Sobre Definições em Cálculo: Discussões sobre a Construção do Conceito de Continuidade.

Marques Fredman Mescolin

PEMAT - UFRJ
2010

Universidade Federal do Rio de Janeiro
Instituto de Matemática
Programa de Pós-graduação em Ensino de Matemática
Mestrado em Ensino de Matemática

Sobre Definições em Cálculo: Discussões sobre a Construção do Conceito de Continuidade.

Marques Fredman Mescolin

Dissertação de Mestrado apresentada ao corpo docente do programa de Pós-graduação em Ensino de Matemática do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Ensino de Matemática.

Orientadora: Prof^a Claudia Coelho de Segadas Vianna.

Rio de Janeiro
Dezembro de 2010.

Universidade Federal do Rio de Janeiro
Instituto de Matemática
Programa de Pós-graduação em Ensino de Matemática
Mestrado em Ensino de Matemática

Sobre Definições em Cálculo: Discussões sobre a Construção do Conceito de Continuidade.

Marques Fredman Mescolin

Dissertação de Mestrado apresentada ao corpo docente do programa de Pós-graduação em Ensino de Matemática do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Ensino de Matemática.

Aprovada por:

____

Prof^a Dr^a. Claudia Coelho de Segadas Vianna
PEMAT - Instituto de Matemática – UFRJ
Orientadora / Presidente da Banca Examinadora

____

Prof. Dr. Marco Aurélio Palumbo Cabral
PEMAT - Instituto de Matemática – UFRJ

____

Prof. Dr. Victor Augusto Giraldo
PEMAT - Instituto de Matemática – UFRJ

____

Prof. Dr. Wanderley de Moura Rezende
Instituto de Matemática – UFF

Rio de Janeiro
Dezembro de 2010.

M578s Mescolin, Marques Fredman
2010 Sobre Definições em Cálculo: Discussões sobre a Construção do Conceito de Continuidade / Marques Fredman Mescolin – Rio de Janeiro: IM/UFRJ, 2010.
xiii, 108 f. ; 30cm.
Orientador: Claudia Coelho de Segadas Vianna.
Dissertação(Mestrado) — UFRJ/IM. Programa de Pós–graduação em Ensino de Matemática, 2010.
Referências Bibliográficas: f. 102 – 108.

1.Cálculo – Estudo e ensino - Tese. I. Vianna, Claudia Coelho de Segadas. II. Universidade Federal do Rio de Janeiro. Instituto de Matemática. III.Título

"Creio que o nó com relação ao ensino de matemática não está na proposição de idéias. O problema, a meu ver, parece estar na prática. Afinal, quem hoje há de dizer que não trabalha com problemas e desafios? Quem dirá que não considera os conhecimentos prévios dos alunos e não busca trabalhar a partir deles? Quem ousará afirmar que o conhecimento não é construído? Ou ainda, que não é preciso relacionar as idéias matemáticas, trabalhando a ampliação dos conceitos? A pergunta que permanece, entretanto, é quem de fato consegue trabalhar desta forma em sala de aula? Quem está conseguindo modificar a prática para além do discurso? Idéias existem. Porém não bastam. Formas de colocá-las em prática parecem ser o fundamental nesse momento."

(SZTAJN, 1999, p. 28)

Agradecimentos

Agradeço a Deus por ter cuidado de todas as coisas para que um grande sonho pudesse se tornar realidade, Dele e para Ele são todas as coisas.

À minha mãe, Lourdes, meu pai Wilson, minha irmã e sobrinhos, por compreender minhas ausências e me estimular nesta caminhada. À Gleice por compartilhar comigo deste ideal, com cumplicidade e paciência...

Ao Instituto de Matemática da UFRJ, particularmente ao Programa de Pós-graduação em Ensino de Matemática, por possibilitar uma oportunidade ímpar de formação acadêmica de qualidade, certamente fruto do comprometimento e empenho do seu corpo docente.

À professora Claudia Coelho de Segadas Vianna, orientadora deste trabalho, pela atenção que sempre foi dispensada, pelo carinho e paciência únicos e pelo exemplo de vida inspirador.

Aos membros da banca do exame de qualificação e defesa, professores Marco Aurélio Palumbo Cabral, Victor Augusto Giraldo e Wanderley de Moura Rezende, pela solicitude, sugestões e conversas sempre agradáveis, sinais evidentes de que podemos aprender todo o tempo...

A Rosi, Meiri, Leninha, Jardeni e Glorinha, Maria Inês e Cremilda pelo apoio irrestrito, sem o qual esta caminhada poderia ter sido ainda mais longa.

A minha amiga Paula pelos helps – sempre eficientes – com o inglês-matemático. Aos colegas da turma de 2008, particularmente a Mazé, Mirella e ao André, pelo companheirismo, poucas diversões e muitos momentos sérios... amigos que estarão pra sempre em minha lembrança!

RESUMO

Sobre Definições em Cálculo: Discussões sobre a Construção do Conceito de Continuidade

Marques Fredman Mescolin

Resumo da Dissertação de Mestrado submetida ao Programa de Pós-graduação em Ensino de Matemática do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro – UFRJ, como parte dos requisitos necessários à obtençãodo título de Mestre em Ensino de Matemática.

Resumo. Este trabalho busca discutir como as concepções espontâneas dos alunos podem contribuir para a construção do conceito de continuidade e ainda, como as atividades investigativas podem contribuir para motivar a participação dos alunos em turmas iniciais de cálculo. Para tanto, inicialmente é observado como a continuidade é definida em livros textos convencionalmente utilizados em universidades de nosso país e qual é sua relevância para tais cursos. Levantados os referenciais teóricos, foi proposto um roteiro didático, como ferramenta para possibilitar o estudo empírico que foi realizado com base nos testes escritos e observações realizadas durante a aplicação do roteiro. Por fim, apresentamos os resultados obtidos e as conclusões que inferimos a respeito das questões levantadas.

Palavras–chave. Continuidade, Concepções Espontâneas, Atividades de Investigação, Ensino de Cálculo.

ABSTRACT

Sobre Definições em Cálculo: Discussões sobre a Construção do Conceito de Continuidade

Marques Fredman Mescolin

Resumo da Dissertação de Mestrado submetida ao Programa de Pós-graduação em Ensino de Matemática do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro – UFRJ, como parte dos requisitos necessários à obtençãodo título de Mestre em Ensino de Matemática.

Resumo. This work is about how the spontaneous conceptions of students can contribute for the construction of the continuity concept and how research activities can help to motivate students' participation in initial groups of calculus. First, it is observed how continuity is defined in textbooks conventionally used in universities of our country, as well as its relevance for such courses. We reviewed the theoretical references, a didactic guide was considered, as a tool for the qualitative empirical study that was carried through on the basis of the written tests and comments made during the application of such. Finally, we present the results achieved and the conclusions that we infer regarding the raised questions.

Keywords. Continuity, Spontaneous Conceptions, Research Activities, Teaching of Calculus.

Sumário

Introdução **1**

1 Uma breve discussão a respeito do conceito de continuidade e sua apresentação em livros didáticos. **4**

1.1 Introdução 4

1.2 Concepções e imagens prévias dos estudantes 6

1.3 Definições 9

1.4 Exames de Livros Didáticos 11

1.5 Relevância do conceito de continuidade em um curso de cálculo de uma variável 16

1.6 Propostas para se trabalhar com a definição formal de continuidade . . . 27

1.6.1 Utilizando uma abordagem sobre aproximações de números reais e erros 27

1.6.2 Propriedades envolvendo ε's e δ's para funções não contínuas . . . 29

1.6.3 A metáfora da caixa azul 31

2 Atividades de Investigação e a Pesquisa sobre a Própria Prática **33**

2.1 Considerações a respeito da Pesquisa sobre a Própria Prática 34

2.2 Sobre as Atividades Investigativas 37

3 Informações Preliminares e Metodologia **40**

3.1 Sobre o IFRJ - Instituto Federal de Educação Ciência e Tecnologia do Rio de Janeiro e a implantação do curso de Licenciatura em Matemática no *Campus* Volta Redonda 41
3.2 Sobre a disciplina Pré-Cálculo e a aplicação das atividades 44
3.3 Instrumentos Metodológicos 45
3.4 Um questionário para coleta de dados 46
3.5 O roteiro didático 47
3.5.1 Introdução ao conceito e estabelecimento da definição 48
3.5.2 Fixação e aplicação da definição 52

4 Da aplicação das atividades **56**

4.1 Introdução 56
4.2 Aplicação e Análise do Questionário 57
4.3 Detalhamento das atividades da 1^a parte do roteiro didático 62
4.3.1 Análise da 1^a Questão 62
4.3.2 Algumas considerações 63
4.3.3 Análise da 2^a Questão 64
4.3.4 Algumas Considerações 65
4.3.5 Análise da 3^a Questão 67
4.3.6 Algumas Considerações 68
4.3.7 Análise da 4^a Questão 69
4.3.8 Algumas Considerações 70
4.3.9 Análise da 5^a Questão 71
4.3.10 Algumas Considerações 72
4.3.11 Análise da 6^a Questão 73
4.3.12 Algumas Considerações 77
4.4 Detalhamento das atividades da 2^a parte do roteiro didático 79
4.4.1 Análise da 1^a Questão 80

4.4.2 Algumas Considerações . . . 80

4.4.3 Análise da 2^a Questão . . . 83

4.4.4 Algumas Considerações . . . 83

4.4.5 Análise da 3^a Questão . . . 86

4.4.6 Algumas Considerações . . . 86

4.4.7 Análise da 4^a Questão . . . 87

4.4.8 Algumas Considerações . . . 88

4.4.9 Análise da 5^a Questão . . . 90

4.4.10 Algumas Considerações . . . 90

4.4.11 Análise da 6^a Questão . . . 93

4.4.12 Algumas Considerações . . . 94

4.4.13 Análise da 7^a Questão . . . 95

4.4.14 Algumas Considerações . . . 96

5 Considerações Finais 98

Referências Bibliográficas 104

Lista de Figuras

1.1 Linhas contínua e não contínua 12

1.2 Gráfico da função temperatura $T(x)$ 13

1.3 Gráfico da função $f(x) = \frac{1}{x}$, para $x \neq 0$ 15

1.4 Gráfico da função $f(x)$ 22

1.5 Gráfico da função definida por partes $g_1(x) = -1$ se $0 \leq x < \sqrt{2}$; $g_1(x) = 1$, se $\sqrt{2} \leq x \leq 2$. 24

1.6 Gráfico da função definida por partes $g_2(x) = \frac{1}{x}$ se $x \neq 0$; $g_2(x) = 0$ se $x = 0$. 25

1.7 Gráfico da função definida por partes $g_3(x) = x^2$ se $x < 1$; $g_3(x) = 0$ se $x \geq 1$. 26

1.8 Gráfico da função definida por partes $\phi(x) = x$ se $x \leq 1$; $\phi(x) = x + 1$ se $x > 1$. 30

1.9 Metáfora da caixa azul (CARVALHO & CARVALHO, 2006, p.18) 32

3.1 Grade Curricular do curso de Licenciatura em Matemática do IFRJ . . . 43

3.2 Plano da disciplina Pré-Cálculo 44

3.3 Gráfico da função definida por partes $h(x) = x^2 + 1$ se $x \leq 0$; $h(x) = x^3$ se $x > 0$ 49

3.4 Identificação de curvas contínuas 50

3.5 Identificação de curvas contínuas 50

3.6 Gráfico das funções $f : \mathbb{R} - \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$, com $f(x) = \dfrac{1}{x}$ e $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, com $g(x) = \frac{1}{x}$ se $x \neq 0$ ou $g(x) = 0$ se $x = 0$. 51

3.7 Gráfico da função maior inteiro $f(x) = [[x]]$. 52

3.8 Gráfico da função $f(x) = x^2 \quad \text{se} \quad x < 1; \quad 0 \quad \text{se} \quad x \geq 1$. 55

3.9 Gráfico da função $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, definida por $f(x) = x$. 55

4.1 Gráficos apresentados pela aluna Gisele para funções contínua e não contínua. 61

4.2 Gráficos apresentados pela aluna Ivone para funções contínua e não contínua. 61

4.3 Gráfico da função definida por partes $h(x) = x^2 + 1$ se $x \leq 0$, $h(x) = x^3$ se $x > 0$. 62

4.4 Esboço do gráfico apresentado pelo aluno Eduardo para a questão 2. . . . 66

4.5 Gráfico das funções $f(x) : \mathbb{R} - \{0\} \rightarrow \mathbb{R} - \{0\}$, com $f(x) = \dfrac{1}{x}$ e $g(x) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, com $g(x) = \frac{1}{x}$ se $x \neq 0$, $g(x) = 0$ se $x = 0$. 69

4.6 Gráfico da função maior inteiro $f(x) = [[x]]$. 71

4.7 Esboço do gráfico apresentado pela aluna Fabiana, como resposta à questão 6(a). 74

4.8 Esboço do gráfico apresentado pelo aluno Carlos, como resposta à questão 6(a). 74

4.9 Esboço do gráfico apresentado pelo aluno Beto, como resposta à questão 6(b). 75

4.10 Esboço do gráfico apresentado pela aluna Amanda, como resposta à questão 6(b). 76

4.11 Gráfico apresentado pelo aluno Carlos, como resposta à questão 6(b). . . 76

4.12 Esboço do gráfico apresentado pela aluna Fabiana, como resposta à questão 6(b). 77

4.13 Gráfico apresentado pela aluna Amanda, como resposta à 2^a questão. . . 84

4.14 Gráfico e apresentado pelo aluno Beto, como resposta à 2^a questão. . . . 85

4.15 Gráfico e apresentado pelo aluno Haroldo, como resposta à 2^a questão. . 85

4.16 Gráfico apresentado pela aluna Gisele, como resposta à questão 3(b). . . . 92

4.17 Gráfico apresentado pelo aluno Beto, como resposta à questão 3(b). . . . 93

4.18 Gráfico apresentado pelo aluno Beto, como resposta à questão 3(c). . . . 93

4.19 Gráfico da função definida por partes $f(x) = x^2$ se $x < 1$; $f(x) = 0$ se $x \geq 1$. 94

4.20 Gráfico da função $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, definida por $f(x) = x$. 96

Introdução

O ensino de Cálculo tem sido assunto de discussões importantes nas pesquisas em Educação Matemática atualmente em nosso país. Dados do relatório[1] de 2006 do GT 4 - Grupo de trabalho em Educação Matemática no Ensino Superior da SBEM - Sociedade Brasileira de Educação Matemática, apontam que cerca de 62,5% do total de trabalhos enviados para o III SIPEM (Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática), tratavam do ensino de Cálculo e de Análise. Além disto, diversos pesquisadores de instituições renomadas de nosso país produziram suas dissertações e teses versando sobre este tema.

Como nestes trabalhos, encontramos na comunidade acadêmica em geral, uma preocupação com os resultados dos alunos que cursam disciplinas de Cálculo, seja com relação ao rendimento, seja com relação ao nível de compreensão dos conceitos que apresentam. Neste sentido, motiva-se a busca por novas metodologias que discutam o ensino desta disciplina, com o intuito de obter resultados mais significativos para a aprendizagem da mesma. Esta é sem dúvida nossa maior motivação na elaboração deste trabalho.

Particularmente, acreditamos que o ensino do conceito de continuidade geralmente feito num primeiro semestre de cálculo em turmas de graduação, é tratado de maneira

[1] Relatório do GT4 - Educação Matemática no Ensino Superior, de novembro de 2006, disponível em www.sbem.com.br/files/RelatorioGT4.pdf.

superficial: pouco tempo é dedicado para tanto, apesar de ser este um conceito essencial na construção de teoremas importantes do cálculo. Além disto, quando observamos livros didáticos, podemos notar que a maior parte dos exercícios propostos para fixação do conceito se resumem a atividades do tipo determinar o valor de a para que a função seja contínua, sendo estas funções, em geral, de mais de uma sentença, nas quais em cada uma destas sentenças encontra-se o parâmetro a.

Neste sentido, nosso propósito com este trabalho consiste em:

1. Propor atividades de investigação que possibilitem a construção do conceito de continuidade junto a turmas de graduação, de forma a criar um ambiente em que seja possível a discussão entre o professor e os alunos de exemplos e não exemplos que possam solidificar a assimilação de tal conceito e estimular a participação dos alunos.

2. Verificar se as concepções espontâneas dos alunos, em particular a respeito do conceito de continuidade podem contribuir para a construção deste conceito.

3. Verificar até que ponto, os alunos utilizam suas concepções espontâneas ou a definição matemática de continuidade adotada para classificar uma função quanto à sua continuidade.

Deste modo, apresentamos no capítulo 1 uma breve revisão a respeito de como o conceito de continuidade é apresentado em livros didáticos utilizados frequentemente em universidades em nosso país e alguns teoremas e propriedades que revelam a importância deste conceito para os cursos de cálculo em uma variável, além de questões relacionadas às concepções espontâneas, como proposto por Cornu (1991).

No capítulo 2, discutimos concepções teóricas que norteiam a elaboração desta pesquisa, a saber, a Pesquisa sobre a Própria Prática e as Atividades de Investigação. No capítulo 3, apresentamos algumas informações preliminares a respeito da parte empírica e o roteiro didático elaborado para tanto; no quarto capítulo são detalhadas a aplicação e análise dos resultados obtidos e por fim, seguem as considerações finais e as conclusões que inferimos.

Capítulo 1

Uma breve discussão a respeito do conceito de continuidade e sua apresentação em livros didáticos.

con.ti.nui.da.de. *(lat continuitate) sf* **1** Qualidade daquilo que é contínuo. **2** Ligação ininterrupta das partes de um todo.

con.tí.nuo *(lat continuu) adj* **1** Em que não há interrupções; seguido.

1.1 Introdução

Nossa proposta com este capítulo consiste em discutir o conceito de continuidade de uma função real de variável real. Esta discussão se faz necessária, uma vez que o fundamento deste trabalho repousa neste conceito e além disto, quando tratamos de seu ensino, existem atualmente dois modos de se defini-la: o primeiro deles, mais frequentemente utilizado em livros de Análise, considera somente pontos que pertençam ao domínio da função, já o segundo, geralmente apresentado em livros de Cálculo de uma variável, considera pontos de acumulação dos conjuntos (ver definições 1 e 3, página 10).

A primeira destas definições, que considera exclusivamente pontos do domínio, pode ainda ser expressa de duas formas análogas, uma que utiliza a notação de limites e outra que utiliza ε's e δ 's[1] (ver definição 3 e 3(a) páginas 10 e 11). Apesar desta distinção, acreditamos que por vezes isto se torna uma questão exclusivamente didática, no sentido de qual seria o momento propício para se apresentar cada uma das suas "formas", uma vez que muitos professores acreditam não ser tão acessível ao aluno, num primeiro contato, a definição que utiliza ε's e δ's, assim como a própria noção de limite, sob a qual tais ε's e δ's estão embutidos.

Como a continuidade de uma função é definida ponto a ponto, a única circunstância em que pode haver alguma distinção entre as definições está no fato de se considerar ou não pontos nos quais a função não estaria definida. Isto sim pode modificar consideravelmente o fato da referida função ser ou não contínua nos casos em que tais pontos estejam ou não contemplados na definição que foi adotada. Ressaltamos ainda que isto não está ligado ao fato da definição ter sido expressa sob a forma de limite ou sob a forma de ε's e δ's.

Na verdade, concordamos com Lima (2001) quando defendemos a idéia de que não faz sentido algum discutir a continuidade de uma função num ponto onde sequer a mesma está definida. Entretanto, encontramos em diversos livros didáticos renomados de cálculo esta abordagem, inclusive no texto de Stewart (2005), que será utilizado na construção do roteiro didático deste trabalho.

De acordo com esta idéia Rosa (2010) afirma que:

[1]Neste trabalho, utilizaremos a expressão "Definição formal" para nos referirmos à definição expressa sob a forma de ε's e δ's.

> $[\cdots]$ se o ponto a não estiver no domínio de f, então essa definição não é aplicável, já que esses pontos não foram sequer examinados na definição de continuidade que adotamos. Assim, a frase "f é contínua em a" não é falsa nem verdadeira para esses pontos.
>
> (ROSA, 2010, p. 41)

Assim sendo, o que pode figurar como errôneo, seria a classificação de uma função como contínua ou descontínua que fere à definição adotada. Portanto, admitimos que, qualquer que seja a condição assumida para a definição, todo tipo de trabalho desenvolvido a respeito desta deve, por razões evidentes, buscar a não contradição da mesma, caso contrário poderíamos gerar conflitos desnecessários e empecilhos que entravam o bom entendimento do conceito por parte de nossos alunos.

Neste capítulo apresentamos: uma discussão a respeito das concepções prévias dos alunos, as definições de continuidade observadas em alguns livros, uma breve análise de como tal conceito é desenvolvido nestes, sua relevância para um curso de cálculo em uma variável e ainda, algumas sugestões para tornar a a discussão da definição expressa por meio de ϵ's e δ's mais acessível aos alunos.

1.2 Concepções e imagens prévias dos estudantes

> *"O que é uma boa definição? Para um filósofo ou um cientista é uma definição que se aplica a todos os objetos a serem definidos, e somente se aplica a eles; é aquela que satisfaz as regras de lógica. Mas em educação não é isso, é uma que pode ser entendida pelos alunos."*
>
> (POINCARÉ, 1908, p. 117), tradução nossa

Quando lemos ou ouvimos a palavra continuidade ou a palavra contínuo, uma imagem vem a nossa cabeça. Por mais que pensemos em situações distintas, nosso pensamento provavelmente conterá uma imagem, figura, desenho ou símbolo de algo que não contém nenhum tipo de interrupção, isto é, algo contínuo, ou alguma situação semelhante. De fato, estas idéias, representações ou símbolos que vêm à nossa mente quando há referência a algum conceito, fazem parte do que Cornu (1991) chama de *Concepções Espontâneas*. As concepções espontâneas são formadas pelas hipóteses e idéias intuitivas que os alunos trazem consigo a respeito de um determinado conceito e que ocorrem antes de um ensino formal: podem ser imagens, esquemas mentais, símbolos, situações, entre outras, com as quais o aluno já teve um certo tipo de experiência, seja esta na escola ou no seu dia-a-dia e por este motivo, leva consigo algum tipo de lembrança a respeito.

A discussão sobre qual tipo de informação prévia os alunos trazem consigo é tratada por diversos autores atualmente em Educação Matemática, como por exemplo Bairral (2006) e Tall & Vinner (1981).

Em Bairral (2006), as concepções espontâneas discutidas por Cornu (1991) são denominadas conceito. Neste trabalho, o autor propõe uma discussão relevante a respeito da distinção existente entre conceito e definição no campo científico. O autor afirma que os conceitos que utilizamos têm origem no senso comum, uma vez que são frutos das experiências e comparações pessoais de cada um, e portanto, não têm nenhum tipo de caráter científico. Uma citação interessante feita por este autor, que ilustra este fato, está no fragmento a seguir:

> A convivência entre conceito e definição não é propriedade da Matemática. Juristas definem que pessoa é o ser humano que nasce com vida; que amante é a mulher teúda e manteúda. Biólogos relacionam ph e colog; físicos definem que trabalho é força vezes deslocamento; que força é massa vezes aceleração; que organismo é um conjunto de órgãos. No entanto, todos temos nossos conceitos de pessoa, amante, trabalho, força, ph ou organismo.
>
> (BAIRRAL, 2006, p. 20)

Para Bairral (2006), conceito e definição podem ser distintos. Particularmente em matemática, para o autor, conceito é tudo aquilo que temos em mente a respeito de uma determinada expressão ou de um termo, enquanto as definições devem ser precisas e abstraídas de qualquer situação particular. Deste modo, encontramos uma forte relação entre o que Bairral (2006) define como conceito e o que Cornu (1991) chama de concepções espontâneas quando nos referimos às questões relacionadas ao ensino de matemática.

Ainda neste campo de discussão, encontramos em Tall & Vinner (1981), hoje um texto clássico, a apresentação da teoria de imagens de conceito e de definições de conceito. Esta teoria refere-se à estrutura cognitiva que um indivíduo possui associada a um conceito (a imagem de conceito), que por vezes pode não ser totalmente coerente com a definição formal de um conceito. Estes autores, tratam a noção de imagem de conceito no fragmento seguinte:

> Nós usaremos o termo *imagem de conceito* para descrever a estrutura cognitiva total associada a um conceito, que inclui todas as figuras mentais, processos e propriedades associados. Ela é construída ao longo dos anos através de experiências de todos os tipos, mudando enquanto o indivíduo encontra novos estímulos e amadurece.
>
> (TALL & VINNER, 1981, p. 152), tradução nossa, grifo dos autores

Assim, podemos afirmar que uma imagem de conceito é caracterizada não necessariamente pela definição de um conceito, mas pela forma como o indivíduo encara o conceito e as imagens que podem ser associadas a ele, e com isto, se enriquece à medida que ocorre a própria maturação da pessoa e que esta vivencia novos tipos de experiências.

Podemos também observar uma estreita relação entre as concepções espontâneas de Cornu (1991) e as imagens de conceito de Tall & Vinner (1981): defendemos a idéia que as imagens de conceito incluem as concepções espontâneas e ainda as idéias que cada aluno associa a uma definição apresentada, por meio de seu ensino formal.

