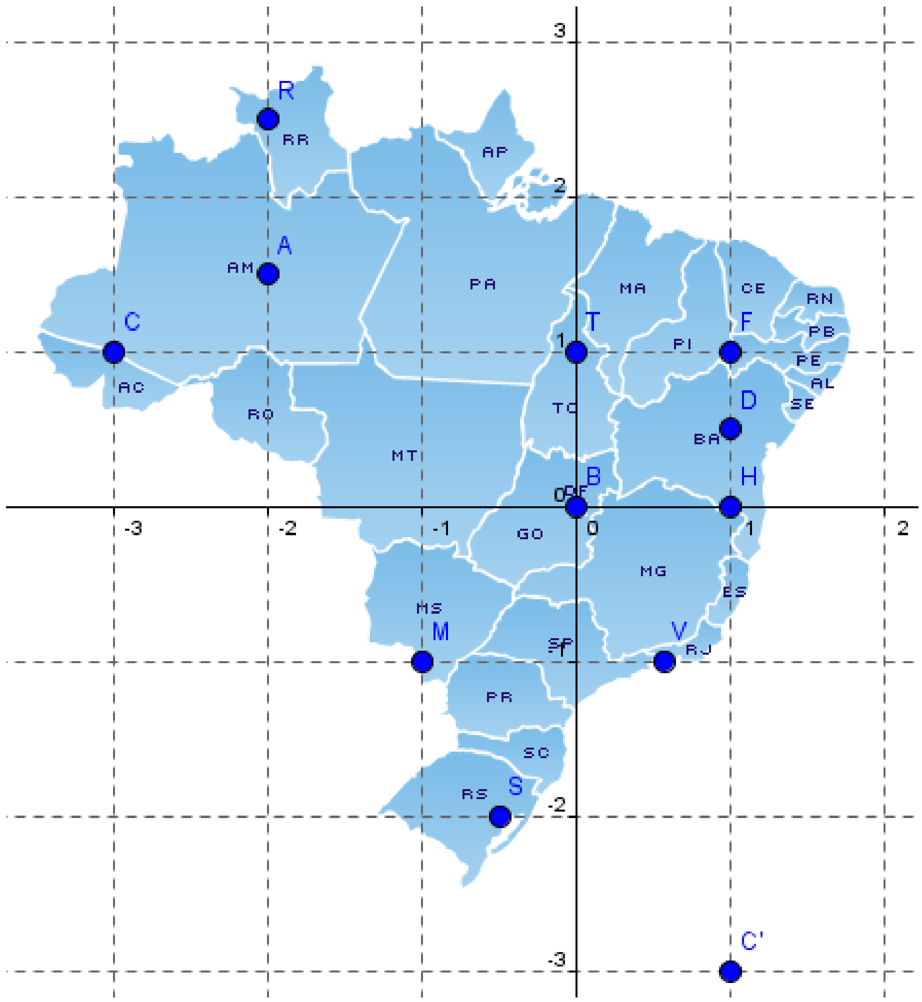
$$\frac{y_2 - y_1}{y_3 - y_1} = \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1} \Leftrightarrow m_{AB} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_3 - y_1}{x_3 - x_1} = m_{AC}$$

A recíproca do teorema também é verdadeira, para isso basta fazer o caminho inverso da prova. ■

Faça os exercícios de 10 a 14, no final deste módulo.

Atividades M-2

1) Observe o gráfico abaixo, este foi colocado sob um plano cartesiano, a origem do sistema foi colocada sobre Brasília, desta forma responda as questões abaixo:



a) Quais as coordenadas dos pontos *C* e *C'*? Essas coordenadas são iguais? Justifique.

b) O ponto *V* está sobre a cidade de Volta Redonda, quais são as suas coordenadas?

c) O Ponto *F* está na divisa de quais estados, quais são as suas coordenadas?

d) O ponto que está no estado de Roraima tem coordenadas?

e) O ponto que tem abscissa -1 está sobre qual estado?

f) O ponto que tem ordenada -2 está sobre qual estado?

g) Qual seria a distância entre os pontos B e F? E entre os pontos M e F?

2) No Módulo anterior utilizamos os conceitos de módulo para calcular a distância entre dois pontos, essa noção é suficiente para calcular de distância entre dois pontos no Módulo atual? Justifique.

Use o mapa do exercício 1 para resolver os exercícios 3 a 6

3) Calcule as seguintes distâncias $d(F,B)$, $d(A,B)$, $d(M,S)$ e $d(T,B)$.

4) Considerando que a unidade dos eixos *OX* e *OY* é 1cm e que a escala do mapa é de 1:10.000.000, qual é a distância aproximada em quilômetros de Volta Redonda ao Distrito Federal?

5) A distância de um ponto $P(-1, m)$ e o ponto *C* que está no Acre é $\sqrt{5}$ unidades, determine a ordenada m, marque sobre o mapa o ponto *P* e indique em qual estado está este ponto sabendo que o mesmo está no 2º quadrante.

6) O ponto $Z(x, 2)$, equidista aos pontos *M* e *F*, que estão respectivamente em Mato Grosso do Sul e divisa de Piauí com Pernambuco, determine a abscissa do ponto *Z* e o estado em que se encontra.

Use o mapa do exercício 1 para resolver os exercícios 7 e 8.

7) Em qual estado está o ponto médio entre os pontos que estão nos estados do Amazonas e Rio Grande do Sul?

8) O ponto que está em Tocantins é médio entre os pontos *H* e um ponto que está no Estado do Pará, quais são as coordenadas desse ponto no estado do Pará?

9) Determine o coeficiente angular entre os pontos:

a) $A(1, 2)$ e $B(-3, -4)$

b) $C(1, 2)$ e $D(-3, 4)$

c) $E(0, 0)$ e $F(1, \sqrt{3})$

10) Verifique se os pontos $A(0, 2)$, $B(-3, 1)$ e $C(6, 4)$ são colineares.

11) Determine x de maneira que os pontos $A(3, 5)$, $B(1, 3)$ e $C(x, 1)$ estejam alinhados.

12) Sabendo que o ponto $P(a, b)$, $A(0, 3)$ e $B(1, 0)$ são colineares e P, $C(1, 2)$ e $D(0, 1)$ também estão alinhados determine as coordenadas do ponto P.

Use o mapa do exercício 1 para resolver os exercícios 13 e 14

13) Verifique se os pontos que estão nos estados do Mato Grosso do Sul, Goiás e divisa entre Pernambuco e Piauí estão alinhados?

14) O ponto de $J(-1/2, y)$ é colinear com os pontos que estão nos estados do Acre e Amazonas, determine a ordenada deste ponto e identifique em qual estado está o mesmo?

Apêndice D - Módulo 3: Lugares Geométricos

Definição 6: Um lugar geométrico é conjunto de pontos que satisfazem a uma ou mais condições.

Faça os exercícios de 1 a 13, no final deste módulo.

Atividades M-3

1) Vamos construir o lugar geométrico dos pontos que distam $\sqrt{2}$ unidades do ponto *O(0, 0)* do planos cartesiano. Que lugar geométrico é esse?

2) Construa o lugar geométrico dos pontos que distam 1 unidade do ponto *A(-2, 1)* do planos cartesiano. Que lugar geométrico é esse?

3) Qual é o lugar geométrico encontrado nos exercícios 1 e 2? Use a distância de ***r*** unidades e o ponto **O**, para definir esse Lugar Geométrico.

4) Qual é o lugar geométrico dos pontos que satisfazem os exercícios 1 e 2 (simultaneamente)? Que conclusão você pode chegar a partir deste exercício?

5) Qual é o lugar geométricos dos pontos colineares aos pontos *A(-1, 2)* e *B(3, -2)*? Que lugar geométrico é esse?

6) Qual é o lugar geométrico dos pontos colineares aos pontos *C(-4, 3)* e *D(5, 0)*? Que lugar geométrico é esse?

7) Qual é o lugar geométrico encontrado dos exercícios 5 e 6? Defina com suas palavras esse Lugar Geométrico.

8) Qual é o lugar geométrico dos pontos que satisfazem os exercícios 5 e 6 (simultaneamente)? Que conclusão você pode chegar a partir deste exercício?

9) Qual é o lugar geométrico dos pontos que satisfazem os exercícios 1 e 5? Que conclusão você pode chegar a partir deste exercício?

10) Qual é o lugar geométrico dos pontos que equidistam aos pontos $A(-3, 2)$ e $B(-1, -4)$? Defina, com suas palavras, esse Lugar Geométrico.

11) Qual é o lugar geométrico dos pontos P, tais que dados os pontos $F(1,2)$ uma reta r paralela ao eixo OX, a distância de P a F seja igual a distância de P a r? Defina esse Lugar Geométrico.

12) Qual é o lugar geométrico dos pontos P, tais que dados os pontos $F_1(-4,0)$ e $F_2(4, 0)$, a soma das distâncias $d(P,F_1)$ e $d(P,F_2)$ é 10 unidades? Defina esse Lugar Geométrico.

13) Use a linguagem de conjuntos para escrever as definições de reta, circunferência, reta mediatriz, parábola e elipse.

Algumas **Definições**:

Reta: É o lugar geométrico dos pontos colineares a dois pontos dados.

Circunferência: É o lugar geométrico dos pontos que distam *r* unidades de um ponto fixo, com $r \in \Re_+$. Chamamos raio a constante *r* e centro o ponto fixo.

Reta Mediatriz: É o lugar geométrico dos pontos que equidistam a dois pontos fixos.

Parábola: É o lugar geométrico dos pontos que equidistam a um ponto fixo *F* (denominado foco) e a uma reta dada *d* (denominada diretriz), onde $F \notin d$.

Elipse: É o lugar geométrico dos pontos, tal que a soma das distâncias a dois pontos fixos (denominados focos) é igual a uma constante *k*, com $k \in \Re_+$.

Além desses lugares geométricos existem infinitos lugares geométricos diferentes, você pode criar um de acordo com sua imaginação.

Soluções de alguns exercícios.

1) Vamos construir as soluções de alguns exercícios usando o software GeoGebra.

   Exercício 1)

   - No campo entrada digite o ponto O, O=(0,0) e tecle enter;
   - Selecione o comando **Segmento com dado comprimento a partir de um ponto**;
   - Clique no ponto O e na caixa de diálogo digite sqrt(2), “esse comando calcula a raiz quadrada de 2”, escolha Aplicar.
   - Um ponto A, aparecerá no plano, e o segmento AO terá medida $\sqrt{2}$.
   - Escolha o comando **Círculo definido pelo centro e um de seus pontos**, clique no centro do círculo O e no ponto A, assim o segmento OA será o raio do círculo;
   - Concluímos o exercício, pois todos os pontos sobre o círculo equidistam $\sqrt{2}$ do centro O.

Exercício 4)

- Construa as duas circunferências conforme enunciado acima;
- Selecione o comando **Interseção de dois objetos**;
- Selecione uma das circunferências e em seguida a outra;
- Os pontos de interseção entre as circunferência será a solução do exercício.

Exercício 5)

- Marque os pontos A e B, conforme descrito no exercício 1;
- Selecione o comando **Reta definida por dois pontos**;
- Clique nos pontos A e B;
- Todos os pontos sobre da reta AB são colineares a A e B.

