

MODELOS ALGÉBRICOS PARA GEOMETRIAS
NÃO-ARQUIMEDIANAS



MARÍA JOSÉ MORENO SILVA

PEMAT-UFRJ

NOVEMBRO DE 2010



MODELOS ALGÉBRICOS PARA GEOMETRIAS NÃO-ARQUIMEDIANAS

por

María José Moreno Silva

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Ensino de Matemática, Instituto de Matemática, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Ensino de Matemática.

Orientador: Oswaldo Vernet de Souza Pires

Rio de Janeiro

Novembro de 2010

MODELOS ALGÉBRICOS PARA GEOMETRIAS NÃO-ARQUIMEDIANAS

por

María José Moreno Silva

Orientador: Oswaldo Vernet de Souza Pires

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Ensino de Matemática, Instituto de Matemática, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Ensino de Matemática.

Aprovada por:

Oswaldo Vernet de Souza Pires, D.Sc., NCE-UFRJ (Orientador)

Luiz Carlos Guimarães, Ph.D., IM-UFRJ

Marina Tebet Azevedo de Marins, D.Sc., UFF

Nair Maria Maia de Abreu, D.Sc., COPPE-UFRJ

Rio de Janeiro

Novembro de 2010

M835m	<p>Moreno Silva, María José.</p> <p>Modelos algébricos para geometrias não-arquimedianas / María José Moreno Silva. -- Rio de Janeiro: IM/UFRJ, 2010.</p> <p>xvi, 200f. ;30cm</p> <p>Orientador: Oswaldo Vernet de Souza Pires.</p> <p>Dissertação (mestrado) – UFRJ/IM. Programa de pós-graduação em Ensino da Matemática, 2010.</p> <p>Referências: f.140-142</p> <p>1.Geometria algébrica -Tese. I. Pires, Oswaldo Vernet de Souza. II.Universidade Federal do Rio de Janeiro. I Instituto de Matemática. III.Título.</p>
-------	---

*A Moni, mi mamá, por ayudarme
a superar cada obstáculo.*

*A Segundo, mi abuelito, por
enseñarme a ser feliz con poco.*

*A Nenita, mi abuelita, por guiarme
en momentos oscuros.*

A Pauli, mi hermana, por existir.

Agradecimentos

Ao Programa de Mestrado em Ensino da Matemática do IM-UFRJ, pela oportunidade que ofereceu-me de ser parte dele.

Ao meu orientador, Oswaldo Vernet, pois é a única pessoa que conheço que deixava-me em um buraco quase sem saída e esticava o seu braço para ajudar-me a levantar e assim poder continuar. Agradeço pela grande paciência e por desafiar-me a enxegar além da realidade dos meus olhos.

Ao coordenador do mestrado, professor Victor Giraldo, pela ajuda outorgada em cada momento em que precisei.

Ao professor Luiz Carlos Guimarães, pela sua doçura e preocupação, além das boas dicas durante todo o curso. A Francisco Mattos, pelos bons e gratos momentos compartilhados.

As professoras Nair e Marina, pelas observações e dicas neste trabalho.

A LIMC, CENPES e CAPES, pela bolsa de estudo outorgada.

Aos meus amigos e colegas do mestrado, turma 2008, pelas experiências vividas e pela compreensão e paciência idiomática. Em especial aos meus caros amigos Rodrigo, Marques, Mirella, Felipe. À Ana Luisa por sempre estar disposta a ajudar-me e pela sua amizade incondicional. Aos colegas da turma 2007, Daniela Cunha, pelas alegrias e

tristezas compartilhadas, por me aceitar apesar da minha frieza e por me lembrar como é bom sonhar de olhos abertos, e ao Rubem pela grata companhia no Impa.

Ao Cristiano B. Moura pela solicitude ao expedir cada declaração que precisei e pela bela amizade outorgada.

À minha grande família do Rio, por fazer-me sentir como em casa: Juan Casavilca, Daniel, Toninho, Carlos Sauer e a sua Luz, Altemar, FabioXP, Alan. Em especial a Kadú (Tenente Belchior) por manter-me pertinho de Deus. Ao sobrinho (Ricardo Turolla Bortolotti) pela busca incessante do artigo de Veronese.

Aos meus amigos do voley: Alessandro, Jucelino, Allan Rocha, Sergito e Jyrko, por me ajudar a liberar o stress de cada semana e por me aceitar apesar da infinidade de pontos errados.

Y ahora en español...

En primer lugar a mi familia por el apoyo constante e incondicional en esta aventura, en especial a mi tata, por mantenerme al día con las noticias de Chile y por cuidar de mi Camilito; a mi Nena, por ser tan compresiva e incentivar-me a continuar y no desistir; a Paulina, mi hermanita, por darme una nueva razón para perseverar, la Puntito; y en especial a Moni, mi mamá, a pesar de que cada vez que preguntaba cuando terminaría me agoniaba, siempre me daba fortaleza para seguir, me daba fuerzas para no declinar inclusive en los momentos que lo único que deseaba era regresar.

A mis grandes amigas: Anays por los años que me has aguantado y por siempre visitarme en mis estadias en Santiago. Además de la constante preocupación; Karina, para mí simplemente Ka, por confiar en mí, por apoyarme en cada momento y crearme a pesar de que todo indicaba lo contrario.

A mis profesores de Chile por la confianza al recomendarme: profesor Máximo Gon-

zalez Sasso, por me imponer siempre a continuar estudiando y perfeccionando; profesor Fidel Oteiza Mora, por los sabios consejos entregados.

A David Painequeo por la preocupación, dedicación y tiempo empleado en la búsqueda de artículos que serían de utilidad en mi trabajo.

A Guillermo Gómez, por conocernos mejor y no dejar nuestros prejuicios prevalecer. Por el apoyo incondicional y por ser parte de mi familia de Río y espero que de Chile también.

A Alma (Almita), por ser una hermana, amiga, confidente, en todo momento que vivimos juntas. Gracias por escucharme y no sólo cuando tenía problemas matemáticos. Gracias por hacer de este año tan ameno y gracias por recordarme como es divertido ser infantil sin necesidad de ser inmadura.

A la familia Puelma Moya por darme ánimos y cariños en todo momento y por hacer de mis estadías en Chile aun más agradables.

Y por último, pero no menos importante a Sebastián Puelma, amor mío, te agradezco en primer lugar por hacer mis días más felices, por ser mi consejero, amigo, confidente, compañero y tantas otras cosas. Gracias por querer ser parte de la historia de mi vida. Y gracias por la paciencia y ayuda en este trabajo. Te amo.

*Os modelos dos matemáticos, como
os dos pintores ou os dos poetas,
devem ser belos; as idéias, assim
como as cores ou as palavras,
devem encaixar-se de maneira
harmoniosa. A beleza é o primeiro
teste: não há lugar permanente no
mundo para uma matemática feia.*

G. H. Hardy (1877-1947)

Matemático Inglês

Resumo

MODELOS ALGÉBRICOS PARA GEOMETRIAS NÃO-ARQUIMEDIANAS

María José Moreno Silva

Novembro/2010

Orientador: Oswaldo Vernet de Souza Pires

Neste trabalho, apresentamos um estudo sobre modelos algébricos de geometrias não arquimedianas. Para esta finalidade, outorgamos uma interpretação algébrica a um sistema axiomático que não contemple nenhum axioma de continuidade. Para realizar a interpretação algébrica nos munimos de ferramentas algébricas, pelo que estudamos corpos abstratos e construimos corpos não arquimedianos. Além disso, apresentamos aqui, o arquivo “La Geometria non-Arquimedeana” de Giuseppe Veronese e a tradução para o português da tese de Doutorado de Max Dehn “Die Legendre'shen Sätze über die Winkelsumme im Dreieck”.

Palavras-chaves: Plano de Hilbert; Geometria não Arquimediana; Modelos algébricos.

Abstract

ALGEBRAIC MODELS FOR NON-ARCHIMEDEAN GEOMETRIES

María José Moreno Silva

November/2010

Advisor: Oswaldo Vernet de Souza Pires

In this work, we present a study about algebraic models of non-archimedean geometries. For that purpose, we gave an algebraic interpretation of an axiomatic system that does not contemplate any continuity axiom. To achieve an algebraic interpretation we endowed algebraic tools, and for that we studied abstract fields and constructed non-Archimedean fields. Besides that, we presented the file “La geometria non-Arquimedeana” by Giuseppe Veronese and a translation to portuguese for the PhD thesis by Max Dehn “Die Legendre'shen Sätze über die Winkelsumme im Dreieck”.

Keywords: Hilbert plane; Non-Archimedean Geometry; Algebraic models.

Sumário

Agradecimentos	v
Resumo	ix
Abstract	x
1 Introdução	1
2 Geometria Neutra	7
2.1 Sistema Axiomático	7
2.2 Geometria Neutra	10
2.3 Axiomas de Incidência	11
2.4 Axiomas de Ordem	15
2.5 Axiomas de congruência para segmentos	21
2.6 Axiomas de congruência para ângulos	23
2.7 Plano de Hilbert	26
2.7.1 Teorema do Ângulo Externo	26
2.7.2 Perpendicularidade e Ângulos Retos	28
2.7.3 Congruência de triângulos	31
2.7.4 Bisseção de Segmentos e Ângulos	33

2.8	Axioma de Paralelismo	33
2.9	Círculos e retas	37
3	Movimentos Rígidos	40
3.1	Preliminares	40
3.2	Movimentos Rígidos e o axioma (C6)	41
4	Saccheri e as suas três hipóteses	46
4.1	Preliminares	47
4.2	O Quadrilátero de Saccheri	49
4.3	As Três Hipóteses	55
5	Corpos não Arquimedianos	60
5.1	Corpos e propriedade Arquimediana	61
5.2	Construção de um Corpo não Arquimediano	68
5.3	Corpo Pitagórico não Arquimediano	81
5.4	Corpo Euclidiano não Arquimediano	86
6	Geometria sobre Corpos	94
6.1	Plano Cartesiano sobre um Corpo Abstrato	95
6.2	Corpo Abstrato e Incidência	97
6.3	Corpo Ordenado e Relação de “Estar Entre”	103
6.4	Congruência de Segmentos e Ângulos	108
7	Modelos Algébricos para Geometrias não Arquimedianas	116
7.1	Plano de Hilbert semi-euclidiano negando (P) e negando (A) (região (II))	118
7.2	Plano de Hilbert semi-elíptico negando (P) e negando (A) (região (III))	127

8 Conclusão	138
Referências	140
Apêndice A: Tradução da obra, Die Legendre'shen Sätze über die Winkelsumme im Dreieck (Dehn, M.)	143
Apêndice B: La Geometria non-Arquimedeana (Veronese, G.)	183
Lista de Símbolos	196

Lista de Figuras

2.1	Modelos de Geometria de Incidência	13
2.2	Plano de Fano	13
2.3	Não são geometrias de incidência	14
2.4	Existência de um ponto entre outros dois pontos distintos	16
2.5	Teorema da Trave	20
2.6	Teorema do ângulo externo caso $\angle CAD \not\cong \angle ACB$	27
2.7	Teorema do ângulo externo caso $\angle CAD < \angle ACB$	27
2.8	Existência de ângulos retos e da reta perpendicular a uma reta dada	29
2.9	Unicidade da perpendicular	30
2.10	Não garante a existência de um triângulo isósceles	31
2.11	Geometria de incidência de cinco pontos	35
2.12	Existência de pelo menos uma reta paralela	36
2.13	O axioma (P) implica soma dos ângulos internos de um triângulo qualquer	37
2.14	Interpretação do Axioma (E)	39
3.1	Ilustração de movimentos rígidos 1	43
3.2	Plano de Hilbert e (MRS)	45
4.1	Quadrilátero de Saccheri	50

4.2	Casos do lema 4.4	52
4.3	Teorema 4.5	53
4.4	Teorema 4.6	54
4.5	As três hipóteses de Saccheri	55
4.6	Proposição V, VI e VII de Saccheri	56
4.7	Soma dos ângulos internos de um triângulo igual à soma dos ângulos do topo	58
5.1	Diagramação da inclusão de um conjunto em outro	84
5.2	$\mathbb{K} \subset \mathbb{K}_\omega \subseteq \Omega$	85
5.3	Extensão de corpos para mostrar que Ω é corpo	87
5.4	Diagramação da inclusão de um conjunto em outro	90
5.5	$\mathbb{G} \subset \mathbb{G}_\rho \subseteq \Delta$	91
5.6	Extensão de corpos para mostrar que Δ é corpo	92
6.1	Exemplo de plano cartesiano sobre um corpo	98
6.2	Transladar a origem	99
6.3	Mudança de pontos unitários	100
6.4	Mudança de y para y'	100
6.5	Mudança de x para x'	101
6.6	Teorema de Pappus para $l \nparallel m$	102
6.7	Teorema de Pappus para $l \parallel m$	103
6.8	Multiplicação de elementos do conjunto \mathcal{P}	104
7.1	“Regiões” do Universo de Planos de Hilbert	117
7.2	Reta em Π_0	121

7.3	Π_0 não satisfaz (P)	125
7.4	Ponto na esfera de centro na origem e raio t	128
7.5	Transformação $T = T_2 \circ T_1$	131
7.6	A função ϕ	135

Capítulo 1

Introdução

Neste trabalho queremos abordar um estudo sobre modelos algébricos para geometrias não arquimedianas. Mas o que entendemos por *geometrias não arquimedianas*? Para responder esta pergunta, devemos primeiro esclarecer o que entendemos por *geometrias arquimedianas*. Geometrias arquimedianas são aquelas geometrias nas quais o axioma de Arquimedes vale. Este axioma, enunciado informalmente, nos diz que, dados dois segmentos, existirá sempre um múltiplo do primeiro que excede o segundo. Em geometria, este princípio é postulado para segmentos e provado como teorema para ângulos, áreas e volumes.

O axioma de Arquimedes costumava ser usado implicitamente por parte de vários matemáticos e geômetras até o final do século XIX. Isto devia-se à forte conexão que existia entre a geometria e realidade visível, na qual a negação do princípio arquimediano não encontra correspondente imediato. Um dentre os vários exemplos de uso implícito do axioma de Arquimedes em geometria é a prova de Legendre, em seus *Éléments de Géométrie*, para a proposição acerca da soma dos ângulos internos de um triângulo⁽¹⁾.