Uma outra consideração importante feita por Cornu, (1991) sobre as concepções espontâneas, está no uso pedagógico destas. Ao tratar do ensino de Limites, o autor defende que este não se inicia num "território virgem", uma vez que trazemos idéias intuitivas que podem vir até mesmo do uso coloquial desta expressão. Adiante o autor afirma que

> [...] ao contrário do que muitos professores imaginam, as concepções espontâneas não desaparecem quando o aluno participa de uma aula de matemática. Elas se misturam ao conhecimento recém adquirido, que vai modificando-as e adaptando-as para formar as concepções pessoais de cada estudante.
>
> (CORNU, 1991, p. 154), tradução nossa

Neste sentido, encontramos uma consideração pertinente, quando se fala em considerar tais idéias que os alunos trazem consigo, quando nos propomos a introduzir uma definição em matemática, uma vez que certamente podemos tornar uma definição, pelo menos mais próxima e mais familiar aos mesmos. Entretanto, devemos estar atentos para o fato de que o ensino em si não deve se encerrar com tais concepções espontâneas, mas somente se apoiar nestas como agente facilitador à compreensão, buscando o aprimoramento destas, aproximando-as do conceito, pois estas por si só podem gerar erros conceituais ou comportar concepções enganosas. Esta é uma idéia que defenderemos neste trabalho: que é necessário aproximar nossos alunos de certos conceitos[2] antes de discuti-los sob uma abordagem matemática formal, mas utilizando estratégias que possibilitem a introdução do conceito de forma prudente e que forneça adiante elementos para uma construção mais sólida deste.

1.3 Definições

Como vimos, a única circunstância na qual as definições podem diferir é o fato de um ponto a no qual se pretende analisar a continuidade ser um ponto qualquer ou um ponto que pertence ao domínio da função considerada. Devido a esta diferença estas definições não são equivalentes.

[2]Utilizaremos daqui em diante, a palavra conceito no sentido de definição em matemática, diferentemente do sentido que encontramos no texto de Bairral (2006).

Seguindo a primeira idéia, temos a seguinte definição:

Definição 1: Uma função f é contínua num ponto $x = a$ se

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

Esta definição pode ser encontrada em Spivak(1996), Stewart(2005), Anton(2005) e Swokowski(1983).

Idêntica a esta, mas escrita sob a forma de três condições é a definição seguinte:

Definição 2: Dizemos que uma função f é contínua num ponto $x = a$ se e somente se as seguintes condições forem válidas:

1. $f(a)$ é definido,
2. $\lim_{x \to a} f(x)$ existe e
3. $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Encontramos esta definição em Munem & Foulis (2003) e em Leithold (1994).

Fundamentando-se na idéia de que o ponto $x = a$ deve pertencer ao domínio da função, temos a última definição que apresentamos:

Definição 3: Uma função $f : X \to \mathbb{R}$, definida no conjunto $X \subset \mathbb{R}$ é contínua num ponto $a \in X$ quando $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Lima (2001), destaca que

> Ao contrário da definição de limite, só faz sentido indagar se f é contínua num ponto a quando $a \in X$.
>
> (LIMA, 2001, p. 175)

Destacamos ainda que todas as três definições descritas podem ser escritas na forma de ϵ's e δ's. Particularmente, a definição 3 seria reescrita da seguinte forma:

> **Definição 3(a):** Uma função $f : X \to \mathbb{R}$, definida no conjunto $X \subset \mathbb{R}$ é contínua num ponto $a \in X$ quando para todo $\varepsilon > 0$ dado arbitrariamente, pudermos achar $\delta > 0$ tal que se $x \in X$, $|x - a| < \delta$ então $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

Esta pode ser encontrada em Lima (2001), Lima (2003), Guidorizzi (2004) e Neri e Cabral (2007).

Encontramos em Lima (2001) a seguinte afirmação:

> Seja agora $a \in X$ um ponto de acumulação de X. Então $f : X \to \mathbb{R}$ é contínua no ponto a, se e somente se, $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$. Isto reduz essencialmente a noção de função contínua à de limite.
>
> (LIMA, 2001, p. 175)

1.4 Exames de Livros Didáticos

Apresentamos nesta seção uma breve análise da forma como o conceito de continuidade é tratado em livros didáticos. Nosso critério ao selecioná-los considerou em parte nossa experiência docente e informações acerca de quais são aqueles mais utilizados hoje nas universidades públicas localizadas no Rio de Janeiro. Chamamos atenção nesta secção para pontos que julgamos interessantes no desenvolvimento do assunto em questão em cada livro considerado.

Em Olivero & Cardim (2009), livro de Cálculo que atualmente é utilizado nos cursos de gradução à distância do Consórcio CEDERJ[3], encontramos uma introdução a respeito do conceito de continuidade. Os autores iniciam este assunto afirmando que:

[3] O CEDERJ é um consórcio das universidades públicas localizadas no estado do Rio de Janeiro, a saber, UFF, UFRJ, UERJ, UENF, UFRRJ e UNIRIO, que ministra cursos de gradução na modalidade semipresencial. Dentre os cursos oferecidos, a licenciatura em Matemática e todas as demais disciplinas da área de matemática dos outros cursos, foram criadas e nisto incluímos a elaboração do material didático fornecido aos alunos, pela UFF - Universidade Federal Fluminense. Detalhes sobre o curso de Cálculo I oferecido pela UFF no âmbito do consórcio CEDERJ podem encontrados em Pinto (2008).

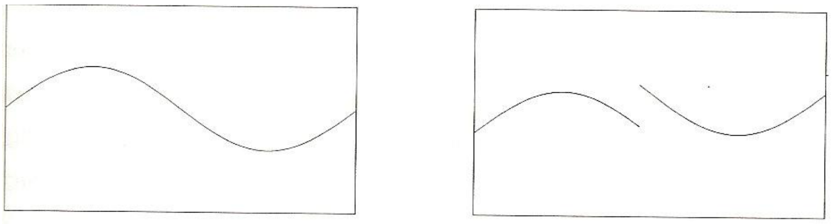


Figura 1.1: Linhas contínua e não contínua

> [...] a noção de *continuidade* não é exclusiva dos matemáticos. Cada um tem uma boa idéia do que esta palavra quer dizer. Voce não terá nenhuma dificuldade em escolher, entre as duas figuras (figura 1.1), aquela que representa uma linha contínua.
>
> (OLIVERO & CARDIM, 2009, p. 97), grifo dos autores.

Apesar desta ilustração dada inicialmente para se iniciar uma discussão sobre o uso de um termo cotidianamente, devemos ter em mente que uma definição em matemática em geral, não assume o mesmo sentido para situações da vida diária. Assim, nosso trabalho propõe focar as concepções espontâneas dos alunos como elemento introdutório e de fomento à discussão de uma definição em matemática.

Um exemplo colocado inicialmente por estes autores é o seguinte: Suponha que um fio de um certo metal ocupa o intervalo $[0, 60]$ da reta real. A cada posição $x \in [0, 60]$ do fio, em centímetros, associamos $T(x)$ a sua temperatura, medida em graus Celsius. Considerando que o metal é um meio que conduz calor com facilidade, uma possibilidade para o gráfico da função é apresentado pelos autores (Figura 1.2).

Com este exemplo, os autores afirmam que, com o gráfico da função $T(x)$ sugerido, "uma *pequena* variação na posição corresponderá a uma *pequena* variação na temperatura" (p. 98, grifos dos autores), e com isto, a questão que se coloca seria como escrever esta propriedade em termos matemáticos, uma vez que o uso do termo "pequena" pode representar grandezas distintas de acordo com quem faz tal afirmação, isto é, nas palavras dos autores, "pequena variação é um conceito relativo".

Apresentamos na secção 1.3 a **Definição 1**, que é adotada por diversos autores, como por exemplo, Stewart(2005), Anton(2005), Swokowski(1983) e Spivak(1996). Este último

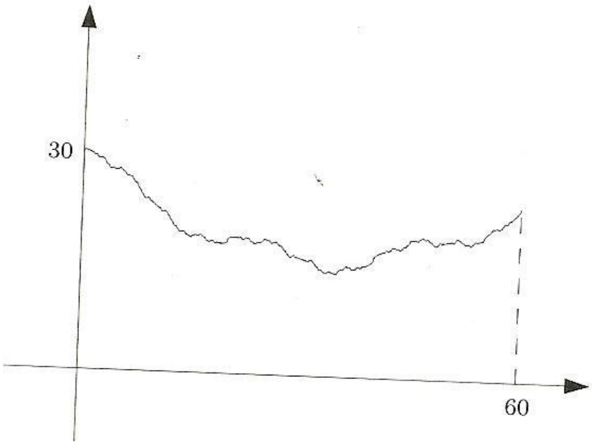


Figura 1.2: Gráfico da função temperatura $T(x)$

afirma em seu texto que "dada uma função qualquer, não necessariamente a propriedade

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

é satisfeita" (p.89), e que isto pode ocorrer por vários motivos:

- f pode não estar definida em $x = a$;
- o limite de $f(x)$ quando x tende a a pode não existir;
- e mesmo existindo tal limite ele pode não coincidir com $f(a)$.

Deste modo, Spivak (1996) propõe *qualificar honrosamente* (nos próprios termos utilizados pelo autor) as funções que satisfazem tal propriedade, tal qualificação seria a continuidade.

É importante observar que Spivak (1996) não faz referência alguma sobre $x = a$. Apesar disto, para que esta definição faça sentido, afirma que estão implícitas três condições, que de fato resolveriam os três problemas anteriores listados por Spivak(1996); tais condições são as seguintes:

1. é necessário que $f(a)$ exista, e logo que a função f esteja definida no ponto $x = a$. Assim, devemos ter $a \in \mathrm{Dom}(f)$;

2. é necessário que $\lim_{x \to a} f(x)$ exista, isto é, os limites laterais em $x = a$ devem coincidir, ou seja $\lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^-} f(x)$;

3. por fim, devemos ter que o limite considerado anteriormente assuma o valor $f(a)$ e portanto, $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.

De maneira semelhante à apresentação da definição dada anteriormente, Leithold (1994) e Munem & Foulis (2003), definem continuidade incluindo tais condições em sua definição, como pode ser observado na **Definição 2**.

Além destas, encontramos ainda as **Definições 3, 3(a)**, que se diferenciam das anteriormente apresentadas pelo fato de analisar a continuidade de uma função somente em um ponto $x \in \mathrm{Dom}(f)$. Tais definições, como foi colocado, podem ser observadas em Lima (2001, 2003), Guidorizzi (2004) e Neri & Cabral (2007).

Enfatizamos que não temos neste trabalho a preocupação de categorizar as definições e tampouco eleger uma correta. Defendemos a idéia de que ao optar por uma definição, todo trabalho desenvolvido em sala de aula, deve ser coerente com esta.

Ilustramos esta afirmação com os dados encontrados em Tall & Vinner (1981), no qual são realizados relatos a respeito de uma pesquisa onde 41 alunos de cursos de graduação foram questionados se uma determinada função era ou não contínua. Uma das funções dadas (juntamente com seu gráfico), foi a função $f(x) = \dfrac{1}{x}$, para $x \neq 0$.

Dos alunos que participaram desta pesquisa, 35 responderam que esta função não é contínua. Outros 6 responderam que ela é contínua. A pergunta que colocamos é a seguinte: quantos alunos responderam à questão corretamente? Foram 35 alunos ou 6 alunos?

Convém observar que para os autores da referida pesquisa, a função $f(x) = \dfrac{1}{x}$, para $x \neq 0$ é contínua, uma vez que eles defendem a idéia, descrita anteriormente, que não faz sentido discutir a continuidade de uma função num ponto em que ela não está definida. Apesar disto, o livro texto utilizado por estes alunos que não consta na referência bibliográfica do texto em questão, afirma que como a função não está definida em um ponto,

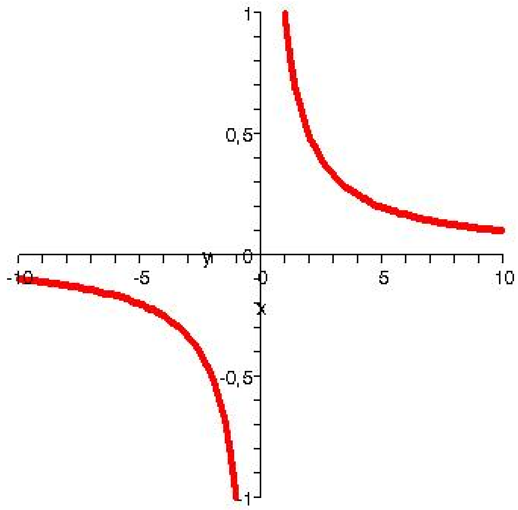


Figura 1.3: Gráfico da função $f(x) = \frac{1}{x}$, para $x \neq 0$

apresenta uma descontinuidade neste. Um fato curioso está em uma nota de rodapé deste livro:

> É habitual, embora não seja estritamente correto, dizer que a função é descontínua em $x = 0$. Na verdade ela não é nem contínua nem descontínua, porque não está definida. Poderíamos definir $f(0) = 1$, ou qualquer outro número, mas nós não podemos escolher esse número de modo a tornar $f(x)$ contínua.
>
> (SMP, Livro 1, Capítulo 5, p. 133 apud TALL & VINNER, 1981, p. 14), tradução nossa

Se observarmos esta questão sob o enfoque das definições apresentadas nesta secção, poderíamos afirmar que $f(x) = \dfrac{1}{x}$, para $x \neq 0$ é descontínua segundo as definições dadas por Stewart (2005), Anton (2005) e Munem & Foulis (2003), entretanto seria contínua segundo as definições de Lima (2001), Guidorizzi (2004) e Neri & Cabral (2007).

Também encontramos frequentemente em muitas abordagens, sejam elas livros didáticos ou até mesmo em exposições feitas por professores, concepções do tipo "para uma função ser contínua, seu gráfico deve ser traçado sem retirar o lápis do papel" ou "uma função é contínua quando seu gráfico não possui saltos" ou "o gráfico de uma função contínua não pode possuir buracos", o que por vezes pode não fazer sentido de acordo com a definição adotada. Um bom exemplo disto, é a função $f(x) = \dfrac{1}{x}$, cujo gráfico esboçado na figura 1.3 não pode ser traçado sem se retirar o lápis do papel.

Um outro exemplo a respeito desta discussão pode ser encontrado em Neri & Cabral (2007). Os autores propõem "acabar com o mito, geralmente apresentado nos cursos de Cálculo I, que diz que funções contínuas são aquelas que podem ser traçadas sem tirar o lápis do papel" (pp. 107). Assim, consideram a função $g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, dada por $g(x) = x$ e propoem que o leitor se convença que seu gráfico não pode ser traçado sem retirar o lápis do papel, construindo um esboço. Em seguida, os autores demonstram, considerando que dado $\varepsilon > 0$ e $n \in \mathbb{N}$, tomando $\delta = \dfrac{1}{2}$, se $x \in \mathbb{N}$ e $|x - n| < \dfrac{1}{2} = \delta$, então $x = n$ e logo, $|g(x) - g(n)| = 0 < \varepsilon$, isto é, g é contínua para todo $n \in \mathbb{N}$.

1.5 Relevância do conceito de continuidade em um curso de cálculo de uma variável

Nesta secção nos propomos a descrever definições e teoremas que com frequência são apresentados em livros didáticos e que utilizam o conceito de continuidade.

É bem comum nos livros de cálculo que, em seguida ao conceito de continuidade, sejam apresentados os teoremas sobre operações com funções contínuas, como por exemplo:

[Teorema 1]

Se f e g forem funções contínuas em um número a, então:

1. $f + g$ será contínua em a;
2. $f - g$ será contínua em a;
3. $f \cdot g$ será contínua em a;

4. $\dfrac{f}{g}$ será contínua em a, desde que $g(a) \neq 0$.

(STEWART, 2005, p.128)

Demonstra-se a primeira parte deste teorema, utilizando uma propriedade de soma de limites: se f e g são funções contínuas em um ponto $x = a$, então $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$ e $\lim\limits_{x \to a} g(x) = g(a)$, assim,

$$\lim_{x \to a}[f(x) + g(x)] = f(a) + g(a),$$

que é a condição para que a função $f + g$ seja contínua em $x = a$.

Os demais itens deste teorema seguem uma demonstração análoga, e como tal, são deixados pelos autores de alguns livros didáticos, para o leitor a título de exercício. Com este, se torna possivel a afirmação do teorema seguinte:

[Teorema 2]

(a) Qualquer polinômio é contínuo em toda parte; ou seja é contínuo em $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$ (b) Qualquer função racional é contínua sempre que estiver definida; ou seja, é contínua em seu domínio.

(STEWART, 2005, p. 127)

cuja demonstração decorre imediatamente do teorema 1 apresentado anteriormente.

Encontramos em Stewart (2005), a exposição do seguinte

[Teorema 3]

Os seguintes tipos de funções são contínuas em todo o número de seus domínios: polinômio, funções racionais, funções raízes, funções trigonométricas, funções trigonométricas inversas, funções exponenciais, funções logarítmicas.

(STEWART, 2005, p. 129)

Entretanto, o autor não realiza nenhum tipo de demonstração ou comentário sobre o mesmo. Leithold (1999) desenvolve um roteiro interesssante para tratar da continuidade de algumas funções trigonométricas. Em um exemplo, determinado o limite trigonométrico fundamental, a saber, que $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$ o autor estabelece o teorema seguinte:

[Teorema 4]

(a) A função seno é contínua em 0. (b) A função co-seno é contínua em 0.

(LEITHOLD, 1999, p. 119)

Este autor demonstra que as funções seno e cosseno são contínuas em todo o conjunto dos números reais utilizando o

[Teorema 5]

$\lim\limits_{x\to a} f(x)=L$ se e somente se $\lim\limits_{t\to 0} f(t+x)=L$.

(LEITHOLD, 1999, p. 71)

De fato, pretende-se mostrar que $\lim\limits_{x\to a}\sin x=\sin a$ ou de maneira equivalente pelo teorema 5, que $\lim\limits_{t\to 0}\sin(t+a)=\sin a$. Temos que

$$\lim_{t\to 0}\sin(t+a)=\lim_{t\to 0}(\sin t\cdot\cos a+\cos t\cdot\sin a)$$

$$\Downarrow$$

$$\lim_{t\to 0}\sin t\cdot\lim_{t\to 0}\cos a+\lim_{t\to 0}\cos t\cdot\lim_{t\to 0}\sin a=0\cdot\cos a+1\cdot\sin a=\sin a.$$

Analogamente para a função cosseno, temos que

$$\lim_{t\to 0}\cos(t+a) = \lim_{t\to 0}(\cos t \cdot \cos a - \sin t \cdot \sin a)$$

$$\Downarrow$$

$$\lim_{t\to 0}\cos t \cdot \lim_{t\to 0}\cos a - \lim_{t\to 0}\sin t \cdot \lim_{t\to 0}\sin a = 1 \cdot \cos a - 0 \cdot \sin a = \cos a.$$

Assim, as funções seno e cosseno são contínuas para qualquer número real.

Encerrada a discussão a respeito da continuidade das funções reais elementares, é natural encontrarmos em seguida a apresentação de teoremas que fornecem resultados a respeito da continuidade de funções compostas. Stewart (2005) enuncia o seguinte

> **[Teorema 6]**
>
> Seja f contínua em b e $\lim_{x\to a} g(x) = b$, então, $\lim_{x\to a} f(g(x)) = f(b)$. Em outras palavras,
>
> $$\lim_{x\to a} f(g(x)) = f(\lim_{x\to a} g(x))$$
>
> (STEWART, 2005, p. 129)

A demonstração deste teorema não é apresentada pelo autor. Encontramos tal demonstração em Leithold (1999, p.108), que utiliza a definição formal de continuidade para tanto. Anton (2005), que também não exibe a demonstração do referido teorema, em se referindo a este afirma que

> Um símbolo de limite pode passar pelo sinal de função desde que o limite da expressão dentro deste sinal exista e a função seja contínua neste limite.
>
> (ANTON, 2005, p. 152)

Convém observarmos que o teorema 6 apresentado consiste na verdade em uma ferramenta para a construção do teorema que trata da continuidade de uma função composta em um ponto:

[Teorema 7]

Se a função g for contínua em a e a função f for contínua em $g(a)$, então a função composta $f \circ g$ será contínua em a.

(LEITHOLD, 1999, p. 108)

A demonstração deste resultado é simples e pode ser obtida tanto em Stewart (2005), quanto em Leithold (1999). Ela depende somente da definição de continuidade (não necessariamente a formal) e do teorema 6 apresentado anteriormente. Vejamos:

Prova: Como g é contínua em a, $\lim_{x \to a} g(x) = g(a)$ e como f é contínua em $g(a)$, podemos aplicar o teorema 8, de onde a igualdade $\lim_{x \to a}(f \circ g)(x) = \lim_{x \to a} f(g(x))$, pode ser reescrita como $\lim_{x \to a}(f \circ g)(x) = f(\lim_{x \to a} g(x)) = f(g(a)) = (f \circ g)(a)$.

Apesar de até o momento estarmos tratando da continuidade de uma função exclusivamente em um ponto, esta pode ser estendida para um intervalo. Vejamos inicialmente a definição 4:

[Definição 4]

Uma função f é **contínua à direita de um número** a se $\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$ e f é **contínua à esquerda de** a se $\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$.

(STEWART, 2005, p. 126), grifos do autor.

[Definição 5]

Uma função f é **contínua em um intervalo** se for contínua em todos os números deste intervalo. (Se f for definida somente de uma lado do extremo do intervalo, entendemos *continuidade* no extremo como *continuidade à direita* ou *à esquerda*).

(STEWART, 2005, p. 126), grifos do autor.

De maneira análoga às definições apresentadas, podemos estabelecer a continuidade de funções em intervalos abertos.

Vejamos agora alguns teoremas nos quais a continuidade é considerada como uma condição para a obtenção de outros resultados. Nossa maior inspiração em fazer estas observações está em Spivak (1996), no capítulo 8 intitulado "Three hard theorems", na abordagem utilizada por este autor e no destaque que é atribuído às questões referentes à continuidade para a exposição destes. Descrevemos os "Three hard theorems" nos teoremas 8, 9 e 10 a seguir:

> **[Teorema 8]**
>
> Se f é contínua em $[a, b]$ e $f(a) < 0 < f(b)$, então existe algum $x \in [a, b]$ tal que $f(x) = 0$.
>
> (SPIVAK, 1996, p. 141) Tradução nossa.

> **[Teorema 9]**
>
> Se f é contínua em $[a, b]$ então f é limitada superiormente em $[a, b]$, isto é, existe um número N tal que $f(x) \leq N$, para todo $x \in [a, b]$.
>
> (SPIVAK, 1996, p. 141) Tradução nossa.

> **[Teorema 10]**
>
> Se f é contínua em $[a, b]$ então existe um número $c \in [a, b]$, tal que, $f(c) \geq f(x)$ para todo $x \in [a, b]$.
>
> (SPIVAK, 1996, p. 141) Tradução nossa.

O teorema 8 apresentado anteriormente, é um caso particular do Teorema do Valor Intermediário. Como podemos observar na figura 1.4 seguinte, geometricamente isto significa que se uma função é contínua num intervalo e neste mesmo intervalo assume sinais distintos em suas extremidades, então, é necessário que a mesma tenha interceptado o eixo x (e ter $f(x) = 0$) em pelos menos um ponto.

Assim , tal teorema é muito útil na determinação de intervalos de existência das raízes de uma função ou de uma equação. Por exemplo, dada a equação $x^3 + 3x^2 + x - 3 = 0$, podemos tomar a função $f(x) = x^3 + 3x^2 + x - 3$; deste modo, $f(0) = -3 < 0$ e $f(1) = 2 > 0$. Portanto, pelo teorema 10, existe pelo menos um $x \in [0, 1]$ tal que $f(x) = 0$, isto é, existe pelo menos uma raiz para a equação dada no intervalo $[0, 1]$. Podemos constatar este fato observando o gráfico de $f(x)$.

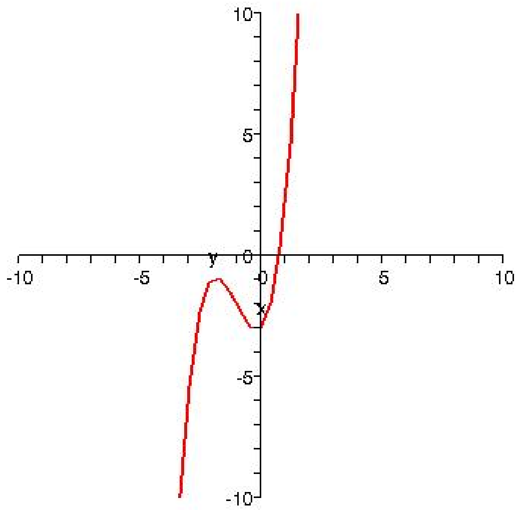


Figura 1.4: Gráfico da função $f(x)$

Apresentamos a seguir o Teorema do valor intermediário, que generaliza o resultado descrito no teorema 8:

[Teorema 11]

Suponha que f seja contínua em um intervalo fechado $[a, b]$ e seja N um número qualquer entre $f(a)$ e $f(b)$, onde $f(a) \neq f(b)$. Então existe um número c em (a, b) tal que $f(c) = N$.

(STEWART, 2005, p. 131)

Como decorrência do teorema 8 (e da sua generalização, o Teorema do Valor Intermediário), SPIVAK (1996) apresenta os seguintes teoremas:

[Teorema 12]

Todo número positivo possui uma raiz quadrada. Em outras palavras, se $\alpha > 0$ então existe algum número x tal que $x^2 = \alpha$.