Exercício 10)

- Marque os pontos A e B;
- Tire uma reta ***r*** passando por AB;
- Faça uma circunferência de centro em A e raio AC, com C$\notin$**r**;
- Escolha o comando **Compasso** e clique no ponto A, em seguida no ponto C e finalize clicando no ponto B. Desta forma foi criado uma circunferência de raio em B e raio AC;
- Escolha o comando I**nterseção de dois objetos**, clique nas circunferências e aparecerá os pontos D e E;
- Escolha o comando **Lugar Geométrico,** selecione o ponto D e em seguida o ponto C. Escolha novamente o comando **Lugar Geométrico,** selecione o ponto E e em seguida o ponto C. Este resultado também pode ser

encontrado, digitando na entrada do Geo-Gebra LugarGeométrico[D,C] e teclando enter e, em seguida, digite na entrada LugarGeométrico[E,C];

- A reta que aparecerá será a solução do problema, pois seus pontos equidistam de A e B.
- Outra maneira de construir esse lugar geométrico é traçando uma circunferência de centro em A e raio AB, em seguida outra circunferência de centro em B e raio BA. A reta que passa pela interseção das duas circunferências é o LG.
- Há um comando mediatriz que realiza toda essa tarefa clicando apenas no pontos A e B, experimente.

Exercício 11)

- Marque os pontos F;
- Escolha o comando **Reta Paralela**, clique no eixo OX e numa região qualquer do plano, com exceção ao ponto F, aparecerá uma reta r;
- Marque um ponto B sobre a reta r;
- Tire a mediatriz de BF e uma perpendicular à r passando por B;
- Marque um ponto de interseção C entre a mediatriz e a perpendicular “movimente o ponto B e observe o ponto C”;
- Em entrada digite, LugarGeométrico[C,B] e tecle enter;
- A parábola é a solução do exercício, pois todos seus pontos equidistam de F e r.

Exercício 10)

- Marque os pontos F_1 e F_2 [dica o ponto F_1 digite, F_1=(-4, 0)];

- Construa uma circunferência π de centro F_1 e raio 10 unidades;
- Tire os segmentos F_1A e F_2A com $A \in \pi$;
- Tire a mediatriz do segmento F_2A;
- Tire a interseção B, entre F_1A e a mediatriz;
- No campo entrada digite LugarGeométrico[B,A];
- Temos neste caso uma elipse como o lugar geométrico pedido.

Apêndice E - Módulo 4: Equações Indeterminadas

É comum chamarmos, em Matemática de equações indeterminadas as Equações Diofantinas, nome dado em homenagem ao matemático grego da antiguidade Diofanto.

O "*Bijaganita*" que é um livro sobre Álgebra, escrito pelo matemático hindu Bhaskara Acharya (figura ao lado), que viveu no século XII; neste livro Bhaskara traz muitas novidades sobre a solução de equações indeterminadas.

O hábito de resolver equações fez surgir inúmeras teorias na Matemática, muitos créditos devem ser oferecidos aos matemáticos Hindus e Árabes, que contribuíram efetivamente para esse desenvolvimento.

Diferente das equações Diofantinas, neste curso, chamaremos de equações indeterminadas toda e qualquer equação com infinitas soluções. Daremos preferência às equações com duas variáveis, assim iremos de encontro ao módulo anterior.

Exemplo 1:

- Um exemplo de equação indeterminada seria $x+y=6$. Quantas soluções reais você poderia listar para está equação?

- Como poderíamos representar todas as soluções para a equação $x+y=6$?

Uma forma de representar as soluções desta equação seria utilizando uma tabela, apresentando em duas colunas, uma com os valores do domínio (conjunto de valores de x) e outra com os valores do contradomínio (conjunto de valores de y), observe:

Domínio	Contradomínio
-2	8
-1	7
0	6
1	5
2	4
3	3
4	2

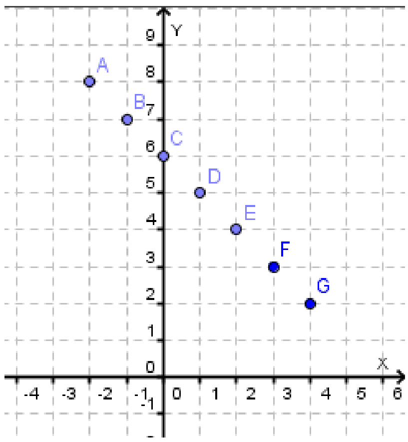
É muito comum escrevermos a equação $x+y=6$, por meio de uma equação equivalente $y=6-x$, desta forma podemos colocar valores arbitrários para x, e encontrarmos respectivos valores para y.

Sendo assim temos como soluções para a equação $x+y=6$ os pares ordenados

$$S=\{(-2,8),(-1,7),(0,6),(1,5),(2,4),\ldots\}$$

Podemos observar que apesar de interessante, essa forma de explicitar as soluções da equação não é tão eficiente, pois seria impossível descrever assim todas as soluções, por exemplo, as soluções $(1/2, 11/2)$, $(\sqrt{2}, 6-\sqrt{2})$, $(\pi, 6-\pi)$ ficaram de fora, como inúmeras outras, ou melhor, infinitas soluções ficaram de fora.

Podemos representar as soluções usando a notação de conjuntos $S=\{(x,y)|x+y=6\}$ “o conjunto solução S é igual ao conjunto dos pares ordenados (x, y) tais que a soma da abscissa com a ordenada seja 6”. Apesar de interessante e geral, essa forma de apresentar as soluções deixa implícito quais são elas.



Outra forma de apresentar as soluções seria marcar num Plano Cartesiano os pontos determinados por cada par ordenado das soluções, observe a figura ao lado:

Dessa forma, teríamos o que chamamos de gráfico para representar as soluções.

Vamos a outro exemplo de equação para compreendermos melhor o que foi falado até agora.

Exemplo 2:

Seja a equação $x^2+y^2-4=0$, vamos descrever como no exemplo “suas soluções reais”.

A solução geral poderia ser dado por $S=\{(x,y)\in \Re^2: x^2+y^2-4=0\}$

Uma solução mais explicita, porém menos geral, seria descrita escrevendo uma equação equivalente a $x^2+y^2-4=0$, atribuindo valores a x e encontrando seus respectivos correspondentes em y. Uma equação equivalente seria $y=\pm\sqrt{4-x^2}$.

Domínio	Contradomínio
-3	∄
-2	0
-1	-√3
-1	√3
0	-2
0	2
1	-√3
1	√3
2	0
3	∄

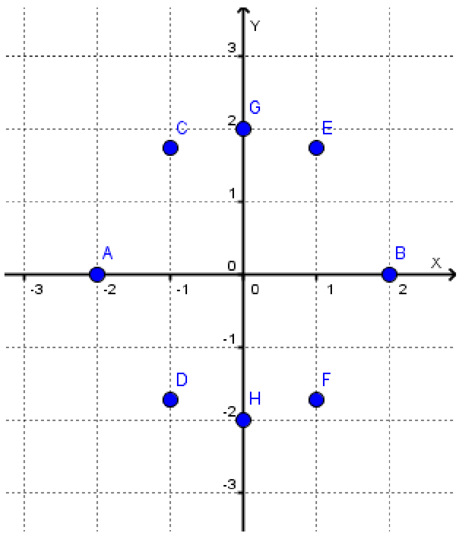
Logo S={(-2, 0), (-1, -√3) , (-1, √3) , (0, -2) , (0, 2) , (1, -√3) , (1, -√3) , (2, 0), ...}. Porém ainda temos soluções de fora como (√2, √2).

Observe, neste caso, que nem todos os números reais podem ser utilizados para o domínio da equação $x^2+y^2-4=0$, como é o caso do -3 e 3. Dessa forma, podemos determinar o domínio da equação da seguinte forma: Como em $y=\pm\sqrt{4-x^2}$, não podemos ter valores negativos no radicando fazemos:

$$4-x^2 \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad -x^2 \geq -4 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 \leq 4$$

Daqui podemos observar que para que $x^2 \leq 4$, devemos ter $-2 \leq x \leq 2$, logo o domínio da equação dada é $D=\{x \in \Re : -2<x< 2\}$. Em breve veremos métodos mais eficientes para resolver a inequação $4-x^2 \geq 0$.

E por último poderíamos apresentar as soluções em gráfico:



Faça os exercícios de 1 a 7, no final deste módulo.

Podemos usar o GeoGebra, para construir um ponto genérico *P* que descreva no plano cartesiano o comportamento das soluções de cada uma das equações. Vamos analisar um exemplo.

Exemplo: Vamos construir no plano cartesiano as soluções da equação $x+y=6$.

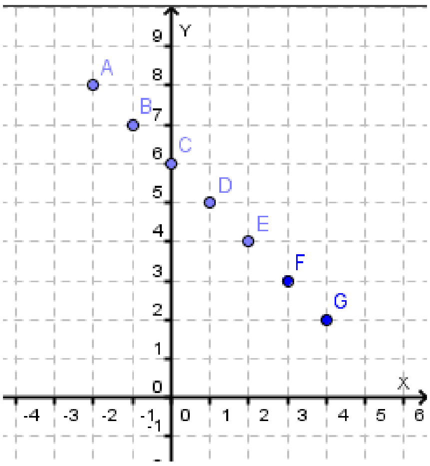
- Usaremos a equivalência das equações para escrever a equação dada em termos de *x*, assim temos $y=6-x$;
- Um ponto genérico para essa equação seria $P(x, 6-x)$, pois para cada valor numérico para a abscissa *x*, teremos uma ordenada $6-x$;
- No campo entrada do GeoGebra digitamos "$p=0$" e teclamos enter;
- Na janela álgebra clicamos no objeto *p* com o botão direito do mouse e escolhemos exibir objeto;
- No campo entrada digitamos o ponto genérico $P=(p, 6-p)$, por motivos de programação do GeoGebra, temos que escrever o ponto genérico sem usar as letra *x* e *y*;
- Podemos varia o objeto *p* agora e observar o comportamento do ponto *P*, solução da equação dada.

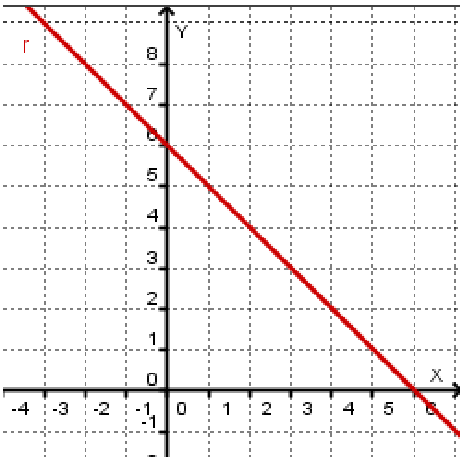
Faça o exercício 8, no final deste módulo.

Podemos observar que, apesar de apresentar algumas soluções, tanto o método da tabela com valores do domínio e do contradomínio quanto o gráfico com alguns pontos, não são tão eficazes, pois apresentam um número limitado de soluções. Como poderíamos ter uma representação das soluções que fosse mais geral?

Observando os gráficos dos exercícios de 1 a 5, verificamos que há um certo padrão na disposição dos pontos de cada uma das equações.