Com maior aceitação dos trabalhos de Bolyai e Lobachevsky, sobre a teoria das paralelas e, conseqüentemente a geometria hiperbólica, no final do século XIX, começou-

⁽¹⁾Ver proposição em [16, Legendre, 2009, p.39].

se a desvincular a geometria da realidade tangível. A partir de então, os estudos em geometria abrangem não somente problemas concretos, havendo interesse contínuo em sistemas axiomáticos.

Em relação à geometria não arquimediana, é Giuseppe Veronese, no final do século XIX, o autor de um dos primeiros trabalhos sobre sistemas geométricos em que o axioma de Arquimedes é negado. O seu trabalho foi criticado por vários matemáticos, mas também foi uma inspiração para outros.

David Hilbert demonstra, no parágrafo §12 dos seus *Grundlagen der Geometrie*, através de um modelo, que o axioma de Arquimedes é independente dos demais axiomas que ele utilizou para fundamentar a geometria euclidiana. Para sua prova, Hilbert faz uso de um sistema de números complexos, que define no parágrafo §9; na visão algébrica atual, este sistema nada mais é do que um corpo pitagórico não arquimediano, extensão dos números reais.

Em outras áreas da matemática, como no domínio da álgebra, há igual interesse em estudar estruturas não arquimedianas, notadamente os corpos, onde aparecem elementos finitos, infinitos, finitamente limitados e infinitesimais. Nessas estruturas, nenhum múltiplo de um elemento finito excede um infinito, por exemplo, o mesmo acontecendo em relação aos infinitésimos e os elementos finitos. Nas estruturas algébricas, há diversas maneiras de construir um corpo não arquimediano a partir de uma estrutura arquimediana já conhecida. Em particular, partindo do anel de polinômios, é possível estender o corpo dos reais a um corpo não arquimediano, constituído por classes de equivalência de funções racionais.

Uma das maneiras de obter um modelo para uma geometria é através da álgebra, construindo uma geometria analítica sobre um plano cartesiano \mathbb{F}^2 , onde \mathbb{F} é um corpo qualquer, não necessariamente o dos números reais. Se \mathbb{F} for o corpo dos números reais, o plano cartesiano associado é o plano usado na geometria analítica estudada

na escola e na graduação, que é um modelo algébrico para a geometria euclidiana. É este modelo que serve de inspiração para modelar geometrias não arquimedianas: se \mathbb{F} for um corpo não arquimediano, conseguimos modelar geometrias não arquimedianas através da álgebra.

Durante o processo de capacitação e formação continuada de professores, incluindo aqui tanto estudantes universitários de licenciatura em matemática quanto professores com graduação concluída, a abordagem no estudo de sistemas axiomáticos e modelização destes é praticamente escassa. Por isto, julgamos importante, na formação continuada de professores de matemática, enfatizar o caráter axiomático que está presente nos diversos ramos desta ciência, bem como o importante papel dos modelos na validação de tais sistemas. Isto ocorre, evidentemente, também na geometria.

Avaliamos que um dos pontos principais na motivação para realizar este trabalho foi ao perceber, depois de uma revisão de literatura que, os textos didáticos que abordam as geometrias não arquimedianas são escassos, e praticamente inexistem em português.

O objetivo desta dissertação é, portanto, estudar modelos algébricos para algumas geometrias não-arquimedianas. Para esta finalidade, necessitamos outorgar uma interpretação algébrica a um sistema axiomático que não incorpore nenhum axioma de continuidade. Para realizar a interpretação algébrica precisaremos munir-nos de ferramentas algébricas, pelo que faremos um estudo de corpos abstratos e construiremos corpos não arquimedianos.

No capítulo 2 queremos definir e estabelecer um sistema axiomático, onde estudaremos e analisaremos as proposições que derivam de cada axioma ou grupo de axiomas. Em síntese, queremos instaurar um sistema axiomático geométrico que se denomina *Plano de Hilbert*. Aqui queremos estudar as propriedades que derivam dos axiomas para o plano propostos por Hilbert em seus Fundamentos.

Aproveitando a axiomática introduzida, vamos, no capítulo 3 formalizar o método de superposição de Euclides, usando uma classe especial de funções no plano em si mesmo, que chamaremos de *movimentos rígidos*. Na verdade queremos mostrar que existe uma quantidade suficiente de movimentos rígidos em um plano “quase” de Hilbert para tornar preciso, do ponto de vista lógico, o princípio de superposição empregado por Euclides.

No capítulo 4, retomaremos, à luz da axiomática estabelecida, o trabalho realizado pelo sacerdote jesuíta Gerolamo Saccheri na sua tentativa de demonstrar como teorema o quinto postulado de Euclides. Embora Saccheri não tenha logrado êxito em sua empreitada, grande parte de seus teoremas pode ser relida no Plano de Hilbert, dando origem a três geometrias distintas: os planos de Hilbert semi-hiperbólico, semi-euclidiano e semi-elíptico.

Como nosso objetivo final é estudar modelos algébricos de geometrias não arquimedianas, necessitamos dispor de ferramentas algébricas. É por este motivo que no capítulo 5 queremos fazer um estudo de corpos abstratos, definindo-os e estabelecendo algumas propriedades relativas à relação de ordem de alguns corpos. Pretendemos construir um corpo não arquimediano com a finalidade de estendê-lo a um corpo não arquimediano pitagórico e, posteriormente, a um corpo não arquimediano euclidiano. Procuramos conceber este capítulo de forma autocontida, de maneira que se torne acessível mesmo ao leitor não muito familiarizado com o linguajar algébrico.

No capítulo 6, construímos um modelo algébrico no qual os axiomas introduzidos no capítulo 2 sejam satisfeitos; em verdade, queremos dar uma interpretação ao sistema axiomático com o auxílio das ferramentas algébricas de que vamos dispor no capítulo 5. Estudaremos quais são as condições necessárias do corpo para que no modelo algébrico sejam satisfeitos os axiomas do plano de Hilbert e as proposições que derivam deles. Em outras palavras queremos mostrar quais são as condições adicionais que se devem

impor ao corpo para que os termos e relações indefinidos do sistema axiomático sejam válidos no modelo.

Finalizamos, no capítulo 7, com os almejados modelos algébricos para geometrias não arquimedianas, objeto de estudo desta dissertação. Para esta finalidade, examinamos algumas regiões no Universo de todos os planos de Hilbert que correspondem a geometrias não arquimedianas de nosso interesse. Será possível distinguir três conjuntos disjuntos: o plano de Hilbert semi-euclidiano munido de (P) e negando (A); o plano de Hilbert semi-euclidiano negando (P) e negando (A); e, finalmente, o plano de Hilbert semi-elíptico negando (A).

No apêndice A, incorporamos a tradução para o português da tese de doutorado de Max Dehn (“Die Legendre’schen Sätze über die Winkelsumme im Dreieck”), que foi aluno de Hilbert em Göttingen. Hilbert propôs a Dehn estudar a relação entre dois teoremas de Legendre e o axioma de Arquimedes. Os teoremas de Legendre que estudou Dehn são:

- I. Em um triângulo, a soma dos três ângulos nunca pode exceder dois ângulos retos.
- II. Quando em um triângulo qualquer a soma dos três ângulos é igual a dois ângulos retos, isto se dá para todo triângulo.

A tese de doutorado de Dehn quer responder a seguinte pergunta: *é possível provar os teoremas de Legendre sem fazer uso de qualquer axioma de continuidade, isto é, sem empregar o axioma de Arquimedes?* Dehn mostrou que o primeiro teorema é uma consequência do axioma de Arquimedes e que a segunda é independente dele. Ele também mostrou que, se o axioma de Arquimedes não é válido, o teorema sobre a soma dos ângulos internos de um triângulo não é equivalente ao axioma de paralelismo de Euclides.

Além disso, no apêndice B, incorporamos, no original italiano, o artigo de Giuseppe

Veronese “La geometria non-Arquimedeana” publicado nos anais do IV Congresso Internacional de Matemáticos que aconteceu entre os dias 6 até 11 de abril de 1908 na cidade de Roma. Acredita-se que Veronese foi um dos primeiros matemáticos que tentou construir um modelo de geometria não-arquimediana.

Capítulo 2

Geometria Neutra

Neste capítulo definiremos sistemas axiomáticos, descrevendo em que consistem. Além disso, enunciaremos quando um sistema axiomático é consistente e independente. Também conceituaremos modelo, segundo [14, Hilbert, 1987], de um sistema axiomático. Feito isto, queremos estabelecer um sistema axiomático conceituando termos indefinidos e relações indefinidas, onde estudaremos e analisaremos as proposições que derivam de cada axioma ou grupo de axiomas que tenham sido incorporadas. A idéia, na verdade, é estabelecer um sistema axiomático que chamaremos Plano de Hilbert. Necessitamos deste sistema axiomático, pois no capítulo 6 “Geometria sobre Corpos” estabeleceremos um modelo algébrico para este sistema. Em outras palavras, interpretaremos algebricamente este conjunto de axiomas, e mostraremos que as propriedades satisfeitas no Plano de Hilbert, também o são no modelo algébrico.

2.1 Sistema Axiomático

Em cada área da matemática, que é uma ciência não empírica, é necessário um modo, que chamaremos *Método Axiomático*, mediante o qual se justifiquem suas afirmações. Mas os enunciados destas afirmações devem-se demonstrar de maneira dedutiva. Para isto é fundamental manter algumas proposições como premissas e a partir delas, e em

cadeia dedutiva, obter outras proposições. Dependendo das proposições consideradas como premissas, o método axiomático obtém particularidades especiais. A eleição das proposições que serão consideradas premissas deve respeitar a necessidade de finitude do elo dedutivo e evitar a circularidade. Em outras palavras, cada nova afirmação deve ser provada em um número finito de passos com o auxílio das premissas e sem usar a mesma afirmação. É por esta razão que se escolhem certas afirmações como verdadeiras sem a necessidade de justificá-las, as que chamamos de axiomas ou postulados. Assim, em um método axiomático temos dois tipos de proposições: algumas se justificam mediante um processo dedutivo lógico, usando proposições fixadas previamente, e outras são enunciadas sem justificação demonstrativa. O modo como funcionam estes dois tipos de enunciados está determinado pelo método axiomático. Resumindo, o método axiomático é o procedimento mediante o qual trabalham as ciências formais.

No âmbito da Matemática, a Geometria Euclidiana compõe o exemplo de conhecimento mais antigo já sistematizado que chegou ao nossos dias. Antes de Pitágoras, armazenava-se o conhecimento geométrico em uma coleção de registros isolados e sem conexão uns dos outros. No momento de organizar estes registros, os gregos passaram de uma coleção de conhecimentos isolados a uma ciência. Acredita-se que, sistematizar a geometria se iniciou com Pitágoras e culminou com a obra de Euclides “Os Elementos”, onde cada uma das proposições geométricas foi organizada iniciando pelos axiomas, as definições e os postulados, para continuar com teoremas deduzidos das proposições iniciais.

Como mencionado acima, uma estrutura lógica e organizada é chamada sistema axiomático ou dedutivo. Segundo [4, Cederberg, 1991, Cap. 1] este sistema está composto pelos seguintes componentes:

- Termos indefinidos
- Termos definidos

- Axiomas
- Teoremas

A necessidade de incluir *termos indefinidos* deve-se ao fato de que não é possível definir todos os termos sem incorrer em definições circulares. Na Geometria, em geral, consideram-se termos indefinidos pontos, retas e planos, e consideram-se três relações indefinidas: *incide*, *está entre* e *congruente*.

Os *termos definidos* não são realmente necessários, pois são introduzidos pela comodidade de abreviação. Por exemplo, definir segmento como o conjunto constituído por dois pontos distintos e todos os pontos situados entre eles.

É impossível mostrar todas as proposições sem recair em demonstrações circulares, construídas a partir de termos indefinidos, bem como definir todos os termos. É por isso que um conjunto de proposições são assumidas verdadeiras. Essas afirmações são chamadas *axiomas* ou *postulados*, e a partir deles são deduzidas, através de uma cadeia lógica, outras afirmações. Os enunciados que são provados mediante um elo dedutivo são chamados *teoremas*. Um axioma em um sistema pode ser um teorema em outro sistema, pois depende das declarações consideradas como premissas.

Um sistema axiomático é *consistente* se nele não há duas afirmações, sejam axiomas ou teoremas, que se contradizem. Por exemplo, se T é um teorema deduzido em um sistema axiomático, não pode ser inferido também o teorema $\sim T$ (negação de T) no mesmo sistema. Ser consistente é um requisito essencial em um sistema axiomático.

Os axiomas ou relações iniciais de um sistema axiomático devem ser *independentes*, ou seja, uma proposição não pode ser axioma e teorema no mesmo sistema. Tampouco um axioma ou parte dele pode ser inferido a partir dos outros axiomas.

Para entender e mostrar que um sistema axiomático é consistente, é necessário incorporar uma interpretação, isto é, atribuir significados aos termos indefinidos, de modo

que as relações entre eles se transformem em sentenças verdadeiras ou falsas no contexto da interpretação. Se a interpretação dos axiomas resulta coerente, dizemos que a interpretação é um *modelo* do sistema axiomático. Em outras palavras, um modelo é uma estrutura que atribui um significado aos termos indefinidos (pontos, retas, etc... no caso da geometria), na qual as proposições do sistema sejam verdadeiras. Assim, podemos dizer que um modelo é a realização do sistema axiomático em um contexto conhecido. Se no sistema axiomático uma sentença é contraditória, no modelo também o será.

2.2 Geometria Neutra

No livro “Grundlagen der Geometrie”, David Hilbert diz:

A Geometria precisa - do mesmo modo como a Aritmética - para a sua construção conseqüente só de poucos e simples fundamentos. Estes fundamentos chamam-se axiomas da Geometria. A formulação dos postulados da Geometria, e a investigação das suas relações, é uma tarefa que se acha discutida desde Euclides em muitos excelentes tratados da literatura matemática. A tarefa proposta equivale a uma análise lógica da nossa concepção intuitiva do espaço.

A investigação presente é uma nova tentativa de formular para a Geometria um sistema de axiomas completo e o mais simples possível e de deduzir deles os teoremas geométricos mais importantes de tal modo que fique bem claro o significado dos diferentes grupos de postulados e a importância das conseqüências que seguem dos diversos axiomas.

[Tradução nossa⁽¹⁾]

⁽¹⁾Die Geometrie bedarf - ebenso wie die Arithmetik - zu ihrem folgerichtigen Aufbau nur weniger und einfacher Grundsätze. Diese Grundsätze heißen Axiome der Geometrie. Die Aufstellung der Axiome der Geometrie und die Erforschung ihres Zusammenhanges ist eine Aufgabe, die seit Euklid in zahlreichen vortrefflichen Abhandlungen der mathematischen Literatur sich erörtert findet. Die bezeichnete Aufgabe läuft auf die logische Analyse unserer räumlichen Anschauung hinaus.