[Teorema 13]

Se n é ímpar, então qualquer equação $x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0 = 0$ possui uma raiz.

[Teorema 14]

Se n é par e $f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$, então existe um número y tal que $f(y) \leq f(x)$ para todo x.

(SPIVAK, 1996, p. 146-150)

Ainda a respeito dos "Three hard theorems", Spivak (1996) afirma que *se a continuidade deixa de se cumprir em só um ponto, as conclusões podem ser incertas* (p. 142). As funções dadas nos exemplos a seguir ilustram esta afirmação:

Exemplo 1: $g_1(x) = \begin{cases} -1 & \text{se} \quad 0 \leq x < \sqrt{2}; \\ 1 & \text{se} \quad \sqrt{2} \leq x \leq 2. \end{cases}$

Spivak (p. 142) afirma que g_1 é contínua em todo ponto do intervalo $[0, 2]$ com excessão de $\sqrt{2}$ e além disto $-1 = g_1(0) < 0 < g_1(2) = 1$, mas não existe nenhum ponto

$x \in [0, 2]$ tal que $f(x) = 0$. Neste caso, a descontinuidade no ponto $\sqrt{2}$ faz com que a conclusão do Teorema 8 não ocorra. Este exemplo é interessante para explorar o Teorema do Valor Intermediário. O gráfico da função g_1 está na figura 1.5

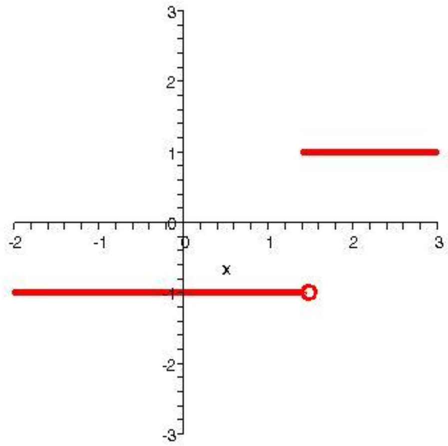


Figura 1.5: Gráfico da função definida por partes $g_1(x) = -1$ se $0 \leq x < \sqrt{2}$; $g_1(x) = 1$, se $\sqrt{2} \leq x \leq 2$.

Exemplo 2: $g_2(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & \text{se} \quad x \neq 0; \\ 0 & \text{se} \quad x = 0. \end{cases}$

Temos que g_2 é contínua em todo $[0, 1]$, exceto em $x = 0$, e não está limitada superiormente neste intervalo, uma vez que para todo $N > 0$ temos que $f(\frac{1}{2N}) = 2N > N$. A hipótese de continuidade no intervalo $[0, 1]$ não é satisfeita, assim não temos a garantia que f assuma um valor máximo neste intervalo e neste exemplo não assume. O gráfico da função g_2 está esboçado na figura 1.6.

Observamos inicialmente que segundo Spivak (1996), se uma função f não satisfaz à hipótese do teorema, as conclusões podem ser incertas, isto é, a conclusão tanto pode ser verdadeira quanto falsa. Não temos garantia alguma do resultado obtido. A respeito do teorema 8, notamos no exemplo 2, uma função que não é contínua no intervalo $[0, 1]$ e

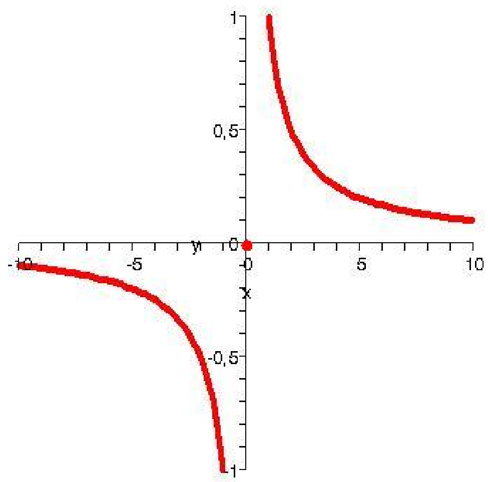


Figura 1.6: Gráfico da função definida por partes $g_2(x) = \frac{1}{x}$ se $x \neq 0$; $g_2(x) = 0$ se $x = 0$.

que não é limitada superiormente. Apresentamos a seguir, no exemplo 3 uma função que também não é contínua no intervalo $[0, 1]$ mas que é limitada neste intervalo. Entretanto esta última função não satisfaz à conclusão do teorema 10.

Exemplo 3: $g_3(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se} \quad x < 1; \\ 0 & \text{se} \quad x \geq 1. \end{cases}$

Observamos que g_3 é limitada superiormente no intervalo $[0, 1]$, uma vez que $f(x) < 1$, $\forall x \in [0, 1]$ e não tem máximo neste intervalo, ou seja, não existe $c \in [0, 1]$ tal que $f(c) \geq f(x)$, $\forall x \in [0, 1]$. O gráfico da função g_3 está esboçado na figura 1.7.

Encerramos esta secção, destacando um outro teorema muito importante (e certamente por isto recebe o nome de Fundamental) no qual a continuidade é indispensável: o Teorema Fundamental do Cálculo:

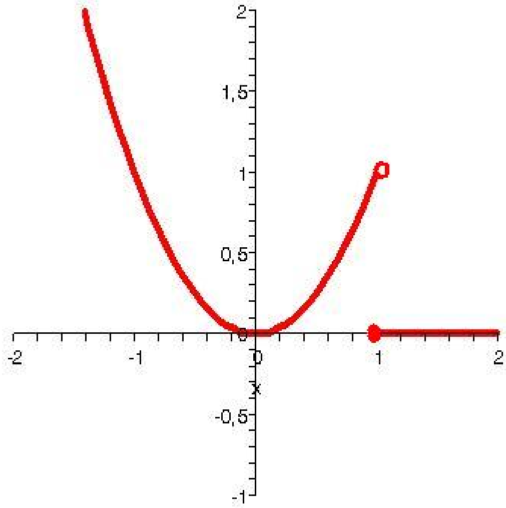


Figura 1.7: Gráfico da função definida por partes $g_3(x) = x^2$ se $x < 1$; $g_3(x) = 0$ se $x \geq 1$.

[Teorema 15]

Se f for contínua em $[a, b]$ então a função g definida por

$$g(x) = \int_a^x f(t)dt$$

com $a \leq x \leq b$, é contínua em $[a, b]$ e diferenciável em $]a, b[$ e $g'(x) = f(x)$.

(STEWART, 2005, p. 395)

Descrevemos um teorema que por vezes é chamado de segunda parte do Teorema Fundamental do Cálculo:

[Teorema 16] Se f for contínua em $[a, b]$ então $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$, onde F é qualquer antiderivada de f, isto é, uma função tal que $F' = f$.

(STEWART, 2005, p. 397)

1.6 Propostas para se trabalhar com a definição formal de continuidade

> *Um objeto matemático é perfeitamente caracterizado pela sua definição formal. Todas as suas propriedades e características serão desdobramentos lógicos de sua definição formal, deduzidas a partir do conjunto de postulados e proposições da teoria em que a definição insere-se, por meio de um sistema de regras de inferência pré-estabelecido. Tudo aquilo que pode ser dito do objeto será dito em decorrência da definição. Portanto, podemos dizer que a definição* ***esgota*** *completamente o objeto, isto é, de uma perspectiva estritamente formal, um objeto matemático é a sua definição.*
>
> (GIRALDO, 2004, p. 68), grifo do autor.

No primeiro capítulo alertamos para o fato de que muitos professores não expressam a definição de continuidade (e até mesmo a de limites) utilizando ε's e δ's por considerar não ser esta acessível aos alunos num primeiro momento. Apresentamos nesta secção, as propostas de alguns autores para se trabalhar com a notação de ε's e δ's. Destacamos que não faz parte das nossas questões de investigação a exploração de uma definição que seja expressa por meio de ε's e δ's, de forma que a apresentação desta secção se resume em descrever propostas na qual tal forma de definição possa ser discutida em sala de aula.

1.6.1 Utilizando uma abordagem sobre aproximações de números reais e erros

Nesta secção, nos propomos a descrever a abordagem proposta por Mello (1991), que também é motivada pela discussão a respeito do uso dos ε's e δ's em cursos iniciais de cálculo.

Sabemos que a noção de número real é acessível aos nossos alunos, uma vez que figura por exemplo, em diversos tipos de medida e assim, pode apresentar erros. Segundo Mello (1991),

> É natural admitir que ao lidarmos com um número real precisemos de alguma aproximação x de x_0: isso pode acontecer se x_0 for irracional ou racional de representação decimal infinita, ou mesmo com mais dígitos do que nos interessa considerar [...]
>
> (MELLO, 1991, p.107)

Considerando que a margem de erro seja δ, podemos afirmar que $\delta > 0$ e então que $|x - x_0| < \delta$. Assim, as funções reais podem ser consideradas como relações entre duas medidas deste tipo, o que poderia gerar dois tipos de questionamento:

> 1. ao calcular $y = f(x)$, onde x é uma aproximação de x_0, obteremos uma aproximação y de $y_0 = f(x_0)$?
> 2. sendo afirmativa a resposta a esta questão, qual seria a relação entre os erros cometidos no dado e no resultado?
>
> (MELLO, 1991, p.108)

Assim, como resposta à primeira questão a autora propõe a definição de função contínua em x_0:

> dada a margem de erro para o resultado, existe uma certa margem de erro tal que, respeitada na aproximação do dado e feito o cálculo da função para esta aproximação, obtém-se uma aproximação do resultado dentro da margem estabelecida. Ou seja
>
> *$y = f(x)$ é contínua em x_0 , se e só se, dado $\epsilon > 0$ (margem de erro para o resultado), existir $\delta > 0$ (margem de erro para o dado) tal que se x está no domínio de f e $|x - x_0| < \delta$, tenha-se $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.*
>
> (MELLO, 1991, p.109), grifos da autora.

1.6.2 Propriedades envolvendo ε's e δ's para funções não contínuas

> *É apenas quando nós vemos exemplos e contra-exemplos do objeto definido, quando podemos dizer o que este objeto é o que ele não é, quando nos tornamos conscientes de suas relações com que somos familiarizados, quando compreendemos a posição que o objeto definido tem dentro de uma teoria e quais são suas possíveis aplicações, então podemos dizer que entendemos algo sobre ele.*
>
> (SIERPINSKA, 1991, p.28), tradução nossa.

Nesta secção nossa proposta consiste em apresentar propriedades que envolvem ε's e δ's e tomar uma função que, apesar de não ser contínua em um ponto, atende às propriedades dadas neste mesmo ponto. Destacamos que esta, que pode ser uma abordagem interessante para se consolidar a aprendizagem da definição formal de continuidade, é apresentada em Giraldo (2008, pp. 1). O objetivo desta atividade é problematizar a definição de continuidade, mostrando porque a definição tem que ser exatamente a que foi apresentada (Definição 3(a)).

Tomemos a função $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por

$$\phi(x) = \begin{cases} x & \text{se} \quad x \leq 1; \\ x+1 & \text{se} \quad x > 1. \end{cases}$$

Na figura 1.8 apresentamos o gráfico da função $\phi(x)$:

Afirmamos inicialmente que esta função não é contínua em $x_0 = 1$ pois se tomarmos $\varepsilon = \dfrac{1}{2}$, por exemplo, qualquer que seja $\delta > 0$, existirá $x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$ tal que $\phi(x) \notin]\phi(x_0) - \varepsilon, \phi(x_0) + \varepsilon[$. Tomando $x = 1 + \dfrac{1}{2}\delta$ então $x \in]1 - \delta, 1 + \delta[$, mas $\phi(x) \notin]1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon[$.

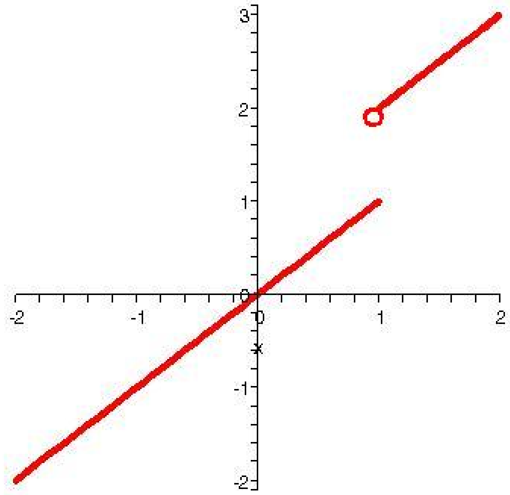


Figura 1.8: Gráfico da função definida por partes $\phi(x) = x$ se $x \leq 1$; $\phi(x) = x + 1$ se $x > 1$.

Consideremos então as seguintes propriedades, definidas para uma função real $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ em um ponto $x_0 \in D$:

$$\forall \delta > 0 \quad \exists \varepsilon > 0 \quad \text{tal que} \quad |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

e

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \text{tal que} \quad |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \Rightarrow |x - x_0| < \delta.$$

Para mostrar que $\phi(x)$ satisfaz à primeira propriedade em $x_0 = 1$, para todo $\delta > 0$, basta escolher $\varepsilon = \delta + 1$, de onde teremos que $x \in \,]1 - \delta, 1 + \delta[\,\Rightarrow \phi(x) \in \,]1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon[$.

Analogamente, mostraremos que $\phi(x)$ satisfaz à segunda propriedade em $x_0 = 1$, pois dado $\varepsilon > 0$ qualquer,

- se $\varepsilon \leq 1$, basta tomar $\delta = \varepsilon$, pois assim,

$$\phi(x) \in]1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon[\quad \Rightarrow \quad x \in]1 - \delta, 1 + \delta[;$$

- se $\varepsilon > 1$, tomamos $\delta = \varepsilon - 1$ e então

$$\phi(x) \in]1-\varepsilon, 1+\varepsilon[\Rightarrow x \in]1-\delta, 1+\delta[.$$

1.6.3 A metáfora da caixa azul

A "metáfora da caixa azul", assim nomeada, foi proposta por Carvalho e Carvalho (2006). Neste trabalho, os autores investigam algumas questões que surgiram de um projeto chamado "Demonstrações formais em matemática", desenvolvido no ano de 2005 na Universidade Estadual de Londrina. Uma das discussões tratadas neste projeto foi a respeito da continuidade de funções reais. Um dos enfoques centrais do projeto segundo os autores, está no fato de que os alunos eram estimulados a resolver exercícios no quadro para outros alunos e professores, assim, os mesmos eram questionados a cada decisão que tomavam na resolução de um problema e deveriam justificar as opções realizadas. Acreditamos ser este o motivo que levou os autores a buscar uma alternativa, digamos mais concreta, para se trabalhar o conceito de continuidade em sala de aula.

Com vistas à dificuldade na compreensão da definição formal de continuidade, os autores desenvolveram a metáfora da caixa azul, representada na figura 1.9.

O procedimento utilizado pelos autores consistia em solicitar ao aluno que escolhesse um ponto onde seria analisada a continuidade, que no caso da figura, está sendo representado pelo ponto a. Assim, os autores afirmam:

> Em seguida, que marcasse $(a, f(a))$. Da definição, deveríamos dar um ε que determinaria o intervalo $(f(a)-\varepsilon, f(a)+\varepsilon)$ no eixo y e encontraríamos um $\delta = \delta(\varepsilon)$ que determinaria o intervalo $(a-\delta, a+\delta)$ no eixo x, tal que para todo $x \in (a-\delta, a+\delta)$, teríamos $f(x) \in (f(a)-\varepsilon, f(a)+\varepsilon)$. Chamamos isto de "metáfora da caixa azul".

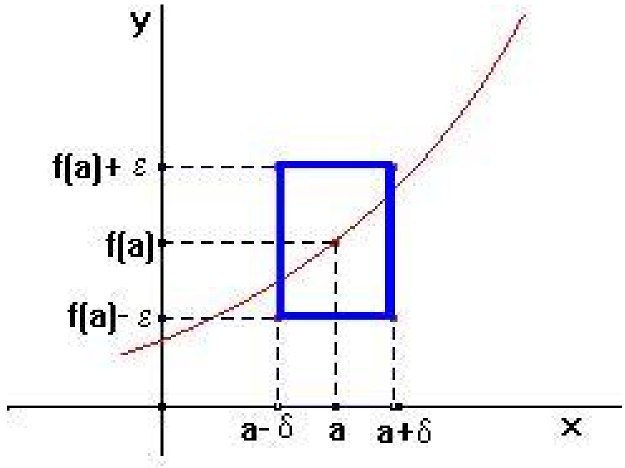


Figura 1.9: Metáfora da caixa azul (CARVALHO & CARVALHO, 2006, p.18)

(CARVALHO & CARVALHO, 2006, p.7), grifos dos autores.

De fato, a figura apresentada é convincente e se torna uma estratégia de grande valia, especialmente no que diz respeito à visualização de uma possível representação da definição de continuidade, uma vez que o gráfico da função dada, nas vizinhanças do ponto a estará sempre dentro da caixa, qualquer que seja o ε dado.

Capítulo 2

Atividades de Investigação e a Pesquisa sobre a Própria Prática

> [$\cdots$] a relação entre saber e a qualidade da aula de um professor não é direta e, muito menos, óbvia. Nem sempre aquele que sabe mais matemática é melhor professor desta disciplina [$\cdots$]. O professor de matemática precisa ser capaz de articular seu saber, pois aquilo que é apenas tacitamente aceito não pode ser explicitamente ensinado.
>
> (SZTAJN, 2002, p.23)

Neste capítulo, trazemos à discussão duas linhas de pesquisa que trazem subsídio a nossa proposta didática e que têm sido fortemente desenvolvidas pela comunidade acadêmica em Educação Matemática: as Atividades de Investigação, que são propostas nos trabalhos de Ponte (1998, 2000) e a Pesquisa sobre a Própria Prática, onde nossa referência maior está nos trabalhos de Frota (2006, 2007) e Palis (2008a, 2008b). Encontramos em Mescolin (2010) relatos de integração destas duas correntes objetivando a construção de conceitos matemáticos no ensino superior.

2.1 Considerações a respeito da Pesquisa sobre a Própria Prática

> *"Uma das principais vantagens da pesquisa em sala de aula é que ela é, por definição, relevante."*
>
> (CROSS, 1996, p. 46, apud PALIS (2009)).

A Pesquisa sobre a Própria Prática tem sido abordada em nosso país por alguns educadores e recentemente por educadores matemáticos. Há mais de uma terminologia para esta, a saber, pesquisa do professor, professor pesquisador, professor reflexivo, prático reflexivo, entre outras e seu objetivo consiste em abordar as situações da prática docente em sala de aula, com um olhar de pesquisador. Assim,

> O professor pesquisador de sua própria prática alia investigação e ensino: em face de um problema didático, submete-o a exame crítico, resolve-o da melhor maneira possível e divulga sua solução.
>
> (PALIS, 2009, p.203)

Deste modo, o material de pesquisa consiste na sala de aula e nas relações reais de aprendizagem que ocorrem nesta: levantada uma questão, o professor investiga suas hipóteses a respeito da aprendizagem de um determinado assunto em geral por meio de atividades diversas realizadas em sala de aula, registrando suas conclusões e utilizando-as inclusive, como fonte de informação e reflexão de sua prática docente.

Segundo Ponte (2002), no cotidiano escolar, o professor se depara com inúmeras situações problemáticas e as resolve utilizando principalmente sua experiência profissional, o que de certa forma pode gerar resultados nem sempre satisfatórios. Dada esta demanda, a pesquisa sobre a própria prática emerge como ferramenta ímpar de investigação que auxilie o professor a lidar com os problemas oriundos da sua prática, uma vez que

> Um ensino bem sucedido requer que os professores examinem continuamente a sua relação com os alunos, os colegas, os pais e o seu contexto de trabalho.
>
> (PONTE, 2002, p.2)

Existem ainda questões que tratam da legitimidade da Pesquisa sobre a Própria Prática; Frota (2006) defende que

> [...] a pesquisa sobre a própria prática precisa ficar mais robusta, através da melhor explicitação de seus problemas e da melhoria da qualidade dos instrumentos metodológicos de coleta e tratamento de dados. Entretanto, a pesquisa sobre a própria prática não pode se fortalecer ignorando a ética de ser uma pesquisa desenvolvida na sala de aula, envolvendo pessoas num processo de aprendizagem e não num experimento laboratorial, no qual é possível isolar e controlar variáveis.
>
> (FROTA, 2006, p.4)

Apesar da discussão a respeito da legitimidade da Pesquisa sobre a Própria Prática, é notável atualmente a necessidade de se pesquisar como se procede tanto o ensino quanto a aprendizagem, particularmente em matemática, no sentido de que isto pode contribuir para uma melhoria na qualidade do ensino, além de trazer aos professores pesquisadores material de pesquisa abundante. Além disto, os benefícios para a prática em sala de aula e consequentemente para o processo ensino-aprendizagem como um todo podem ser ilimitados: a Pesquisa sobre a Própria Prática leva o professor a pesquisar fontes teóricas que possam nortear a organização de seu trabalho, à elaboração de atividades que possibilitem estimular o potencial e a aprendizagem dos alunos, trazendo dinamismo e participação às aulas, além de fornecer subsídios para a reflexão da prática docente do professor, o que certamente produz contribuição sólida e duradoura para o ensino.

2.2 Sobre as Atividades Investigativas

"A investigação não é algo que se possa realizar de forma rotineira, sem paixão, sem um verdadeiro investimento intelectual e afetivo. Ou seja, a investigação não se realiza com espírito de funcionário, requer o espírito de um protagonista social."

(PONTE, 2002, p. 11)

Para que a pesquisa do professor sobre a própria prática possa produzir resultados relevantes, torna-se indispensável a participação ativa dos alunos, uma vez que, como foi colocado, as situações cotidianas de sala de aula, são objeto de estudo deste tipo de pesquisa. Inclusive, segundo Frota (2006) as atuais condições nas quais se encontram as salas de aula de Cálculo em nosso país, em geral não estimulam a participação e a produção dos alunos. Encontramos assim uma preocupação pertinente, quando coloca a necessidade de se "*romper com a inércia dominante das aulas de Cálculo, improdutiva para alunos e professores*", Frota (2006).

Uma das saídas propostas pela própria autora neste trabalho citado, é a utilização de atividades investigativas. Encontramos em Ponte (1998, 2000) descrições detalhadas sobre estas.

O processo de descoberta, fruto das atividades de investigação, ocupa papel importante no processo de ensino, uma vez que o foco passa a ser a ação do aluno durante a aquisição da aprendizagem (Cunha, 2009); assim, um dos propósitos das atividades de investigação está em envolver os alunos no processo de construção de seus conhecimentos.

Ponte, Brocardo e Oliveira (2006) defendem que o processo de investigação em matemática se constrói em 4 etapas, que envolvem: o reconhecimento e exploração da situação problema, o estabelecimento de conjecturas e afirmações sobre elas, o teste das conjecturas e por fim a justificação e avaliação do raciocínio empregado e do resultado obtido.

Podemos afirmar portanto que as atividades de investigação permitem ao aluno participar de um momento único de construção, o que propicia entendimento a respeito das razões que nortearam a construção do conhecimento, aproximando-os dos conceitos e levando-os a refletir sobre o seu uso.

Defendemos a idéia de que as atividades investigativas devem ser aquelas cujas resoluções tenham cunho menos procedimental e para as quais não encontramos uma res-posta imediata e assim, incitam o uso da intuição, estimulam testes de hipóteses, pensamentos por analogias, argumentação e justificação, entre outros. Mais que isto, acreditamos que as atividades de investigação têm a potencialidade de redesenhar a geografia da sala de aula e ainda redefinir a postura do professor, uma vez que se propõe um ambiente de participação e construção coletivas, um ambiente de investigação.

Com isto, acreditamos ser inerente à Pesquisa sobre a Própria Prática, o uso de atividades de investigação, conforme descreve Ponte (1998). Segundo este,

> Novas perspectivas chamam atenção para os processos investigativos envolvidos na criação do conceito matemático [...]. Há um consenso geral entre os educadores de que aprender matemática envolve, de uma maneira fundamental, fazer Matemática
>
> (PONTE, 1998, p. 134)

Assim, com as atividades de investigação os alunos se sentem no papel dos matemáticos: perante uma situação, objeto, fenômeno, eles buscam compreendê-lo, descobrir padrões, relações, semelhanças e diferenças, de forma a estabelecer generalizações e analogias.

Aliando as atividades de investigação em matemática, que buscam construir novos conceitos, à pesquisa realizada pelo professor-pesquisador em sala de aula, estabelecemos um elo que pode trazer grandes benefícios ao processo de ensino-aprendizagem em matemática. Segundo Frota (2006)

> [...] este entendimento tende a eliminar a cisão professor e pesquisador, na medida em que fazer matemática seria o que move um e outro, variando-se o foco, as questões e instrumentos de pesquisa.
>
> (FROTA, 2006, p. 134)

Portanto, encontramos nas atividades investigativas aliadas à pesquisa sobre a própria prática, elemento motivador para os alunos e para as aulas de Cálculo e de reflexão didática para o professor, potencialidades estas, que produzem estímulos ao ensinar e aprender desta disciplina. Essas duas linhas de pesquisa orientam a aplicação do roteiro didático deste trabalho.

Capítulo 3

Informações Preliminares e Metodologia

Nesta secção, descrevemos a metodologia que será utilizada na pesquisa e estabeleceremos os critérios de avaliação dos resultados obtidos, dentro dos objetivos e questionamentos já propostos, buscando discutir e responder às seguintes questões:

- Particularmente quanto ao conceito de continuidade, as atividades de investigação podem se tornar elemento motivador para a aula de Cálculo, de forma a incitar a participação dos alunos na realização das tarefas?