Voltemos à equação x+y=6, analisando seu gráfico poderíamos concluir que as soluções





são colineares e que outras soluções estariam sobre a reta que contém esses pontos.

Dessa forma, poderíamos representar o conjunto solução desta equação pela reta que contém os pontos de *A* a *G*, do gráfico acima, como podemos ver no gráfico ao lado. Seria essa informação verdadeira? Como poderíamos generalizar essa situação?

Teorema 6: Toda equação da forma $ax+by+c=0$, com $a, b, c \in \Re$ e $b \neq 0$, tem como lugar geométrico um reta.

Prova: (para mostrar esse fato devemos escolher três soluções dessa equação, e demonstrar que estas formam três pontos colineares no Plano Cartesiano)

Podemos escrever a equação $ax+by+c=0$, através de sua equivalente $y=-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}$, tomando $m=-\frac{a}{b}$ e $q=-\frac{c}{b}$, temos $y=mx+q$.

Sejam os pontos $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ e $C(x_3, y_3)$, soluções da equação, logo podemos escrevê-los como $A(x_1, mx_1+q)$, $B(x_2, mx_2+q)$ e $C(x_3, mx_3+q)$.

Para que $ax+by+c=0$, seja uma reta os pontos A, B, C devem estar alinhados, logo o coeficiente angular de AB e AC, deve ser o mesmo, assim

$$m_{AB}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{mx_2+q-mx_1-q}{x_2-x_1}=\frac{m(x_2-x_1)}{x_2-x_1}=m=\frac{m(x_3-x_1)}{x_3-x_1}=\frac{mx_3+q-mx_1-q}{x_3-x_1}=\frac{y_3-y_1}{x_3-x_1}=m_{AC}$$

Dessa forma *A*, *B*, *C*, são colineares, logo concluímos que o lugar geométricos dos pontos que satisfazem a equação $ax+by+c=0$, com $a, b, c \in \Re$ e $b \neq 0$, é uma reta. ■

Faça os exercícios de 9 a 11, no final deste módulo.

Do Módulo 3, realizamos alguns exercícios com régua e compasso. Vejamos como exemplo o exercício 5, daquele módulo, "Qual é o lugar geométricos dos pontos colineares aos pontos $A(-1, 2)$ e $B(3, -2)$?", já sabemos que esse lugar geométrico é uma reta, será que podemos encontrar uma equação em que suas soluções satisfaçam esse lugar geométrico? Vamos ao trabalho.

1º) Estabeleça um ponto genérico $P(x, y)$; (esse ponto pode estar em qualquer lugar do plano)

2º) Calcule o coeficiente angular entre *A* e *B*;

3º) Use a propriedade que relaciona colinearidade com o coeficiente angular, para montar uma equação (basta calcular o coeficiente angular entre os pontos *P* e *A*, e em seguida igualar ao coeficiente angular de *A* e *B*).

4º) Simplifique ao máximo essa equação e experimente digitá-la no GeoGebra.

O gráfico da equação encontrada realmente passa pelos pontos *A* e *B*? Qual é o grau dessa equação? Será que toda reta é o lugar geométrico das soluções de equações tipo essa?

Observe que no teorema anterior mostramos que toda equação de 1º grau da forma $ax+by+c=0$ é uma reta, será a recíproca verdadeira? Ou seja, será que toda reta é o lugar geométrico do conjunto solução de uma equação de 1º grau?

Para responder todas essas questões demonstraremos o teorema abaixo:

Teorema 7: Toda Reta não paralela ao eixo *OX* é o lugar geométrico da equação de primeiro grau da forma $ax+by+c=0$, com $b\neq 0$ e a,b,c $\in \Re$.

Prova: Temos que uma reta é o lugar geométrico dos pontos colineares a dois pontos dado.

Sejam $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ e $P(x, y)$ três pontos pertencentes a reta *r*, em que *P* é um ponto genérico e *A* e *B*, são pontos distintos. Seja m o coeficiente angular entre *A* e *B*.

Por definição de coeficiente angular temos

$$\frac{y-y_1}{x-x_1}=m \;\Rightarrow\; y=m(x-x_1)+y_1 \;\Rightarrow\; y=mx-mx_1+y_1 \;\Rightarrow\; -mx+y+mx_1-y_1=0 \quad \text{(I)}$$

Tomando $m=-\frac{a}{b}$, $mx_1-y_1=\frac{c}{b}$ e substituindo na equação acima, temos

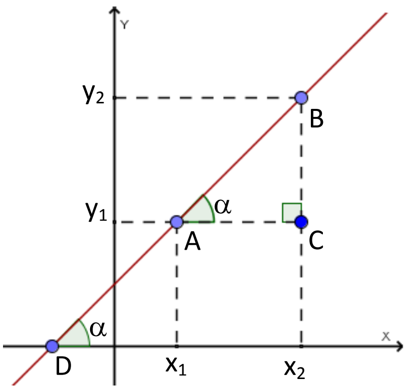
$$-mx+y+mx_1-y_1=0 \Rightarrow \frac{a}{b}x+y+\frac{c}{b}=0 \Rightarrow ax+by+c=0$$

Como queríamos demonstrar. ■

Faça os exercícios de 12 a 14, no final deste módulo.

Com os novos conhecimentos que adquirimos sobre as retas podemos generalizar mais a definição de coeficiente angular.

Definição 5 (generalizada): Dados uma reta *r* de inclinação α (no sentido anti-horário) em relação ao eixo *OX*. O coeficiente angular ou declividade de uma reta *r* é o número real $m=tg\,\alpha$.



Podemos observar que essa definição é equivalente a anterior, pois dados $A(x_1,y_1)$ e $B(x_2,y_2)$ o

$$tg\,\alpha=\frac{cateto\ oposto}{cateto\ adjacente}=\frac{d(B,C)}{d(A,C)}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$

Faça os exercícios de 15 a 18, no final deste módulo.

Quando escrevemos uma equação de 1º grau $ax+by+c=0$, com $b\neq 0$, usando a equação equivalente $y=mx+q$, com $m=-\frac{a}{b}$ e $q=-\frac{c}{b}$, chamamos a segunda equação de forma reduzida da reta.

Denotamos por coeficiente linear o valor de q, podemos observar, a partir do exercício acima, que o coeficiente linear é a interseção da reta com o eixo OY. Com efeito, a interseção da reta com o eixo OY, tem coordenada $I(0, y)$, fazendo $x=0$ na equação $y=mx+q \Leftrightarrow y=0x+q \Leftrightarrow y=q$, logo a interseção se dá em $I(0, q)$.

Como já sabemos e definimos, o valor de m na forma reduzida da equação da reta é chamado de coeficiente angular e é a tangente trigonométrica da inclinação α que a reta faz com o eixo OX. Assim quando variamos tal valor observamos uma mudança na declividade da reta.

Temos quatro casos:

- Se $\alpha=0$ (Inclinação nula – reta paralela ao eixo OX), temos $m=tg\ \alpha=tg\ 0=0$, na equação temos $y=mx+q \Rightarrow y=0x+q \Rightarrow y=q$.

- Se $0^o<\alpha<90^o$, temos $m=tg\ \alpha>0$, logo em equações da forma $y=mx+q$, quando $m>0$, temos uma inclinação de 0^o *a* 90^o.

- Se $90^o<\alpha<180^o$, temos $m=tg\ \alpha<0$, logo em equações da forma $y=mx+q$, quando $m<0$, temos uma inclinação de 90^o *a* 180^o.

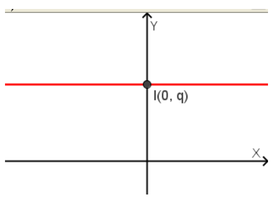
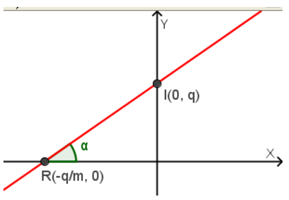
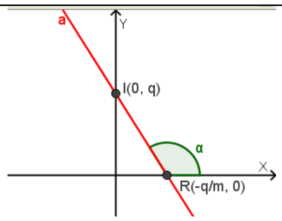
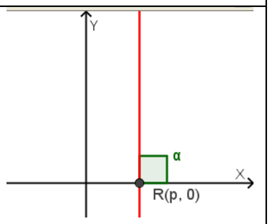
- Se $\alpha=90^o$ (Caso especial - Reta paralela ao eixo OY), temos $m=tg\alpha=tg90^o=\infty$, neste caso temos equações da forma $x=p$, com $p\in\Re$.

Definição 6: Chamaremos de raiz da equação o valor da abscissa quando a ordenada for zero, ou seja, o valor de x quando $y=0$.

A raiz da equação é o local onde a reta intercepta o eixo OX. Temos que a raiz da equação se dá no ponto $R\left(-\frac{q}{m}, 0\right)$, com efeito, fazendo $y=0$ em $y=mx+q$ temos

$$mx+q=0 \Leftrightarrow x=-\frac{q}{m}.$$

Faça o exercício 19 deste módulo.

<table>
<tr><td colspan="3">Equações da forma $ax+by+c=0$, com $b\neq 0$, escritas na forma $y=mx+q$, com $m=-a/b$ e $q=-c/b$.</td><td>Equação $x=p$, com $p \in \Re$.</td></tr>
<tr><td>$\alpha=0 \Rightarrow m=0$</td><td>$0^o < \alpha < 90^o \Rightarrow m > 0$</td><td>$90^o < \alpha < 180^o \Rightarrow m > 0$</td><td>$\alpha=90^o \Rightarrow m=\infty$</td></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td><td>
</td><td>
</td></tr>
</table>

Faça o exercício 20 deste módulo.

Novamente voltando ao módulo anterior, no exercício 2 "Construa o lugar geométrico dos pontos que distam 1 unidade do ponto $A(-2, 1)$ do planos cartesiano", já sabemos que o lugar geométrico neste caso é uma circunferência. Seria possível encontrar uma equação em que seu conjunto solução seja o lugar geométrico desses pontos?

Vejamos:

1º) Estabeleça um ponto genérico $G(x, y)$; (lembre-se este ponto pode estar em qualquer lugar do plano)

2º) Use a fórmula de distância entre dois pontos e monte a equação $d(G, P)=r$; (note que r=1)

3º) Simplifique ao máximo essa equação. (Experimente digitá-la no GeoGebra).

Faça o exercício 21 deste módulo.

Os gráficos das soluções das equações encontradas formam realmente uma circunferência? Seu centro e seu raio são realmente os apresentados no exercício? Qual é o grau dessas equações? Será que toda circunferência tem equação semelhante a essa?

As respostas aos questionamentos acima serão dadas a partir do teorema abaixo. Diferentemente dos teoremas 5 e 6 (que poderiam ser escritos em um só teorema), no teorema 8 usaremos o conectivo lógico “se e somente se” para apresentar à recíprocidade.

Teorema 8: Um lugar geométrico é uma circunferência, se e somente se é o conjunto solução da equação de 2º grau $x^2+y^2+Bx+Cy+D=0$, com $B^2+C^2-4D>0$ e B, C, D$\in\Re$.