Die vorliegende Untersuchung ist ein neuer Versuch, für die Geometrie ein vollständiges und möglichst einfaches System von Axiomen aufzustellen und aus denselben die wichtigsten geometrischen Sätze in

Com o desenvolvido no seu livro, Hilbert mostrou que a Geometria Euclidiana no espaço podia ser fundamentada com base em poucos axiomas.

A Geometria Absoluta ou Neutra no espaço é um sistema axiomático em que os termos indefinidos são ponto, reta, plano, incidência, estar entre e congruência. O conjunto de axiomas que usaremos aqui é proposto por Robin Hartshorne [11, Hartshorne, 2000] e não corresponde exatamente aos propostos por Hilbert em [13, Hilbert, 1953], pois não desejamos incorporar os axiomas do espaço que foram considerados por Hilbert. Este sistema axiomático conta com uma base inicial de treze axiomas, que são divididos em três grupos. As proposições da Geometria que estudaremos são as que seguem como conseqüências lógicas dos treze axiomas, estabelecidos por Hartshorne. Na geometria absoluta ou neutra não se afirma nem se nega o axioma das paralelas (V postulado de Euclides), tampouco se incorporam axiomas de continuidade.

Consideraremos *plano* \mathcal{P} como um conjunto de elementos, que chamaremos *pontos*. Retas serão conjuntos de pontos ficando indefinida a propriedade que os caracteriza. As relações de incidência, estar entre e congruência não serão definidas, mas postuladas nos axiomas de cada grupo.

2.3 Axiomas de Incidência

Incorporamos um primeiro grupo de axiomas onde será estabelecida a relação entre pontos, retas e interseção de retas. Os axiomas deste grupo, chamados de incidência, são:

der Weise abzuleiten, daß dabei die Bedeutung der verschiedenen Axiomgruppen und die Tragweite der aus den einzelnen Axiomen zu ziehenden Folgerungen möglichst klar zu Tage tritt.

[14, Hilbert, 1987]

- (I1) Para cada dois pontos distintos A e B , existe uma única reta incidente a A e B simultaneamente. Esta reta é denotada \overleftrightarrow{AB} .
- (I2) A toda reta incidem pelo menos dois pontos distintos.
- (I3) Existem três pontos distintos que não são incidentes a uma mesma reta.

A um sistema axiomático em que os termos indefinidos são ponto, reta e plano, satisfazendo os axiomas (I1), (I2) e (I3), diremos que é uma **geometria de incidência**.

Dados um ponto P e uma reta l , as seguintes expressões são equivalentes:

- o ponto P incide (ou é incidente) à reta l ;
- a reta l incide (ou é incidente) ao ponto P ;
- a reta l passa por P ;
- o ponto P está sobre a reta l ;
- o ponto P pertence à reta l : $P \in l$.

Dados três pontos distintos, diremos que eles são *colineares* se incidem à mesma reta.

Na seção (2.1), dissemos que um modelo de um sistema axiomático é uma atribuição de um significado para cada um dos termos indefinidos. Acima definimos quando uma geometria é de incidência. Agora, mostraremos exemplos de modelos, onde representam geometrias de incidência e onde não.

Exemplo 2.1

Em cada um dos modelos seguintes, os axiomas (I1), (I2) e (I3) são satisfeitos. Aqui os segmentos na figura representam as retas do modelo, contendo apenas os pontos mencionados.

- (a) Considere um plano cujos elementos são os pontos A_1, A_2, \dots, A_n e com os $\binom{n}{2}$ conjuntos $\{A_i, A_j\}$ com $i \neq j$. Segue modelos para $n = 3, 4, 5$.

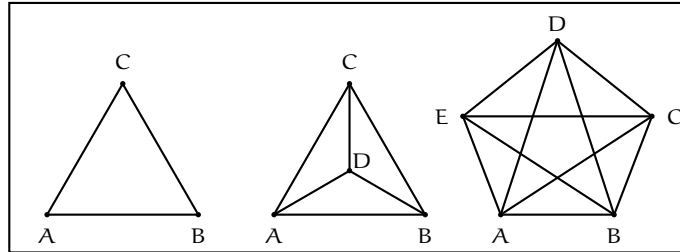


Figura 2.1: Modelos de Geometria de Incidência

- (b) Um outro exemplo é o denominado *Plano de Fano*, onde temos os pontos A, B, C, D, E, F, G e retas $\{A, B, C\}, \{C, D, E\}, \{A, E, F\}, \{A, D, G\}, \{B, E, G\}, \{C, F, G\}$ e $\{B, D, F\}$.

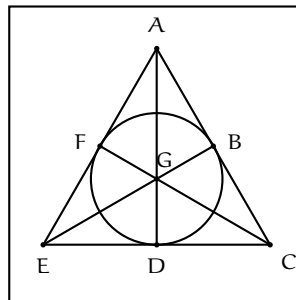


Figura 2.2: Plano de Fano

Exemplo 2.2

Os seguintes são modelos de geometrias que não são de incidência.

- (a) Considere como pontos A, B, C e reta $\{A, B, C\}$.
- (b) Considere como pontos A, B, C e retas $\{A, B\}$ e $\{B, C\}$.
- (c) Considere como pontos A, B, C e retas $\{A\}, \{B\}, \{C\}, \{A, B\}, \{A, C\}$ e $\{B, C\}$.
- (d) Considere como pontos A, B, C, D, E, F e retas $\{A, C, D, E\}, \{B, C, D, F\}$ e $\{A, B, E, F\}$.

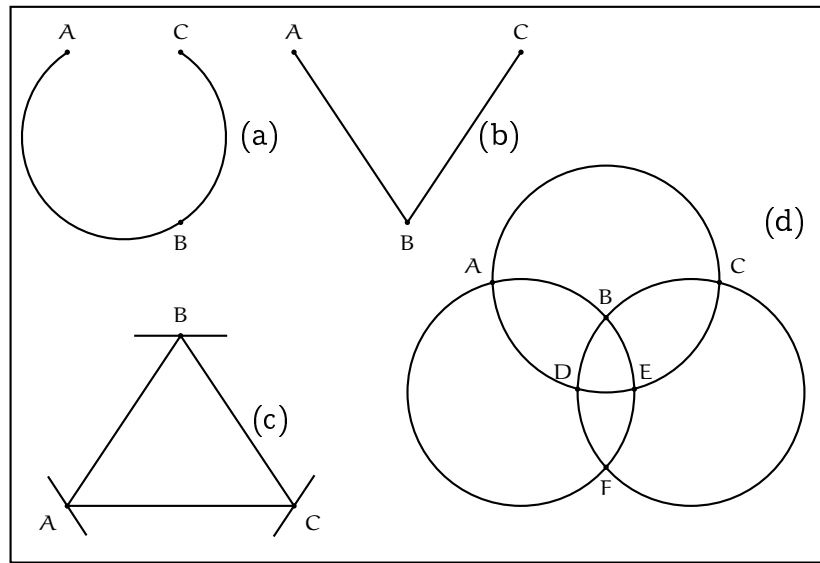


Figura 2.3: Não são geometrias de incidência

Em (a) não é satisfeito o axioma (I3), em (b) o axioma (I1) não se cumpre, em (c) cada reta não é incidente a pelo menos dois pontos distintos, portanto o axioma (I2) não é satisfeito, e em (d) cada dois pontos distintos incidem mais de uma reta, assim (I1) não é satisfeito.

Usando os axiomas de incidência é possível mostrar algumas proposições. De fato com o exposto até o momento podemos afirmar que, em uma Geometria de incidência, devem existir pelo menos três pontos distintos, isto é garantido pelo axioma (I3). Considerando o axioma (I1), podemos afirmar que devem existir pelo menos três retas distintas. Outras proposições são os teoremas que a seguir exporemos:

Teorema 2.3

Dada uma reta, existe pelo menos um ponto não incidente a ela.

Prova: Se não houvesse um ponto fora de uma reta dada, todos os pontos seriam colineares, contradizendo o axioma (I3). \square

Teorema 2.4

Duas retas distintas interceptam-se, no máximo, em um ponto.

Prova: Sejam l e m duas retas distintas e suponha que A e B pertencem a $l \cap m$. Por (I1) temos $l = m$, contradição. \square

Os axiomas de incidência são independentes entre eles. Para mostrar que (I1) é independente, consideremos o modelo de três pontos e que não contém retas; para (I2) considere o modelo (c) dos exemplos de não geometrias de incidências; para (I3) um modelo com dois pontos e uma reta que passa por eles.

2.4 Axiomas de Ordem

Vamos assumir válidos os axiomas (I1)-(I3). Incorpora-se aqui a relação indefinida “estar entre”. Esta relação permitirá a ordenação de pontos em uma reta e será denotada por um asterisco: $*$. Assim, dados três pontos distintos A , B e C , pode-se escrever $A * B * C$ e lê-se “ B está entre A e C ”. A seguir estabeleceremos os axiomas que postulam esta relação:

- (B1) Se $A * B * C$, então A , B e C são três pontos distintos incidentes a uma reta e vale também $C * B * A$.
- (B2) Se A e B são pontos distintos, então existe um ponto C tal que $A * B * C$.
- (B3) Dados três pontos distintos incidentes a uma reta, exatamente um deles está entre os outros dois.
- (B4) (Pasch) Sejam A , B e C três pontos não incidentes a uma mesma reta, e l uma reta tal que A , B e C não incidem a l . Se existe um ponto D incidente a l tal que $A * D * B$, então ou existe um ponto entre A e C incidente a l ou existe um ponto entre B e C incidente a l , mas não ambos.

Tendo incorporados os axiomas de ordem, é possível definir os seguintes conceitos:

Definição 2.5

Se A e B são pontos distintos, o segmento \overline{AB} é o conjunto de todos os pontos do plano que estão entre A e B , além dos extremos A e B . Se A , B e C são três pontos não colineares, o triângulo $\triangle ABC$ é a união dos segmentos \overline{AB} , \overline{AC} e \overline{BC} , chamados lados do triângulo.

Temos que os axiomas de ordem não nos garantem que, dados dois pontos distintos, exista um ponto incidente à mesma reta e que esteja entre eles. O axioma (B1) só nos garante que, se existir tal ponto, ele é incidente à mesma reta. O lema a seguir mostramos a existência de um terceiro ponto que esteja entre outros dois pontos distintos e seja colinear com eles.

Lema 2.6

Se A e B são pontos distintos, então existe um ponto C tal que $A * C * B$.

Prova: Por (I3) existe $D \notin \overleftrightarrow{AB}$. Usando (B2) existe E tal que $A * D * E$ e existe F tal que $E * B * F$. Como $\overleftrightarrow{AE} \neq \overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{EF} \neq \overleftrightarrow{ED}$, temos que $F \neq D$, então por (I1) existe \overleftrightarrow{DF} . Temos que $A * D * E$, $E * B * F$ e $\overleftrightarrow{DF} \cap \overleftrightarrow{BE} = \{F\}$.

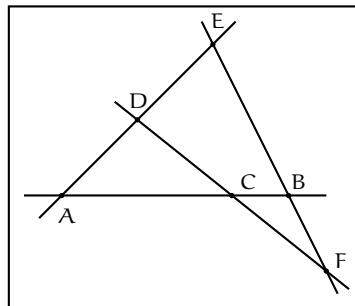


Figura 2.4: Existência de um ponto entre outros dois pontos distintos

Portanto $\overleftrightarrow{DF} \cap \overline{BE} = \emptyset$, assim $\overleftrightarrow{DF} \cap \overline{AB} \neq \emptyset$ por (B4). Portanto existe C entre A e B . □

Juntos o segundo e terceiro axiomas de ordem nos garantem que temos infinitos pontos sobre uma reta. Assim, ao incorporar este grupo de axiomas, deixamos de ter

geometrias finitas. Com os axiomas de incidência, de ordem e o lema (2.6), as seguintes afirmações podem ser provadas:

Teorema 2.7

Em um sistema axiomático onde são válidos os axiomas de incidência e de ordem, são verdadeiras as seguintes afirmações:

- (a) Dados quatro pontos quaisquer de uma reta, podem ser nomeados sempre por A, B, C, D , de tal modo que B esteja entre A e C e também entre A e D , além disso o ponto C esteja entre A e D e também entre B e D .⁽²⁾
- (b) Existem infinitos pontos em um segmento dado.
- (c) Existem infinitos pontos em uma reta dada.
- (d) Existem infinitos pontos que não pertencem a uma reta dada.
- (e) Existem infinitas retas que contêm um ponto dado.
- (f) Existem infinitas retas que não contêm um ponto dado.

Para o teorema seguinte, consideremos uma reta l qualquer e a relação binária \sim_l sobre o conjunto $\mathcal{P} \setminus l$ (o plano menos a reta l), assim definida: dados $A, B \in \mathcal{P} \setminus l$,

$$A \sim_l B \iff A = B \text{ ou } \overline{AB} \cap l = \emptyset$$

Se $l = \overleftrightarrow{XY}$ também podemos denotar $A \sim_{\overleftrightarrow{XY}} B$.

O teorema a seguir mostra que \sim_l é uma relação de equivalência sobre o conjunto $\mathcal{P} \setminus l$ e que particiona o conjunto de pontos $\mathcal{P} \setminus l$ em exatamente duas classes.

Os detalhes nas provas dos teoremas que à continuação serão enunciados se podem encontrar em [11, Hartshorne, 2000, Cap. 2].

⁽²⁾Esta proposição qualificada como teorema foi considerada como axioma na primeira edição, mas E. Moore, a deduziu como uma consequência dos outros axiomas. Extraído de [13, Hilbert, 1953].

Teorema 2.8

(TEOREMA DE SEPARAÇÃO DO PLANO) Seja l uma reta qualquer. O conjunto dos pontos que não pertencem a l pode ser particionado em dois subconjuntos S_1 e S_2 , chamados os lados de l no plano, com as seguintes propriedades:

- 1) Dois pontos A, B que não pertencem a l estão no mesmo subconjunto (S_1 ou S_2) se, e somente se, $A \sim_l B$
- 2) Dois pontos A, B que não pertencem a l estão em subconjuntos distintos se, e somente se, $A \not\sim_l B$

Prova:[Idéia] Considere \mathcal{P} o conjunto de todos os pontos e l a reta considerada.