- As concepções espontâneas dos alunos, em particular a respeito do conceito de continuidade podem contribuir para a construção do conceito? Como evitar que as concepções espontâneas se tornem um obstáculo para aprendizagem, como já constatado na literatura de pesquisa?

- Até que ponto os alunos classificam uma função em contínua ou descontínua com base nas suas concepções espontâneas e não na definição de continuidade adotada?

Serão propostas atividades que, partindo das concepções espontâneas, promovam a construção e discussão do conceito de continuidade.

3.1 Sobre o IFRJ - Instituto Federal de Educação Ciência e Tecnologia do Rio de Janeiro e a implantação do curso de Licenciatura em Matemática no *Campus* Volta Redonda

Antes de discutirmos a aplicação das atividades deste trabalho, julgamos ser importante inicialmente, descrever a estrutura e funcionamento da Licenciatura em Matemática do IFRJ, nosso campo de trabalho. Destacamos que uma das condições propostas pelo MEC para a transformação dos antigos Centros Federais de Educação Tecnológica (CEFET's) em Institutos Federais de Educação, Ciência e Tecnologia (IFET's) é a implantação de cursos de graduação, em especial as Licenciaturas, assegurando que 20% das vagas oferecidas em cada instituição sejam destinadas a estas Licenciaturas. Neste sentido, no campus recentemente inaugurado de Volta Redonda, deu-se início no primeiro semestre do ano de 2009 a primeira turma dos cursos de Licenciatura em Matemática e Licenciatura em Física, que visam suprir uma demanda de formação de professores nestas áreas, que atualmente é escassa em especial fora dos grandes centros urbanos.

Apresentamos a seguir alguns dados a respeito do curso de Licenciatura em Matemática oferecido pelo IFRJ; tais informações foram obtidas em CEFETEQ (2006). Tal curso pertence à área de conhecimento de Ensino de Ciências e Matemática, sendo ofertado de forma presencial. É organizado semestralmente, nos quais os alunos se matriculam por sistema de créditos. O turno de funcionamento do curso é tarde/noite e atualmente é oferecido um total de 40 vagas por semestre letivo, preenchidas exclusivamente por meio do ENEM (Exame Nacinal do Ensino Médio).

O objetivo geral do referido curso é formar professores com amplo domínio do conteúdo específico de Matemática e da práxis pedagógica, criando profissionais reflexivos, competentes e críticos, capazes de promover o conhecimento científico e a disseminação da ciência. Dentre as competências que se pretende construir, destacamos as seguintes:

- Dominar o conhecimento matemático específico e não trivial.
- Perceber o quanto o domínio de certos conteúdos, habilidades e competências próprias à Matemática importam para o exercício pleno da cidadania.
- Trabalhar de forma interdisciplinar com os professores da sua área e de outras áreas.
- Compreender as características peculiares a cada um dos raciocínios típicos da matemática: o raciocínio lógico, algébrico, o combinatório e o geométrico.
- Conhecer e utilizar crítica e criativamente metodologias e recursos didáticos de acordo com o conteúdo específico e as características do educando.
- Contextualizar e inter-relacionar conceitos e propriedades matemáticas, bem como utilizá-los em outras áreas do conhecimento e em aplicações variadas.
- Ter visão histórica e crítica da Matemática, tanto no seu estado atual como nas várias fases da sua evolução.
- Saber elaborar e cumprir plano de trabalho.

Apresentamos na figura 3.1, a grade curricular do curso de Licenciatura em Matemática:

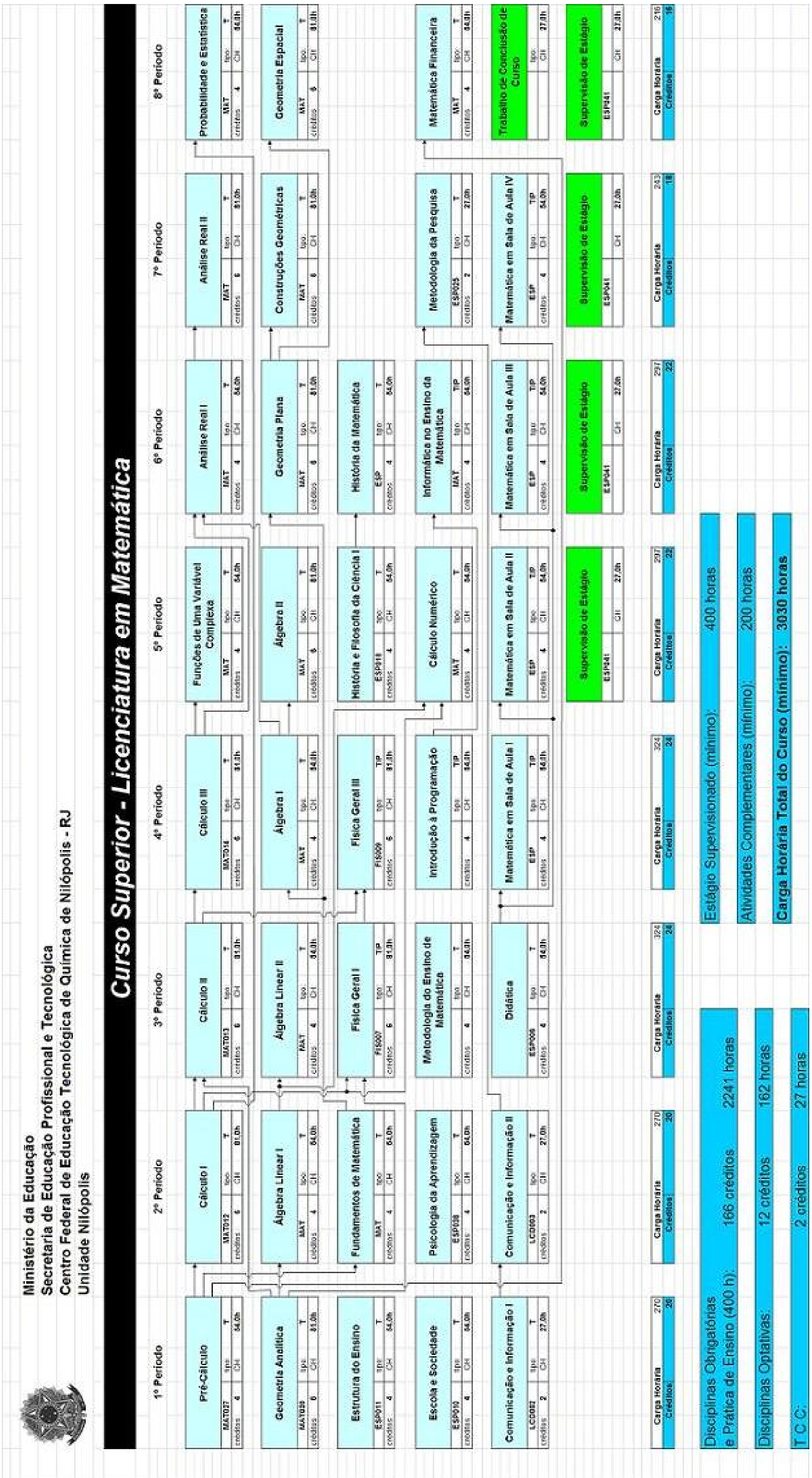


Figura 3.1: Grade Curricular do curso de Licenciatura em Matemática do IFRJ

3.2 Sobre a disciplina Pré-Cálculo e a aplicação das atividades

No primeiro período do curso, ambas as turmas cursam uma disciplina chamada Pré-Cálculo, cuja ementa aborda os assuntos introdutórios sobre Funções reais de uma variável real, e em seguida as noções de Limite e de Continuidade. Apresentamos o plano desta disciplina na figura 3.2.

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
SECRETARIA DE EDUCAÇÃO PROFISSIONAL E TECNOLÓGICA
CENTRO FEDERAL DE EDUCAÇÃO TECNOLÓGICA DE QUÍMICA DE NILÓPOLIS-RJ

Diretoria de Graduação

PLANO DE DISCIPLINA

DISCIPLINA	CÓDIGO
Pré-Cálculo	

CURSO (S) EM QUE É OFERECIDA	CLASSIFICAÇÃO: Obrigatória	Optativa
• Licenciatura em Matemática	X	
• Licenciatura em Física	X	
• Licenciatura em Química	X	

CARGA HORÁRIA SEMESTRAL (horas)	NÚMERO DE CRÉDITOS	CARGA HORÁRIA SEMANAL (tempos de aula)	LIVRE ESCOLHA para os demais cursos
54 h	4	4	(x) Sim ( ) Não

PRÉ-REQUISITO (S)	CÓDIGO (S)
• Não há	
•	

EMENTA

Funções: Definição, domínio, imagem, gráfico. Funções injetoras, sobrejetoras e bijetoras. Função composta e função inversa. Funções especiais: polinômios, logaritmos e exponenciais, trigonométricas e trigonométricas inversas. Limites: definição, teoremas sobre limites, limites no infinito, limites infinitos, limites fundamentais, formas indeterminadas. Continuidade de funções.

OBJETIVO GERAL

Estabelecer as bases de Matemática Elementar que possibilitem a aprendizagem do Cálculo Diferencial e Integral.

ABORDAGEM	PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS
(x) Teórica ( ) Prática	O curso é feito mediante aulas expositivas.

ATIVIDADES DE ENRIQUECIMENTO CURRICULAR

OPERACIONALIZAÇÃO DA PRÁTICA COMO COMPONENTE CURRICULAR (Exclusivo para os Cursos de Licenciatura, de acordo com o Parecer CNE/CP n° 28/2001).	CARGA HORÁRIA SEMESTRAL (horas)

BIBLIOGRAFIA BASICA (02 Títulos)

1) LEITHOLD, Louis – Cálculo com Geometria Analítica – Vol 1. Ed Harbra

2) SAFIER, Fred – Pré-Cálculo – Ed Bookman

BIBLIOGRAFIA COMPLEMENTAR

3) IEZZI, G.; MURAKAMI, C.; MACHADO,N. J. – Fundamentos da Matemática Elementar 8 – Atual Editora

PROFESSOR PROPONENTE	COORDENADOR DO CURSO	DIRETOR DE GRADUAÇÃO
Edgar Manuel Chipana Huamani	Cleber Haubrichs dos Santos	Maura Ventura Chinelli
DATA	DATA	DATA

Figura 3.2: Plano da disciplina Pré-Cálculo

Observamos que apesar da bibliografia básica se referenciar a Leithold (1996), Stewart

(2005) foi o livro texto utilizado na disciplina.

Dentre os objetivos da implantação da disciplina Pré-Cálculo, estão:

- Construir o conceito de função;
- Revisar o estudo das funções reais, introduzido na Educação Básica;
- Promover uma espécie de preparação para o estudo do Cálculo Diferencial e Integral.

Por este motivo, os conteúdos sobre derivada e integral são tratados especificamente na disciplina Cálculo I, da qual o Pré-Cálculo é um pré-requisito.

No semestre em curso, lecionamos a disciplina Pré-Cálculo nas turmas de Licenciatura em Matemática e em Física, o que possibilita a proposta deste trabalho, que baseia-se na aplicação das atividades do roteiro didático em turmas de futuros professores de ensino fundamental e médio.

Assim, sendo, as atividades deste trabalho, serão aplicadas a alunos que cursam pela primeira vez a disciplina de Pré-Cálculo, do 1° período dos cursos de Licenciatura em Matemática e Licenciatura em Física do IFRJ – Instituto Federal do Rio de Janeiro, *campus* Volta Redonda.

3.3 Instrumentos Metodológicos

Apresentamos nesta secção, de maneira resumida, um panorama geral da organização dos instrumentos metodológicos que foram utilizados nesta pesquisa. Tais instrumentos serão descritos nas seções finais deste capítulo e no seguinte.

No diagrama a seguir, encontramos a denominação e organização dos instrumentos metodológicos.

$$
\begin{tikzcd}
& \boxed{\text{Questionário}} \arrow[d] & \\
& \boxed{\text{Roteiro Didático}} \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
\boxed{1^a \text{ Parte}} \arrow[dr] & & \boxed{2^a \text{ Parte}} \arrow[dl] \\
& \boxed{\text{Análise por questões}} &
\end{tikzcd}
$$

O questionário será descrito na seção 3.4 seguinte, enquanto ambas as partes do roteiro didático serão descritas na seção 3.5. Segue no capítulo 4 a análise do questionário e de todo o roteiro didático. Convém aqui destacar que a análise dos resultados obtidos com a aplicação destes instrumentos metodológicos, será realizada por questão somente.

3.4 Um questionário para coleta de dados

Julgamos conveniente elaborar um questionário para coletar algumas informações anteriores à aplicação das atividades do roteiro didático, como por exemplo, saber se porventura algum aluno já havia cursado um curso técnico ou alguma outra graduação e já conhecia o assunto que tratamos neste trabalho. Apresentamos a seguir as perguntas que foram feitas, por escrito aos alunos:

- Onde você concluiu o Ensino Médio? Fez algum curso técnico?
- Já estudou derivada?
- Você já fez outra graduação? Em caso afirmativo, qual curso?
- Sabe o que é uma função contínua?

( ) SIM ( )NÃO

- Quando falam em algo contínuo, o que vem à sua mente?
- E quando falamos em função contínua, quais imagens (gráficas ou não) vêm à sua mente?
- Defina com suas palavras o que seria uma função contínua.

3.5 O roteiro didático

Nesta secção apresentamos as questões que serão utilizadas em nosso roteiro didático. Convém destacar que a seleção das atividades levou em conta nossa preocupação com a construção do conceito de continuidade, utilizando inicialmente as concepções espontâneas que os alunos traziam a respeito da expressão continuidade e ampliando-as quando for o caso, para o conceito matemático de função contínua. Tais concepções serão observadas nas respostas dadas pelos alunos ao questionário descrito anteriormente.

A aplicação das atividades busca estabelecer um ambiente de investigação no qual os alunos e o professor estão envolvidos de forma participativa, fazendo perguntas, formulando hipóteses e testando-as. Dividimos o roteiro didático em dois momentos distintos: o primeiro de introdução do conceito e estabelecimento de uma definição de continuidade e um segundo de fixação e aplicação da definição. Apresentamos no quadro seguinte os objetivos gerais de cada parte do roteiro didático.

1^a **Parte do roteiro**	2^a **Parte do roteiro**
Estabelecer a definição de continuidade para pontos que pertençam ao domínio da função.	Obter alguns desdobramentos relevantes a respeito do conceito de continuidade. Reconhecer a relevância deste conceito para outros teoremas.

Na segunda parte deste roteiro didático, as questões 1 e 2 foram adaptadas de Cardim (2010), a questão 5 foi adaptada do Exame de Seleção para o Mestrado em Ensino de Matemática (IM-UFRJ) do ano de 2007 e a questão 6 adaptada de Spivak (1996).

Convém mencionar que os enunciados descritos a seguir são cópia fiel daqueles entregues aos alunos participantes desta pesquisa, exceto pela numeração das figuras, que segue a sequencia daquelas apresentadas neste trabalho.

3.5.1 Introdução ao conceito e estabelecimento da definição

Parte I - Introdução ao conceito e estabelecimento da definição

---

Questão 1: Considere a função $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $h(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{para} \quad x \leq 0 \\ x^3 & \text{para} \quad x > 0 \end{cases}$, cujo gráfico está esboçado na figura 3.3.

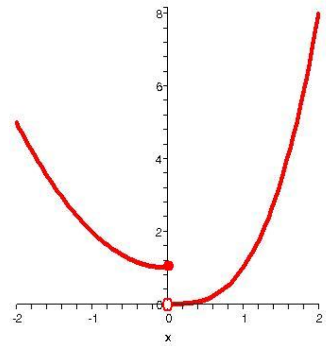


Figura 3.3: Gráfico da função definida por partes $h(x) = x^2 + 1$ se $x \leq 0$; $h(x) = x^3$ se $x > 0$

(a) Com base no gráfico de h, você afirmaria que esta função possui alguma descontinuidade?

(b) Qual é o domínio da função? Em particular, $0 \in \text{Dom}(h)$?

(c) Determine $\lim\limits_{x \to 0^+} h(x)$ e $\lim\limits_{x \to 0^-} h(x)$.

(d) Podemos afirmar que existe $\lim\limits_{x \to 0} h(x)$? Por quê?

Questão 2: Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por

$$f(x) = \begin{cases} |x| & \text{para} \quad x \neq 1 \\ 2 & \text{para} \quad x = 1 \end{cases},$$

(a) Esboce o gráfico de f e determine $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x)$ e $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x)$:

(b) Existe $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$? Explique:

(c) Qual o valor de $f(1)$?

(d) Esta função apresenta alguma descontinuidade? Caso afirmativo, em qual ponto do domínio?

(e) Compare os resultados dos itens (b) e (c). Qual deveria ser a relação entre eles para f ser contínua em $x = 1$?

Definição: Seja $f : (a, b) \to \mathbb{R}$. Dizemos que a função f é contínua em $c \in (a, b)$, se

$$\lim_{x \to c} f(x) = f(c).$$

Questão 3: Identifique dentre as curvas das figuras 3.4 e 3.5 quais são contínuas e quais não são.

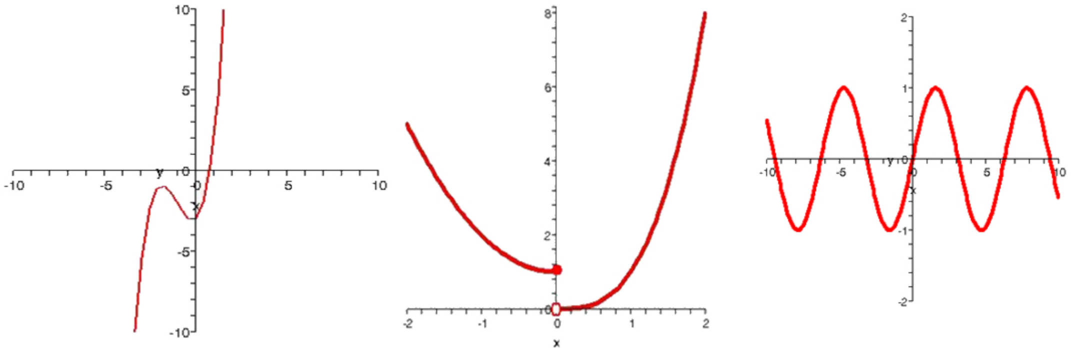


Figura 3.4: Identificação de curvas contínuas

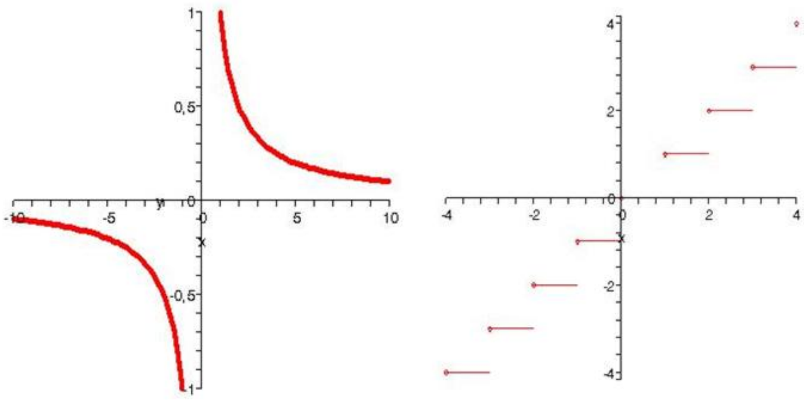


Figura 3.5: Identificação de curvas contínuas

Questão 4: Observe os gráficos da figura 3.6 seguintes:

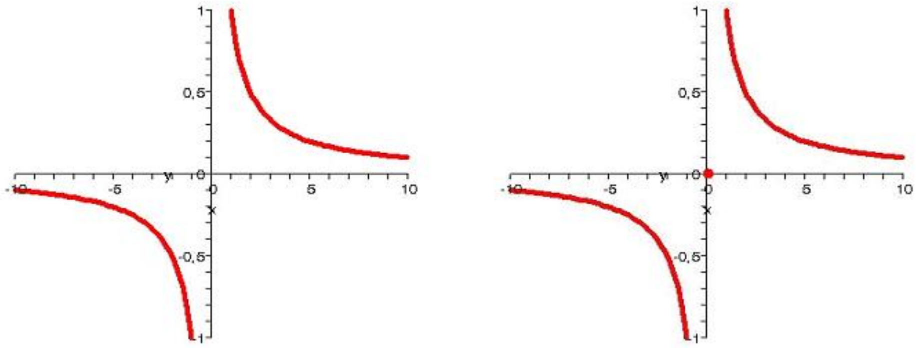


Figura 3.6: Gráfico das funções $f : \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R}$, com $f(x) = \dfrac{1}{x}$ e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, com $g(x) = \frac{1}{x}$ se $x \neq 0$ ou $g(x) = 0$ se $x = 0$.

(a) Determine $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$ e $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x)$. Existe $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$?

(b) Determine $\lim\limits_{x \to 0^+} g(x)$ e $\lim\limits_{x \to 0^-} g(x)$. Existe $\lim\limits_{x \to 0} g(x)$?

(c) Determine, $f(\pi)$, $g\left(\dfrac{1}{2}\right)$, $f(0)$ e $g(0)$.

(d) Observando o domínio destas duas funções responda: Para qual delas faz sentido analisar a continuidade no ponto $x = 0$? Justifique a resposta.

Questão 5: A função $f(x) = [[x]]$, chamada maior inteiro, para cada $x \in \mathbb{R}$ associa o maior inteiro menor ou igual a x. Por exemplo: $[[3,5]] = 3$, $[[0,7]] = 0$, $[[1,3]] = 1$ e $[[2]] = 2$. No gráfico da figura 3.7, a função está definida em $\mathbb{R}^+$. Determine os pontos onde f não é contínua.

Questão 6: Dê um exemplo...

(a) De uma função f que não é contínua mas que $|f|$ seja contínua.

(b) De duas funções f_1 e f_2 descontínuas com $f_1 + f_2$ contínuas.

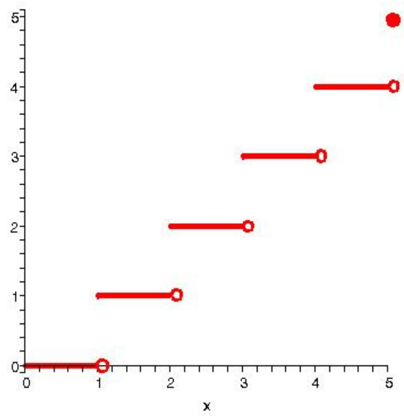


Figura 3.7: Gráfico da função maior inteiro $f(x) = [[x]]$.

3.5.2 Fixação e aplicação da definição

Parte II - Fixação e aplicação da definição

Questão 1: Neste exercício, todas as funções consideradas têm como domínio o conjunto dos números reais. Diga se cada uma das afirmações a seguir é verdadeira ou falsa, justificando a sua resposta:

1. Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função contínua e $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 3$, então $f(0) = 3$.

2. Se $\lim_{x\to 1^+} g(x) = -2$, então $g(1) = -2$

3. Se $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função contínua e $h(-3) = \dfrac{1}{2}$ então

$$\lim_{x\to -3^+} h(x) = \lim_{x\to -3^-} h(x) = \frac{1}{2}.$$

4. Se $\lim_{x\to 1^+} r(x) = \lim_{x\to 1^-} r(x)$ então r é contínua no ponto $x = 1$

Questão 2: Esboce o gráfico de uma função contínua, cujo domínio é o intervalo $]-2,2[$ e cuja imagem é toda reta real; tente agora repetir este feito, usando o intervalo $[-2,2]$ como domínio. Escreva suas conclusões.

Questão 3:

(a) Esboce o gráfico de uma função contínua $g : [1,5] \to [-2,2]$, tal que $g(1) = -2$ e $g(5) = 2$

(b) Resolva a equação $g(x) = 0$.

(c) E se tomarmos a equação $g(x) = k$, para $k \in [-2,2]$?

Questão 4: Seja $h(x) = x^3 - 2x^2 + 3x - 1$.

(a) Determine $h(0)$ e $h(1)$.

(b) Você acha que esta função possui alguma raiz? Em caso afirmativo, em qual intervalo? Justifique sua resposta.

(c) Se $f(x)$ é uma função polinomial, como podemos determinar, em geral, um intervalo onde f possua uma raiz?

Partindo das questões 3 e 4, observemos um importante teorema que está diretamente relacionado com a continuidade de funções reais:

> **Teorema do Valor Intermediário:** Suponha que f seja contínua em um intervalo fechado $[a,b]$ e seja N um número qualquer entre $f(a)$ e $f(b)$, com $f(a) \neq f(b)$. Então existe um número $c \in (a,b)$ tal que $f(c) = N$.

Questão 5: Sobre o Teorema do Valor Intermediário (TVI):

(a) Utilize-o para determinar um intervalo no qual o polinômio $p(x) = x^3 + 3x^2 + x - 3$, tenha uma raiz.

(b) Explique porque a hipótese de continuidade é indispensável para que este teorema seja válido.

(c) Podemos afirmar, nas condições do Teorema do Valor Intermediário, que a raiz é única? Justifique sua resposta.