Prova:

$\Rightarrow$ Da equação $x^2+y^2+Bx+Cy+D=0$ e de suas equações equivalentes temos:

$$x^2+y^2+Bx+Cy+D=0$$
$$x^2+y^2+Bx+Cy=-D$$
$$x^2+y^2+Bx+Cy+\frac{B^2}{4}+\frac{C^2}{4}=\frac{B^2}{4}+\frac{C^2}{4}-D$$
$$\left(x+\frac{B}{2}\right)^2+\left(y+\frac{C}{2}\right)^2=\frac{B^2+C^2-4D}{4} \qquad \text{(I)}$$

Tomando $-2a=B$, $-2b=C$, $a^2+b^2-r^2=D$, com $a, b\in\Re$ e $r\in\Re_+^*$ e substituindo na equação (I) acima temos, $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2 \iff \sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}=r$ (II)

Da equação (II) e tomando $F(a, b)$ centro, $P(x, y)$ ponto genérico e r raio, temos $d(P,F)=r$, logo as soluções da equação dada é o lugar geométrico de uma circunferência.

$\Leftarrow$ Seja um ponto $F(a, b)$, denominado centro, um número real positivo r, chamado raio e um ponto genérico $P(x, y)$, sobre a circunferência, para atender a definição de circunferência devemos ter $d(P, F)=r$, logo

$$d(P,F)=\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}=r$$
$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2 \qquad \text{(III)}$$
$$x^2+y^2-2ax-2by+a^2+b^2-r^2=0 \qquad \text{(IV)}$$

Tomando $-2a=B$, $-2b=C$, $a^2+b^2-r^2=D$, e substituindo na equação (IV) acima temos

$$x^2+y^2+Bx+Cy+D=0$$

Para validade do teorema devemos ter $B^2+C^2-4D>0$, com efeito,

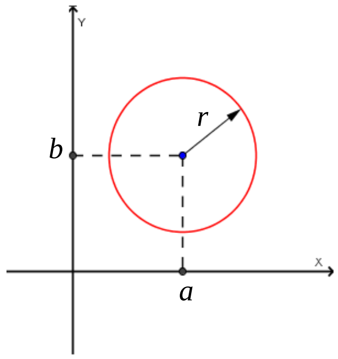
$$a^2 + b^2 - r^2 = D \Rightarrow r^2 = a^2 + b^2 - D$$

De *-2a=B* e *-2b=C*, temos $r^2 = \left(-\frac{B}{2}\right)^2 + \left(-\frac{C}{2}\right)^2 - D \Rightarrow r = \sqrt{\frac{B^2}{4} + \frac{C^2}{4} - \frac{4D}{4}}$, como o $r \in \Re_+^*$, chegamos ao resultado.

■

Vale observar que a partir da equivalência das equações a equação da circunferência pode ser escrita como: $Ax^2 + Ay^2 + ABx + ACy + AD = 0$, para todo *A≠0*, real.

Outro fato importante é que a equação (III), chamada de forma reduzida da equação da circunferência é o caminho mais rápido para se obter a equação de uma circunferência dados o centro e o raio.



$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$$

Faça os exercícios de 22 a 26 deste módulo.

Novamente a partir do módulo anterior, vamos analisar o caso da parábola, no exercício 11 temos o enunciado "Qual é o lugar geométrico dos pontos *P*, tais que dados os pontos *F(1, 2)* uma reta *r* paralela ao eixo *OX*, a distância de *P* a *F* seja igual à distância de *P* a *r*", já sabemos que o lugar geométrico neste caso é uma parábola. Seria possível encontrar uma equação em que seu conjunto solução seja o lugar geométrico desses pontos. Como a reta é paralela ao eixo *OX*, temos uma reta de equação *y=a*, onde $a \in \Re$, suponhamos *y=5*.

Logo:

1º) Estabeleça o ponto genérico *P(x, y);*

2º) Observe que todo ponto da reta *y=5*, tem coordenada *D(x, 5)*, pois a abscissa pode ser qualquer mas a ordenada vale *5*;

3º) Monte uma equação usando *d(P, D)=d(P, F)* e simplifique ao máximo a equação; (digite-a no GeoGebra e analise o resultado)

Faça o exercício 27 deste módulo.

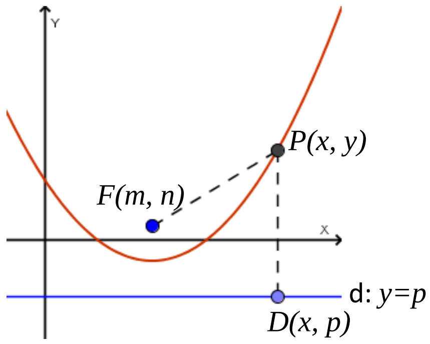
Qual é o grau dessas equações? Será que a equação de toda parábola tem esse grau? Será que existe um padrão nas equações de uma parábola?

Poderemos responder essas perguntas a partir do teorema a seguir.

Teorema 9: Toda parábola de foco *F(m, n)* e reta diretriz d: $y=p$, onde $p\in\Re$ e $p\neq n$, é o lugar geométrico do conjunto solução da equação $y=ax^2+bx+c$, com $a=-\dfrac{1}{2p-2n}$, $b=\dfrac{2m}{2p-2n}$ e $c=-\dfrac{(m^2+n^2-p^2)}{2p-2n}$ e $a\neq 0$ e $a, b, c\in\Re$.

Prova:

Lembramos que a parábola é o lugar geométrico dos pontos que equidistam do foco e da reta diretriz, temos ainda que todo ponto da reta diretriz d: $y=p$ é da forma *D(x, p).*



Seja *P(x, y)* um ponto genérico da parábola. Da equivalência entre equações e da característica da parábola *d(P, F)=d(P, D),* temos:

$$\sqrt{(x-m)^2+(y-n)^2}=\sqrt{(x-x)^2+(y-p)^2}$$
$$x^2-2mx+m^2+y^2-2ny+n^2=y^2-2py+p^2$$
$$(2p-2n)y+x^2-2mx+m^2+n^2-p^2=0$$
$$y=-\frac{1}{2p-2n}x^2+\frac{2m}{2p-2n}x-\frac{(m^2+n^2-p^2)}{2p-2n}=0 \quad \text{(I)}$$

Tomando $a=-\dfrac{1}{2p-2n}$, $b=\dfrac{2m}{2p-2n}$ e $c=-\dfrac{(m^2+n^2-p^2)}{2p-2n}$ e substituindo (I), obtemos:

$$y=ax^2+by+c \quad \text{(II)}$$ ■

Vale observar que da equivalência das equações podemos escrever (II) como $Ay+Bx^2+Cy+D=0$, com $A\neq 0$.

No teorema 8, temos uma reta diretriz paralela ao eixo *OX*, porém se a reta diretriz for paralela ao eixo *OY*, teríamos uma situação análoga, porém a equação seria $x=ay^2+by+c$, experimente demonstrar esse fato como um novo teorema.

Faça o exercício 28 deste módulo.

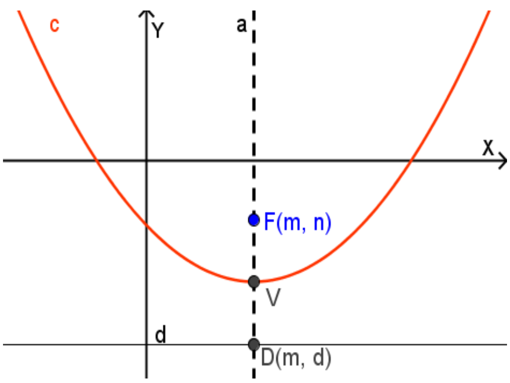
Podemos observar que a reta diretriz fica no plano oposto ao foco, com relação à parábola.

Será que a recíproca do teorema 8 é verdadeira, ou seja, "Toda equação da forma $y=ax^2+bx+c$, com $a\neq 0$ e $a, b, c \in \Re$, tem como conjunto solução o lugar geométrico de uma parábola**.**"

Para construir a demonstração deste teorema iremos passar por algumas definições e vários "sub-teoremas".

Definição 7: O eixo de simetria da parábola é a reta que passa pelo foco e é perpendicular à reta diretriz.

Definição 8: O vértice da parábola é o ponto de interseção entre a parábola e o eixo de simetria.



Podemos analisar esses dois elementos da parábola no gráfico ao lado, a reta a: $x=m$ é o eixo de simetria e o ponto V é o vértice.

Se o foco F e o ponto D interseção de reta diretriz com o eixo de simetria, tiverem coordenadas (m, n) e (m, d), respectivamente, da definição de parábola temos que $d(V, F)=d(V, D)$, ou melhor, V é o ponto médio de F e D.

Dessa forma temos que as coordenadas de $V=\left(m,\dfrac{n+d}{2}\right)$. Se a reta diretriz for paralela ao eixo *OY*, teremos o vértice em $V=\left(\dfrac{m+d}{2},n\right)$.

Faça os exercícios de 29 a 31, no final deste módulo.

Será que o lugar geométrico das soluções da equação $y=ax^2$ é sempre uma parábola? Se sim, qual seria o eixo de simetria desta parábola? E qual será a coordenada do vértice? Quais seriam um possível foco e uma reta diretriz? Vamos responder alguma destas perguntas a partir do teorema abaixo e por alguns exercícios.

Teorema 10: Toda equação da forma $y=ax^2$, com $a\neq 0$, tem como solução o lugar geométrico da parábola de foco $F\left(0,\dfrac{1}{4a}\right)$ e reta diretriz d: $y=-\dfrac{1}{4a}$.

Prova: Temos que uma solução genérica da equação $y=ax^2$ é dada pelo ponto $P(x, ax^2)$ e um ponto $D\in$d, têm coordenadas $D\left(x, -\dfrac{1}{4a}\right)$.

Vamos calcular $d(P, F)$ e $d(P, D)$,

$$d(P,F)=\sqrt{\left(ax^2-\frac{1}{4a}\right)^2+(x-0)^2}=\sqrt{a^2x^4-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{16a^2}+x^2}=\sqrt{a^2x^4+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{16a^2}}$$

e

$$d(P,D)=\sqrt{\left(ax^2+\frac{1}{4a}\right)^2+(x-x)^2}=\sqrt{a^2x^4+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{16a^2}}$$

Assim temos $d(P, F)=d(P, D)$, logo $y=ax^2$, com $a\neq 0$ é uma parábola de foco em F e reta diretriz d. ■

Para equações da forma $x=ay^2$, com $a\neq 0$, teremos uma parábola de foco $F\left(\dfrac{1}{4a},0\right)$ e reta diretriz d: $x=-\dfrac{1}{4a}$.

Faça os exercícios de 32 a 37, no final deste módulo.

Será que o lugar geométrico das soluções da equação $y=ax^2+k$ é sempre uma parábola? Se sim, qual seria o eixo de simetria desta parábola? E qual será a coordenada do vértice? Quais seriam um possível foco e uma reta diretriz?

Teorema 11: Toda equação da forma $y=ax^2+k$, com $a\neq 0$ e $k\in\Re$, tem como solução o lugar geométrico da parábola de foco $F\left(0, \frac{1}{4a}+k\right)$ e reta diretriz d: $y=-\frac{1}{4a}+k$.

Prova: Temos que uma solução genérica da equação $y=ax^2+k$ é dada pelo ponto $P\left(x, ax^2+k\right)$ e um ponto $D\in$d, tem coordenadas $D\left(x, -\frac{1}{4a}+k\right)$.