Para mostrar que \sim_l é uma relação de equivalência sobre $\mathcal{P} \setminus l$, temos que: a reflexividade e simetria são triviais a partir da definição; quanto à transitividade ($A \sim_l B$ e $B \sim_l C \Rightarrow A \sim_l C$) temos dois casos a analisar: quando A, B, C não são colineares, basta usar o axioma de Pasch; e quando A, B, C são colineares, fazemos recair no caso anterior.

Para mostrar que existem exatamente duas classes na partição, mostra-se que existem pelo menos duas e no máximo duas. Para a primeira basta a definição dos conjuntos S_1, S_2 , na segunda basta mostrar que: $A \not\sim_l C$ e $B \not\sim_l C \Rightarrow A \sim_l B$. □

Aqui temos que fazer uma observação de um fato interessante sobre a escolha de um dos axiomas. Se consideramos o teorema precedente de separação do plano como axioma em vez de (B4), podemos deduzir, a partir deste novo grupo de axiomas, (B4) como teorema. Em outras palavras, (B4) deduz-se de (I1)-(I3), (B1)-(B3) e separação do plano. Isto mostra que o axioma de Pasch e o teorema de separação do plano são equivalentes na presença de (I1)-(I3), (B1)-(B3).

Tal como uma reta *separa* o plano em dois conjuntos disjuntos, um ponto que incide em uma reta também a separa em dois conjuntos disjuntos.

Teorema 2.9

(TEOREMA DE SEPARAÇÃO DA RETA) Seja P um ponto em uma reta l . O conjunto $l \setminus \{P\}$ pode ser particionado em dois subconjuntos S_1 e S_2 , chamados os lados de P em l , com as seguintes propriedades:

- 1) Dois pontos $A, B \in l \setminus \{P\}$ estão no mesmo subconjunto (S_1 ou S_2) se, e somente se, $P \notin \overline{AB}$.
- 2) Dois pontos $A, B \in l \setminus \{P\}$ estão em subconjuntos distintos se, e somente se, $P \in \overline{AB}$.

Prova: Seja $A \in l$, usando (I3) temos que existe B tal que $B \notin l$. Chamemos de $m = \overleftrightarrow{AB}$, usando o teorema (2.8) sob a reta m , divide ao plano em S'_1 e S'_2 . Seja $S_1 = S'_1 \cap l$ e $S_2 = S'_2 \cap l$. O resultado deriva do teorema (2.8). \square

Diremos que B está do mesmo lado de C em relação ao ponto A , e denotaremos $B \sim_A C$, se $A * B * C$ ou $A * C * B$ ou $B = C$.

Definição 2.10

Dados dois pontos distintos A e B , incidentes a uma reta l , a **semi-reta** \overrightarrow{AB} está constituída por A e pelo conjunto de todos os pontos P que estão do mesmo lado de B em relação a A . O ponto A é denominado a **origem** da semi-reta.

$$\overrightarrow{AB} = \{A\} \cup \{P \in \mathcal{P} \mid P \sim_A B\}$$

O **ângulo** $\angle BAC$ é a união de duas semi-retas, \overrightarrow{AB} e \overrightarrow{AC} , que emanam do mesmo ponto e que não jazem sobre a mesma reta. A origem comum denomina-se **vértice** do ângulo.

O interior de um ângulo $\angle BAC$ é o conjunto de todos os pontos D no plano que estão do mesmo lado que B em relação à reta AC e do mesmo lado que C em relação à reta AB .

Note que, pela definição de ângulo, os ângulos estendidos e os côncavos ficam excluídos. Além disso, pelo teorema de separação da reta, um ponto qualquer sobre uma reta dá origem a duas semi-retas distintas, que são denominadas opostas. Também podemos notar que pelo lema (2.6) e o teorema de separação do plano (2.8) o interior do ângulo nunca é vazio.

O teorema que se segue mostra que uma semi-reta no interior de um ângulo encontra qualquer segmento cujos pontos extremos jazem um em cada semi-reta do ângulo.

Teorema 2.11

(TEOREMA DA TRAVE) Sejam $\angle BAC$ um ângulo e D um ponto no seu interior. Então $\overrightarrow{AD} \cap \overline{BC} \neq \emptyset$.

Prova: Por (B2) existe E tal que $C * A * E$. Como $C \sim_{\overleftrightarrow{AB}} D$ e $C \not\sim_{\overleftrightarrow{AB}} E$, então $D \not\sim_{\overleftrightarrow{AB}} E$.

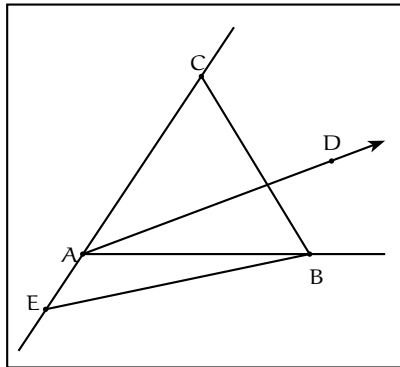


Figura 2.5: Teorema da Trave

Temos que \overrightarrow{AD} não encontra \overline{BE} , pois todos os pontos de \overline{BE} com exceção de B estão de lados opostos com D em relação de \overleftrightarrow{AB} e todos os pontos de \overrightarrow{AD} com exceção de A estão de lados opostos a E em relação de \overleftrightarrow{AB} . A semi-reta \overrightarrow{AD} não encontra \overleftrightarrow{AC} , pois se o encontrara teríamos que $\overleftrightarrow{AC} = \overleftrightarrow{AD}$.

Daí, usando o axioma de Pasch obtemos o resultado. \square

2.5 Axiomas de congruência para segmentos

Já havendo incorporado as noções indefinidas de incidência e ordem, que foram postuladas nos grupos de axiomas (I1)-(I3), (B1)-(B4), introduziremos agora os axiomas que postulam a relação “congruência” entre segmentos. Dois segmentos \overline{AB} e \overline{CD} congruentes são denotados por $\overline{AB} \cong \overline{CD}$. Os axiomas de congruência entre segmentos são três:

- (C1) Dados um segmento \overline{AB} e uma semi-reta \overrightarrow{CE} , existe um único ponto $D \in \overrightarrow{CE}$ tal que $\overline{AB} \cong \overline{CD}$.
- (C2) Se $\overline{AB} \cong \overline{CD}$ e $\overline{AB} \cong \overline{EF}$, então $\overline{CD} \cong \overline{EF}$. Todo segmento é congruente a si mesmo.
- (C3) Dados três pontos A, B, C satisfazendo $A * B * C$ e outros três pontos D, E, F satisfazendo $D * E * F$, se $\overline{AB} \cong \overline{DE}$ e $\overline{BC} \cong \overline{EF}$, então $\overline{AC} \cong \overline{DF}$.

Em um modelo geométrico onde sejam satisfeitos os axiomas (I1)-(I3), (B1)-(B4) e (C1), cujas construções geométricas sejam definidas, o axioma (C1) pode ser encarado como “transportador de segmentos”. O axioma (C2) não nos garante a transitividade da congruência, mas é possível provar que a relação binária \cong definida no conjunto de todos os segmentos é uma relação de equivalência. O axioma (C3) é similar à noção de Euclides que diz “a soma de grandezas iguais a grandezas iguais fica igual”. Usando esta idéia, de soma, definiremos a noção de soma de segmentos.

Definição 2.12

(SOMA DE SEGMENTOS) Sejam \overline{AB} e \overline{CD} dois segmentos. Escolha uma ordem A, B para os extremos de \overline{AB} e considere a semi-reta \overrightarrow{BF} que não contenha o ponto A . Seja E o único ponto de \overrightarrow{BF} tal que $\overline{BE} \cong \overline{CD}$ (usando o axioma (C1)). Definimos o segmento \overline{AE} como a soma dos segmentos \overline{AB} e \overline{CD} a partir do extremo A e vamos escrever $\overline{AE} = \overline{AB} + \overline{CD}$.

Usando a definição supracitada, os axiomas de congruência de segmentos e que a relação \cong é uma relação de equivalência, é possível mostrar os teoremas abaixo.

Teorema 2.13

(CONGRUÊNCIA DA SOMA) Dados os segmentos $\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$ e $\overline{CD} \cong \overline{C'D'}$, temos $\overline{AB} + \overline{CD} \cong \overline{A'B'} + \overline{C'D'}$.

Teorema 2.14

Sejam dados os pontos A, B, C tais que $A * B * C$ e os pontos E, F em uma semi-reta com origem D . Se $\overline{AB} \cong \overline{DE}$ e $\overline{AC} \cong \overline{DF}$, então $D * E * F$ e $\overline{BC} \cong \overline{EF}$.

Como $\overline{AB} = \overline{BA}$, o teorema (2.13) estabelece que adição de segmentos é bem definida nas classes de equivalência da relação \cong , portanto a operação de soma fica, desta forma, estendida a classes de equivalências de segmentos; e no teorema (2.14) se estabelece o conceito de diferença de segmentos. Como foi enunciado no início da seção, a relação de congruência de segmentos, relaciona dois segmentos, a definição que à continuação estabeleceremos, indica quando podemos dizer que um segmento é menor ou maior que outro segmento.

Definição 2.15

Sejam \overline{AB} e \overline{CD} dois segmentos. Dizemos que \overline{AB} é **menor** que \overline{CD} , e escrevemos $\overline{AB} < \overline{CD}$, se existir um ponto E tal que $C * E * D$ e $\overline{AB} \cong \overline{CE}$. Neste caso, também dizemos que \overline{CD} é **maior** que \overline{AB} e escrevemos $\overline{CD} > \overline{AB}$.

Usando a definição supracitada e os teoremas (2.13) e (2.14), além dos axiomas de ordem, podemos mostrar que a relação desigualdade ' $<$ ' satisfaz: transitividade, se $\overline{AB} < \overline{CD}$ e $\overline{CD} < \overline{EF}$, então $\overline{AB} < \overline{EF}$; tricotomia, dados segmentos \overline{AB} e \overline{CD} , uma e só uma das condições seguintes é válida: $\overline{AB} < \overline{CD}$, $\overline{AB} \cong \overline{CD}$, $\overline{AB} > \overline{CD}$; e, respeita desigualdade em pares de segmentos congruentes, ou seja, dados segmentos $\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$ e $\overline{CD} \cong \overline{C'D'}$, temos $\overline{AB} < \overline{CD}$ se e somente se $\overline{A'B'} < \overline{C'D'}$. Notemos que não é preciso *medir* para comparar dois segmentos.

2.6 Axiomas de congruência para ângulos

De igual forma como enunciamos axiomas que postulam a relação “congruência” entre segmentos, agora incorporaremos os axiomas que postulam a relação “congruência” entre ângulos. Esta relação será denotada pelo símbolo \cong (o mesmo símbolo usado para congruência entre segmentos), e ela relaciona dois ângulos. Os axiomas de congruência entre ângulos são os seguintes:

- (C4) Dados um ângulo $\angle BAC$ e uma semi-reta \overrightarrow{DF} , existe uma única semi-reta \overrightarrow{DE} , de um lado determinado da reta \overleftrightarrow{DF} , tal que $\angle BAC \cong \angle EDF$.
- (C5) Para três ângulos quaisquer α , β , γ , se $\alpha \cong \beta$ e $\alpha \cong \gamma$, então $\beta \cong \gamma$. Todo ângulo é congruente a si mesmo.
- (C6) Dados dos triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle DEF$, suponhamos que $\overline{AB} \cong \overline{DE}$, $\angle BAC \cong \angle EDF$ e $\overline{AC} \cong \overline{DF}$. Então valem as seguintes congruências: $\overline{BC} \cong \overline{EF}$, $\angle ABC \cong \angle DEF$ e $\angle ACB \cong \angle DFE$.

Do mesmo modo que foi estabelecido para congruência de segmentos, temos que em um modelo geométrico onde sejam satisfeitos os axiomas (I1)-(I3), (B1)-(B4) e (C4), cujas construções geométricas sejam definidas, o axioma (C4) pode ser encarado

como “transportador de ângulos”. O axioma (C5) não nos garante a transitividade da congruência, mas é possível provar que a relação binária \cong definida no conjunto de todos os ângulos é uma relação de equivalência. O axioma (C6) faz um elo entre congruência de segmentos e congruência de ângulos. Além disso, o axioma (C6) corresponde ao caso de congruência entre triângulos conhecido como LAL (lado-ângulo-lado) na Geometria Euclidiana. Isto fica claro com a definição seguinte.

Definição 2.16

Dois triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle DEF$ são **congruentes** quando $\overline{AB} \cong \overline{DE}$, $\overline{AC} \cong \overline{DF}$, $\overline{BC} \cong \overline{EF}$, $\angle CAB \cong \angle FDE$, $\angle ABC \cong \angle DEF$ e $\angle BCA \cong \angle EFD$.

Com os grupos de axiomas que incorporamos em nosso sistema axiomático, podemos enunciar as seguintes definições, além de mostrar algumas propriedades, mas nosso interesse não é provar cada um deles.

Definição 2.17

(SOMA DE ÂNGULOS) Se $\angle BAC$ é um ângulo e \overrightarrow{AD} é uma semi-reta no interior de $\angle BAC$ (exceto pelo vértice A), dizemos que $\angle BAC$ é a soma dos ângulos $\angle DAC$ e $\angle BAD$.

Definição 2.18

(ÂNGULOS SUPLEMENTARES) Se $\angle BAC$ é um ângulo e D é um ponto sobre a semi-reta oposta a \overrightarrow{AC} , os ângulos $\angle BAD$ e $\angle BAC$ são chamados **suplementares**.

Definição 2.19

Sejam $\angle BAC$ um ângulo, \overrightarrow{AE} a semi-reta oposta a \overrightarrow{AC} e \overrightarrow{AD} a semi-reta oposta a \overrightarrow{AB} . Os ângulos $\angle BAC$ e $\angle DAE$ são chamados **opostos pelo vértice**.

Entretanto, em (2.17) se partirmos de dois ângulos quaisquer, pode não haver um ângulo que seja a sua soma no sentido acima definido. É possível mostrar os seguintes teoremas que estabelecem propriedades com respeito aos conceitos definidos anterior-

mente.

Teorema 2.20

Se $\angle BAC$ e $\angle BAD$ são ângulos suplementares, $\angle B'A'C'$ e $\angle B'A'D'$ são ângulos suplementares e $\angle BAC \cong \angle B'A'C'$, então $\angle BAD \cong \angle B'A'D'$

Teorema 2.21

Os ângulos opostos pelo vértice são congruentes.