Para a questão 6 a seguir, temos a seguinte definição:

Definição: Uma função f tem **máximo absoluto** em x_0 se $f(x_0) \geq f(x)$ para todo $x \in D$, onde D é o domínio de f; $f(x_0)$ é chamado **valor máximo** de f em D. Analogamente, f tem um **mínimo absoluto** em x_0 se $f(x_0) \leq f(x)$ para todo $x \in D$ e $f(x_0)$ é denominado **valor mínimo** de f em D.

Consideremos o teorema seguinte:

> Se uma função f for contínua em um intervalo fechado e limitado $[a, b]$, então existem c e $d \in [a, b]$ tais que f assume um valor máximo absoluto $f(c)$ e um valor mínimo absoluto $f(d)$ em $[a, b]$.

Questão 6: Consideremos a função

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se} \quad x < 1; \\ 0 & \text{se} \quad x \geq 1. \end{cases}$$

cujo gráfico está esboçado na figura 3.8 seguinte.

(a) A função f está limitada superiormente no intervalo $[0, 1]$?

(b) Esta função é contínua no intervalo $[0, 1]$?

(c) Ela possui máximo absoluto no intervalo $[0, 1]$? Justifique.

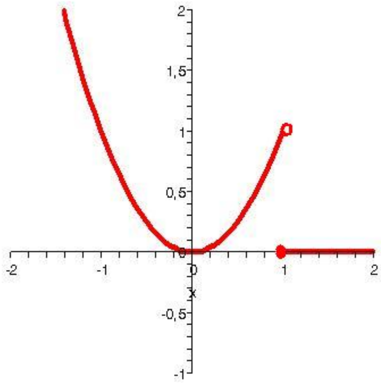


Figura 3.8: Gráfico da função $f(x) = x^2 \quad \text{se} \quad x < 1; \quad 0 \quad \text{se} \quad x \geq 1.$

Questão 7: Considere a função $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, definida por $f(x) = x$. Observe na figura seguinte o gráfico da função f:

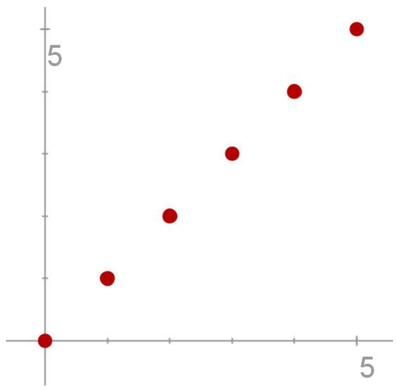


Figura 3.9: Gráfico da função $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, definida por $f(x) = x$.

(a) Para quais pontos esta função está definida?

(b) Esta função f é uma função contínua? Comente sua resposta.

Capítulo 4

Da aplicação das atividades

4.1 Introdução

A aplicação das atividades relativas ao Roteiro Didático, descrito no capítulo anterior, foi realizada num período de duas semanas, durante as aulas da disciplina Pré-Cálculo do curso de Licenciatura em Matemática do IFRJ, *Campus* Volta Redonda. Em cada uma das semanas foram utilizadas 4 aulas com 50 minutos de duração cada uma.

A resolução das atividades foi guiada pelo pesquisador deste trabalho, professor da turma e da referida disciplina. Como a frequencia dos alunos participantes da pesquisa não é uniforme, optou-se por analisar somente a resolução das atividades e participação dos alunos que compareceram a todas as aulas das duas semanas de aplicação do trabalho. Assim, consideramos nas descrições apresentadas o envolvimento de 10 (dez) alunos. As atividades de três alunos foram descartadas, uma vez que participaram parcialmente das tarefas, o que não contribui de forma significativa para o registro global das conclusões que ora inferimos. O fato da frequencia de tais alunos, em geral, ser muito baixa, reforça esta decisão.

A distribuição das atividades de acordo com as semanas está ilustrada no diagrama a seguir:

Distribuição da aplicação dos instrumentos metodológicos

1^a Semana	2^a Semana
$\downarrow$	$\downarrow$
• Questionário • 1^a Parte do roteiro didático	• 2^a Parte do roteiro didático

Assim sendo, apresentaremos neste capítulo o desenvolvimento de cada etapa e os resultados relevantes. Destacamos que os nomes dos alunos participantes são fictícios, entretanto, os sexos foram mantidos.

4.2 Aplicação e Análise do Questionário

A aula foi iniciada com algumas informações preliminares, cujo propósito era esclarecer aos alunos:

1. que estariam participando de uma atividade cuja análise fazia parte das questões de investigação da dissertação de mestrado do professor da disciplina;
2. que o assunto abordado complementaria as noções de funções reais e de limites de funções reais que estávamos estudando no decorrer do semestre na disciplina Pré-Cálculo.

Inicialmente foi entregue aos alunos uma folha com as primeiras cinco questões do questionário. Convém destacar que optamos por dividi-lo em duas partes para que as respostas dadas à segunda parte do mesmo não fossem influenciadas pelo que foi colocado na primeira parte.

Solicitei aos alunos que preenchessem alguns dados iniciais que constavam na 1^a parte do questionário, a saber, nome, onde concluiu o ensino médio, se fez curso técnico ou outra graduação, se sabia o que era uma função contínua (SIM ou NÃO somente).

Perguntamos se o aluno fez curso técnico, considerando que em algum destes é necessário aprender derivada. Sobre esta questão, 06 (seis) alunos responderam que sim, os demais 04 (quatro) alunos responderam não.

Na questão seguinte, perguntamos se o aluno já havia estudado derivada e 03 (três) alunos afirmaram já ter estudado enquanto 07 (sete) alunos afirmaram que não haviam estudado tal assunto.

Perguntamos se o aluno já havia cursado outra graduação, 04 (quatro) responderam positivamente e 06 (seis) responderam ser esta a primeira graduação que cursam.

Em seguida, indagamos se o aluno sabe o que é uma função contínua. Somente um deles respondeu saber do que se trata.

Com o intuiuto de relacionar as respostas dadas às questões descritas, observamos que dos 3 alunos que afirmaram ter estudado derivada, somente um deles respondeu que sabe o que é uma função contínua. Dos alunos que responderam já ter feito outra graduação, os cursos listados foram: Letras, Biologia e História. Um aluno somente, que chamamos Eduardo e que cursa Sistema de Computação, afirmou já ter estudado derivada e saber o que é uma função contínua.

Perguntamos aos alunos quando se falava cotidianamente em algo contínuo, o que vinha à sua mente. Enfatizamos que ao colocar cotidianamente, não nos referimos necessariamente à matemática e além disto, destacamos que também poderiam escrever sobre quando se fala que algo não é contínuo o que eles imaginavam a respeito. Listamos, sucintamente as respostas obtidas nos itens a seguir, em ordem alfabética:

1. Amanda: Algo sem interrupção que permanece constante.

2. Beto: Algo que não sofre interrupção, por exemplo a luz do sol nunca se apaga,

se mantém continuamente acesa. Outro exemplo é a nossa idade: envelhecemos a cada milésimo de segundo (quando comecei a escrever este exemplo estava 30 segundos mais novo!).

3. Carlos: Algo que não é fracionado, é constante.
4. Daniela: Algo que não tem falha.
5. Eduardo: Algo que não apresenta interrupções por toda a sua extensão.
6. Fabiana: Algo constante, sem interrupções.
7. Gisele: Algo que não se altera, se mantém constante ao longo do tempo, não sofre variação.
8. Haroldo: Algo que não tem fim.
9. Ivone: Algo que tem uma continuidade, não tem intervalos.
10. Jaqueline: Algo que segue indefinidamente.

Acompanhando a resposta apresentada, a aluna Ivone incluiu um gráfico de uma função constante. Tivemos nesta questão a oportunidade de conhecer as concepções espontâneas dos alunos a respeito do conceito de continuidade. Observamos que:

- 07 alunos se manifestaram relacionando a continuidade com a ausência de interrupções, falhas ou situações semelhantes; destes sete alunos, um mencionou que o fato de não possuir interrupção deve se manter em toda a sua extensão;
- 02 alunos pensam na função constante quando se fala em continuidade;
- 01 aluno alega que algo contínuo é algo que não tem fim.

Em seguida, a primeira parte do questionário foi recolhida e entregue a segunda parte. Nesta constavam questões cujo propósito consistia em descrever, especificamente em matemática, as imagens que possuíam a respeito da palavra continuidade. Assim, as perguntas foram: "Quando se fala em uma função contínua, quais imagens (gráficas ou não) vêm à sua mente?" e "Defina com suas próprias palavras o que é uma função contínua".

Para a primeira destas questões, colocamos para os alunos que estes poderiam se colocar de duas formas, caso julgassem que isto poderia deixar mais claro o registro do que eles estavam pensando:

- que descrevessem por meio de características o que seria uma função contínua;
- que caracterizassem quando uma função **não** é contínua.

Neste ponto também enfatizamos a questão de quais são as imagens gráficas como sendo de um gráfico de uma função contínua ou não contínua. Poderiam ainda ilustrar se julgassem conveniente.

Os dados obtidos foram os seguintes:

- 07 (sete) alunos utilizaram como resposta algum tipo de gráfico, esboçando curvas contínuas; três destes fizeram uso de funções lineares,dois destes de uma função constante. Somente um dos sete alunos escreveu a equação algébrica associada ao gráfico da função.
- 02 (dois) alunos descreveram como sendo contínua a função que é traçada continuamente, sem buracos, etc.
- 01 (um) aluno afirmou que uma função é contínua quando possui limites infinitos.

Nesta questão, destacamos os gráficos esboçados pela aluna Gisele, uma vez que a resposta apresentada se diferiu significativamente das demais: a aluna associa a continuidade ao fato da função ser constante e sendo assim, afirma que o segundo gráfico da curva desenhada não pode ser classificado como uma função contínua. Na figura 4.1 exibimos o gráfico esboçado pela aluna.

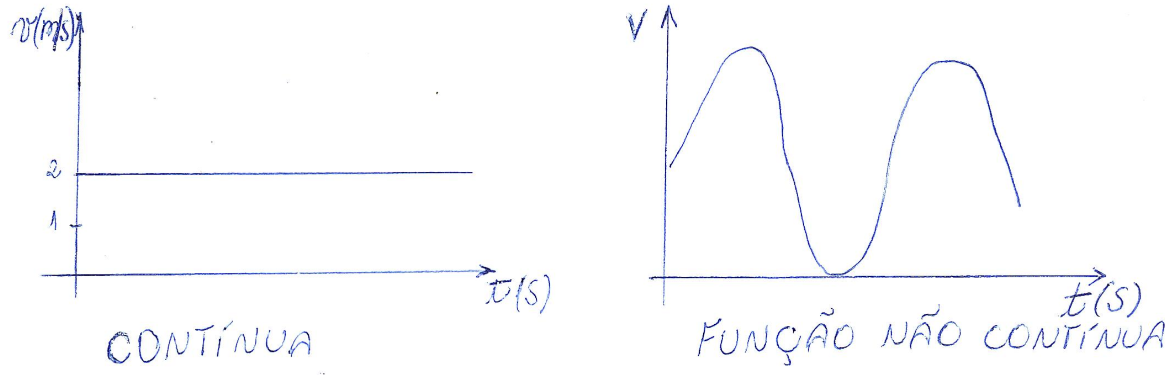


Figura 4.1: Gráficos apresentados pela aluna Gisele para funções contínua e não contínua.

A aluna Ivone se colocou de maneira análoga, como podemos observar nas curvas esboçadas pela aluna e nos seus comentários a respeito das mesmas, na figura 4.2 seguinte.

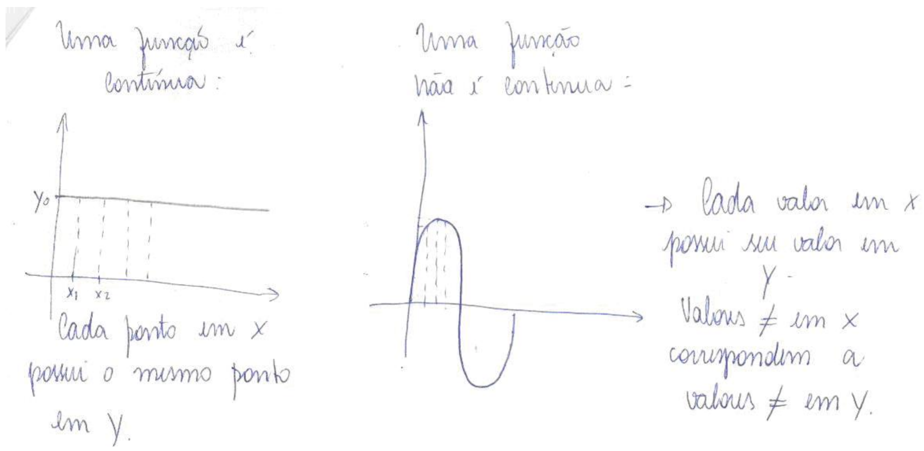


Figura 4.2: Gráficos apresentados pela aluna Ivone para funções contínua e não contínua.

4.3 Detalhamento das atividades da 1^a parte do roteiro didático

Procederemos nesta seção à análise das questões da primeira parte do roteiro didático. Nosso objetivo principal com esta etapa do roteiro é estabelecer a definição de continuidade que propomos; para tanto as questões têm o propósito de introduzir e subsidiar a compreensão de elementos necessários à construção da definição. Com o objetivo de facilitar a compreensão do leitor, o enunciado de cada questão será transcrito. Observemos então os resultados.

4.3.1 Análise da 1^a Questão

1^a Questão: Considere a função $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $h(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{para} \quad x \leq 0 \\ x^3 & \text{para} \quad x > 0 \end{cases}$, cujo gráfico está esboçado na figura seguinte:

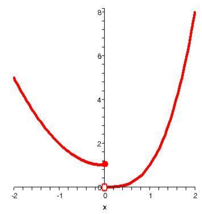


Figura 4.3: Gráfico da função definida por partes $h(x) = x^2 + 1$ se $x \leq 0$, $h(x) = x^3$ se $x > 0$.

(a) Com base no gráfico de h, você afirmaria que esta função possui alguma descontinuidade? **(b)** Qual é o domínio da função? Em particular, $0 \in \text{Dom}(h)$? **(c)** Determine $\lim_{x \to 0^+} h(x)$ e $\lim_{x \to 0^-} h(x)$. **(d)** Podemos afirmar que existe $\lim_{x \to 0} h(x)$? Por quê?

Sobre o item (a) Todos os 10 (dez) alunos afirmaram que a função possui descontinuidade, 07 (sete) destes citaram o ponto $x = 0$ como aquele em que ocorre a descontinuidade. No item (b) 07 (sete) alunos afirmaram que o domínio da função é todo o conjunto dos números reais e que 0 faz parte do domínio e 03 (três) alunos afirmaram que o domínio é o conjunto dos números reais diferentes de 0 e que, logo, tal número não faz parte do domínio. Nove alunos acertaram os limites laterais que foram perguntados no item (c) e somente um deles afirmou que os limites laterais não existem. Sobre o item (d), todos os alunos afirmaram que o limite não existe, uma vez que os limites laterais não coincidem.

4.3.2 Algumas considerações

O objetivo desta questão consistia em identificar que para uma função ser contínua em um ponto $x = a$, é necessário que os limites laterais da função neste ponto a coincidam, uma vez que esta é a condição necessária para a existência do limite no ponto. Tal fato foi constatado por todos os alunos. Acreditamos que isto se deve ao fato que o estudo de limites havia sido concluído pouco antes do início destas atividades.

Um ponto interessante que julgamos mencionar foi colocado pela aluna Ivone: se o gráfico apresentado nesta 1^a questão representava uma função somente. Esclarecemos que é muito comum encontrarmos funções definidas por uma única expressão, e que nestes casos, tal expressão é utilizada para se calcular a imagem de qualquer ponto do domínio, entretanto nas funções de mais de uma sentença, cada expressão está definida para uma parte do domínio. A aluna argumentou que uma função de mais de uma sentença sempre seria descontínua, pois existe uma alteração no modo de se calcular a imagem dos pontos do domínio e assim sendo, este ponto de alteração também seria um ponto de descontinuidade. Julgamos interessante a colocação desta aluna e observamos que segundo Ávila (2010), historicamente, as primeiras noções de função contínua se utilizavam desta idéia, uma vez que "funções contínuas seriam dadas por uma única fórmula ou expressão analítica" (pp. 6). Além disto notamos um obstáculo didático que se faz relevante mencionar: sabemos que em geral o ensino do conceito de função é bastante relacionado às expressões algébricas, de forma que o aluno pode formar esta imagem para este conceito.

Esclarecemos à aluna, por meio de um exemplo, que existem funções de várias sentenças que são contínuas.

O aluno Beto, afirmou que a função dada neste exercício é contínua, pois segundo as próprias palavras do aluno "o mesmo buraco que está aberto em baixo (isto ocorre no ponto $x = 0$) está fechado em cima (no ponto $y = 0$)". Notamos que o aluno confunde o conceito de continuidade com um dos pré-requisistos para se definir uma função (para todo $x \in \mathrm{Dom}(f)$, existe y tal que $f(x) = y$).

Também observamos que os alunos reconhecem com facilidade a função $f(x) = x^2 + 1$ como uma translação da função $g(x) = x^2$.

4.3.3 Análise da 2^a Questão

2^a Questão: Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} |x| & \text{para} \quad x \neq 1 \\ 2 & \text{para} \quad x = 1 \end{cases}$$

(a) Esboce o gráfico de f e determine $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$ e $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$.
(b) Existe $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$? Explique.
(c) Qual o valor de $f(1)$?
(d) Esta função apresenta alguma descontinuidade? Caso afirmativo, em qual ponto do domínio?
(e) Compare os resultados dos itens (b) e (c). Qual deveria ser a relação entre eles para f ser contínua em $x = 1$?

No item (a), observamos que nove alunos desenharam o gráfico corretamente. O esboço do aluno que não o fez corretamente será apresentado na seção 4.3.4 Algumas Considerações. Nove alunos acertaram os limites laterais e um aluno, Eduardo, não respondeu quais são os limites laterais; este mesmo aluno foi o único que esboçou o gráfico incorretamente. Quanto ao item (b), 09 (nove) alunos responderam que o limite existe pelo fato dos limites laterais coincidirem. Somente o aluno Eduardo, que na questão anterior não respondeu quais eram os limites laterais afirmou que o limite não existe pois a função não está definida em $x = 1$.

No item (c), todos os alunos responderam corretamente que $f(1) = 2$, inclusive o aluno Eduardo, que havia anteriormente afirmado que a função não estava definida neste ponto. No item (d), os alunos foram unânimes em responder que existe de fato uma descontinuidade na função, no ponto $x = 1$. Observando o esboço do gráfico apresentado pelo aluno Eduardo na figura 4.4, notamos que não foi esboçada a imagem do ponto $x = 1$ e tampouco de $x = -1$. Além disto verificamos a existência de duas imagens para $x = 0 \in \mathrm{Dom}(f)$.

Sobre o item (e), listamos na tabela seguinte as respostas dadas e a quantidade de alunos que as utilizaram:

Respostas dadas	**N^o de alunos**
$f(1) = 1$	01 aluno
a função f deveria ter os limites laterais iguais a $f(1)$	01 aluno
os resultados deveriam ser iguais	02 alunos
o valor da função no ponto deve coincidir com o limite da função no ponto	06 alunos

4.3.4 Algumas Considerações

Nosso objetivo nesta questão consistia em identificar que, para que uma função seja contínua num ponto a, é necessário que o limite da função, quando x tende a a, seja $f(a)$. Isto justifica a escolha da função $f(x)$ apresentada no enunciado, uma vez que a questão anterior já se propôs a construir a idéia de que em primeiro lugar o limite da função no ponto a deve existir.

Como observado nas respostas apresentadas na tabela, podemos constatar que os alunos verificaram este fato, alguns de maneira particular (para a função apresentada na questão) e outros de maneira mais geral, escrevendo afirmações genéricas.

Algumas respostas particulares chamaram nossa atenção e serão descritas a seguir. A aluna Daniela, destacou que a **tendência** da função deveria ser igual ao valor da função no ponto, se referindo ao limite da função no ponto.

O aluno Eduardo, que se enquadra na última resposta da tabela, incluiu o fato de que a função deve estar definida no ponto para ser contínua. Observamos que este foi o mesmo aluno que afirmou no item (c) que a função não estava definida em $x = 1$. Apresentamos na figura 4.4 seguinte o esboço da função $f(x)$ feito pelo aluno, único dentre os participantes que não o fez corretamente. Tal esboço, ao menos nos esclarece o motivo das suas respostas, que por vezes nos dão uma impressão contraditória.

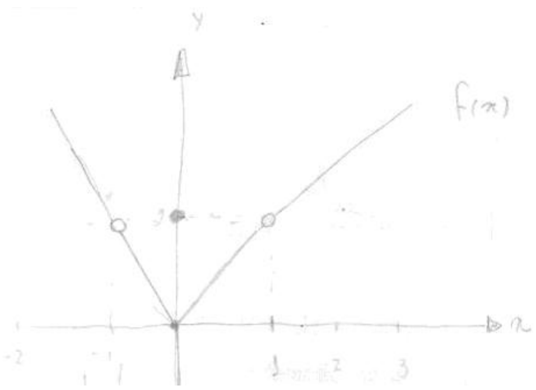


Figura 4.4: Esboço do gráfico apresentado pelo aluno Eduardo para a questão 2.

Outro ponto interessante, é que a aluna Gisele, após escrever a condição para a função ser contínua em $x = 1$ (a aluna apresentou a última das respostas apresentadas na tabela), mencionou que isto "removeria o buraco da função". Encontramos em diversos textos como por exemplo Stewart (2005) e Leithold (1999), menção à descontinuidade removível, como podemos obsevar no fragmento a seguir:

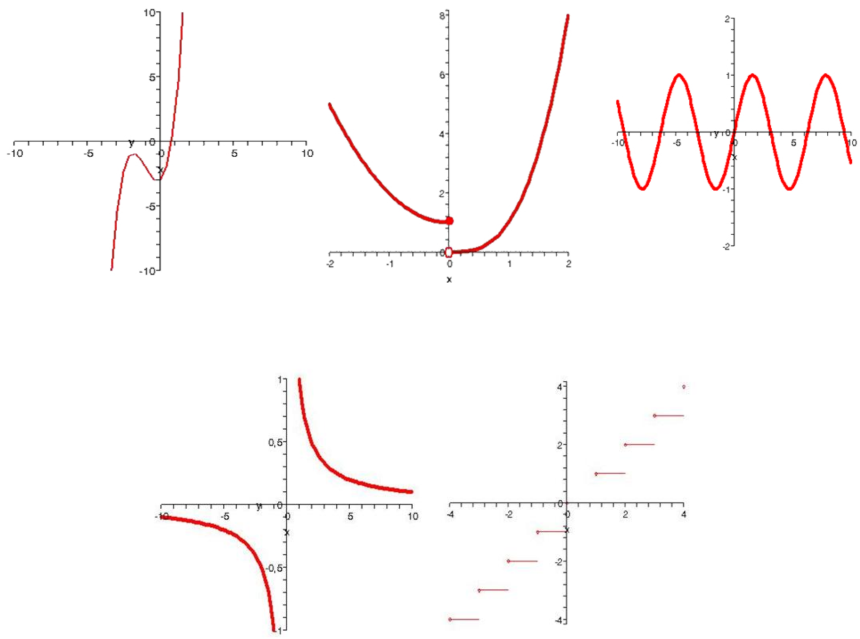
> Tal descontinuidade é chamada **descontinuidade removível**, pois se f for definida em a de tal forma que $f(a)$ seja igual ao $\lim_{x\to a} f(x)$, a nova função

tonar-se-á contínua em a.

(LEITHOLD, 1999, pp.101-102), grifo do autor.

4.3.5 Análise da 3^a Questão

3^a Questão: Das funções cujos gráficos estão esboçados na figura seguinte, quais são contínuas e quais não são?



Destacamos inicialmente que a definição de continuidade que utilizamos neste trabalho foi apresentada aos alunos antes desta questão, como forma de generalizar os resultados obtidos nas duas questões iniciais. A definição é a seguinte: Seja $f : (a, b) \to \mathbb{R}$. Dizemos que a função f é contínua em $c \in (a, b)$, se $\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$.

A classificação dada pelos alunos é apresentada na tabela seguinte:

Gráfico	**Contínua**	**Descontínua**
1^o	10	0
2^o	0	10
3^o	9	1
4^o	4	6
5^o	0	10

4.3.6 Algumas Considerações

Antes de iniciarmos a resolução do exercício, ao estabelecermos a definição de continuidade, enfatizamos a necessidade do ponto no qual pretendemos analisá-la estar no domínio da função. Além disto, relacionamos a igualdade proposta pela definição com os dois exercícios realizados anteriormente.

Perguntamos aos alunos por que seria necessário a função estar definida no ponto, com o objetivo de fomentar uma discussão a respeito da continuidade da função neste ponto. As alunas Amanda, Fabiana e Ivone responderam que, caso contrário, não existiria uma valor para a função neste ponto e logo a igualdade da definição não faria sentido. Reforçamos mais uma vez a idéia de que só analisamos a continuidade de uma função num ponto em que ela está definida e que, num ponto onde ela não está definida não faz sentido classificá-la em contínua ou descontínua. Além disso, afirmamos que uma função é contínua em todo o seu domínio, se é contínua em cada ponto do seu domínio.