Vamos calcular *d(P, F)* e *d(P, D)*,

$$d(P,F)=\sqrt{\left(ax^2+\cancel{k}-\frac{1}{4a}-\cancel{k}\right)^2+(x-0)^2}=\sqrt{a^2x^4-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{16a^2}+x^2}$$

$$d(P,F)=\sqrt{a^2x^4+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{16a^2}}$$

e

$$d(P,D)=\sqrt{\left(ax^2+\cancel{k}+\frac{1}{4a}-\cancel{k}\right)^2+(x-x)^2}=\sqrt{a^2x^4+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{16a^2}}$$

Assim temos *d(P, F)=d(P, D)*, logo $y=ax^2+k$, com $a\neq 0$ é uma parábola com foco em *F* e reta diretriz d. ■

Para equações da forma $x=ay^2+k$, com $a\neq 0$, teremos uma parábola de foco $F\left(\frac{1}{4a}+k, 0\right)$ e reta diretriz d: $x=-\frac{1}{4a}+k$.

Faça os exercícios de 38 a 43, no final deste módulo.

Teorema 12: Toda equação da forma $y=a(x-m)^2$, com $a\neq 0$ e $m\in\Re$, tem como solução o lugar geométrico da parábola de foco $F\left(m, \frac{1}{4a}\right)$ e reta diretriz d: $y=-\frac{1}{4a}$.

Prova: Temos que uma solução genérica da equação $y=a(x-m)^2$ é dada pelo ponto $P\left(x, a(x-m)^2\right)$ e um ponto $D\in$d, tem coordenadas $D\left(x, -\frac{1}{4a}\right)$.

Vamos calcular *d(P, F)* e *d(P, D)*,

$$d(P,F)=\sqrt{\left(a(x-m)^2-\frac{1}{4a}\right)^2+(x-m)^2}=\sqrt{a^2(x-m)^4-\frac{1}{2}(x-m)^2+\frac{1}{16a^2}+(x-m)^2}$$

$$d(P,F)=\sqrt{a^2(x-m)^4+\frac{1}{2}(x-m)^2+\frac{1}{16a^2}}$$

e

$$d(P,D)=\sqrt{\left(a(x-m)^2+\frac{1}{4a}\right)^2+(x-x)^2}=\sqrt{a^2(x-m)^4+\frac{1}{2}(x-m)^2+\frac{1}{16a^2}}$$

Assim temos *d(P, F)=d(P, D)*, logo $y=a(x-m)^2$, com $a\neq 0$ é uma parábola de foco em F e reta diretriz d. ■

Para equações da forma $x=a(y-m)^2$, com $a\neq 0$, teremos uma parábola de foco $F\left(\frac{1}{4a},m\right)$ e reta diretriz d: $x=-\frac{1}{4a}$.

Faça os exercícios de 44 a 47, no final deste módulo.

Tínhamos como interesse inicial provar que toda equação de 2º grau da forma $y=ax^2+bx+c$, com $a\neq 0$ e $a, b, c \in \Re$, tem como conjunto solução o lugar geométrico de uma parábola. Porque então passar pelos teoremas 10, 11 e 12? Onde queremos chegar? Essa resposta estará nos dois próximos teoremas.

Teorema 13: Toda equação da forma $y=ax^2+bx+c$, com $a\neq 0$ pode ser escrita da forma $y=a(x-m)^2+k$, com $m=-\frac{b}{2a}$ e $k=\frac{4ac-b^2}{4a}$. Denotaremos a expressão $y=a(x-m)^2+k$ de forma canônica da equação $y=ax^2+bx+c$.

Prova:

Podemos escrever a equação $y=ax^2+bx+c$, como $y=a\left(x^2+\frac{b}{a}x\right)+c$.

Completando o quadrado temos

$$y=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{b^2}{4a^2}\right)+c-\frac{b^2}{4a}=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a}.$$

Fazendo $m = -\dfrac{b}{2a}$ e $k = \dfrac{4ac - b^2}{4a}$, chegamos ao resultado. ■

Faça os exercícios de 48 a 50, no final deste módulo.

Agora podemos concluir a recíproca do teorema 8.

Teorema 14: Toda equação da forma $y=ax^2+bx+c$, com $a\neq 0$ e $a, b, c \in \Re$, tem como solução o lugar geométrico da parábola de foco $F\left(m, \dfrac{1}{4a} + k\right)$ e reta diretriz d: $y = -\dfrac{1}{4a} + k$, onde $m = -\dfrac{b}{2a}$ e $k = \dfrac{4ac - b^2}{4a}$.

Prova: Primeiramente vamos escrever a equação $y=ax^2+bx+c$, na forma canônica $y=a(x-m)^2+k$, com $m = -\dfrac{b}{2a}$ e $k = \dfrac{4ac - b^2}{4a}$.

Temos como solução genérica da equação o ponto $P\left(x, a(x-m)^2 + k\right)$ e um ponto D$\in$d, têm coordenadas $D\left(x, -\dfrac{1}{4a} + k\right)$.

Vamos calcular $d(P, F)$ e $d(P, D)$,

$$d(P,F) = \sqrt{\left(a(x-m)^2 + \cancel{k} - \frac{1}{4a} - \cancel{k}\right)^2 + (x-m)^2} = \sqrt{a^2(x-m)^4 - \frac{1}{2}(x-m)^2 + \frac{1}{16a^2} + (x-m)^2}$$

$$d(P,F) = \sqrt{a^2(x-m)^4 + \frac{1}{2}(x-m)^2 + \frac{1}{16a^2}}$$

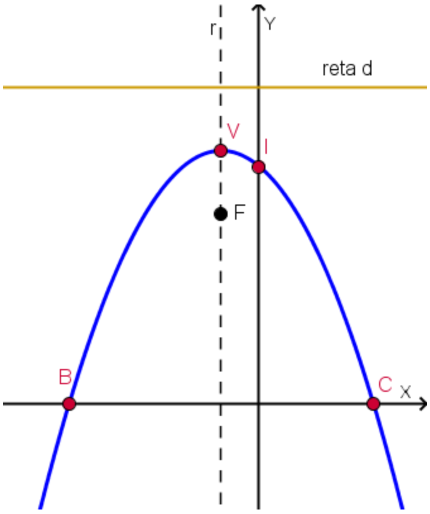
e

$$d(P,D) = \sqrt{\left(a(x-m)^2 + \cancel{k} + \frac{1}{4a} - \cancel{k}\right)^2 + (x-x)^2} = \sqrt{a^2(x-m)^4 + \frac{1}{2}(x-m)^2 + \frac{1}{16a^2}}$$

Assim temos $d(P, F)=d(P, D)$, logo $y=ax^2+bx+c$, com $a\neq 0$ é uma parábola de foco em F e reta diretriz d. ■

Para equações da forma $x=ay^2+by+c$, com $a\neq 0$, teremos uma parábola de foco $F\left(\dfrac{1}{4a} + k, m\right)$ e reta diretriz d: $x = -\dfrac{1}{4a} + k$.

Faça os exercícios de 51 a 54, no final deste módulo.



No gráfico ao lado, as abscissas dos pontos *B* e *C*, são as raízes da equação, pois temos *y=0*, (interseção com o eixo *OX*).

Já o ponto *I* é a interseção da parábola com o eixo *OY*. Para encontrá-lo basta fazer *y=0*.

Com esses elementos da parábola e outros já demonstrados poderemos construir qualquer parábola a partir de sua equação.

Teorema 14: Na equação $y=ax^2+bx+c$, com $a\neq 0$, para $y=0$, temos $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$.

O valor de *x*, quando *y=0* é a raiz da equação.

Prova: Escrevendo a equação na forma canônica, com $m=-\dfrac{b}{2a}$, $k=\dfrac{4ac-b^2}{4a}$ e fazendo *y=0*, temos,

$$a(x-m)^2+k=0 \Leftrightarrow (x-m)^2=-\frac{k}{a} \Leftrightarrow x=m\pm\sqrt{-\frac{k}{a}} \quad \text{(I)}$$

Tomando $m=-\dfrac{b}{2a}$, $k=\dfrac{4ac-b^2}{4a}$ e substituindo na equação (I) chegamos a,

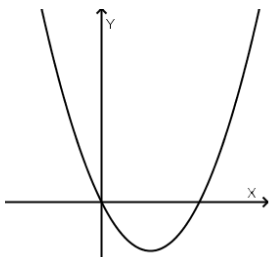
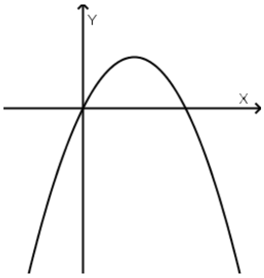
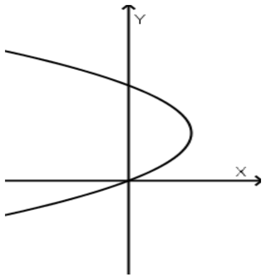
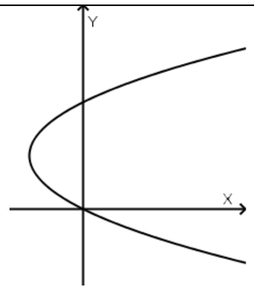
$$x=-\frac{b}{2a}\pm\sqrt{-\frac{1}{a}\cdot\frac{4ac-b^2}{4a}}=-\frac{b}{2a}\pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}=\frac{-b}{2a}\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \quad \blacksquare$$

Vale observar que:

- para $b^2-4ac>0$, temos dois valores distintos para $x\in\Re$.
- para $b^2-4ac=0$, temos um valor para $x\in\Re$.
- para $b^2-4ac<0$, não temos $x\in\Re$.

Faça os exercícios de 55 a 57, no final deste módulo.

Para finalizarmos uma importante informação é que na equação $y=a(x-m)^2+k$, a expressão $(x-m)^2$ é sempre positiva, logo para $a>0$, os valores de y estarão no intervalo $[k, +\infty[$, desta forma a parábola terá concavidade voltada para cima. E para $a<0$, os valores de y estarão no intervalo $]-\infty, k]$, desta forma a parábola terá concavidade voltada para baixo. Analogamente concluímos que em equações da forma $x=ay^2+by+c$, temos concavidade para direita se $a>0$ e para esquerda se $a<0$.

$y=ax^2+bx+c$ $a>0$	$y=ax^2+bx+c$ $a<0$	$x=ay^2+by+c$ $a<0$	$x=ay^2+by+c$ $a>0$
			

Vamos agora, construir o gráfico de uma parábola a partir de sua equação, usando os elementos apresentados anteriormente.

Exemplo 1) Vamos construir o gráfico da parábola de equação $2y-2x^2-4x+6=0$.