Teorema 2.22

(ADIÇÃO DE ÂNGULOS) Sejam $\angle BAC$ um ângulo e \overrightarrow{AD} uma semi-reta no interior deste ângulo. Suponhamos que $\angle D'A'C' \cong \angle DAC$, $\angle B'A'D' \cong \angle BAD$ e que as semi-retas $\overrightarrow{A'B'}$ e $\overrightarrow{A'C'}$ estejam em lados opostos da reta $A'D'$. Então as semi-retas $\overrightarrow{A'B'}$ e $\overrightarrow{A'C'}$ formam um ângulo $\angle B'A'C'$, $\angle BAC \cong \angle B'A'C'$ e a semi-reta $\overrightarrow{A'D'}$ está no interior do ângulo $\angle B'A'C'$.

A seguir definiremos a noção de desigualdade para ângulos, e como foi enunciado no início da seção, a relação de congruência de ângulos, postula uma relação entre dois ângulos, a definição que à continuação estabeleceremos, indica quando podemos dizer que um ângulo é menor ou maior que outro ângulo.

Definição 2.23

Sejam $\angle BAC$ e $\angle EDF$ dois ângulos. Dizemos que $\angle BAC$ é **menor** que $\angle EDF$, e escrevemos $\angle BAC < \angle EDF$, se existir uma semi-reta \overrightarrow{DG} no interior do ângulo $\angle EDF$ tal que $\angle BAC \cong \angle GDF$. Neste caso, também dizemos que $\angle EDF$ é **maior** que $\angle BAC$ e escrevemos $\angle EDF > \angle BAC$

Usando a definição supracitada e os teoremas (2.20), (2.21) e (2.22), além dos axiomas de congruência, podemos mostrar que a relação desigualdade ' $<$ ' satisfaz: transitividade, se $\alpha < \beta$ e $\beta < \gamma$, então $\alpha < \gamma$; tricotomia, dados ângulos α e β , uma e só uma das condições seguintes é válida: $\alpha < \beta$, $\alpha \cong \beta$, $\alpha > \beta$; e, respeita desigualdade

em pares de ângulos congruentes, ou seja, dados ângulos $\alpha \cong \alpha'$ e $\beta \cong \beta'$, temos $\alpha < \beta$ se, e somente se, $\alpha' < \beta'$.

2.7 Plano de Hilbert

Como já foi mencionado, um plano é um conjunto de elementos chamados pontos, e o plano contém subconjuntos denominados retas.

De aqui em diante, consideraremos um plano com noções indefinidas de “incidência”, “estar entre” e “congruência” de segmentos e de ângulos, onde o plano satisfaz os treze axiomas que foram enunciados nas seções anteriores, (I1)-(I3), (B1)-(B4) e (C1)-(C6).

Definição 2.24

Um **plano de Hilbert** é um sistema axiomático em que os termos indefinidos são ponto, reta e as relações indefinidas são incidência, estar entre e congruência de segmentos e de ângulos; satisfazendo os axiomas (I1)-(I3), (B1)-(B4), (C1)-(C6).

A partir dos conceitos de congruência e complementaridade, é possível definir ângulos retos, sem fazer menção a medida, mostrar que existem ângulos retos em um plano de Hilbert e que todos eles são congruentes; também é possível definir quando duas retas são perpendiculares e mostrar que a reta perpendicular a uma reta dada por um ponto dado é única.

2.7.1 Teorema do Ângulo Externo

A definição seguinte dá lugar a uma proposição que é muito importante, pois é de grande utilidade nas provas dos teoremas seguintes, sendo muito utilizada também nas provas do capítulo 4.

Definição 2.25

Um ângulo suplementar a um ângulo em um triângulo é denominado *ângulo externo*.

Teorema 2.26

(TEOREMA DO ÂNGULO EXTERNO) Em um triângulo, todo ângulo externo é maior do que os ângulos internos não adjacentes a ele.

Prova: Seja $\angle CAD$ um ângulo externo do triângulo $\triangle ABC$. Seja D tal que $B \not\sim_A D$ e $\overline{AD} \cong \overline{BC}$.

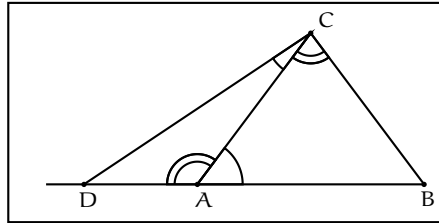


Figura 2.6: Teorema do ângulo externo caso $\angle CAD \not\cong \angle ACB$

Mostraremos primeiro que $\angle CAD \not\cong \angle ACB$. Suponhamos que $\angle CAD \cong \angle ACB$, temos por (C6) que $\triangle CAD \cong \triangle ACB$, pois $\overline{AC} \cong \overline{CA}$. Logo, $\angle DCA \cong \angle BAC$. Como $\angle CAD$ e $\angle BAC$ são suplementares, então $\angle ACB$ e $\angle DCA$ também são. Assim, $D \in \overleftrightarrow{BC}$, mas $D \in \overleftrightarrow{AB}$. Portanto $\overleftrightarrow{AB} = \overleftrightarrow{BC}$, o que contradiz o fato que $C \notin \overleftrightarrow{AB}$.

Mostraremos que não pode acontecer que $\angle CAD < \angle ACB$.

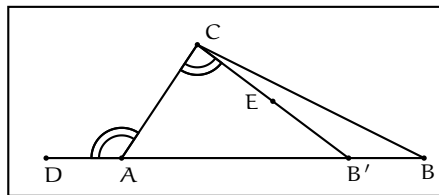


Figura 2.7: Teorema do ângulo externo caso $\angle CAD < \angle ACB$

Suponhamos que $\angle CAD < \angle ACB$. Pelo axioma (C4) existe \overrightarrow{CE} tal que $\angle CAD \cong \angle ACB'$, E esteja no interior do ângulo $\angle ACB$. Pelo teorema da trave (2.11), existe $B' \in \overline{AB} \cap \overrightarrow{CE}$. Logo, estamos no caso que o ângulo externo é congruente a um ângulo no adjacente a ele. Portanto, isto não é possível e $\angle CAD$ não pode ser menor que

$\angle ACB$.

Então só resta uma possibilidade, que $\angle CAD > \angle ACB$. Assim, cada ângulo externo em um triângulo é maior que cada um dos ângulos não adjacentes. \square

2.7.2 Perpendicularidade e Ângulos Retos

Perpendicularidade e ângulo reto são dois conceitos que estão extremamente ligados. Assim, mostrar a existência de ângulos retos em um plano de Hilbert é equivalente mostrar que existe uma reta perpendicular a outra reta dada. Definiremos aqui quando um ângulo é reto e quando duas retas são perpendiculares. Além disso, enunciaremos algumas propriedades que derivam destes conceitos e do teorema do ângulo externo.

Definição 2.27

Em um plano de Hilbert:

- Um ângulo é dito **reto** (\mathcal{R}) quando é congruente a um de seus suplementares. Um ângulo não reto é dito **agudo** ou **obtuso**, conforme seja menor ou maior que um ângulo reto, respectivamente.
- Duas retas são **perpendiculares** quando possuem um ponto P em comum e os quatro ângulos formados pelos pares de semi-retas não opostas forem retos.
- Um triângulo é **retângulo** quando um de seus ângulos é reto. O lado oposto ao ângulo reto denomina-se **hipotenusa** e os outros dois lados denominam-se **catetos**.

Mostraremos, mediante uma construção, a existência de ângulos retos e de uma reta perpendicular a outra reta dada.

Teorema 2.28

Em um plano de Hilbert:

- (i) existem ângulos retos;
- (ii) dois ângulos retos quaisquer são congruentes;
- (iii) dados um ponto e uma reta, existe exatamente uma perpendicular à reta dada passando pelo ponto dado.

Prova: [Existência de ângulos retos] Seja l uma reta. Por (I2) temos que existem $A, B \in l$ com $A \neq B$. Por (I3) temos que existe C tal que $C \notin l$. Por (C4) e (C1) existe D com $C \not\sim_{AB} D$ tal que $\angle BAC \cong \angle BAD$ e $\overline{AC} \cong \overline{AD}$. Ligamos C com D e seja E o ponto de interseção. Temos dois casos: $E \sim_A B$, daqui $\triangle EAC \cong \triangle EAD$; $E \not\sim_A B$, pelo teorema (2.20) temos $\angle EAC \cong \angle EAD$. Dos dois casos temos $\triangle EAC \cong \triangle EAD$. Temos $\angle CEA \cong \angle DEA$, além disso, os ângulos são suplementares, assim eles são retos. Portanto existem ângulos retos no plano de Hilbert, e a reta \overleftrightarrow{CE} é perpendicular à reta l .

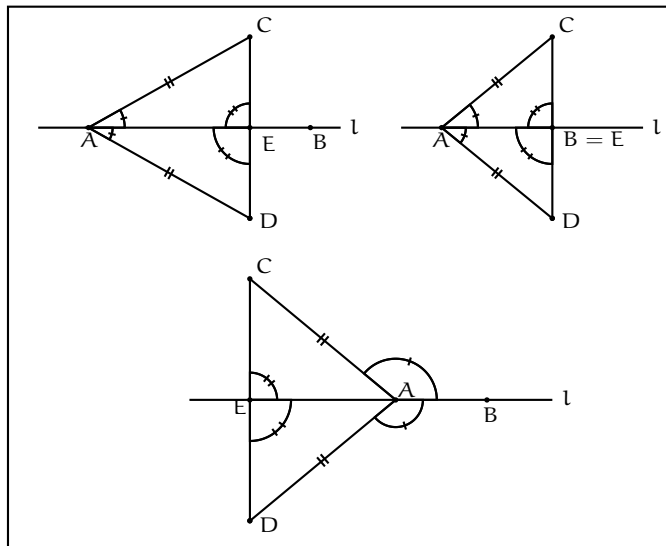


Figura 2.8: Existência de ângulos retos e da reta perpendicular a uma reta dada

A unicidade da perpendicular por um ponto não incidente à reta é consequência do

teorema do ângulo externo. Assim, seja A o ponto e l a reta. Temos dois casos: quando $A \in l$ ou $A \notin l$. Para ambos casos supor que existem duas perpendiculares a l que incidem em A .

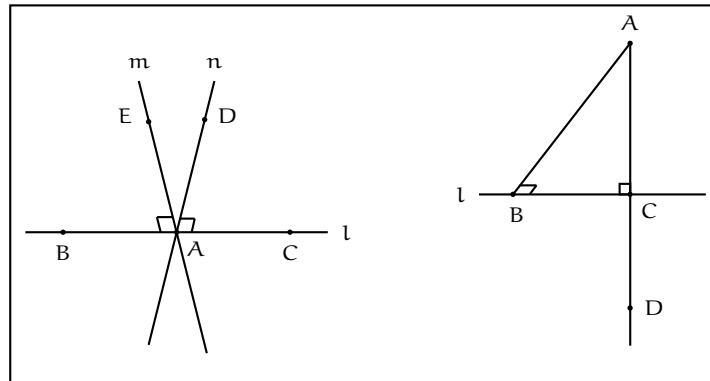


Figura 2.9: Unicidade da perpendicular

É imediato mostrar, usando (C4), que a perpendicular por um ponto incidente à reta existe e é única. □

São conseqüências imediatas do teorema do ângulo externo (2.26):

Teorema 2.29

Todo triângulo possui pelo menos dois ângulos agudos.

Corolário 2.30

Todo triângulo possui pelo menos uma altura incidente no lado oposto (altura a mesma conhecida da Geometria Euclidiana).

Teorema 2.31

Se duas retas distintas formam com uma terceira ângulos alternos congruentes, então as duas primeiras não possuem ponto comum.

Corolário 2.32

Duas retas distintas perpendiculares a uma terceira não se encontram.

2.7.3 Congruência de triângulos

O axioma (C6) também é conhecido como “caso LAL (lado-ângulo-lado) de congruência de triângulos”. Em um plano de Hilbert, são válidos os mesmos casos de congruência de triângulos, conhecidos da Geometria Euclidiana. Mas antes de enunciá-los, definiremos triângulo isósceles e estabeleceremos duas afirmações: uma que faz referência à existência de triângulos isósceles no plano de Hilbert, e a outra as condições necessárias e suficientes que deve ter um triângulo para ser considerado isósceles. A prova da segunda afirmação, precisa do caso de congruência ALA (ângulo-lado-ângulo).

Definição 2.33

Um triângulo é isósceles quando possui dois de seus lados congruentes. O terceiro lado é denominado base do triângulo.

Teorema 2.34

Um triângulo é isósceles se, e somente se, os ângulos formados pela base são congruentes.

Teorema 2.35

Tomando-se um qualquer segmento, é possível construir um triângulo isósceles que tenha o segmento dado como base.

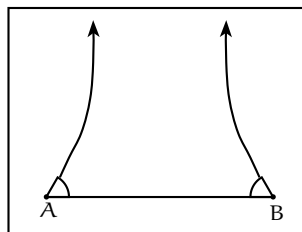


Figura 2.10: Não garante a existência de um triângulo isósceles

Notemos que não basta construir ângulos congruentes menores que \mathcal{R} nos extremos do segmento para garantir a existência de um triângulo isósceles (ver figura 2.10), pois não dispomos do quinto postulado de Euclides. Ainda que os ângulos sejam muito pe-

quenos não é possível garantir que as semi-retas que emanam dos extremos do segmento se encontrem.

Como conseqüências da existência de triângulos isósceles temos que:

Teorema 2.36

Em um triângulo $\triangle ABC$, $\overline{AB} > \overline{AC}$ se, e somente se, $\angle ACB > \angle ABC$

Teorema 2.37

Em dois triângulos $\triangle ABC$, $\triangle A'B'C'$, tais que $\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$, $\overline{AC} \cong \overline{A'C'}$, temos:

$$\overline{BC} \begin{matrix} > \\ \cong \\ < \end{matrix} \overline{B'C'} \Leftrightarrow \angle A \begin{matrix} > \\ \cong \\ < \end{matrix} \angle A'$$

Os casos de congruência de triângulos que podem ser provados em um plano de Hilbert são os seguintes:

Teorema 2.38

(CASO ALA) Dois triângulos são congruentes se possuem um lado e os ângulos por ele formados congruentes.

Teorema 2.39

(CASO LLL) Dois triângulos são congruentes se possuem os três lados congruentes.

Teorema 2.40

(CASO ALA_O) Dois triângulos são congruentes se possuem um lado, um dos ângulos por ele formado e o ângulo oposto a ele congruentes.