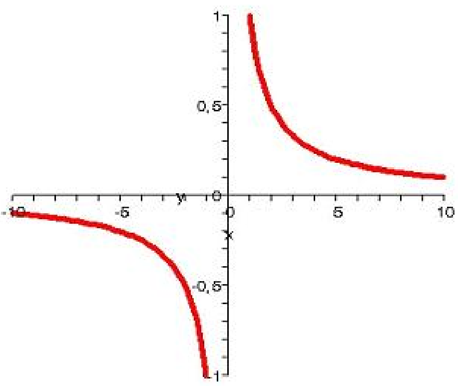
Encerrada a leitura e discussão da definição, dissemos aos alunos que deveriam classificar as funções do exercício 3 em contínua e descontínua e que não interviríamos nesta questão, a não ser para esclarecer alguma problema na impressão dos gráficos. A aluna Ivone me solicitou a confirmação da informação: "Para pontos que não estão no domínio, não devo analisar então, não é?" Respondemos afirmativamente.

Nosso objetivo com esta atividade consistia em, considerando a definição de função contínua apresentada, verificar se os alunos classificam uma função quanto à continuidade, utilizando tal definição ou suas concepções espontâneas. Dentre os gráficos que compõe a questão e as soluções obtidas, destacamos o quarto gráfico: a função dada, visivelmente não está definida em $x = 0$, entretanto, 04 (quatro) alunos se referem a esta como descontínua, certamente influenciados pelas suas concepções espontâneas, desconsiderando portanto a definição dada.

A aluna Gisele, que havia colocado no questionário que as funções contínuas eram as constantes, respondeu que o 4^o gráfico representa uma função continua e ainda destacou que só falamos em continuidade para os pontos onde a função está definida. Notamos que neste caso, a aluna não foi influenciada por suas concepções, uma vez que utilizou com clareza a definição dada.

4.3.7 Análise da 4^a Questão

4^a Questão: Observe os gráficos da figura 4.5 seguinte:



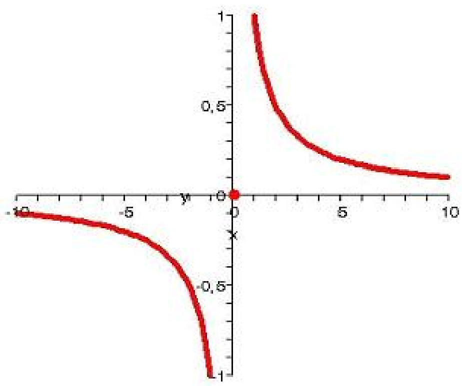


Figura 4.5: Gráfico das funções $f(x) : \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R} - \{0\}$, com $f(x) = \dfrac{1}{x}$ e $g(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, com $g(x) = \frac{1}{x}$ se $x \neq 0$, $g(x) = 0$ se $x = 0$.

(a) Determine $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ e $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$. Existe $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$?
(b) Determine $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x)$ e $\lim\limits_{x\to 0^-} g(x)$. Existe $\lim\limits_{x\to 0} g(x)$?

(c) Determine, caso existam, $f(\pi)$, $g(\frac{1}{2})$, $g(0)$ e $f(0)$.
(d) Observando o domínio destas duas funções responda: para qual delas faz sentido analisar a continuidade no ponto $x = 0$? Justifique a resposta.

Os resultados obtidos nesta questão foram uniformes:

- Todos os alunos responderam que $\lim_{x \to 0} f(x)$ não existe porque os limites laterais da função neste ponto não coincidem.
- Todos os alunos responderam que $\lim_{x \to 0} g(x)$ não existe porque os limites laterais da função neste ponto não coincidem.
- Todos os alunos calcularam com êxito os valores dados.
- Os alunos também foram unânimes ao responder que só faz sentido analisar a continuidade em $x = 0$ para a função g pois tal ponto faz parte de seu domínio.

4.3.8 Algumas Considerações

Encontramos nesta questão um dos objetivos importantes de investigação deste trabalho, a saber, considerando a definição de continuidade que foi adotada, reconhecer que só faz sentido classificar uma função em contínua ou descontínua em pontos do seu domínio. Ao fazer a leitura desta questão juntamente com os alunos, fizemos dois questionamentos:

- Qual é visualmente, a diferença entre as funções cujos gráficos foram apresentados?
- As funções f e g dadas são iguais?

Os alunos não tiveram dificuldade em responder que visualmente os gráficos das funções se diferiam somente pelo ponto $(0, 0)$ e que tais funções não podem ser iguais, uma vez que somente uma delas está definida em $x = 0$.

Observamos que os alunos identificam com facilidade que só faz sentido observar a continuidade em $x = 0$ para a função g, uma vez que a função f não está definida neste ponto. Este foi um resultado relevante para nossa pesquisa.

Apesar disto, notamos que os alunos detêm uma concepção enganosa a respeito da existência de um limite. Muitos deles acreditam que mesmo quando os limites "são" infinitos pode-se compará-los. Na verdade, se o limite "é" infinito, então ele não existe. Não há sentido em afirmar que a função $g(x)$ é descontínua em $x = 0$ porque os limites laterais não coincidem, uma vez que eles sequer existem.

Lamentavelmente tal concepção não foi notada no decorrer da aplicação das atividades, somente num momento posterior de correção das respostas. Identificada esta necessidade, voltei a conversar com os alunos da turma sobre isto e utilizamos o exemplo da função $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$, $x \neq 0$, que não possui limite quando x tende a zero, pelo motivo exposto anteriormente, apesar dos limites laterais "coincidirem".

4.3.9 Análise da 5^a Questão

5^a Questão: A função $f(x) = [[x]]$, chamada maior inteiro, para cada $x \in \mathbb{R}$ associa o maior inteiro menor ou igual a x. Por exemplo: $[[3,5]] = 3$, $[[0,7]] = 0$, $[[1,3]] = 1$ e $[[2]] = 2$. No gráfico seguinte, a função está definida em $\mathbb{R}^+$. Determine os pontos onde f não é contínua.

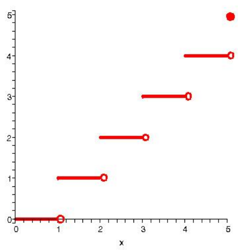


Figura 4.6: Gráfico da função maior inteiro $f(x) = [[x]]$.

Obtivemos nesta questão as seguintes respostas:

- 01 (um) aluno respondeu que a função não é contínua em 2, 3, 4, $\cdots$
- 02 (dois) responderam que a função não é contínua em 1, 2, 3, 4, $\cdots$
- 05 (cinco) alunos responderam que não é contínua em qualquer inteiro (dois deles não justificaram). Dentre estes, dois deles responderam para todo $\mathbb{Z}$ e não para todo $x \in \mathbb{Z}$.
- 01 (um) aluno afirmou que a função não é contínua, mas não disse em quais pontos.
- 01 (um) aluno, o Eduardo, respondeu que a função não é contínua para todo valor de x tal que $x = y$. Detalharemos a seguir.

4.3.10 Algumas Considerações

Inicialmente foi necessário uma explanação a respeito da função maior inteiro, uma vez que não é uma função convencionalmente conhecida pelos alunos que iniciam a graduação. Assim sendo, apresentei aos alunos a notação da função maior inteiro e a idéia da função (o maior inteiro menor ou igual...); a princípio, pude observar que os alunos procuravam inteiros maiores ao invés de menores, o que foi esclarecido por meio de exemplos. Optamos por mostrar como se calcula o maior inteiro de um número inteiro e em seguida de um número real qualquer não-inteiro e com isto construímos o gráfico desta função.

Solicitamos aos alunos que respondessem por escrito à questão: em quais pontos esta função não é contínua. Pedi também que justificassem a resposta dada. Observamos que os alunos identificavam os pontos de descontinuidade com facilidade. Depois que responderam por escrito à questão aproveitei para perguntar em quais pontos do domínio tal função era contínua. Muitos me responderam “em todos os demais”.

Quanto às justificativas apresentadas, 07 (sete) alunos mencionaram o fato de nos pontos considerados, os limites laterais da função não coincidirem. Os demais 03 (três) alunos não apresentaram justificativa alguma.

Apesar da questão apresentada definir como domínio da função o conjunto $\mathbb{R}^+$ e o esboço do gráfico atender a este dado, dois alunos observaram qual seria o comportamento da função também para números negativos, uma vez que deram como resposta que há descontinuidade para todos os números inteiros. Encontramos ainda uma pequena dificuldade quanto ao uso da notação: muito se fala em linguagem corrente para todos os reais, para todos os inteiros, etc., dois alunos transcreveram literalmente esta afirmação em termos matemáticos, um deles utilizou por escrito (para todo $\mathbb{Z}$) e outro com o uso da simbologia $\forall\mathbb{Z}$.

Uma outra resposta que nos chamou a atenção foi a última da lista apresentada, dada pelo aluno Eduardo. Acreditamos que o aluno relacionou visualmente os pontos de descontinuidade com os pontos inteiros da função identidade, uma vez que esta função já havia sido utilizada em diversas situações durante as aulas da disciplina, anteriores à aplicação destas atividades.

4.3.11 Análise da 6^a Questão

6^a Questão: Dê um exemplo de:
(a) uma função f que não é contínua mas que $|f|$ seja contínua.
(b) duas funções f_1 e f_2 descontínuas com $f_1 + f_2$ contínuas.

Analisando as respostas dadas a esta questão, notamos que:

(a) Nove alunos responderam este item corretamente. A maior parte deles (05) utilizou funções definidas por duas sentenças, onde cada uma das sentenças era dada por uma função constante. Outros alunos utilizaram funções cujos gráficos eram simétricos em relação à origem. Somente um aluno escreveu a equação da função que utilizou como resposta. Apresentamos duas soluções dadas pelos alunos para este primeiro item nas figuras 4.7 e 4.8 a seguir.

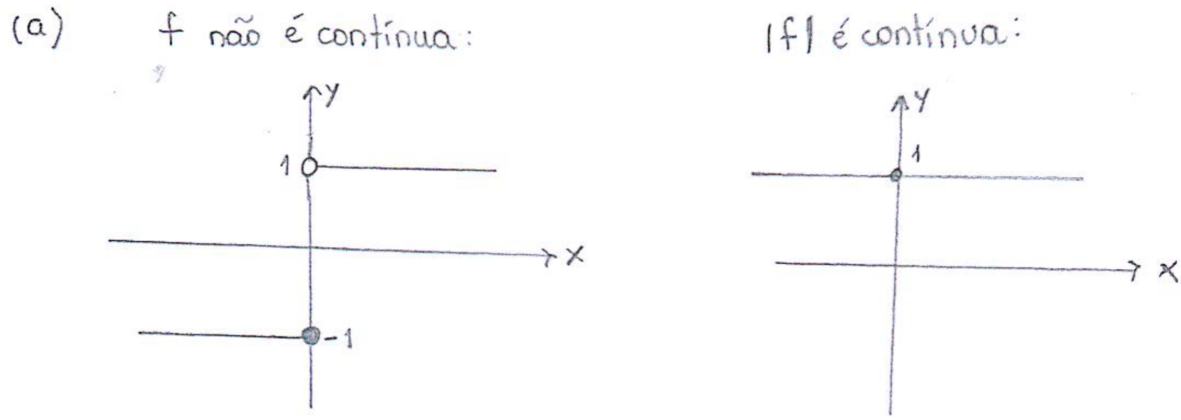


Figura 4.7: Esboço do gráfico apresentado pela aluna Fabiana, como resposta à questão 6(a).

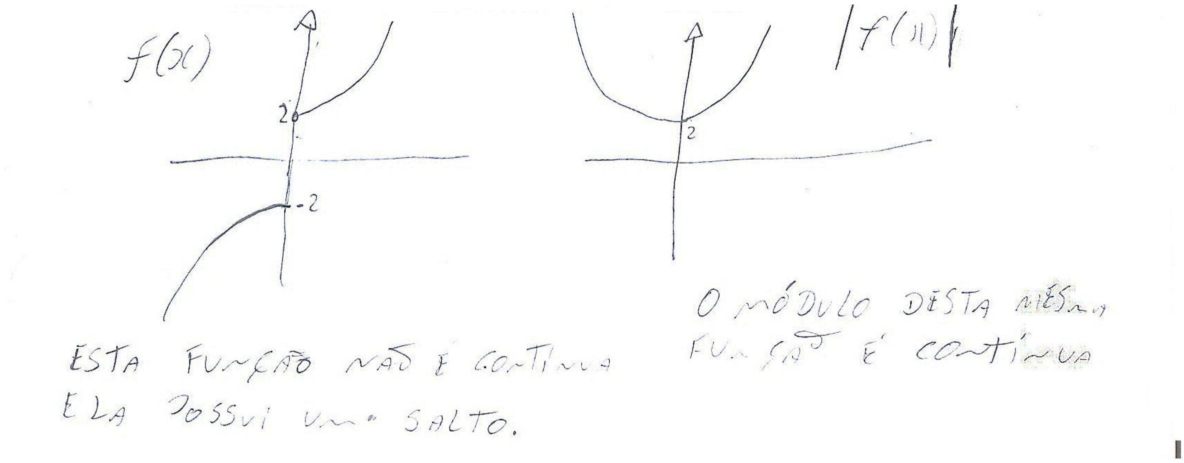


Figura 4.8: Esboço do gráfico apresentado pelo aluno Carlos, como resposta à questão 6(a).

(b) Três alunos responderam este item corretamente. As três soluções serão apresentadas a seguir.

1. O aluno Beto apresentou como resposta duas funções definidas por duas sentenças, ambas descontínuas descontínuas (cada sentença era dada por uma função cons-

tante), cuja soma resultaria na função nula, certamente inspirado pela resolução do item anterior. Apresentamos o esboço do gráfico feito pelo aluno na figura 4.9.

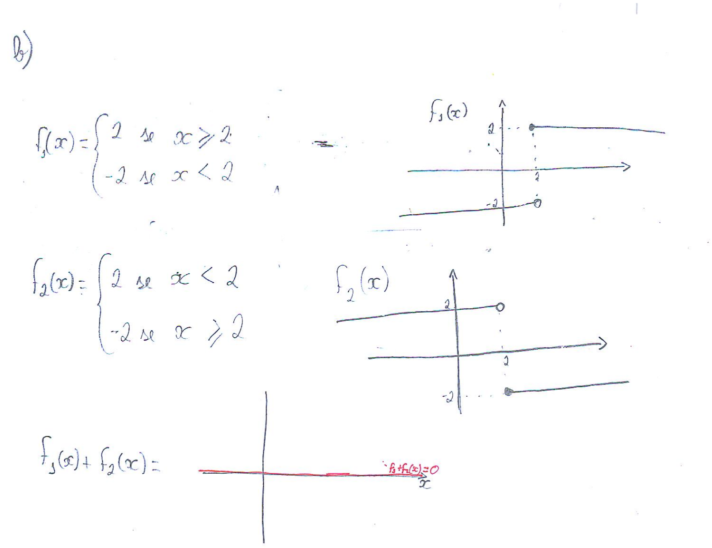


Figura 4.9: Esboço do gráfico apresentado pelo aluno Beto, como resposta à questão 6(b).

2. A aluna Amanda esboçou duas curvas idênticas para f_1 e f_2, a menos dos pontos em suas extremidades ($x = 1$ e $x = 2$). Notamos que a aluna considerou pontos onde a função não está definida como descontinuidades e apesar de aparentemente o gráfico apresentado como solução indicar que a aluna realizou a soma das funções, a mesma não atentou para o fato de que tal soma, nos pontos onde cada uma das funções não está definida, a saber $x = 1$ e $x = 2$, não poderia ser realizada.

3. O aluno Carlos, que também respondeu corretamente à esta questão, esboçou o gráfico de uma função definida por duas sentenças, onde cada uma destas sentenças era dada por uma função linear, definindo claramente que a função assume valor nulo em alguns intervalos, como podemos observar na figura 4.11.

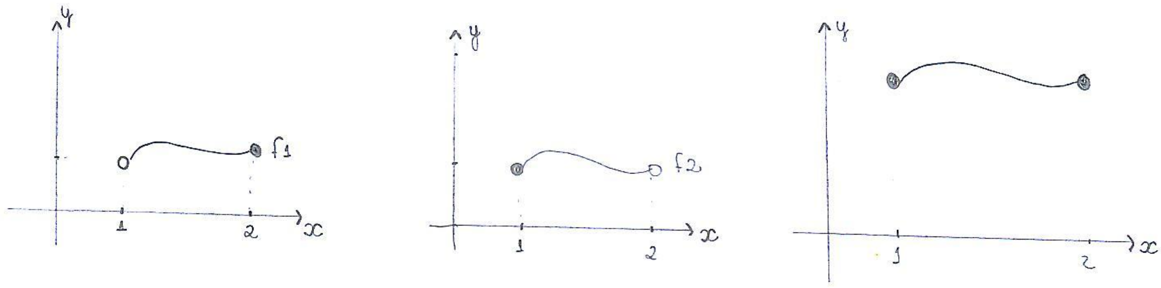


Figura 4.10: Esboço do gráfico apresentado pela aluna Amanda, como resposta à questão 6(b).

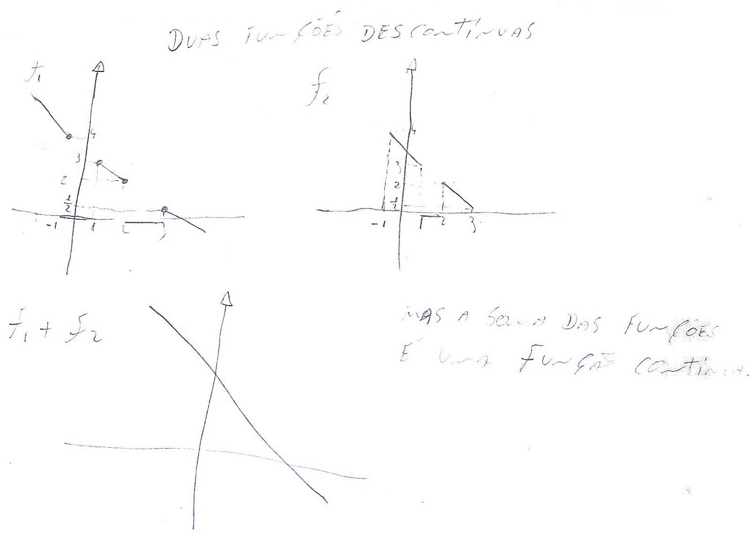


Figura 4.11: Gráfico apresentado pelo aluno Carlos, como resposta à questão 6(b).

4. Na figura 4.12, a aluna Fabiana apresentou dois gráficos bem semelhantes, exceto pelo ponto em que cada uma destas funções f_1 e f_2 não está definida, uma vez que não há imagem para estes, se referindo a ambos como gráficos de funções descontínuas.

   Assim sendo, observamos que aluna não se remete à definição de continuidade adotada, pois segundo esta tais gráficos se referem à funções contínuas. Além disto, notamos que a soma das funções não corresponde ao gráfico da função $f_1 + f_2$ apresentado.

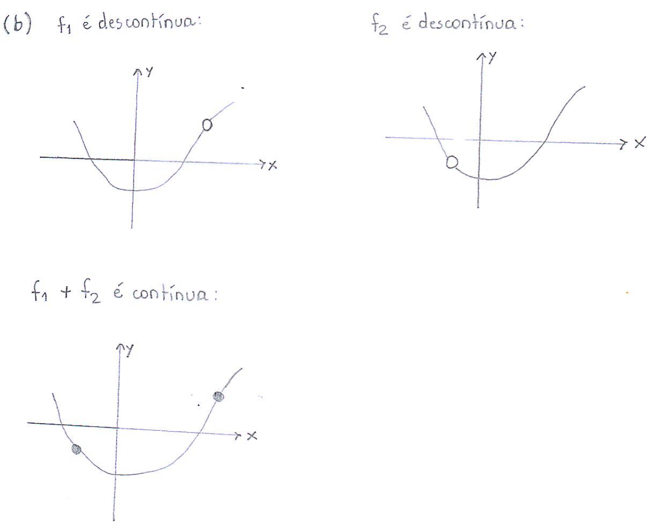


Figura 4.12: Esboço do gráfico apresentado pela aluna Fabiana, como resposta à questão 6(b).

4.3.12 Algumas Considerações

A respeito desta sexta e última questão, lemos o enunciado junto com os alunos e recordamos a função módulo, particularmente o fato de haver reflexão em relação ao eixo x. Esboçamos alguns gráficos simples para recordar: módulo de funções do primeiro e segundo graus somente, uma vez que a ênfase aqui, reiteramos, era a reflexão em relação ao eixo x ocasionada pela aplicação do módulo a uma função. Também julgamos importante relembrar como é feita a soma de duas funções (que a função soma é feita ponto a ponto). Deixamos claro desde o início que as soluções poderiam ser dadas por meio de esboços de gráficos e que, era opcional deixar as expressões algébricas destes.

Aguardamos algum tempo enquanto os alunos respondiam à questão. A aluna Jaqueline me perguntou se as únicas funções que poderiam atender a isto eram "retas", respondemos que não era necessário.

O aluno Haroldo apresentou uma curva que sequer poderia ser classificada como função, este fato nos surpreendeu, uma vez que diversos pontos do domínio possuíam mais de uma imagem. Entretanto, acreditamos ser este somente um lapso, uma vez que este foi um assunto bastante discutido no decorrer de toda a disciplina. De qualquer forma, julgamos prudente alertar aos alunos quanto a isto e relembramos o teste da reta vertical como ferramenta de verificação. O aluno, mediante a observação da incoerência no gráfico apresentado se propôs a responder novamente.

Outro ponto interessante foi colocado pelo aluno aluno Beto, afirmando que para responder ao item (b) (da soma de duas funções descontínuas ser contínua), obrigatoriamente deveríamos tomar duas funções definidas por partes. Foi colocado para os alunos que de fato, esta seria uma maneira eficiente para responder à questão, apesar de não ser a única possibilidade.

4.4 Detalhamento das atividades da 2^a parte do roteiro didático

Iniciamos a aplicação da 2^a Parte do Roteiro Didático com uma conversa informal onde colocamos para os alunos que iríamos continuar discutindo algumas propriedades e teoremas importantes referentes às funções contínuas. Colocamos mais uma vez a definição de continuidade que estudamos anteriormente e fizemos alguns gráficos para exemplificar algumas funções contínuas e descontínuas. Relembramos ainda a importância de observarmos o domínio da função ao fazermos a classificação.

Uma das funções que utilizamos foi a função por partes $f(x) = \begin{cases} x & \text{se} \quad x \neq 2 \\ 3 & \text{se} \quad x = 2 \end{cases}$. Com o esboço do gráfico o aluno Beto colocou que "esta função poderia ser contínua, bastava alterar a sua expressão algébrica". Colocamos que esta descontinuidade se chamava de descontinuidade removível. Aproveitamos a oportunidade para relembrar o exemplo da função $g(x)$, dada no quarto exercício, da 1^a parte do roteiro didático:

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & \text{se} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{se} \quad x = 0 \end{cases}.$$

Com o esboço do gráfico, verificamos que esta descontinuidade não poderia ser removida. Antes de iniciar as atividades esclarecemos que na lista de exercícios que iniciaríamos naquele momento, estaríamos estudando alguns desdobramentos da definição de continuidade, particularmente dois teoremas relevantes em Cálculo e que são válidos somente se as funções consideradas são contínuas, daí a importância desta definição em estudo. Nossos objetivos giravam em torno disto.

Observemos então as soluções dadas pelos alunos e as análises destas.

4.4.1 Análise da 1^a Questão

1^a Questão: Neste exercício, todas as funções consideradas têm como domínio o conjunto dos números reais. Diga se cada afirmação a seguir é verdadeira ou falsa, justificando a sua resposta:

1. Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função contínua e $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 3$, então $f(0) = 3$.
2. Se $\lim\limits_{x \to 1^+} g(x) = -2$, então $g(1) = -2$
3. Se $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função contínua e $h(-3) = \dfrac{1}{2}$ então $\lim\limits_{x \to -3^+} h(x) = \lim\limits_{x \to -3^-} h(x) = \dfrac{1}{2}$.
4. Se $\lim\limits_{x \to 1^+} r(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} r(x)$ então r é contínua no ponto $x = 1$

Na tabela a seguir, apresentamos o quantitativo de alunos para cada resposta dada, verdadeiro ou falso:

Item	**verdadeiro**	**falso**	**resposta correta**	**percentual de acerto**
1	10	00	verdadeiro	100%
2	04	06	falso	60%
3	10	00	verdadeiro	100%
4	02	08	falso	80%

4.4.2 Algumas Considerações

Nesta primeira questão, ao lermos o enunciado junto com os alunos, destacamos que em cada item estávamos tratando de uma função distinta e que para todas estas o domínio considerado era o conjunto dos números reais. Observamos que era importante analisar cada afirmação com base na definição de continuidade que foi dada.

No item **1** por exemplo, a aluna Jaqueline afirmou que a questão era muito fácil pois se já foi dito que a função é contínua então o limite e o valor da função no ponto devem coincidir. O aluno Beto fez um questionamento, alegando que não havia afirmação alguma a respeito do limite à esquerda do zero. O aluno Haroldo disse que não era necessário, uma vez que já sabíamos que a função era contínua. Tal discussão suscitada pelo exercício foi, ao nosso ver, bastante produtiva e julgamos que seria conveniente não intervir. A constatação deste fato está no resultado obtido: todos os alunos classificaram esta afirmação como verdadeira, sendo verdadeira de fato. Asssim, notamos que os alunos conseguiram descrever propriedades de uma função num ponto quando afirmamos que ela é contínua neste ponto.