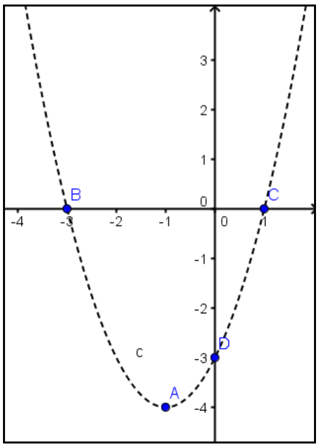
1º) Primeiro escrevemos uma equação equivalente da forma $y=x^2+2x-3$ (com coeficientes $a=+1$, $b=+2$ e $c=-3$;

2º) O vértice da parábola é $V=\left(-\dfrac{(+2)}{2(+1)},-\dfrac{\left((+2)^2-4(+1)(-3)\right)}{4(+1)}\right)=(-1,-4)$;

3º) A interseção com o eixo OY, é dado por $I(0, -3)$, pois fazendo $x=0$ na equação temos $y=-3$;

4º) Fazendo $y=0$ na equação temos as raízes $x_* = \dfrac{-(+2)\pm\sqrt{(+2)^2-4(+1)(-3)}}{2(+1)} = \dfrac{-2\pm 4}{2}$, daqui temos $x_1=1$ e $x_2=-3$, logo $B(-3, 0)$ e $C(1, 0)$.

Com esses pontos podemos traçar um esboço de todas as soluções da equação.



Exemplo 2) Vamos construir o gráfico da parábola de equação $y+x^2=0$.

1º) Primeiro escrevemos uma equação equivalente da forma $y=-x^2$ (com coeficientes $a=-1$, $b=0$ e $c=0$;

2º) O vértice da parábola é $V=\left(-\frac{(0)}{2(-1)}, -\frac{((0)^2-4(-1)(0))}{4(-1)}\right)=(0,0)$;

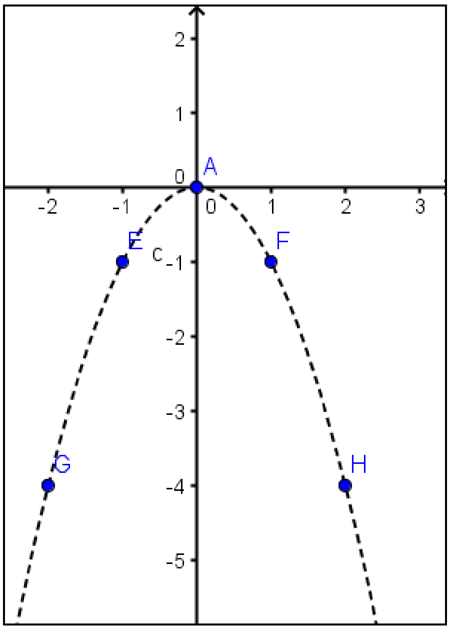
3º) A interseção com o eixo *OY*, é dado por *D(0, 0)*, pois fazendo $x=0$, temos $y=0$;

4º) Para as suas raízes fazemos $y=0$, temos $-x^2=0$, daqui temos $x_1=0$, logo *B(0, 0)*.

5º) Temos poucas informações para construção do gráfico, podemos usar a técnica do início deste módulo, montar uma tabela e colocar alguns valores arbitrários para *x*, podemos usar o vértice como parâmetro. Valores em cinza são arbitrários.

x	*Y*
-2	-4
-1	-1
0	**0**
1	-4
2	-1

Com esses pontos podemos traçar um esboço de todas as soluções da equação.



Exemplo 3) Vamos construir o gráfico da parábola de equação $-y^2-x-2y-3=0$. (Observe que trata-se de uma parábola com reta diretriz paralela ao eixo *OY*)

1º) Primeiro escrevemos uma equação equivalente da forma $x=-y^2-2y-3$ (com coeficientes $a=-1$, $b=-2$ e $c=-3$;

2º) O vértice da parábola é $V=\left(-\dfrac{\left((-2)^2-4(-1)(-3)\right)}{4(-1)},-\dfrac{(-2)}{2(-1)}\right)$, logo $V=(-2,\ -1)$;

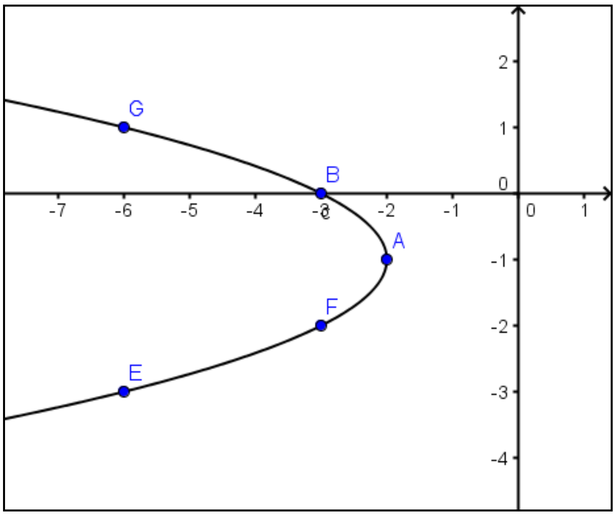
3º) A interseção com o eixo *OY*, fazemos $x=0$, logo $y_*=\dfrac{-(-2)\pm\sqrt{(-2)^2-4(-1)(-3)}}{2(-1)}=\dfrac{2\pm\sqrt{-8}}{-2}$, não há valor real para y_*, logo não há interseção com o eixo *OY*;

4º) Para a sua raiz fazemos $y=0$ em $x=-y^2-2y-3$, teremos são $x=-3$, logo $B(-3,0)$.

5º) Temos novamente poucas informações para construção do gráfico, vamos montar uma tabela e colocar alguns valores arbitrários para *y*, podemos usar o vértice como parâmetro. (valores sombreados de cinza são arbitrários)

x	Y
-6	-3
-3	-2
-2	**-1**
-3	0
-6	1

Com esses pontos podemos traçar um esboço de todas as soluções da equação.



Faça o exercício 58.

Atividades M-4

- Um exemplo de equação indeterminada seria $x+y=6$. Quantas soluções reais você poderia listar para está equação?
- Como você representaria as soluções para a equação $x+y=6$?
- Seja a equação $x^2+y^2-4=0$, como poderíamos apresentar o seu conjunto solução?

Solucione os exercícios de 1 a 7, tomando como universo $\Re^2$.

1) Descreva as soluções para a equação $2x+6=4y$, use as três técnicas explicitadas.

2) Descreva as soluções para a equação $2x^2+y=3x+2$, use as três técnicas explicitadas.

3) Descreva as soluções para as equações $x-3=0$ e $y^2-16=0$, use as três técnicas explicitadas.

4) Descreva as soluções para a equação $4x^2+9y^2=36$, use as três técnicas explicitadas.

5) Descreva as soluções para a equação $x^2=16-y^2$, use as três técnicas explicitadas acima.

6) Descreva as soluções para a equação $xy-x^2=2$, use as três técnicas explicitadas acima.

7) Como na resolução dessas equações muitos números irracionais aparecem, dificultando os cálculos, vamos usar uma planilha eletrônica para montar a tabela e o gráfico, em cada caso.

8) Podemos usar os GeoGebra, para construir um ponto genérico P que descreva no plano cartesiano o comportamento das soluções de cada uma das equações. Vamos analisar um exemplo de como fazer isso e em seguida vamos fazer o mesmo para os exercícios de 1 a 5.

9) Quais argumentos você poderia utilizar para justificar a um aluno que o Lugar Geométrico da equação “$y=ax+b$” é uma reta?

10) Construa o lugar geométrico ou “solução geral” das seguintes equações: (Dica: para se construir uma reta é necessário apenas dois pontos)

a) $4x-2y+6=0$

b) $2y-6=4$

c) $\frac{2}{3}x-y=x+2$

11) Faça o gráfico das equações do exercício 10 no GeoGebra e lembre-se, o gráfico é o lugar geométrico das soluções da equação. Para isso basta digitar as equações no campo entrada e teclar enter.

- O gráfico da equação encontrada realmente passa pelos pontos *A* e *B*?
- Qual é o grau dessa equação?
- Será que toda reta é o lugar geométrico das soluções de equações desse tipo?

12) Encontre a equação da reta que passa pelos pontos:

a) *A(-3, 2)* e *B(1, 4)*

b) *C(2, 2)* e *D(-3, 1)*

c) *C(2, 2)* e *D(-3, 2)*

d) *E(-1,-3)* e pela origem do sistema

13) Use o GeoGebra, para construir as equações do exercício 9. (Dica: Marque os pontos e em seguida construa a reta que passa pelos dois pontos, observe a equação da reta na janela álgebra do GeoGebra)

14) Verifique se os pontos *A(-2,1)* e *B(-2, -4)* pertencem a reta de equação *-5x+2y-2=0*. (Dica: se um ponto pertence à reta este deve ser solução da equação da reta)

15) Encontre a equação da reta em cada um dos caso: (faça também no GeoGebra)

a) Passa pelo ponto *A(2,-3)* e faz um ângulo de 45^{o} com o eixo *x*.

b) Passa pelo ponto *B(-1, 0)* e faz um ângulo de 60^{o} com o eixo *x*.

c) Passa pelo ponto *B(-1, 0)* e faz um ângulo de 30^{o} com o eixo *x*.

16) No campo entrada do GeoGebra digite, *m=1* (tecle enter) e *q=0* (tecle enter), exiba os objetos *m* e *q*, em seguida digite a equação *y=m*x+q* construindo assim o gráfico com as soluções da equação.

17) Com relação aos exercícios 16, varie o valor de *m* no intervalo [-5, 5] e descreva o comportamento do gráfico.

18) Com relação ao exercício anterior, varie o valor de *q* no intervalo [-5, 5], descreva o comportamento do gráfico.

19) Com relação aos exercícios 12 e 15, determine as raízes de cada uma das equações.

20) Construa o lugar geométrico ou “solução geral” das seguintes equações: (use os coeficientes e a raiz, não use o computador)

a) $3x-2y-5=0$ b) $x+y=-3$ c) $4y-12=8$ d) $2x=7$

21) Dados o centro *C* e o raio *r*, determine a equação da circunferência nos casos: (após encontrar as equações digite-as no GeoGebra)

a) $C(-1, 1)$ e $r=3$ b) $C(0, -2)$ e $r=2$ c) $C(5/4, -1/2)$ e $r=\sqrt{5}$

- Os gráficos das soluções das equações encontradas formam realmente uma circunferência?
- Seu centro e seu raio são realmente os apresentados no exercício?
- Qual é o grau dessas equações?
- Será que toda circunferência tem equação semelhante a essas?

22) No GeoGebra construa as soluções do exercício 21. (dicas: Marque o centro, crie um segmento de reta a partir de *C* de medida *r*, abra uma circunferência de *C* a *A*, observe na janela álgebra a equação)

23) Das equações abaixo verifique quais teriam como "conjunto solução", uma circunferência. Justifique, em cada caso.

a) $x^2+y^2-6x+8y-16=0$

b) $x^2+y^2-6y=1$

c) $(x-3)^2+(y+5)^2=9$

d) $3x-2y+4=0$

e) $x^2-y^2-3x-2y+16=0$

f) $x^2+y^2-4x+5y+16=0$

g) $2x^2+2y^2-4x+4y-10=0$

24) No GeoGebra digite as equações do exercício 23 para analisar suas justificativas.

25) Qual é o centro e o raio das circunferências determinadas pelo conjunto solução da equação:

a) $(x+1)^2+(y-3)^2=5$

b) $x^2+y^2-4x+6y-8=0$

c) $x^2+y^2=4x-5y+16$

d) $4x^2+4y^2-24x=-11$

26) Verifique se os pontos $A(-2, 4)$ e $B(-2, -2)$ pertencem a circunferência de equação $x^2+y^2-4x+4y+4=0$.