Teorema 2.41

(CASO RHC) Dois triângulos retângulos são congruentes se possuem a hipotenusa e um dos catetos congruentes.

2.7.4 Bisseção de Segmentos e Ângulos

Bissectar um segmento, bem como bissectar um ângulo, derivam diretamente dos casos de congruência de triângulos enunciados na subseção anterior. Assim, as seguintes proposições podem ser estabelecidas.

Teorema 2.42

Em um plano de Hilbert.

- (i) Dado um segmento \overline{AB} , existe um único ponto M em \overline{AB} tal que $\overline{AM} \cong \overline{MB}$. Este ponto é denominado ponto médio de \overline{AB} .
- (ii) A reta perpendicular a um segmento \overline{AB} que passa por seu ponto médio é o lugar geométrico dos pontos P tais que $\overline{PA} \cong \overline{PB}$. Esta reta recebe o nome de **mediatriz** do segmento \overline{AB} .
- (iii) Dado um ângulo $\angle BAC$, existe uma única semi-reta \overrightarrow{AD} no interior do ângulo $\angle BAC$ tal que $\angle BAD \cong \angle DAC$. Esta semi-reta é denominada **bissetriz** do ângulo.
- (iv) Em um triângulo isósceles, a bissetriz do ângulo oposto à base é uma semi-reta contida na mediatriz da base.

2.8 Axioma de Paralelismo

Desde o surgimento de Os Elementos, em aproximadamente 300 a.c., têm sido vários os matemáticos que tentaram mostrar como teorema o que Euclides enunciou como seu quinto postulado:

Se uma reta ao cortar duas outras, forma ângulos internos, no mesmo

lado, cuja soma é menor do que dois ângulos retos, então as duas retas, se continuadas, encontrar-se-ão no lado onde estão os ângulos cuja soma é menor do que dois ângulos retos.

De acordo com [17, Martin, 1975, p. 302-314], um dentre os diversos matemáticos que se interessou pela teoria das paralelas foi o sacerdote jesuíta Gerolamo Saccheri, publicando em 1733 sua obra *“Euclides liberado de toda falha”*, onde trabalha com um quadrilátero bi-retângulo isósceles e estabelece que os ângulos do topo podem ser agudos, retos ou obtusos, e daqui deriva as três hipóteses (hipóteses que serão estabelecidas no capítulo 4). Saccheri tenta mostrar, sem êxito, que não é possível acontecerem as hipóteses do ângulo agudo nem a do ângulo obtuso.

Em 1813 Gauss, nas suas notas pessoais, manifesta a sua insatisfação com os resultados obtidos e começa a discutir a possibilidade de desenvolver uma geometria não-euclidiana. Um dos registros de Gauss trata-se de: *“Sobre a teoria das paralelas que não progrediram além de Euclides. É uma vergonha para a matemática que, mais cedo ou mais tarde terá que adquirir um outro aspecto”*.

Em 1820 Janos Bolyai comunica a seu pai o seu interesse em estudar a teoria das paralelas. Em 1826 Lobachevsky apresenta um artigo que se intitula *“Uma apresentação sucinta dos fundamentos da geometria com uma prova rigorosa do teorema das paralelas”*, é provável que este trabalho tenha dado início ao que hoje denominamos de Geometria Hiperbólica e em 1829 publica *“Sobre os fundamentos da geometria”*, onde é a primeira publicação em que se apresenta o nome de geometria não euclidiana. Este trabalho contém um completo desenvolvimento de geometria hiperbólica, que Lobachevsky chama de *Geometria imaginária*. Em janeiro de 1832, Farkas Bolyai publica *“Tentamen”* que contém um apêndice, escrito pelo seu filho Janos Bolyai, intitulado *“A ciência do espaço absoluto, com uma demonstração da independência da verdade ou falsidade do postulado das paralelas de Euclides e, além disso, a quadratura do círculo, no caso de sua falsidade”*. Em 1837, Lobachevsky publica na

França o artigo “*Geometria Imaginária*” e em 1840 publica na Alemanha um pequeno livro intitulado “*Investigações geométricas*”.

Não foram poucos os matemáticos que tiveram interesse em estudar o quinto postulado de Euclides. Em 1795 John Playfair, matemático escocês, enuncia um axioma alternativo para o quinto postulado de Euclides. Este axioma o enunciaremos à continuação, mas antes precisamos definir paralelismo.

Definição 2.43

Duas retas são ditas **paralelas** se elas são a mesma ou se elas não possuem pontos em comum.

O axioma de Playfair:

(P) Para todo ponto A e toda reta l , existe uma única reta que incide a A e é paralela a l .

Uma geometria de incidência não necessariamente satisfaz o axioma supracitado. Por exemplo consideremos o seguinte modelo: sejam A, B, C, D e E pontos e sejam as retas $\{A, B\}, \{A, C\}, \{A, D\}, \{A, E\}, \{B, C\}, \{B, D\}, \{B, E\}, \{C, D\}, \{C, E\}, \{D, E\}$; temos que $AB \parallel DC$ e $AB \parallel DE$, então aqui a paralela não é única.

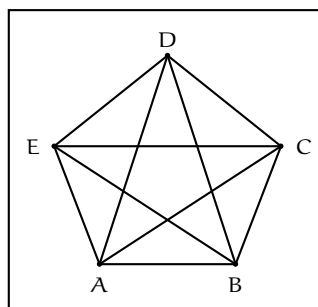


Figura 2.11: Geometria de incidência de cinco pontos

Além disso, em uma geometria de incidência com o axioma (P), é fácil mostrar que, a relação de paralelismo é uma relação de equivalência.

Várias proposições válidas em um plano de Hilbert foram expostas por Euclides no seu livro Os Elementos. Porém existem outras proposições que não podem ser provadas no plano de Hilbert. Por exemplo:

- Unicidade de reta paralela a uma reta dada passando por um ponto exterior a ela.
- A soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a dois ângulos retos.
- A soma dos ângulos internos de um quadrilátero convexo é igual a quatro ângulos retos.
- Existência de retângulos e quadrados.

Estas proposições não podem ser mostradas em um plano de Hilbert, pois não estamos garantindo que seja satisfeito o axioma de paralelismo tal como o enuncia Euclides. Mas é possível mostrar a existência de pelo menos uma reta paralela a uma reta dada passando por um ponto exterior a ela. Para prová-la, consideremos a reta l e o ponto A não incidente a ela. Existe, pelo teorema (2.28), uma única reta m perpendicular a l passando por A , pelo mesmo teorema, existe uma única reta r perpendicular a m passando por A . Então temos que as retas l e r são perpendiculares à reta m , e pelo corolário (2.32) temos que elas não possuem pontos em comum. Portanto a reta r que incide no ponto A é paralela à reta l .

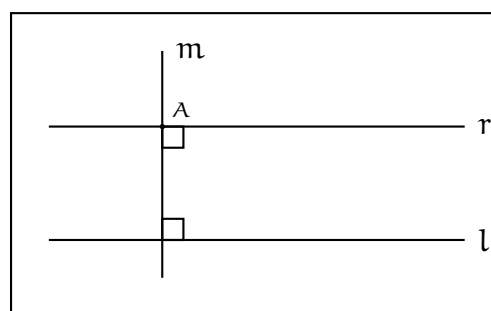


Figura 2.12: Existência de pelo menos uma reta paralela

Teorema 2.44

Em um plano de Hilbert em que vale o axioma (P), a soma dos ângulos internos de qualquer triângulo é dois retos ($2\mathcal{R}$).

Prova: Seja o triângulo $\triangle ABC$. Seja o ponto E tal que $C \not\sim_{\overleftrightarrow{AB}} E$ e $\angle BAE \cong \angle CBA$. Pelo teorema (2.31) as retas \overleftrightarrow{CB} e \overleftrightarrow{AE} são paralelas. Consideremos o ponto F tal que $B \not\sim_{\overleftrightarrow{AC}} F$ e $\angle CAF \cong \angle BCA$. Pelo teorema (2.31) as retas \overleftrightarrow{CB} e \overleftrightarrow{AF} são paralelas. Como o axioma (P) vale, então temos que $\overleftrightarrow{AE} = \overleftrightarrow{AF}$.

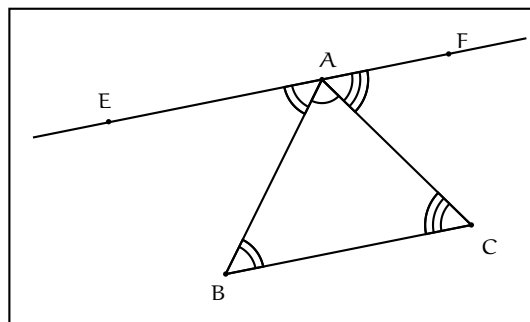


Figura 2.13: O axioma (P) implica soma dos ângulos internos de um triângulo qualquer

Temos que $2\mathcal{R} \cong \angle EAB + \angle BAC + \angle CAF \cong \angle CBA + \angle BAC + \angle BCA$. Portanto a soma dos ângulos internos de um triângulo qualquer é igual a dois ângulos retos. \square

2.9 Círculos e retas

Poderíamos ter deixado de lado o estudo de círculos e retas, mas no capítulo 6 mostraremos que o axioma de interseção entre círculos (E) e o teorema de interseção entre círculos e retas (LCI) são equivalentes em um plano cartesiano sobre um corpo ordenado. Além disso um plano de Hilbert munido do axioma (E) pode ser modelado por um plano cartesiano sobre um corpo euclidiano (veja seção 5.4). O tratamento para a discussão de interseção entre círculos e retas será feito em um plano de Hilbert. Enunciaremos este axioma e ele nos ajudará a justificar as construções com régua e compasso do livro Os elementos de Euclides. A necessidade de incorporar este novo axioma é por que até

aqui nada nos garante que dois círculos quaisquer se podem interceptar, mesmo que eles se encontrem posicionados propiciamente. Além disso, com o conjunto de axiomas que compõe o plano de Hilbert não é possível concluir que existe interseção entre círculos e círculos e retas. Para começar definiremos círculo.

Definição 2.45

Seja, O e A pontos distintos. O círculo de centro em O e raio \overline{OA} é o conjunto $\text{Circ}(O, \overline{OA})$ de todos os pontos B do plano tais que $\overline{OB} \cong \overline{OA}$.

Notemos que a definição de círculo não depende do conceito de “distância” ou “medida”. Além disso, a definição não nos proporciona se o centro do círculo está unicamente determinado, e que o círculo possui uma quantidade infinita de pontos. As afirmações que a seguir enunciamos esclarecem as ditas suposições.

Teorema 2.46

Seja Γ o círculo de centro O e raio \overline{OA} .

- (i) Toda reta que passa pelo centro encontra o círculo em exatamente dois pontos.
- (ii) Todo círculo possui infinitos pontos.
- (iii) O centro é unicamente determinado a partir do círculo.

Definiremos interior e exterior do círculo, reta tangente e círculos tangentes. Mas reta tangente e círculos tangentes não pode ser definidos como o faz Euclides, já que não é possível garantir que eles se interceptam.

Definição 2.47

Dado o círculo $\text{Circ}(O, \overline{OA})$, o ponto B está no seu interior se $B = O$ ou $\overline{OB} < \overline{OA}$; o ponto C está no seu exterior se $\overline{OA} < \overline{OC}$.

Uma reta l é tangente a um círculo Γ se eles possuem apenas um ponto comum. Um círculo Γ é tangente a um círculo Δ se eles possuem apenas um ponto comum.

Em um plano de Hilbert as condições de tangência, entre círculos e círculo e reta, são as mesmas que se conhecem da geometria euclidiana, pois estas condições derivam do teorema do ângulo externo e dos critérios de congruência de triângulos.

Temos que, em um plano de Hilbert, dados dois círculos quaisquer, o fato que cada um deles possua um ponto no interior do outro não garante que esses círculos tenham interseção não vazia. Isto motiva o seguinte axioma, chamado “axioma do compasso”.

(E) Dados dois círculos Γ , Δ , se Δ contém pelo menos um ponto no interior de Γ , e Δ contém pelo menos um ponto no exterior de Γ , então Γ e Δ se interceptam.

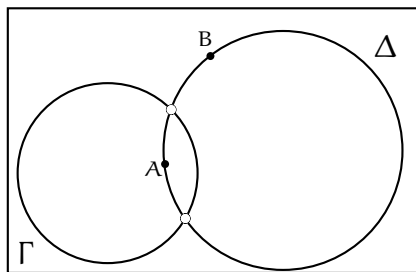


Figura 2.14: Interpretação do Axioma (E)

Como consequência direta deste axioma, temos que uma reta que não é tangente a um círculo, mas possui um ponto em comum com ele, é secante.

Teorema 2.48

((LCI) interseção entre reta e círculo) Em um plano de Hilbert no qual valha o axioma (E), se uma reta possui um ponto no interior de um círculo, ela possui exatamente dois pontos em comum com o círculo.

Em um plano de Hilbert no qual valha o axioma (E), podemos construir um triângulo equilátero, conhecido o lado. Além disso, é possível construir um triângulo se são conhecidos os três lados, desde que seja satisfeita a desigualdade triangular. Estas são as construções 1 e 22 do Livro I dos Elementos de Euclides.

Um plano de Hilbert com o axioma (E) e o axioma (P), é chamado plano Euclidiano.

Movimentos Rígidos

Nosso objetivo será formalizar o método de superposição que usou Euclides para justificar a congruência de triângulos no seu livro I de Os Elementos. Esta formalização será feita usando funções bijetivas do plano de Hilbert nele mesmo, que chamaremos de *movimentos rígidos*. Mostraremos que em um plano quase de Hilbert, ou seja em um plano donde sejam satisfeitos os vários axiomas de Hilbert, existem uma quantidade suficientes de movimentos rígidos para tornar preciso, do ponto de vista lógico, o princípio da superposição. Diremos então que este plano possui *Mobilidade Livre*.

3.1 Preliminares

Textos clássicos como Os Elementos de Euclides e os de Legendre recorrem, em algumas demonstrações, a argumentos externos ao sistema axiomático introduzido. Um desses recursos extras é o argumento de “superposição”, usado para demonstrar como teorema o caso LAL da congruência de triângulos. No sistema axiomático de Hilbert e na adaptação de Hartshorne essa propriedade torna-se um dos axiomas.