O item **2** também foi de fácil verificação, observamos que mais de um aluno disse que a afirmação só poderia ser verdadeira se a função fosse contínua, mas não havia tal afirmação no enunciado. Apesar disto, 04 alunos não acertaram a questão.

Sobre o item **3** os alunos destacaram que, na definição de continuidade, o limite deve existir e portanto os limites laterais devem coincidir. Todos acertaram a questão, certamente fundamentados no primeiro item, que motivou a caracterização de uma função em um ponto.

No item **4** os alunos estavam divididos, uns disseram sim, outros não, mas não tinham justificativas. Depois de algum tempo, o aluno Beto e a aluna Gisele colocaram que, mesmo os limites laterais coincidindo, como sugere a hipótese da questão, "poderia haver um buraco no $x = 1$" e que não era possível afirmar que esta função era contínua. Mais uma vez, optamos por não intervir, deixando que os demais alunos julgassem a veracidade de tal afirmação por si mesmos.

Particularmente interessantes foram as justificativas dadas pelo aluno Eduardo e pela aluna Amanda: ambos erroneamente utilizaram a continuidade como condição em todos os itens e assim defenderam que todos estes eram verdadeiros.

Há alunos que, neste sentido de compreender hipótese e tese, conseguem ir além do que foi solicitado. A aluna Fabiana por exemplo, além de responder ao item 4 corretamente, acrescentou em suas justificativas que $\lim_{x\to 1^+} r(x) = \lim_{x\to 1^-} r(x) = r(1)$. Um fato que nos despertou a atenção ocorreu ao observamos quatro alunos (Beto, Gisele, Haroldo e Jaqueline) ainda neste mesmo item 4. Eles reconheceram que não havia informação suficiente para a conclusão dada, entretanto, complementam suas justificativas afirmando que os limites laterais apresentados, deveriam ser iguais a 1 e não a $r(1)$. Convém mencionar que nada foi dito a respeito do valor da função em $x = 1$ e tampouco de qualquer limite neste ponto. Notamos que há uma certa confusão entre o valor do domínio e o valor da imagem, ou talvez da necessidade destes coincidirem.

4.4.3 Análise da 2^a Questão

2^a Questão: Esboce o gráfico de uma função contínua, cujo domínio é o intervalo $]-2,2[$ e cuja imagem é toda reta real; tente agora repetir este feito, usando o intervalo $[-2,2]$ como domínio. Escreva suas conclusões.

Nosso objetivo com esta questão era observar que é possível que funções contínuas sejam não limitadas, mesmo definidas em intervalos limitados. Ao selecionarmos as atividades do roteiro didático, tínhamos a impressão de que os alunos poderiam relacionar a continuidade de uma função ao fato desta ser limitada. Para dirimir qualquer dúvida a este respeito, propusemos esta segunda questão.

Surpreendeu-nos o fato de que 08 (oito) alunos conseguiram responder a esta questão com acerto e os demais 02 (dois) alunos cometeram algum tipo de engano. Segue na seção seguinte algumas soluções interessantes fornecidas pelos alunos.

4.4.4 Algumas Considerações

Antes mesmo dos alunos iniciarem a resolução da questão, deu-se início a uma breve discussão, motivada pela leitura do enunciado e ainda pela necessidade de compreensão do que estava sendo solicitado, demonstrada por alguns alunos.

A aluna Jaqueline inicialmente afirmou que deveríamos usar uma reta (função do 1^o grau) como solução; mostramos que isto não poderia satisfazer à condição dada para a imagem, uma vez que o domínio é um conjunto limitado. O aluno Haroldo sugeriu o desenho de uma curva que sequer era função ($x = 1$), esclarecemos que havia pontos no domínio de sua função com mais de uma imagem. O aluno sugeriu que "pintasse toda a parte do plano com $-2 < x < 2$". Esclarecemos que isto não poderia ser uma função de jeito algum, uma vez que contaria o mesmo fato descrito anteriormente.

O aluno Beto colocou que $f(x) = x^3$ poderia ser uma solução para o problema da imagem, entretanto a aluna Ivone se colocou, afirmando que para um domínio limitado a imagem também o seria. A aluna Amanda se recordou da função tangente e notamos que isto ajudou consideravelmente os demais alunos a esboçarem suas soluções. Colocamos para os alunos que a questão solicitava somente o esboço do gráfico e que não era necessária a expressão algébrica.

Em geral, observamos que os alunos recorrem ao fato de que o comportamento de uma função cuja imagem deve ser toda a reta real, definida em um intervalo aberto, deve ser assintótico nas extermidades deste intervalo. A Aluna Amanda utilizou esta afirmação para justificar porque não é possível esboçar o gráfico de uma função cujo domínio fosse um intervalo fechado, satisfazendo às condições dadas. Nos termos utilizados pela própria aluna, a afirmação feita é que "em um intervalo fechado não é possível estabelecer uma assíntota, então não conseguimos fazer uma imagem que pega todo o eixo y." Na figura 4.13 apresentamos o gráfico proposto pela aluna como solução. O aluno Beto, que também

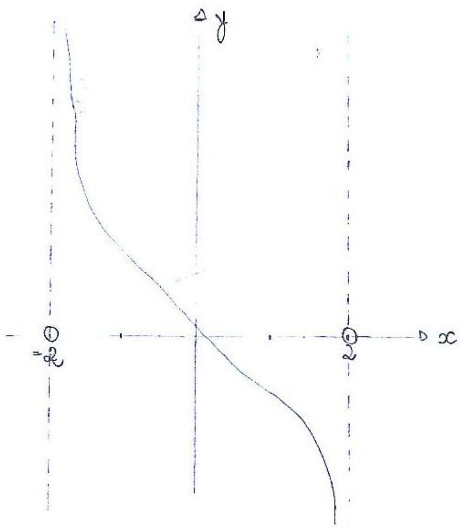


Figura 4.13: Gráfico apresentado pela aluna Amanda, como resposta à 2^a questão.

acertou a questão proposta, esboçou um gráfico que apresentamos ambos na figura 4.14 a seguir. O aluno Haroldo, que em seus gráficos, acredita ser possível esboçar as duas funções solicitadas, não atendeu ao fato da função possuir como imagem toda a reta real

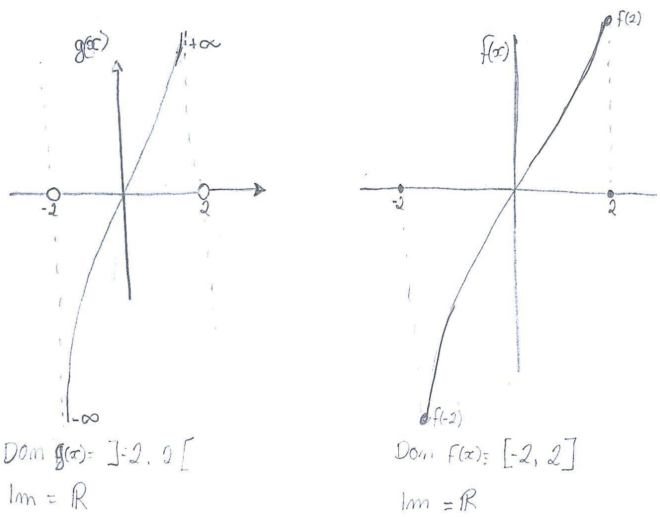


Figura 4.14: Gráfico e apresentado pelo aluno Beto, como resposta à 2^a questão.

para o primeiro caso e para o segundo, admite que os pontos $x = 2$ e $x = -2$ possuem infinitas imagens, como podemos obervar na figura 4.15 seguinte.

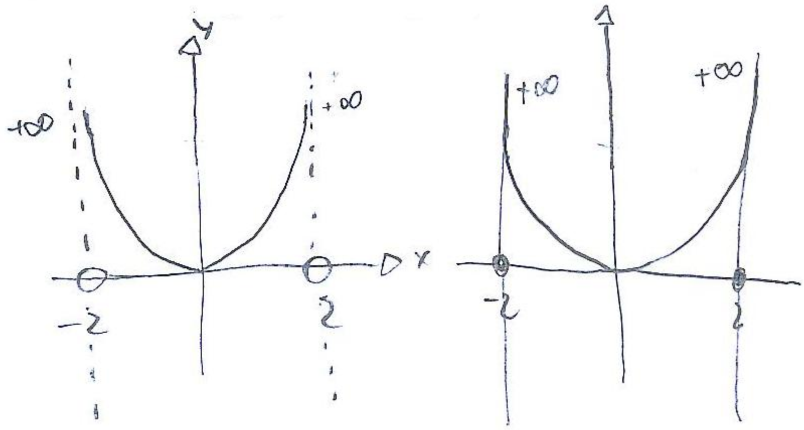


Figura 4.15: Gráfico e apresentado pelo aluno Haroldo, como resposta à 2^a questão.

4.4.5 Análise da 3^a Questão

3^a Questão:
(a) Esboce o gráfico de uma função contínua $g : [1, 5] \to [-2, 2]$, tal que $g(1) = -2$ e $g(5) = 2$
(b) Resolva a equação $g(x) = 0$.
(c) E se tomarmos a equação $g(x) = k$, para $k \in [-2, 2]$?

As soluções fornecidas pelos alunos, estão listadas em cada um dos itens a seguir:

(a) Todos os alunos esboçaram gráficos que satisfaziam às condições dadas.

(b) Todos os alunos disseram que existe uma raiz e a afirmação comumente utilizada é que o gráfico obrigatoriamente deve cortar o eixo x, entretanto, nenhum dos alunos justificou esta informação dizendo que isto ocorre pelo fato da função ser contínua.

(c) Nove alunos disseram que a equação teria solução. Somente 03 (três) dos 10 (dez) alunos justificou a resposta dada.

4.4.6 Algumas Considerações

Nosso objetivo principal com esta questão consiste em introduzir a idéia do Teorema do Valor Intermediário, isto é, relacionar o fato de uma função ser contínua com a existência de raízes ou soluções de equações envolvendo a mesma.

Logo no início desta questão fizemos a leitura do enunciado e esclarecemos que era necessário para a resposta somente o esboço dos gráficos. Recordamos como era a representação geométrica da raiz de uma função, isto é, é a intersecção do gráfico da função com o eixo x. Reforçamos que observassem com atenção quais eram o domínio e a imagem dados para a função e ainda que estes intervalos eram fechados para se construir o esboço da solução.

Antes do item (c) (Verificar se a equação $g(x) = k$ tem raiz para $-2 < k < 2$), perguntamos se haveria raiz para a equação considerando $k = -1$, $k = 0$ (caso anterior),

$k = 1, \cdots$. Esclarecemos que analogamente ao caso de $g(x) = 0$, a equação $g(x) = 1$ teria solução se o gráfico de $g(x)$ interseptasse a reta $y = 1$. Foi necessário que construíssemos um desenho para mostrar como esta idéia se representava geometricamente. Foi colocado ainda para os alunos que não era necessário citar qual era a raiz, uma vez que não havia ferramentas suficientes para tanto: a questão era se há ou não raiz somente.

Como foi colocado anteriormente na descrição dos resultados, esta questão se caracterizou pela ausência de justificativas, mesmo sendo estas solicitadas. Observamos que os alunos concordam com a existência das raízes, apesar de somente 03 (três) deles se esforçarem no intuito de encontrar uma justificativa.

Considerando especificamente o item (c), o aluno Beto, afirmou que "sim, pois a função é contínua e portanto $\exists\ K \in$ Imagem, $\forall\ Dom$"; a aluna Gisele, respondeu "sim, sempre terá solução porque para qualquer k no intervalo $[1, 5]$ a função corta, ou seja, a função é contínua e logo não pode possuir buracos ou saltos" enquanto a aluna Fabiana colocou que "a equação sempre terá solução pois $g(x)$ é uma função contínua no intervalo $[-2, 2]$", tal qual aparece nas soluções apresentadas pelos alunos. Notamos ainda que a aluna Fabiana se refere à continuidade da função g explicitando sua imagem e não seu domínio.

4.4.7 Análise da 4^a Questão

Questão 4: Seja $h(x) = x^3 - 2x^2 + 3x - 1$.
(a) Determine $h(0)$ e $h(1)$.
(b) Você acha que esta função possui alguma raiz? Em caso afirmativo, em qual intervalo? Justifique sua resposta.
(c) Se $f(x)$ é uma função polinomial, como podemos determinar, em geral, um intervalo onde f possua uma raiz?

Descrevemos a seguir as soluções que observamos:

(a) Todos os alunos calcularam $h(0)$ e $h(1)$ com facilidade.

(b) Nove alunos disseram que a função possui uma raiz no intervalo $[0, 1]$.

(c) Todos os alunos responderam que em geral quando a função muda de sinal, então necessariamente corta o eixo x, o que implica a existência de uma raiz. Somente 04 (quatro) dos 10 (dez) alunos citaram que a função deve ser contínua para que isto valha.

4.4.8 Algumas Considerações

Esta questão complementa a anterior, uma vez que fornece elementos para a compreensão das condições sob as quais o Teorema do Valor Intermediário poderá ser aplicado.

Observamos que os alunos responderam rapidamente ao item (a), e assim, demonstram destreza ao reconhecer que é necessário realizar somente uma substituição. Como sugestão para o item (b), propomos que representassem geometricamente os dados obtidos no item anterior. Alguns deles comentaram a existência da raiz fundamentados nesta representação geométrica. Ressaltamos mais uma vez que não possuíamos condições de determinar qual era a raiz, caso esta existisse. Em relação a estas colocações, o aluno Beto se posicionou afirmando que para possuir raiz a função deveria cortar o eixo x; o aluno Haroldo complementou esta afirmação defendendo que tal função cortava o eixo x pois era contínua. Solicitamos aos alunos que, no caso de possuir uma raiz, respondessem qual é o intervalo onde esta raiz se encontra.

A respeito do item (c), afirmamos que uma função polinomial sempre é contínua, apesar desta ter sido uma afirmação já tratada anteriormente. Assim, baseado nos itens anteriores, os alunos deveriam descrever um método para determinar um intervalo onde uma dada função possua uma raiz. Percebemos que os alunos estavam com grande dificuldade em obter uma conclusão, assim, fomos levados a acreditar que tal dificuldade poderia ser fruto da própria questão em si: não é habitual encontrarmos questões nas quais os alunos têm que descrever um procedimento; em geral eles acreditam que respostas à questões de matemática advêm de cálculos.

Detectada tal dificuldade, intervimos utilizando exemplos simples, objetivando que os alunos compreendessem o que a questão propunha. No primeiro destes exemplos, esboçamos o gráfico de uma função f tal que $f(-1) = -2$ e $f(1) = 3$; no segundo, o gráfico de uma função g tal que $g(-1) = 1$ e $g(1) = 3$, ambas contínuas. Fizemos somente um esboço no intervalo $[-1, 1]$, não nos preocupamos com a equação das mesmas. O aluno Beto se colocou claramente, afirmando que "como é uma função contínua, no primeiro caso sabemos que ela vai cortar o eixo x e no segundo caso não, pois no primeiro a imagem passa de negativa para positiva". Notamos que neste momento, com as observações realizadas, os alunos compreenderam a questão.

Após um breve intervalo de tempo, destinado ao registro das respostas dos alunos e encerramento destas, perguntamos se os sinais das imagens mudassem de positivo para negativo isto também ocorreria. Os alunos nos responderam afirmativamente. Concluímos que se a uma função contínua muda de sinal, obrigatoriamente ela tem que assumir o valor 0 em algum ponto entre os quais podemos observar tal mudança de sinal. Informamos que isto era um método eficiente para se descobrir em que intervalo estaria localizada a raiz de uma função. Colocamos que tal método é generalizado por meio do Teorema do Valor Intermediário.

Observamos que os alunos identificaram com facilidade o fato da mudança de sinal de uma função implicar a existência de uma raiz para esta, entretanto, somente 04 (quatro) dos alunos participantes destacam que a continuidade é uma condição fundamental para tanto.

4.4.9 Análise da 5^a Questão

5^a Questão:

Teorema do Valor Intermediário: Suponha que f seja contínua em um intervalo fechado $[a, b]$ e seja N um número qualquer entre $f(a)$ e $f(b)$, com $f(a) \neq f(b)$. Então existe um número $c \in (a, b)$, tal que $f(c) = N$.

Sobre o Teorema do Valor Intermediário (TVI):
(a) Utilize o TVI para determinar um intervalo no qual o polinômio $p(x) = x^3 + 3x^2 + x - 3$, tenha uma raiz.
(b) Explique porque a hipótese de continuidade é indispensável para que este teorema seja válido.
(c) Podemos afirmar, nas condições do Teorema do Valor Intermediário, que a raiz é única? Justifique sua resposta.

Apresentamos a seguir, um resumo das soluções dadas pelos alunos:

(a) Todos os dez alunos identificaram um intervalo onde a função possuía raiz.

(b) Todos os alunos concordam que a continuidade é uma condição indispensável para que o Teorema do Valor Intermediário seja válido. Descreveremos algumas justificativas apresentadas na seção seguinte.

(c) Oito alunos responderam que a raiz não é única e justificaram este fato corretamente, alguns utilizando esboços de gráficos. Dois alunos que também responderam que não, não justificaram a resposta ou apresentaram uma justificativa não válida.

4.4.10 Algumas Considerações

Nosso objetivo com esta questão consiste em reconhecer a necessidade de uma função ser contínua para aplicação do Teorema do Valor Intermediário e ainda, se a conclusão fornece uma única raiz ou não.

Inicialmente, lemos o Teorema do Valor Intermediário com os alunos e apresentamos uma interpretação geométrica para o mesmo; ressaltamos a importância deste teorema na determinação de um intervalo no qual uma dada função contenha uma raiz, desde que esta função seja contínua, sendo esta uma hipótese relevante do teorema.

Recordamos, da questão anterior, quais são as condições para a determinação de tal intervalo $[a, b]$, onde f possua uma raiz.

Após as observações iniciais, passamos à resolução da questão 5, deixando os alunos trabalharem individualmente neste momento. Uma questão particularmente interessante foi levantada pela aluna Jaqueline, que nos perguntou se os números do intervalo seriam dados. Respondemos a ela que cada um teria que descobrir um intervalo onde a função p dada tivesse uma raiz. A seguir, o aluno Haroldo nos perguntou se o intervalo deveria ser aberto ou fechado. Colocamos que não fazia diferença, exceto se um dos extremos deste intervalo for a própria raiz, mas neste caso a investigação de onde estaria uma possível raiz não faria mais sentido.

Para esclarecer as questões dos itens (b) e (c), enfatizamos no item (b): Por que a continuidade era importante para ter certeza de que a função possui uma raiz? A aluna Gisele destacou que se a função não for contínua seu gráfico poderia "pular" o eixo x e então a função não teria raiz, utilizamos aqui as expressões utilizadas pela própria aluna. Já sobre o item (c) colocamos que sabemos que a função considerada é contínua, uma vez que se trata de uma função polinomial e temos em mão dois pontos pelos quais ela passa, nada mais que isto. Sabendo que a função no intervalo considerado possui uma raiz, isto seria suficiente para afirmar que só existe esta raiz no intervalo considerado? Sugerimos que imaginassem como poderia ser feito o desenho de uma curva contínua passando pelos tais dois pontos dados. Também colocamos que poderiam justificar a resposta utilizando figuras. O aluno Haroldo perguntou como ele poderia desenhar o gráfico desta função. Respondi a ele que não era necessário o gráfico para responder à questão, isto é, que a resposta não dependia do gráfico. Coloquei que a questão era intuitiva: sabendo que há uma raiz, podemos ter certeza de que não há outras? O aluno afirmou que havia compreendido a questão.

Sobre os resultados que observamos, nas resoluções entregues pelos alunos, destacamos as respostas dadas pelos alunos Haroldo e Jaqueline, que ao colocarem o intervalo no qual a função possui uma raiz, se referem a valores da imagem e não do domínio. Todos os demais 08 (oito) alunos se referiram corretamente à intervalos do domínio.

Quanto ao item (b), as justificativas mais utilizadas pelos alunos foram as relacionadas ao fato da função contínua não possuir nenhum tipo de salto ou buraco que justifique a falta de uma possível intersecção com o eixo x.

A aluna Gisele, por exemplo, respondeu que "Porque a hipótese da função contínua assegura que o eixo dos x seja cortado, ou seja, que existe uma raiz. Isto porque a função contínua, não pode apresentar saltos ou buracos que impeçam de cortar o eixo x", tal qual aparece em suas folhas de respostas. Apesar disto, acrescentou à sua solução a figura 4.16 cujos gráficos possuem raiz, certamente com o intuito de ilustrar sua afirmação.

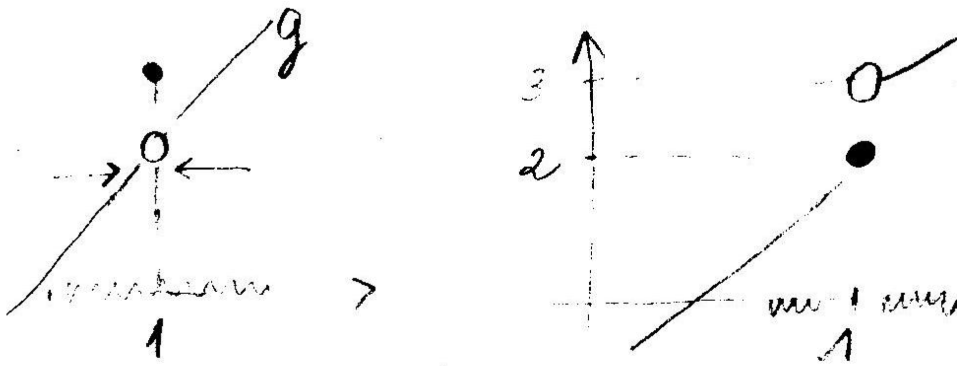


Figura 4.16: Gráfico apresentado pela aluna Gisele, como resposta à questão 3(b).

De forma semelhante o aluno Beto, afirmou que "Pois se a função não for contínua, pode existir um a tal que $0 < a < 2$, tal que $\lim_{x \to a} f(x)$ não exista", esboçando a figura 4.17 a seguir.

Já a respeito do item (c), observamos na seção anterior que 08 (oito) alunos colocaram que a função poderia ter mais de uma raiz, sendo "a função poderia cortar o eixo x mais de uma vez no intervalo considerado" a justificativa mais utilizada. A aluna Jaqueline e o aluno Haroldo afirmaram que não existe outra raiz neste intervalo, sem apresentar no

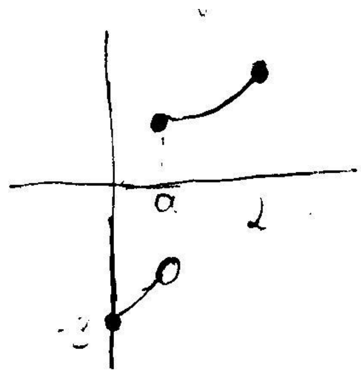


Figura 4.17: Gráfico apresentado pelo aluno Beto, como resposta à questão 3(b).

entanto, justificativa alguma.

O aluno Beto, acrescentou a sua respostas “Não, pois se o gráfico da função fizer uma curva no intervalo, a função terá mais de uma raiz” a figura 4.18 seguinte.

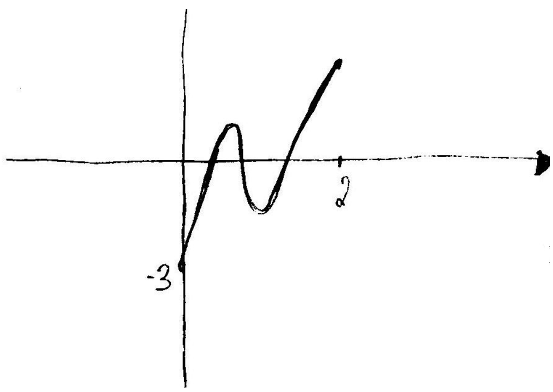


Figura 4.18: Gráfico apresentado pelo aluno Beto, como resposta à questão 3(c).

4.4.11 Análise da 6^a Questão

6^a Questão: Consideremos a função

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se} \quad x < 1; \\ 0 & \text{se} \quad x \geq 1. \end{cases}$$

cujo gráfico está esboçado na figura 4.19:
Consideremos o teorema seguinte:

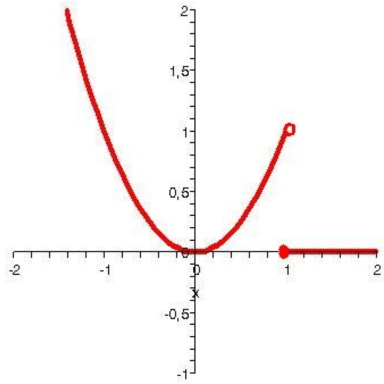


Figura 4.19: Gráfico da função definida por partes $f(x) = x^2$ se $x < 1$; $f(x) = 0$ se $x \geq 1$.

Se uma função f é contínua num intervalo fechado e limitado $[a, b]$, então existem c e $d \in [a, b]$, tais que f assume um valor máximo absoluto $f(c)$ e um valor mínimo absoluto $f(d)$ em $[a, b]$.

(a) A função f está limitada superiormente no intervalo $[0, 1]$?
(b) Esta função é contínua no intervalo $[0, 1]$?
(b) Ela possui máximo no intervalo $[0, 1]$? Justifique.

As respostas obtidas para esta questão foram as seguintes:

(a) Oito alunos responderam sim e dois alunos responderam não.