27) Encontre a equação das parábolas abaixo dado o foco F e a reta diretriz d, em seguida digite-as no GeoGebra)

a) $F(-1, -2)$ e d: $x=1$.

b) $F(0, 1)$ e d: $y=-1$.

c) $F(3, 0)$ e d: $y=2$.

d) $F\left(0, \frac{1}{4a}\right)$ e d: $y=-\frac{1}{4a}$.

- Qual é o grau dessas equações?

- Será que a equação de toda parábola tem esse grau?
- Será que existe um padrão nas equações de uma parábola?

28) Construa no GeoGebra os lugares geométricos do exercício 27 e observe na janela álgebra suas equações. (dica: use o comando parábola, nele basta clicar no foco e na reta diretriz que o próprio computador constrói a parábola)

29) Determine as coordenadas dos vértices das parábolas do exercício 27.

30) Digite no campo entrada do GeoGebra "$a=1$", mande exibir esse objeto, em seguida digite o gráfico da seguinte equação $y=ax^2$.

31) Com relação ao exercício anterior, varie o valor de a no intervalo $[-5, 5]$ e descreva o comportamento da concavidade deste gráfico.

32) Digite no campo entrada do GeoGebra "$a=1$", mande exibir esse objeto, em seguida digite o gráfico da seguinte equação $x=ay^2$.

33) Com relação ao exercício anterior, varie o valor de a no intervalo $[-5, 5]$ e descreva detalhadamente o comportamento da concavidade deste gráfico. Como você justificaria esse comportamento.

34) Determine a coordenada do vértice da parábola de equação $y=ax^2$.

35) Determine o vértice, o foco e a reta diretriz das parábolas de equações abaixo e faça um esboço do gráfico.

a) $y\text{-}3x^2=0$

b) $y+4x^2=0$

c) $x+2y^2=0$

36) Digite no campo entrada do GeoGebra “$c=0$”, mande exibir esse objeto, em seguida digite o gráfico da seguinte equação $y=x^2+c$.

37) Com relação ao exercício anterior, varie o valor de c no intervalo $[-5, 5]$, descreva o comportamento do gráfico. Justifique esse comportamento.

38) Digite no campo entrada do GeoGebra “$c=0$”, mande exibir esse objeto, em seguida digite o gráfico da seguinte equação $x=y^2+c$.

39) Com relação ao exercício anterior, varie o valor de c no intervalo $[-5, 5]$, descreva o comportamento do gráfico.

40) Determine a coordenada do vértice da parábola de equação $y=ax^2+k$.

41) Construa o gráfico das seguintes equações, sem o auxílio do computador (dica: use o vértice, o foco e a reta diretriz)

a) $y\text{-}x^2+4=0$ b) $y+x^2-2=0$ c) $y^2+4x=4$

42) Digite no campo entrada do GeoGebra “$m=0$”, mande exibir esse objeto, em seguida digite o gráfico da seguinte equação $y=(x-m)^2$.

43) Com relação ao exercício anterior, varie o valor de *m* no intervalo *[-5, 5]*, descreva o comportamento do gráfico.

44) Digite no campo entrada do GeoGebra "$m=0$", mande exibir esse objeto, em seguida digite o gráfico da seguinte equação $x=(y-m)^2$.

45) Com relação ao exercício anterior, varie o valor de *m* no intervalo *[-5, 5]*, descreva o comportamento do gráfico.

46) Determine a coordenada do vértice da parábola de equação $y=(x-m)^2$.

47) Construa o gráfico das seguintes equações, sem o auxílio do computador: (dica: use o vértice, o foco e a reta diretriz)

a) $y=-(x-3)^2$

b) $x=(y-2)^2$

48) Escrevas equações abaixo na forma canônica:

a) $2y-2x^2-4x+6=0$

b) $y=-x^2+6x+7$

c) $x=y^2+4y$

49) Digite no campo entrada do GeoGebra "$a=1$", "$m=0$", "$k=0$", mande exibir esses objetos, em seguida digite o gráfico da seguinte equação $y=a(x-m)^2+k$, em seguida altere o valores de:

a) *a*, no intervalo de [-5, 5], que conclusões podemos chegar?

b) *m*, no intervalo de [-5, 5], que conclusões podemos chegar?

c) *k*, no intervalo de [-5, 5], que conclusões podemos chegar?

50) Digite no campo entrada do GeoGebra "$a=1$", "$m=0$", "$k=0$", mande exibir esses objetos, em seguida digite o gráfico da seguinte equação $x=a(y-m)^2+k$, em seguida altere o valores de:

a) *a* , no intervalo de [-5, 5], que conclusões podemos chegar?

b) *m* , no intervalo de [-5, 5], que conclusões podemos chegar?

c) *k* , no intervalo de [-5, 5], que conclusões podemos chegar?

51) Digite no campo entrada do GeoGebra "$a=1$", "$b=0$", "$c=0$", mande exibir esses objetos, em seguida digite o gráfico da seguinte equação $y=ax^2+bx+c$, em seguida altere o valores do coeficiente:

a) *a* , no intervalo de [-5, 5], que conclusões podemos chegar?

b) *b* , *no* intervalo de [-5, 5], que conclusões podemos chegar?

c) *c* , *no* intervalo de [-5, 5], que conclusões podemos chegar?

52) Determine a coordenada do vértice da parábola de equação $y=ax^2+bx+c$, em termos de *a*, *b* e *c*.

53) Determine a coordenada do vértice da parábola de equação $x=ay^2+by+c$, em termos de *a*, *b* e *c*.

54) Calcule os vértices das equações abaixo:

a) $2y-2x^2-4x+6=0$

b) $y=-x^2+6x+7$

c) $x=y^2+4y$

d) $x+2y^2=5y-1$

55) Em equações da forma $x=ay^2+by+c$, para encontrarmos a raiz não utilizamos a fórmula do Teorema 14, determine a raiz da desta equação neste caso.

56) Encontre as raízes reais das equações abaixo, quando houver:

a) $y=x^2-x-2$

b) $x=3y^2-1$

c) $y=x^2-3x$

d) $y-x^2-4x-5=0$

e) $x^2-2x+y=8$

f) $y=x^2+10x+25$

57) Determine a interseção das parábolas do exercício anterior, com o eixo OY.

58) Construa o gráfico das seguintes equações:

a) $y = -x^2 - 2x + 8$

b) $y- x^2 + 1 = 0$

c) $y^2 + x - 2y = 0$

d) $y=x^2+4x+5$

Apêndice F - Módulo 5: Sistema de equações

Antes de começarmos essa seção vamos fazer alguns exercícios de revisão, em seguida vamos digitar as equações no GeoGebra para conhecer as curvas.

Faça os exercícios de 1 a 10, no final deste módulo.

Observe que no exercício 10 temos duas informações, uma salienta sobre a distância entre o ponto genérico, um ponto dado e a reta, já a outra informação explicita sobre a colinearidade desses pontos com dois pontos dados. Para solucionar essa questão, precisamos de um sistema de equações. Em linguagem de conjuntos, nosso conjunto solução será S={(x, y): d(P, A)=d(P, D) e $m_{PB}=m_{PC}$, onde D $\in$ r e m é o coeficiente angular}

Em primeiro lugar vamos encontrar a equação que satisfaz d(P, A)=d(P, D), teremos

$$\sqrt{(x-2)^2+(y-0)^2}=\sqrt{(x-x)^2+(y-2)^2} \Leftrightarrow x^2-4x+4y=0 \quad \text{(I)}$$

Em seguida encontramos a equação que satisfaz a segunda condição $m_{PB}=m_{PC}$, logo

$$\frac{y+5}{x+5}=\frac{-5-1}{-5-4} \Leftrightarrow 2x-3y-5=0 \quad \text{(II)}$$

Agora precisamos estabelecer os pontos que satisfazem ambas equações (I) e (II), para isso utilizamos um sistema de equações:

$$\begin{cases} 2x-3y-5=0 \\ x^2-4x+4y=0 \end{cases}$$

Daqui chegamos à seguinte solução para o sistema $S=\left\{(-2,-3),\left(\frac{10}{3},\frac{5}{9}\right)\right\}$

Podemos solucionar esse problema com o uso do GeoGebra, como vimos no Módulo 5:

1º) Marque o ponto A(2, 0);

2º) Digite a reta r: y=2;

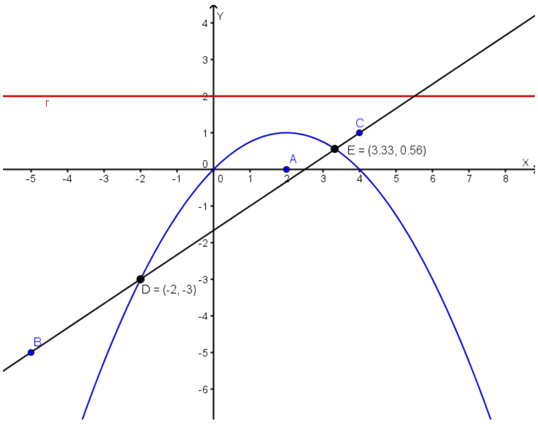
3º) No comando Parábola selecione o foco A e a reta r;

4º) Marque os pontos B(-5, -5) e C(4, 1);

5º) Trace as retas por B e C;

6º) A partir comando interseção de dois objetos selecione a reta e a parábola.

Os pontos D e E serão as soluções do problema, pois, como estes estão na interseção entre reta e a parábola, logo são soluções de ambas equações. Podemos verificar que a distância de D a A é igual à distância de D a r, e D é colinear a B e C (o mesmo ocorre com o ponto E). Observe o resultado final no plano cartesiano.



Vale destacar que poderíamos digitar ambas as equações no campo entrada do GeoGebra e, em seguida encontrar o ponto de interseção entre a reta e a parábola, usando o comando interseção entre dois objetos. Encontrando assim as duas soluções.

Faça os exercícios 11 e 12 deste módulo.

Definição 9: Um sistema de equações admite três tipos de soluções:

i. **Possível e determinado**: Quando há soluções comuns (porém finitas) entre as equações;

ii. **Indeterminado**: Quando há infinitas soluções comuns entre as equações;

iii. **Impossível**: Quando não há soluções comuns entre as equações.

Faça os exercícios de 13 a 14, no final deste módulo.

Será que é possível analisar quantas soluções há um sistema de equações sem resolvê-lo? Para responder essa questão vamos a algumas definições e exercícios.

Definição 10: Com relação à posição relativa entre duas retas no plano cartesiano podemos dizer que são:

i. **Concorrentes**: Quando possuem apenas um ponto em comum;

ii. **São paralelas**: Quando não possuem pontos em comum;

iii. **Coincidentes**: Quando possuem todos os pontos em comum.

Faça os exercícios de 15 a 21, no final deste módulo.

Definição 10: Com relação à posição relativa entre uma reta no plano cartesiano e uma circunferência ou parábola, podemos dizer que são:

i. **Tangente**: Quando possuem apenas um ponto em comum;

ii. **Secante**: Quando possuem dois pontos em comum;

iii. **Externa:** Quando não possuem pontos em comum.

Faça os exercícios de 22 a 26, no final deste módulo.