[11, Hartshorne, 2000] afirma que: se poderia criticar Hilbert pela adoção de uma declaração tão complicada como (LAL) para um axioma, do mesmo modo que se poderia

criticar Euclides pelo seu quinto postulado. A resposta em ambos os casos é a mesma: Não é possível evitar a inclusão de uma declaração como axioma, se não é possível prová-la dos outros axiomas. Agora, Euclides não incluiu (LAL) como um axioma, mas o “demonstrou” na proposição 4 do livro I, a sua prova tem sido justamente criticada, pois usou o “método de superposição”, que consiste em mover um triângulo pelo plano, sem deformá-lo, até que coincida com outro triângulo. Isto não se pode justificar sobre a base das noções comuns nem dos postulados assumidos por Euclides. De fato, pensar em movimentar figuras sem distorcer a sua forma é um pressuposto bastante forte.

O uso do método de superposição das figuras tem dado lugar ao debate em torno do recurso de aplicação de um movimento ou da idéia de deslocamento natural para superpor as figuras. Estes deslocamentos que intervêm são deslocamentos de figuras e não transformações que operam sobre o espaço como conjunto de pontos.

3.2 Movimentos Rígidos e o axioma (C6)

Para começar vamos definir movimento rígido como uma função que satisfaz cinco condições:

Definição 3.1

Seja \mathcal{P} um sistema axiomático que consiste em noções indefinidas de pontos, retas, relação de incidência, “estar entre”, e congruência de segmentos e ângulos, que pode ou não satisfazer os vários axiomas de Hilbert. Um “*movimento rígido*” em \mathcal{P} é uma função $\varphi : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}$ definida em todos os pontos, tal que:

- (1) φ é bijetiva.
- (2) φ leva retas em retas.
- (3) φ preserva a relação de “estar entre” de pontos colineares.

(4) Para cada dois pontos A, B , temos $\overline{AB} \cong \overline{\varphi(A)\varphi(B)}$.

(5) Para cada ângulo α , temos $\alpha \cong \varphi(\alpha)$.

Em outras palavras, φ preserva as estruturas determinadas pelas noções indefinidas do sistema axiomático definido no capítulo 2.

Note que a transformação *identidade* de \mathcal{P} em si mesmo, que deixa cada ponto fixo, é um movimento rígido. A composição de movimentos rígidos é um movimento rígido, pelo que o conjunto de todos os movimentos rígidos formam um grupo \mathcal{G} .

Como o nosso objetivo é formalizar o método de superposição de Euclides, precisamos saber se possuímos uma quantidade suficiente de movimentos rígidos para garantir a *Movibilidade Livre* [11, Hartshorne, 2000]:

MRS (Movimentos Rígidos Suficientes)

(I) Para cada dois pontos $A, A' \in \mathcal{P}$, existe um movimento rígido $\varphi \in \mathcal{G}$ tal que $\varphi(A) = A'$.

(II) Para cada três pontos $O, A, A' \in \mathcal{P}$, existe um movimento rígido $\varphi \in \mathcal{G}$ tal que $\varphi(O) = O$ e φ leva a semi-reta \overrightarrow{OA} à $\overrightarrow{OA'}$.

(III) Para cada reta $l \in \mathcal{P}$, existe um movimento rígido $\varphi \in \mathcal{G}$ tal que $\varphi(P) = P$ para todo $P \in l$ e φ intercambia os dois lados do plano em relação a l .

Note que o movimento rígido (I) não deixa pontos fixos, com exceção da identidade. O movimento rígido (II) deixa um ponto fixo, que é a origem comum às semi-retas, e leva uma semi-reta em outra; note que não necessariamente leva o ponto A em A' . O movimento rígido (III) deixa uma reta fixa ponto a ponto e intercambia os lados do plano em relação a esta reta fixa.

A seguir, será mostrado que, se em um plano com alguns dos axiomas de Hilbert

satisfeitos, temos suficientes movimentos rígidos, então o axioma (C6) caso LAL da congruência de triângulos é satisfeito.

Teorema 3.2

Em um plano que satisfaz os axiomas de incidência e ordem, e assumimos (C2), (C5), e só a parte de unicidade de (C1) e (C4) (isto é, não nos é possível transportar todos os segmentos e ângulos, mas quando é possível o transporte é único). Nestas condições (MRS) implica (C6).

Prova: A idéia é mostrar que, se temos suficientes movimentos rígidos tais que o método de superposição de Euclides funcione, então (C6) resulta como teorema. Para isto, suponhamos dois triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle A'B'C'$ onde $AB \cong A'B'$, $AC \cong A'C'$ e $\angle BAC \cong \angle B'A'C'$. Assim se quer mostrar que, se vale (MRS) então os triângulos são congruentes.

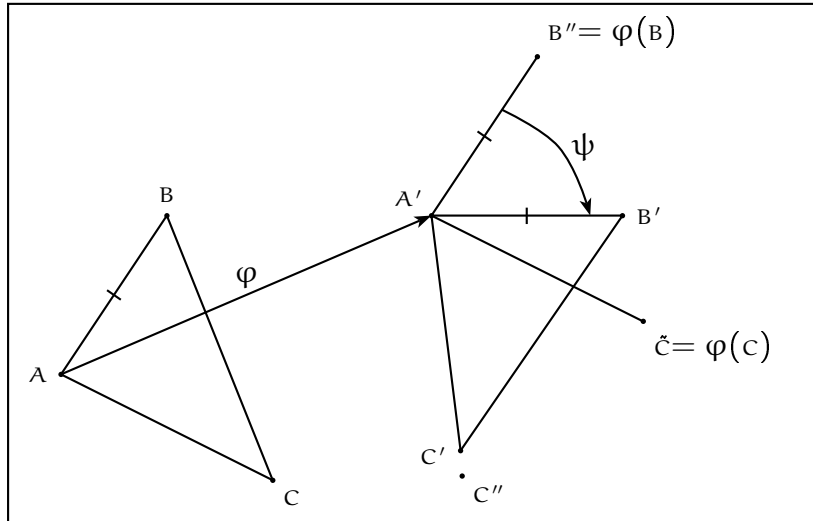


Figura 3.1: Ilustração de movimentos rígidos 1

Usando (MRS I) existe φ que leva A em A' e algum ponto $B'' = \varphi(B)$. Como φ é um movimento rígido e $\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$, temos que $\overline{A'B''} \cong \overline{A'B'}$ (C2).

Usando (MRS II) existe ψ que deixa A' fixo e leva a semi-reta $\overrightarrow{A'B''}$ na semi-reta $\overrightarrow{A'B'}$. Como ψ preserva congruência e vale a parte de unicidade de (C1), temos que $B' = \psi(B'')$. Seja $C'' = \psi \circ \varphi(C)$.

Se C' e C'' estão do mesmo lado do plano em relação a $l = \overleftrightarrow{A'B'}$, não há mais nada a fazer e chamamos de $\theta = \psi \circ \varphi$. Caso contrário, usando (MRS III) sabemos que existe σ que leva C'' no outro lado de l e mantém fixos os pontos dessa reta, e chamamos de $\theta = \sigma \circ \psi \circ \varphi$. Sabemos então que θ possui as seguintes propriedades: $\theta(A) = A'$, $\theta(B) = B'$ e $C''' = \theta(C)$ está do mesmo lado de l que C' . Pela parte de unicidade de (C4), concluímos que as semi-retas $\overrightarrow{A'C'}$ e $\overrightarrow{A'C''}$ coincidem. Mas por hipótese $\overline{AC} \cong \overline{A'C'}$, e $\overline{AC} \cong \overline{A'C''}$, pois θ é um movimento rígido. Portanto (C2) nos garante que $\overline{A'C'} \cong \overline{A'C''}$. Além disso, C' e C''' estão do mesmo lado de A' em l . Segue-se da parte de unicidade de (C1) que $C' = C'''$. Assim, $\theta(B) = B'$ e $\theta(C) = C'$.

Como θ é um movimento rígido, seguem-se as demais congruências. Mostrando isto, temos que é possível superpor um triângulo em outro. Assim prova-se que (C6) é válido como teorema em um plano onde MRS é assumido por hipótese. \square

Este teorema foi provado em um plano quase de Hilbert, que não dispunha das ferramentas de “copiar” segmentos nem ângulos, além de não precisar do axioma (C3). Não se precisa do axioma (C3) pois, pela definição de movimentos rígidos ele preserva congruência e relação de estar entre, portanto (MRS) implica (C3).

À continuação será provado que em um plano de Hilbert existe uma quantidade suficiente de movimentos rígidos.

Teorema 3.3

Em um plano de Hilbert, existem suficientes movimentos rígidos: (MRS) vale.

Prova:[Idéia] Construa-se o movimento rígido σ , ver figura 3.2, que intercambia os lados do plano, e mostra-se que existe (MRS III) usando perpendicularidade e os axiomas de Hilbert.

Para (MRS I), considera-se a mediatriz, l , do segmento de extremos A, A' , então $\sigma_l(A) = A'$, ou seja leva um ponto em outro.

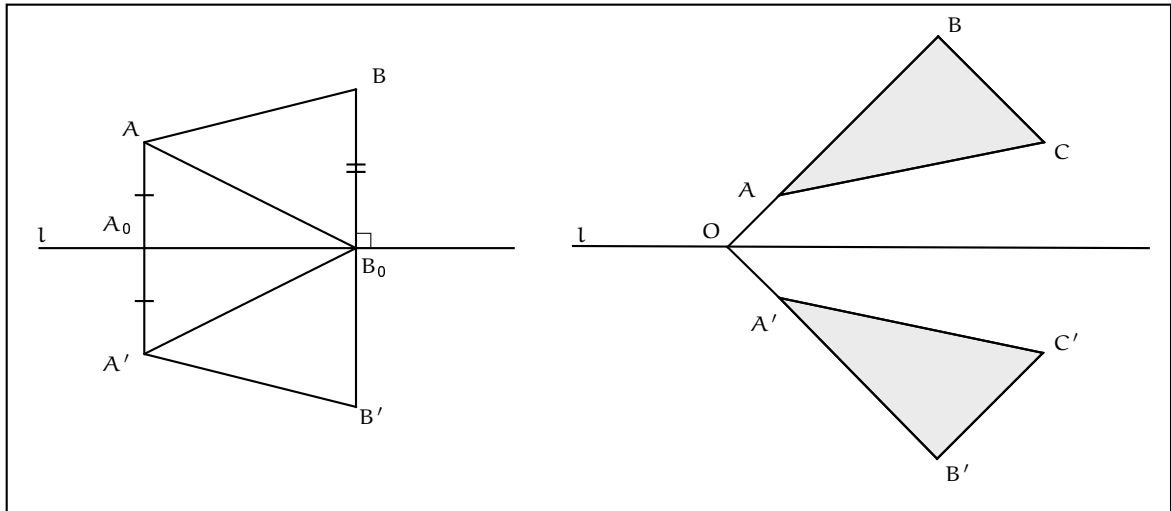


Figura 3.2: Plano de Hilbert e (MRS)

Para (MRS II), considera-se a bissetriz b do ângulo $\angle AOA'$, então $\sigma_b(O) = O$ e leva o raio \overrightarrow{OA} ao raio $\overrightarrow{OA'}$. □

No teorema precedente, só é necessário mostrar a existência do movimento rígido (MRS III) para obter os outros dois.

O corolário seguinte, consequência dos dois teoremas anteriores, mostra que o axioma de congruência (C6) é equivalente ao princípio (MRS). Como já foi provado que em um plano de Hilbert existe uma quantidade suficiente de movimentos rígidos e que em um plano onde se cumpre (MRS) e alguns dos axiomas de Hilbert, temos que (C6) é válido. Pelo que a prova do corolário é imediata.

Corolário 3.4

Na presença de todos os axiomas do plano de Hilbert com exceção de (C6), o axioma (C6) é equivalente a (MRS).

Saccheri e as suas três hipóteses

Descreveremos, sucintamente, o trabalho do sacerdote jesuíta Gerolamo Saccheri na sua tentativa de mostrar como teorema o quinto postulado de Euclides:

Se uma reta ao cortar duas outras, forma ângulos internos, no mesmo lado, cuja soma é menor do que dois ângulos retos, então as duas retas, se continuadas, encontrar-se-ão no lado onde estão os ângulos cuja soma é menor do que dois ângulos retos.

Saccheri dividiu seu trabalho em duas partes: a primeira parte dedicada à tentativa de demonstrar como teorema o que Euclides enunciara como quinto postulado. Aqui Saccheri, estabelece três hipóteses, das quais duas são descartadas durante o desenvolvimento do texto; a segunda parte mostrará que o lugar geométrico de todos os pontos eqüidistantes de uma reta também é uma reta.

Estudaremos algumas propriedades do quadrilátero bi-retângulo isósceles usado por Saccheri, chamado de quadrilátero de Saccheri (ver definição 4.2), em um plano de Hilbert. Daí enunciaremos que não é possível determinar a natureza dos ângulos do topo do quadrilátero (agudos, retos ou obtusos). Enunciaremos isto, com a finalidade de estabelecer três hipóteses, as mesmas que Saccheri instituiu. Além disso, mostraremos que em um plano de Hilbert arbitrário, sob uma das três hipóteses, todos os quadriláteros bi-retângulos isósceles possuem ângulos do topo da mesma natureza.

Também, mostraremos que em plano de Hilbert a soma dos ângulos internos de um triângulo qualquer é igual à soma dos ângulos do topo do quadrilátero de Saccheri a ele associado.

Em conclusão, nosso objetivo não é fazer uma análise crítica do trabalho de Saccheri, senão estudar e analisar as hipóteses consideradas por ele, com o fim de exemplificar três tipos de geometrias diferentes.

4.1 Preliminares

Grande parte do trabalho de Gerolamo Saccheri (ou Hieronymo Saccherio): “*Euclides ab omni naevo vindicatus*” (“Euclides liberado de toda falha”) [20, Saccheri, 1920] publicado em 1733 na cidade de Milão, é dedicado à tentativa da prova do quinto postulado de Euclides.

Saccheri nos diz que estruturará o seu livro em duas partes, no qual ambas conformam um total de 39 proposições, 5 lemas, 1 definição, 23 corolários e 18 escólios:

- Na primeira (Proposições I até XXXIII) diz que demonstrará o 5º postulado sem recorrer a nenhum *petitio principii* para deixar claramente demonstrado o postulado. Além disso, também comenta que não usará as proposições 27, 28, 16 e 17 dos Elementos de Euclides, excepto casos particulares das duas últimas.
- Na segunda (Proposições XXXIV até XXXIX) diz que demonstrará que a linha cujos pontos são todos eqüidistantes de outra linha reta dada, só pode ser uma linha reta.