(b) Todos os alunos responderam que a função não é contínua no intervalo $[0, 1]$.

(c) Nove alunos disseram que a função não admite máximo porque não é contínua. Não foi possível compreender a resposta dada por um dos alunos, apresentada a seguir.

4.4.12 Algumas Considerações

Nosso objetivo com esta questão consistia em compreender o Teorema do Valor Máximo, suas hipóteses e conclusão. Para tanto, propomos uma função, evidentemente não contínua em um dado intervalo, com o intuito de mostrar também a relevância do conceito de continuidade para a construção de outros resultados. Perguntamos inicialmente se os alunos sabiam o que é o máximo de uma função. Esboçamos o gráfico de uma função com alguns máximos e mínimos. Explicamos aos alunos o que era um máximo local e absoluto (ou mínimo), como sendo o maior (ou menor) valor possível que uma função assume em um dado intervalo ou em todo o seu domínio.

Utilizamos a função seno para explicar quando uma função é limitada (superiormente e inferiormente) e em seguida, lemos o enunciado da questão juntamente com o teorema proposto. Além disto, destacamos que estaríamos observando somente o intervalo fechado $[0, 1]$ e não todo o domínio da função.

A aluna Jaqueline nos perguntou se existia alguma relação entre a função ser contínua e ser limitada. Observamos que a relação existe somente se a função estiver definida em um intervalo fechado, o que aliás é a afirmação do teorema proposto nesta questão. Em caso contrário, não necessariamente. Considere por exemplo as funções $f(x) = x^2$, que em todo seu domínio é contínua mas não é limitada e $g(x) = \sin x$ que em todo seu domínio é contínua e é limitada.

Sobre as soluções dadas, observamos que os alunos conseguem identificar a continuidade para a existência de um máximo, uma vez que o número de acertos nesta questão foi considerável. Um ponto que nos chamou a atenção é que nenhum aluno mencionou explicitamente o teorema para justificar suas respostas. Quase a totalidade destes afirma que não existe um máximo para função dada no intervalo $[0, 1]$, pelo fato da função não ser contínua neste. Além disto, o aluno Eduardo nos deixou uma resposta pouco esclarecedora; segundo este, a função dada não assume máximo no intervalo $[0, 1]$ "pois o valor de máximo coincide com o valor mínimo então nenhum dos dois existe".

4.4.13 Análise da 7^a Questão

7^a Questão: Considere a função $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, definida por $f(x) = x$. Observe na figura seguinte o gráfico da função f:
(a) Para quais pontos esta função está definida?
(b) Esta função f é uma função contínua? Comente sua resposta.

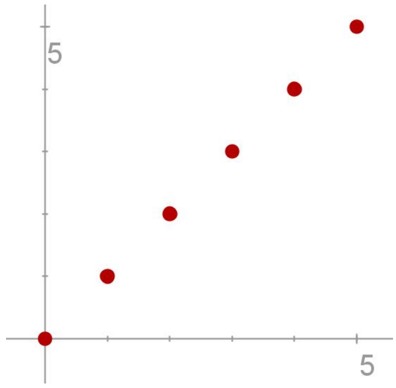


Figura 4.20: Gráfico da função $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, definida por $f(x) = x$.

As respostas obtidas para esta questão foram as seguintes:

(a) Todos os alunos escreveram claramente que a função está definida para todos os números naturais.

(b) Nove alunos responderam que a função era contínua e um aluno respondeu que a função não era contínua.

4.4.14 Algumas Considerações

Nosso objetivo com esta questão consistia em discutir a continuidade de funções cujo domínio é um conjunto discreto. Assim, verificaríamos se os alunos utilizam suas concepções espontâneas para classificar a função dada, que apesar da aparência não contínua, no sentido cotidiano da palavra, satisfaz à definição matemática de continuidade.

Inicialmente realizamos a leitura da questão juntamente com os alunos. Observamos que os alunos compreenderam a questão e seu enunciado, certamente auxiliados pelo esboço do gráfico da função apresentado na mesma. A aluna Ivone perguntou se observaríamos somente os números naturais; o aluno Beto colocou que não faria sentido perguntar sobre a continuidade da função dada em outros números.

Alguns dos comentários descritos pelos alunos foram os seguintes: O aluno Beto, alegou que “Apesar desta função não ser uma reta pois ela tem como domínio somente os números naturais, o limite de qualquer a natural será o próprio a". Observamos que quando o aluno coloca **não é uma reta**, certamente está se referindo ao fato da função ser esboçada por meio de pontos isolados. A aluna Ivone, que neste mesmo sentido defendeu que a função dada é contínua, afirmou "(...) apesar de aparentemente não ser contínua".

Em geral, os alunos respondem que a função dada é contínua alegando que a definição de continuidade é satisfeita em cada ponto de seu domínio, isto é, nas palavras utilizadas por alguns alunos, "pois o valor da função em cada ponto coincide com o limite em cada ponto". Apesar disto, os alunos perguntam qual seria o modo para se determinar tais limites. Sabemos que de fato eles não estão definidos. O aluno Eduardo, que discordou dos demais, afirmou que a função dada "não era contínua porque só estava definida para os números naturais", certamente questionando o fato que não seria possível calcular os limites com as informações dadas.

Observamos que os alunos insistiam em calcular cada limite observando exclusivamente pontos do domínio. Sabemos que apesar desta exigência integrar nossa definição de continuidade, ela não é necessária para se estabelecer um limite (pois somente é necessário que o ponto seja um ponto de acumulação) e que para uma justificativa precisamente correta para esta questão seria necessário o uso da definição de continuidade expressa por meio de ε's e δ's, conforme foi apresentado nas páginas 14 e 15 da seção 1.4, mas que não se consistui elemento de investigação deste trabalho.

Capítulo 5

Considerações Finais

Dentre algumas das motivações que nos levaram às reflexões propostas neste trabalho, estão

- os problemas decorrentes da atual conjuntura da sala de aula de cálculo no ensino superior de matemática em nosso país: alunos desestimulados, com baixo rendimento e pouco participativos;
- a postura tradicional dos professores nestas aulas de cálculo, que pode contribuir consideravelmente para o agravamento desta situação;
- a dificuldade dos alunos em cálculo, particularmemte para lidar com o conceito de continuidade, por sua relevância na construção de diversos resultados do Cálculo Diferencial e Integral;
- a falta de consenso quanto a definição de continuidade dos livros didáticos e dos professores, que por vezes pode refletir num certo desencontro de informações.

Partindo destes elementos, apresentamos uma breve análise de como tal conceito é apresentado em textos didáticos difundidos em nosso país, listando algumas propostas para discuti-lo. Buscamos na literatura referenciais teóricos que pudessem subsidiar a elaboração de uma proposta didática coerente com as motivações apresentadas, e por fim a elaboração e aplicação de tal proposta, com vistas a responder às seguintes questões de investigação:

- As atividades de investigação podem se tornar elemento motivador para a sala de aula de Cálculo, de forma a incitar a participação dos alunos na realização das tarefas?
- As concepções espontâneas dos alunos, em particular a respeito do conceito de continuidade podem contribuir para a construção do conceito?
- Até que ponto, os alunos classificam uma função em contínua ou descontínua com base nas suas concepções e não na definição de continuidade adotada?

Para responder a estas questões, foi aplicado um conjunto de atividades, que denominamos "roteiro didático" a um grupo de 10 alunos que iniciam o curso de Licenciatura em Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio de Janeiro, no *Campus* de Volta Redonda. Tais atividades passaram a complementar as propostas já existentes da disciplina Pré-Calculo, do primeiro período deste curso, ministrada pelo pesquisador deste trabalho no primeiro semestre letivo do ano em curso.

A aplicação de tais atividades foi precedida por um questionário, que buscou coletar dados a respeito da formação básica dos alunos participantes e das concepções e imagens que possuíam a respeito do conceito de continuidade. O roteiro didático foi composto de duas partes, aplicado durante um período de duas semanas consecutivas de aulas, cujos objetivos eram estabelecer a definição de continuidade que propomos e para tanto as questões têm o propósito de introduzir e subsidiar a compreensão de elementos necessários à construção da definição na primeira parte, e na segunda, analisar alguns desdobramentos da definição, particularmente dois teoremas relevantes em Cálculo e que são válidos somente se as funções consideradas são contínuas.

Destacamos que as atividades propostas foram realizadas pelos alunos em sala de aula com interferência do professor: nossa postura buscou motivar a participação dos alunos, "rompendo com a inércia dominante das aulas de cálculo, improdutiva para alunos e professores" como destacado em Frota (2006) e principalmente com o intuito de envolver os alunos no processo de construção de seus conhecimentos.

Assim, nosso trabalho de intevir, cuidou principalmente por criar um ambiente de investigação e participação dos alunos, em que as soluções, assim que descobertas, passassem por um cunho de verificação e justificação.

Neste ponto de vista, podemos afirmar que as atividades de investigação se tornam elemento capaz de motivar consideravelmente as aulas de cálculo: observamos que durante a resolução das questões propostas de um modo geral, o processo de investigação conduz nossos alunos a uma maior compreensão dos problemas presentados, além da determinação de respostas mais sólidas. Isto, de certa forma, exige uma participação mais ativa dos alunos no estabelecimento de suas conjecturas, verificação e justificação destas, sendo tal participação verificada através de questionamentos, afirmações, justificações colocadas pelos próprios alunos.

Observando as questões aplicadas no questionário, os resultados obtidos de forma global e o desenvolvimento das atividades de resolução e investigação podemos afirmar que estes alunos puderam vivenciar processos de construção matemáticos característicos da própria natureza desta ciência, no sentido de que a Matemática possui características de exploração, formulação de conjecturas e justificação destas conjecturas em sua formação. Acreditamos que esta vivência possibilitou aos alunos participantes o estímulo à capacidade de justificação e validação dos resultados, característica importante a ser desenvolvida num curso de formação de professores de matemática.

Nossa segunda questão de investigação se refere às concepções espontâneas apresentadas pelos alunos. Observamos que dos dados apresentados na secção 4.2, 07 (sete) alunos se manifestaram relacionando a continuidade com a ausência de interrupções, falhas ou situações semelhantes, 02 (dois) alunos pensam na função constante quando se fala em contínua e 01 (um) aluno afirma que algo contínuo é algo que não tem fim. A definição de continuidade adotada enfatizava que é necessário que uma função esteja em primeiro lugar, definida num ponto, para que a continuidade neste possa ser observada.

Neste sentido podemos afimar que uma função é contínua num intervalo aberto onde a mesma está definida, se não apresenta as tais interrupções, buracos, falhas, entre outros, de maneira semelhante ao que foi apontado por 07 (sete) dos 10 (dez) alunos participantes no questionário. Um destes alunos incluiu que é necessário a função estar definida num ponto para que estas afirmações façam sentido. Deste modo, somos levados a concluir que as concepções espontâneas apresentadas pelos alunos podem contribuir de maneira ímpar para a construção do conceito de continuidade, uma vez que estas podem facilitar a compreensão do conceito, pois apóia-se numa idéia adquirida previamente a um ensino formal e tornar seu ensino mais próximo dos alunos. Um fato que nos surpreende é que não encontramos situação alguma na qual as concepções espontâneas pudessem atrapalhar a aprendizagem dos conceitos. Talvez isto se deve ao fato de que na definição trabalhada, a questão de que para se analisar a continuidade em um ponto é necessário que o função esteja definida neste ponto, ter sido bastante enfatizada ao longo das semanas de trabalho, contanto inclusive com exercícios específicos para este fim (como na 4^a questão da primeira parte do roteiro didático).

Para responder à nossa terceira questão de investigação, obervamos inicialmente o que foi colocado por nossos alunos em resposta ao questionário e descrito nos dois parágrafos anteriores: sete dos dez alunos relacionam a função contínua àquela que não apresenta falhas ou situações semelhantes. Em seguida, nos resultados que obtivemos com a terceira questão da primeira parte do roteiro didático, observamos que 06 (seis) dos 10 (dez) alunos classificam a função $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $x \neq 0$ como contínua. É conveniente considerar que tal questão foi a primeira a ser aplicada após o estabelecimento da definição.

Já observando os dados da quarta questão da primeira parte do roteiro didático, vimos que todos os dez alunos afirmam que entre $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $x \neq 0$ e $g(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{para} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{para} \quad x = 0 \end{cases}$, só faz sentido observar a continuidade no ponto $x = 0$ na segunda destas funções.

Consideramos ainda os resultados observados na sétima questão da segunda parte do roteiro didático, que consistia em classificar a função $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $f(x) = x$, quanto à continuidade. Os dados apresentados na secção 4.4.13 e comentários da secção 4.4.14, nos apontam que 09 (nove) dos 10 (dez) alunos participantes afirmaram que esta função é contínua. Alguns deles ainda defendem a idéia de que a função é contínua (aqui entendemos segundo a definição dada) mesmo não sendo aparentemente contínua (aqui entendemos como no sentido coloquial da palavra).

Baseados nestas informações, somos levados a afirmar que os alunos não utilizam somente suas concepções espontâneas para classificar uma função quanto à continuidade, uma vez que grande parte dos alunos envolvidos recorreram à definição ao classificar uma função, e como foi dito, conseguem diferenciar o uso de um termo que representa uma definição matemática do uso deste mesmo termo em linguagem coloquial.

De maneira mais geral, acreditamos que este trabalho nos leva a refletir a respeito da nossa prática docente. De fato, como colocado na epígrafe de abertura deste,

> Quem dirá que não considera os conhecimentos prévios dos alunos e não busca trabalhar a partir deles? Quem ousará afirmar que o conhecimento não é construído? Ou ainda, que não é preciso relacionar as idéias matemáticas, trabalhando a ampliação dos conceitos?
>
> (SZTAJN, 1999, p.28)

Mas a grande questão aqui seria "quantos conseguem transformar seu discurso em prática? "

Sabemos que o alto número de reprovações em turmas iniciais de cálculo tem sido generalizado, e a grande parte destes alunos se desmotivam a prosseguir. No entanto, muitos professores sequer se permitem avaliar seu trabalho. A reflexão sobre própria prática a que nos propomos, nos forneceu subsídios para acreditarmos que o potencial dos alunos por vezes pode não ser bem aproveitado em função de uma hegemonia dominante do professor nas aulas de cálculo, pois com isto os alunos se colocam, e porque não dizer são colocados, exclusivamente na posição de espectadores. Precisamos, enquanto professores, adotar metodologias que estimulem a participação dos alunos e que exijam principalmente destes esta postura. Nossos alunos devem ser incitados a trabalhar em prol da construção de seus conhecimentos e isto compete a nós professores.

Referências Bibliográficas

[1] ANTON, Howard. *Cálculo - Um Novo Horizonte, Volume 1.* 6^a Edição. Bookman Editora. Porto Alegre, 2005.

[2] ÁVILA, Geraldo. *Sobre Continuidades de Funções.* In.: RPM – Revista do Professor de Matemática, Edição n^o 73, 2^o Quadrimestre de 2010. São Paulo: SBM – Sociedade Brasileira de Matemática, 2010.

[3] ROSA, Ernesto & PEREIRA, Antônio Luiz. *A função $\frac{1}{x}$ é descontínua no zero?* In.: Revista do Professor de Matemática, Edição n^o 72, 2^o Quadrimestre de 2010. São Paulo: SBM – Sociedade Brasileira de Matemática, 2010.

[4] BAIRRAL, Marcelo Almeida. *Instrumentação para o Ensino da Geometria.* Volume 1. Fundação CECIERJ / Consórcio CEDERJ – Centro de Educação Superior a Distância do Estado do Rio de Janeiro. Rio de Janeiro, 2006.

[5] CARDIM, Nanci. *Exercícios Programados 3 – Cálculo I – Semestre 1/2010.* Curso de Licenciatura em Matemática do Consórcio CEDERJ – Centro de Educação Superior a Distância do Estado do Rio de Janeiro. Rio de Janeiro, 2010.

[6] CARVALHO, Ana M. T. da F. & CARVALHO, Túlio O. $\frac{1}{x}$ é contínua? - Laços entre Educação Matemática, Psicanálise e Hipermodernidade. Anais do III SIPEM - Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática. 2006.

[7] CEFETEQ, Centro Federal de Educação Tecnológica de Química. *Projeto para implantação do curso de Licenciatura em Matemática.* CEFETEQ - *Campus* Nilópolis. Rio de Janeiro, 2006.

[8] CORNU, Bernard. *Limits.* In D.O. Tall (ed.), Advanced Mathematical Thinking, Kluwer, Dordrecht, pp. 153-166, 1991.

[9] CROSS, Patrícia & STEADMAN, M. *Classroom Research: Implementing the Scholarship of Teaching.* São Francisco: Jossey-Bass, 1996.

[10] CUNHA, Daniela Santa Inês. *Investigações geométricas: desde a formação do professor até a sala de aula de matemática.* Dissertação de mestrado, Programa de Pós-graduação em Ensino de Matemática. Rio de Janeiro: UFRJ/ IM, 2009.

[11] FROTA, Maria Clara Rezende. *Investigações na sala de aula de Cálculo.* 29ª. Reunião da ANPED – Associação Nacional dos Programas de Pós-graduação em Educação. Disponível em http://www.anped.org.br, acessado em 13/10/2009. São Paulo, 2006.

[12] FROTA, Maria Clara Rezende. *Sintetizar idéias e atribuir sentido às fórmulas para aprender Cálculo.* Anais do XXXV COBENGE – Congresso Brasileiro de Educação em Engenharia. Curitiba, 2007.

[13] FROTA, Maria Clara Rezende & NASSER, Lilian. *Relatório do GT4 - Educação Matemática no Ensino Superior.* III SIPEM - Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática, disponível em www.sbem.com.br/files/RelatorioGT4.pdf, acessado em novembro de 2009.

[14] GIRALDO, Victor. *Lista de Limites e Continuidade.* Lista de exercícios não publicadas do curso de Análise I. Mestrado em Ensino de Matemática, Instituto de Matemática - UFRJ, 2008.

[15] GIRALDO, Victor. *Descrições e Conflitos computacionais: O Caso da Derivada.* Tese de Doutorado. COPPE - Programa de Engenharia de Sistemas e Computação. Universidade Ferderal do Rio de Janeiro. Rio de Janeiro. 2004.

[16] GT4, Grupo de Trabalho em Educação Matemática no Ensino Superior. *Relatório do GT4.* Disponível em www.sbem.com.br/files/RelatorioGT4.pdf acessado em 12/04/2009. SBEM, 2006.

[17] GUIDORIZZI, Hamilton L. *Um curso de Cálculo* Volume 1, 5^a Edição. LTC Editora, Rio de Janeiro, 2004.

[18] LEITHOLD, Louis. *O Cálculo com Geometria Analítica – Volume 1.* Harba Editora. São Paulo, 1999.

[19] LIMA, Elon Lages. *Curso de Análise* Volume 1, 10^a Edição. Coleção Euclides. Associação Nacional de Matemática Pura e Aplicada, 2001.

[20] LIMA, Elon Lages. *Análise na Reta* Volume 1, 10^a Edição. Coleção Matemática Universitária. Associação Nacional de Matemática Pura e Aplicada, 2003.

[21] MELLO, Alciléia Augusto H de. *Por que temer os épsilons e deltas?* Revista Matemática Universitária Edição XX - Seção Ensino. SBM - Sociedade Brasileira de Matemática. Rio de Janeiro, 1991.

[22] MESCOLIN, Marques Fredman. *Construindo o conceito de continuidade: Atividades de investigação e a Pesquisa sobre a própria prática.* Anais do V EEMAT – Encontro Estadual de Educação Matemática do Estado do Rio de Janeiro. Rio de Janeiro, 2010.

[23] MUNEM, Mustafa A. & FOULIS, DAVID J. *Cálculo – Volume 1.* Rio de Janeiro. LTC Editora, 2003.

[24] NERI, Cássio & CABRAL, Marco A. P. *Curso de Análise Real.* Instituto de Matemática - Universidade Federal do Rio de Janeiro. Rio de Janeiro, 2007.

[25] OLIVERO, Mário & CARDIM, Nancy. *Cálculo I - Volume 0.* Fundação Centro de Educação Superior a Distância do Estado do Rio de Janeiro. Rio de Janeiro: Fundação CECIERJ, 2009.

[26] PALIS, Gilda de La Rocque. *A Pesquisa sobre a Própria Prática no ensino superior de Matemática – Teachers as researchers of their own practice in college mathematics teaching.* In: Educação Matemática no Ensino Superior. Pesquisas e Debates, pp. 203 a 221. Orgs. Maria Clara Rezende Frota e Lilian Nasser. SBEM, 2009.

[27] PALIS, Gilda de La Rocque. *A Pesquisa sobre a própria prática no ensino superior de matemática.* Anais do IV HTEM – Colóquio História e Tecnologia no Ensino da Matemática. <Disponível em www.limc.ufrj.br/htem4/papers/40.pdf> Acessado em 12/04/2009. Rio de Janeiro, 2008a.

[28] PALIS, Gilda de La Rocque. *Relato de uma implementação de uma disciplina de Cálculo na Arquitetura.* Boletim GEPEM, n^o 52, p. 85-104. São Paulo, 2008b.

[29] PEMAT - Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática. Exame específico de seleção para o mestrado 2007. Instituto de Matemática, Universidade Federal do Rio de Janeiro, 2007.

[30] PINTO, Gisella Maria da Fonseca. *Compreensão Gráfica da derivada de uma função real em um curso de cálculo semipresencial.* Dissertação de Mestrado em Ensino de Matemática. IM – UFRJ, 2008.

[31] POINCARÉ, Henri. *Science et Méthode.* Reedição de 1999. Paris: Kimé, 1908.

[32] POMBO, Dinamério & GUSMÃO, Paulo H. C. *Cálculo I - Volume 1.* Fundação Centro de Educação Superior a Distância do Estado do Rio de Janeiro. Rio de Janeiro: Fundação CECIERJ, 2007.

[33] PONTE, João Pedro da. *Investigando as aulas de investigações matemáticas.* <Disponível em www.ia.fc.ul.pt/textosp_133-151.pdf> Acessado em 15/04/2009. Portugal, 1998.

[34] PONTE, João Pedro da, et all. *O trabalho do professor numa aula de investigação matemática.* <Disponível em www.ia.fc.ul.pt/textos>. Acessado em 15/04/2009. Portugal, 2000.

[35] PONTE, João Pedro da e, BROCARDO, Joana; OLIVEIRA, Hélia. *Investigações Matemáticas na Sala de Aula.* Belo Horizonte: Autêntica, 2006.

[36] PONTE, João Pedro da & MATOS, João Filipe. *Processos Cognitivos e Interações Sociais nas Investigações Matemáticas* In: Mathematical Problem Solving and New Information Technologies, Research in Contexts of Pratice. Springer – Velag. Portugal, 1992.

[37] PONTE, João Pedro da. *Investigar a nossa própria prática.* In: GTI (org), Reflectir e investigar sobre a prática profissional, pp. 5-28. Lisboa: APM, 2002.

[38] ROSA, Ernesto & PEREIRA, Antônio Luiz. *A função* $\frac{1}{x}$ *é descontínua no zero?* In.: Revista do Professor de Matemática, Edição n^o 72, 2^o Quadrimestre de 2010. São Paulo: SBM – Sociedade Brasileira de Matemática, 2010.

[39] SEGADAS VIANNA, Claudia Coelho de. *Student's understanding of the Fundamental Theorem of Calculus: An Exploration of Definitions, Theorems and Visual Imagery.* Ph.D. Thesis, School of Education, University of London, United Kingdom, 1998.

[40] SCHOOL MATHEMATICS PROJECT, SMP. *Livro 1, Capítulo 5.* p. 133 apud TALL, D. & VINNER, S. *Concept image and concept definition in mathematics, with special reference to limits and continuity.* Educational Studies in Mathematics, 12, pp. 151-169, 1981.

[41] SIERPINSKA, Anna. *On understanding the notion of function.* In: DUBINSKY, E.; HAREL, G. (Eds.). The Concept of Function: Elements of Pedagogy and Epistemology. New York: Concordia University, 1992, (Notes and Reports Series of the Mathematical Association of American). p. 25-58.

[42] SIMMONS, George F. Cálculo com Geometria Analítica. Volume 1, São Paulo: McGrawHill, 1987.

[43] SPIVAK, Michael. *Cálculo Infinitesimal.* Segunda Edição. Editorial Revertè S.A. México, 1996.

[44] SWOKOWSKI, Earl, W. *Cálculo com Geometria Analítica.* Volume 1, São Paulo: McGrawHill, 1983.

[45] STEWART, James. *Cálculo - Volume 1.* 5^a Edição. Thompson Learning. São Paulo, 2005.

[46] SZTAJN, Paola. *O que precisa saber um professor de matemática? Uma revisão da literatura americana dos anos 90.* In: Educação Matemática em Revista, edição especial n^o 11^A, pp. $17-28$. São Paulo, 2002.

[47] SZTAJN, Paola. *Novos paradigmas no Ensino da Matemática: Ideías não bastam: Como mudar o ensino da matemática?* In: CD Livro do II Encontro de Educação Matemática do Estado do Rio de Janeiro. Rio de Janeiro, 1999.

[48] TALL, David & VINNER, Shlomo. *Concept image and concept definition in mathematics, with special reference to limits and continuity.* Educational Studies in Mathematics, 12, pp. 151-169, 1981.

[49] VINNER, Shlomo. *The role of definitions in the teaching and learning of mathematics.* In: TALL, D. O. (Ed.). Advanced Mathematical Thinking. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1991. p. 65-81.