Atividades M-5

1) Determine a equação do LG dos pontos que são colineares com os pontos A(-2, 1) e B(1, -1).

2) Determine a equação do LG dos pontos que distam $\sqrt{5}$ unidades ao ponto C(-3, 1).

3) Determine a equação do LG dos pontos que equidistam ao ponto F(1, -4) e da reta d: x=2.

4) Qual é a equação do LG dos pontos que equidistam aos pontos A(-3,2) e B(-1,-4)?

5) Qual é a equação do LG dos pontos P(x,y), tais que dados os pontos $F_1(-4,0)$ e $F_2(4, 0)$, a soma das distâncias de P a F_1 com P a F_2 seja 10 unidades?

6) Determine a equação do LG dos pontos P(x,y), tais que dados os pontos $F_1(-4,0)$ e $F_2(4, 0)$, a diferença das distâncias de P a F_1 com P a F_2 (em módulo) seja 6 unidades. (podemos fazer a construção deste LG no GeoGebra, como a da Elipse no Módulo 5, porém neste caso temos a curva denominada Hipérbole)

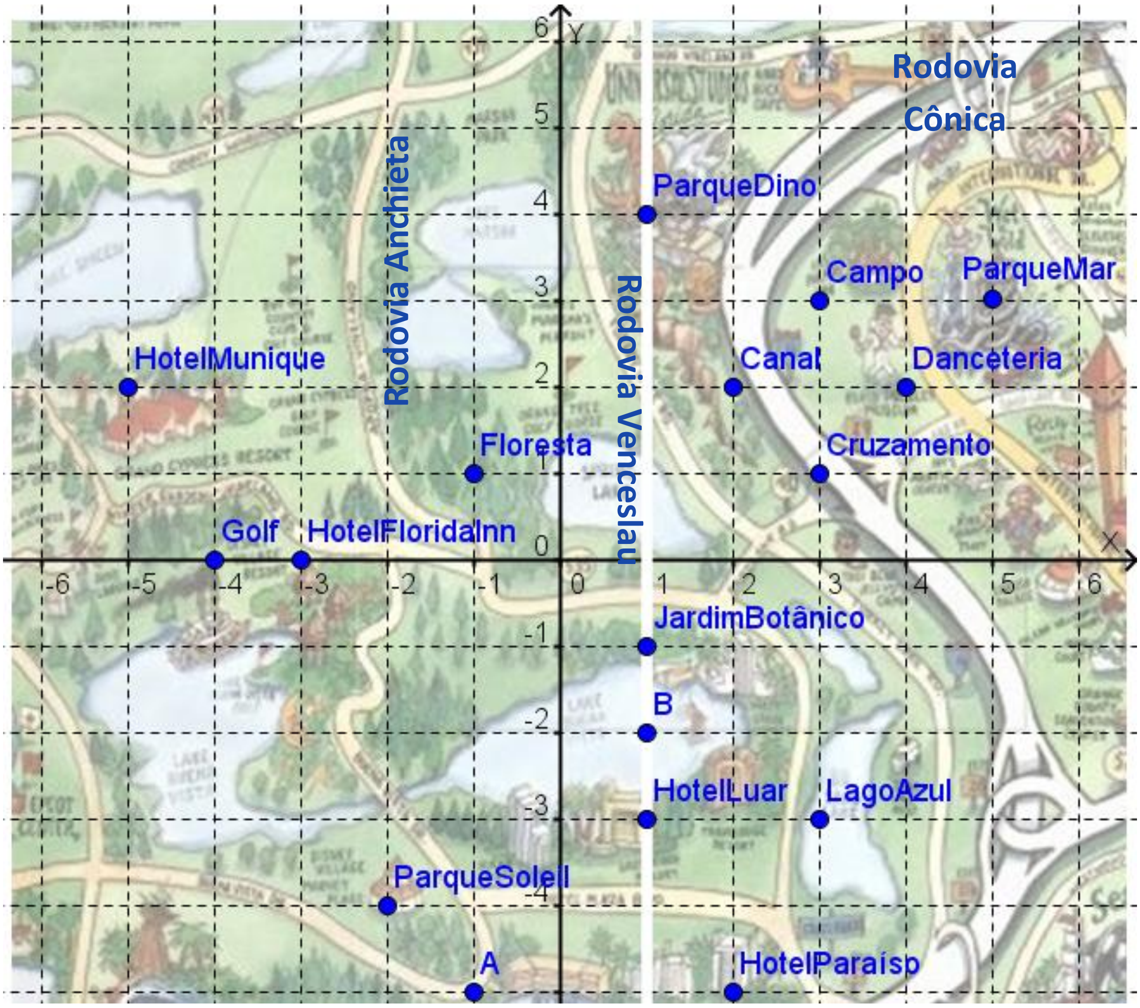
7) Qual é a equação do LG dos pontos P(x, y) tais que sua distância ao ponto (0, 0) seja o dobro de sua distância ao ponto (-3, 0)?

8) Determine a equação do LG dos pontos P(x, y), tais que o produto de sua distância ao pontos A(-3, 0) e B(3, 0) é 9. (Essa curva chama-se Lemniscata)

9) Determine a equação do LG dos pontos P(x, y), tais que o produto das declividades das retas que os ligam aos pontos A(-2, 1) e B(4, -3) seja 9.

10) Qual é o lugar geométrico dos pontos que equidistam ao ponto A(2, 0) e a reta r: y=2 e são colineares aos pontos B(-5, -5) e C(4, 1)?

11) Observe o mapa abaixo da cidade Alegria (escala 1:10000 cm) e solucione as



questões:

a) Joana está em um ponto que é colinear ao Parque Soleil e ao Jardim Botânico. Com essa informação é possível localizar Joana? Como podemos relacionar os possíveis pontos onde possa estar Joana? Relacione.

b) Sabemos agora que Joana está alinhada também ao Golf e Floresta. Será que agora podemos localizá-la? Como poderíamos fazer isso?

c) João está a 224m do Lago. Com essa informação é possível localizá-lo. Quais são os possíveis pontos onde se encontra João? Como relacioná-los?

d) Sabe-se ainda que João está alinhado com os hotéis Munique e Florida Inn. Será que agora podemos localizar João? Se sim, como?

e) Uma rodovia equidista ao Campo e a Rodovia Venceslau. Que rodovia é está? Qual é a relação matemática que satisfaz os pontos desta rodovia?

f) Uma Estrada retilínea que passará pelos marcos A e B, será construída. Qual será o ponto de encontro entre essa Estrada e a Rodovia Cônica? Monte um conjunto de relações matemáticas que determinem a coordenada deste ponto.

12) Vamos usar o Geogebra para solucionar os sistemas de equações do exercício 11:

13) Use o Geogebra para solucionar os sistemas:

a) $\begin{cases} 3x - 2y = 1 \\ 2x + y = -4 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 5x - 2y = 1 \\ 9x - 8y + 18 = 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 13 \\ -2x + y = 1 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x - y = 4 \\ y^2 - x + 2y = 8 \end{cases}$

e) $\begin{cases} 2x - y = 5 \\ 4x - 2y = 8 \end{cases}$

f) $\begin{cases} 2x - y = 5 \\ 4x - 2y = 10 \end{cases}$

g) $\begin{cases} x - y = -10 \\ y^2 - x + 2y = 8 \end{cases}$

h) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 13 \\ 2x + 3y + 13 = 0 \end{cases}$

14) Com relação ao exercício anterior e a definição 9, descreva em qual caso se encaixa cada um dos sistemas.

15) Com relação às retas *r:* $3x$-$2y$=1, *s:* $6x$=$4y$+11, *t:* $y = \frac{3}{2}x - 7$, responda as questões:

a) Qual é a posição relativa entre essas retas (duas a duas)?

b) Escreva as equações na forma *ax+by=c*, você consegue determinar alguma relação entre os coeficientes *a*, *b* e *c* de duas destas equações de forma que estas tenham a posição relativa destacada no item anterior?

c) Escreva as equações na forma *y=mx+q*, você consegue determinar relação (diferente da anterior) entre os coeficientes *m* e *q* de duas destas equações de forma que estas tenham a posição relativa destacada no item a?

16) Com relação às retas r: $3x-2y=1$, s: $6x=4y+2$, t: $y=\frac{3}{2}x-\frac{1}{2}$, responda as questões:

a) Qual é a posição relativa entre essas retas (duas a duas)?

b) Escreva as equações na forma *ax+by=c*, você consegue determinar alguma relação entre os coeficientes *a*, *b* e *c* de duas destas equações de forma que estas tenham a posição relativa destacada no item anterior?

c) Escreva as equações na forma *y=mx+q*, você consegue determinar relação (diferente da anterior) entre os coeficientes *m* e *q* de duas destas equações de forma que estas tenham a posição relativa destacada no item a?

17) Com relação às retas r: $3x-2y=1$, s: $6x=2-4y$, t: $y=-x-8$, u: $3x+2y=1$, responda as questões:

a) Qual é a posição relativa entre essas retas (duas a duas)?

b) Escreva as equações na forma *ax+by=c*, você consegue determinar alguma relação entre os coeficientes *a*, *b* e *c* de duas destas equações de forma que estas tenham a posição relativa destacada no item anterior?

c) Escreva as equações na forma *y=mx+q*, você consegue determinar relação (diferente da anterior) entre os coeficientes *m* e *q* de duas destas equações de forma que estas tenham a posição relativa destacada no item a?

18) No GeoGebra plote os objetos *m_1=1*, *q_1=1*, *m_2=1*, *q_2=1* (tecle enter após cada uma das entradas), exiba esses objetos e em seguida digite as equações r:*y=m_1*x+q_1* e s:*y=m_2*x+q_2*, em seguida:

a) Varie o coeficiente *q_2*, o que podemos conjecturar sobre as soluções do sistema;

b) Varie o coeficiente *m_2*, o que podemos conjecturar sobre as soluções do sistema.

19) Determine condições sobre os coeficientes para que o sistema $\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases}$ seja:

a) Possível e determinado;

b) Indeterminado;

c) Impossível.

20) Determine condições sobre os coeficientes para que o sistema $\begin{cases} y=m_1x+q_1 \\ y=m_2x+q_2 \end{cases}$ seja:

a) Possível e determinado;

b) Indeterminado;

c) Impossível.

21) Quando um sistema de equações de 1º grau é possível e determinado quantas são as possíveis soluções?

22) No GeoGebra plote o objeto *m=1*, exiba esses objetos e em seguida digite as equações c:$x^2+y^2=4$ e s:$x+y=m$, em seguida varie o coeficiente m e escreva as possíveis soluções:

23) Seja o sistema $\begin{cases} x^2+y^2=4 \\ x+y=m \end{cases}$, determine para quais valores de m o sistema é:

a) Tangente;

b) Secante;

c) Externa.

24) No GeoGebra plote o objeto m=1, exiba esses objetos e em seguida digite as equações c:$y=x^2-2x+1$ e s:$y-x=m$, em seguida varie o coeficiente m e escreva as possíveis soluções:

25) Seja o sistema $\begin{cases} y=x^2-2x+1 \\ y-x=m \end{cases}$, determine para quais valores de m o sistema é:

a) Tangente;

b) Secante;

c) Externa.

26) Quais devem ser as condições sobre m nos exercícios 23 e 25 de forma que este seja indeterminado?