Também comenta outras falhas atribuídas a Euclides referentes a proporções (Livro 5) e relações (Livro 6) e diz que em um segundo livro [sic] demonstrará um certo teorema

que pode-se aplicar a toda a geometria. Mas Saccheri morreu no ano da publicação do livro que aqui estudamos, não sabemos a ciência certa se ele morreu antes ou depois da publicação.

Neste livro, a figura fundamental usada por Saccheri é um quadrilátero bi-retângulo isósceles, que chamaremos de *quadrilátero de Saccheri*.

Saccheri na sua obra demonstra em primeiro lugar que, se sobre uma reta arbitrária \overleftrightarrow{AB} se levantam dois segmentos perpendiculares e congruentes do mesmo lado de \overleftrightarrow{AB} (\overline{AD} e \overline{BC}), então os ângulos $\angle BCD$ e $\angle ADC$ são congruentes. Então formula três hipóteses, segundo a natureza dos ângulos $\angle BCD$ e $\angle ADC$, que podem ser agudos, retos ou obtusos. Nomeia as hipóteses segundo o ângulo: hipótese do ângulo agudo, hipótese do ângulo reto e hipótese do ângulo obtuso. Demonstra também que somente uma hipótese pode ser verdadeira, se em um caso ela é. Em outras palavras, se é possível mostrar em um caso particular que, por exemplo, os ângulos são agudos, então sempre serão eles agudos, independentemente do quadrilátero bi-retângulo isósceles considerado.

Dentro dos resultados obtidos por Saccheri, ele prova erroneamente que o postulado das paralelas de Euclides é um teorema. Saccheri descarta as hipóteses do ângulo obtuso e a do ângulo agudo: a primeira delas é recusada na proposição XIV, dizendo que destrói-se ela mesma, conclusão que tira das proposições IX e XIII; a segunda é excluída na proposição XXXIII, falando que é absolutamente falsa, pois repugna a natureza da linha reta. Embora Saccheri tenha descartado ambas hipóteses ele continuou fazendo uso delas, ou seja, em proposições que seguiram da XIV ele ainda considerava o caso do ângulo obtuso, e de igual forma nas proposições que seguiram a proposição XXXIII consideram a hipótese do ângulo agudo.

De acordo com [2, Bonola, 1955, p.44] acredita-se que Lambert, matemático suíço, que fez um trabalho muito parecido com o de Saccheri, estivesse familiarizado com o

escrito de Saccheri. Bonola diz:

É difícil dizer que influência exerceu o trabalho de Saccheri nos geômetras do século XVIII. No entanto, é provável que o matemático suíço Johann Heinrich Lambert esteja familiarizado com o trabalho. Em sua obra póstuma "*Theorie der Parallellinien*" editada por J. Bernoulli e C. F. Hindenburg é dividida em três partes: a primeira parte é de natureza crítica e filosófica, e está relacionada com o quinto postulado, ou seja, se é possível provar este somente com proposições precedentes ou se é necessário o auxílio de outras hipóteses; a segunda parte é dedicada à discussão de diferentes tentativas para que o postulado de Euclides seja reduzido a proposições mui simples; e a terceira, e a mais importante, parte contém uma pesquisa semelhante à feita por Saccheri.

[Tradução nossa]

4.2 O Quadrilátero de Saccheri

Como no capítulo 2 "Geometria Neutra" estabelecemos um sistema axiomático que chamamos de Plano de Hilbert, aqui definiremos quadrilátero e enunciaremos algumas propriedades que serão de utilidade nas proposições da seção seguinte. Faremos uso do plano de Hilbert, ainda quando os dois autores (Hilbert, com os seus fundamentos; e Saccheri, com *Euclides Vindicatus*) são de épocas diferentes. Esse fato, de que os Fundamentos de Hilbert são de 1900 e o trabalho de Saccheri é de 1733 não interferirá em nosso estudo. De fato, queremos estudar propriedades do quadrilátero usado por Saccheri em um plano de Hilbert.

A idéia desta seção é definir o quadrilátero usado por Saccheri e mostrar algumas propriedades que estão relacionadas com ele.

Definição 4.1

(QUADRILÁTERO) Em um plano de Hilbert, sejam A, B, C, D quatro pontos não colineares três a três, tais que \overline{AB} não encontra o segmento \overline{CD} e \overline{AD} não encontra o segmento \overline{BC} . Chamamos *quadrilátero* a cada conjunto $\{A, B, C, D\}$ que satisfaça as condições acima, e denotamos por $\square ABCD$.

Não consideraremos quadriláteros estrelados, isto está explícito na definição de quadrilátero supracitada.

Em um plano de Hilbert, ou seja na presença dos axiomas de incidência, ordem e congruência, enunciados no capítulo 2, podemos construir um quadrilátero $\square ABCD$ tal que $\overline{AD} \cong \overline{BC}$ e as retas \overleftrightarrow{AD} e \overleftrightarrow{BC} são perpendiculares à reta \overleftrightarrow{AB} .

De agora em diante, usaremos a expressão $\square ABCD$ para indicar um quadrilátero com ângulos retos nos vértices A e B , e C e D estão do mesmo lado da reta \overleftrightarrow{AB} .

O quadrilátero usado por Saccheri no seu escrito "*Euclides Vindicatus*" é um quadrilátero bi-retângulo isósceles que a seguir definimos.

Definição 4.2

Seja $\square ABCD$, e $\overline{AD} \cong \overline{BC}$, então o quadrilátero é denotado por $\boxed{S} ABCD$ e chamado *quadrilátero de Saccheri*. \overline{AB} é chamado *base*, \overline{CD} é chamado *topo*, \overline{AD} , \overline{BC} são lados, $\angle ADC$, $\angle BCD$ são chamados ângulos do topo, e $\angle DAB$, $\angle ABC$ são ângulos da base. Um quadrilátero que possui todos os seus ângulos retos é chamado *retângulo*.

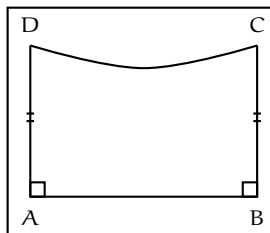


Figura 4.1: Quadrilátero de Saccheri

A notação $\boxed{S} ABCD$ significa um quadrilátero de Saccheri com ângulos retos em A

e em B, usada por [17, Martin, 1975].

Notemos que as retas suportes dos lados no quadrilátero de Saccheri não possuem pontos em comum. Pois como foi definido quadrilátero de Saccheri e por consequência do corolário (2.32), que diz que duas retas distintas perpendiculares a uma terceira não se encontram.

Até agora não temos informação a respeito dos ângulos do topo do quadrilátero de Saccheri. No seguinte teorema mostraremos que os ângulos do topo são congruentes. Além disso mostraremos que a mediatriz do segmento \overline{AB} coincide com a mediatriz do segmento \overline{CD} . Este teorema corresponde às proposições I e II do livro de Saccheri. A decisão de juntá-las, é por que a prova, em ambos os casos, é consequência da congruência de triângulos.

Teorema 4.3

Em um quadrilátero de Saccheri $\square ABCD$ os ângulos do topo são congruentes. Além disso as mediatrizes da base e do topo coincidem.

Aqui provamos que, em um plano de Hilbert, os ângulos do topo do quadrilátero de Saccheri são congruentes, mas nada podemos afirmar sobre a natureza destes. Com os grupos de axiomas expostos no capítulo 2 não é possível concluir se os ângulos do topo são agudos, retos ou obtusos. Contudo podemos estabelecer a relação entre um ângulo do quadrilátero $\square ABCD$ com um lado não adjacente ao ângulo. Esta relação será estabelecida no próximo lema. Sua prova deriva do teorema do ângulo externo e da congruência de triângulos.

Lema 4.4

Se $\square ABCD$ possui ângulos retos em A e B, os pontos C, D estão do mesmo lado em relação à reta \overleftrightarrow{AB} , e A, B estão do mesmo lado em relação à reta \overleftrightarrow{CD} (ver fig. 4.2).

Então:

$$\overline{AD} < \overline{BC} \Leftrightarrow \angle ADC > \angle BCD$$

$$\overline{AD} \cong \overline{BC} \Leftrightarrow \angle ADC \cong \angle BCD$$

$$\overline{AD} > \overline{BC} \Leftrightarrow \angle ADC < \angle BCD$$

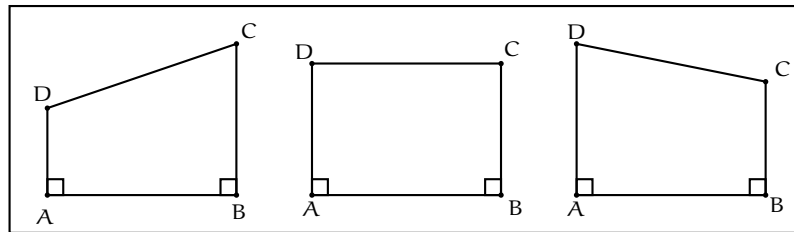


Figura 4.2: Casos do lema 4.4

A idéia dos seguintes dois teoremas é estabelecer uma relação entre dois segmentos, onde um é o lado do quadrilátero de Saccheri e o outro é um segmento perpendicular à base até o topo ou à prolongação dele, e que tipo é o ângulo do topo.

Teorema 4.5

Se $\square ABCD$, $C * P * D$, $A * Q * B$ e $\overline{PQ} \perp \overline{AB}$, então:

$$\overline{PQ} < \overline{AD} \Leftrightarrow \angle ADC \text{ é agudo.}$$

$$\overline{PQ} \cong \overline{AD} \Leftrightarrow \angle ADC \text{ é reto.}$$

$$\overline{PQ} > \overline{AD} \Leftrightarrow \angle ADC \text{ é obtuso.}$$

Prova: Vamos, ver figura 4.3, supor que $\overline{PQ} \begin{matrix} > \\ \cong \\ < \end{matrix} \overline{AD}$, então pelo lema (4.4) temos

$\angle ADC \begin{matrix} > \\ \cong \\ < \end{matrix} \angle QPD$ e $\angle BCD \begin{matrix} > \\ \cong \\ < \end{matrix} \angle QPC$. Como $\angle QPC$ e $\angle QPD$ são suplementares, então:

$$2\angle ADC = \angle ADC + \angle BCD \begin{matrix} > \\ \cong \\ < \end{matrix} \angle QPD + \angle QPC = 2\mathcal{R}. \text{ Portanto, } \angle ADC \begin{matrix} > \\ \cong \\ < \end{matrix} \mathcal{R}.$$

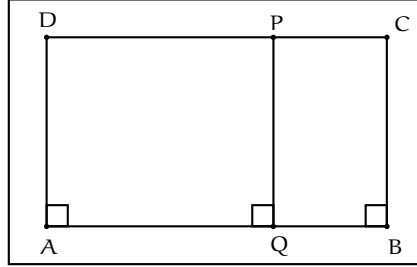


Figura 4.3: Teorema 4.5

A prova da recíproca em cada caso é trivial usando as contra positivas dos outros dois casos que faltam. □

Teorema 4.6

Se $\boxed{S}ABCD$, $D * C * R$, $A * B * S$ e $\overline{RS} \perp \overline{AB}$, então:

$$\overline{RS} > \overline{AD} \Leftrightarrow \angle ADC \text{ é agudo.}$$

$$\overline{RS} \cong \overline{AD} \Leftrightarrow \angle ADC \text{ é reto.}$$

$$\overline{RS} < \overline{AD} \Leftrightarrow \angle ADC \text{ é obtuso.}$$

Prova: Temos, ver figura 4.4, que $\overline{AD} \cong \overline{BC}$ e $\angle BCD \cong \angle ADC$. Suponhamos que $\overline{RS} > \overline{BC}$. Seja J tal que $R * J * S$ e $\overline{SJ} \cong \overline{BC}$. Temos que $\boxed{S}ASJD$ e $\boxed{S}BSJC$. Como D está no interior do ângulo $\angle SJC$, temos que $\angle ADJ \cong \angle SJD < \angle SJC \cong \angle BCJ$. Além disso, $\angle JDC < \angle JCR$, pelo teorema do ângulo externo (2.26) no triângulo $\triangle CDJ$. Assim,

$$\angle BCD \cong \angle ADC \cong \angle ADJ + \angle JDC < \angle BCJ + \angle JCR \cong \angle BCR$$

Portanto, $\angle ADC$ é agudo.

Suponhamos que $\overline{RS} \cong \overline{BC}$, então $\boxed{S}ASRD$, mas agora $A * B * S$ e $D * C * R$, portanto estamos em um caso do teorema anterior.

Suponhamos agora que $\overline{RS} < \overline{BC}$. Seja K tal que $S * R * K$ e $\overline{SK} \cong \overline{BC}$. Temos que

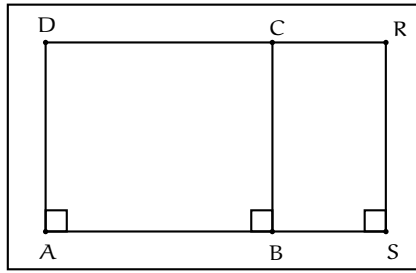


Figura 4.4: Teorema 4.6

$\boxed{S}ASKD$ e $\boxed{S}BSKC$. Como C está no interior do ângulo $\angle SKD$, temos que $\angle ADK \cong \angle SKD > \angle SKC \cong \angle BCK$. Além disso, $\angle KDC < \angle KCR$, pelo teorema do ângulo externo (2.26) no triângulo $\triangle CDK$. Seja T no interior do ângulo $\angle KCR$ tal que $\angle KCT \cong \angle KDC$. Assim,

$$\angle BCD \cong \angle ADC \cong \angle ADK - \angle KDC > \angle BCK - \angle KCT \cong \angle BCT > \angle BCR$$

Portanto, $\angle ADC$ é obtuso.

A prova da recíproca em cada caso é trivial usando as contra positivas dos outros dois casos que faltam. \square

Da congruência dos ângulos do topo do quadrilátero bi-retângulo, Saccheri distingue três casos, que descreveremos detalhadamente na seção seguinte, que ele chamou de hipótese do ângulo agudo, hipótese do ângulo reto, e hipótese do ângulo obtuso. Além disso, Saccheri demonstrou que se algum destes casos é satisfeito em um quadrilátero, então é válido para todo quadrilátero, ver teorema (4.8). Porém, suas provas pressupõem continuidade (na forma do valor intermediário) (ver [11, Hartshorne, 2000, p.307]) e serão aqui refeitas sem este recurso.

4.3 As Três Hipóteses

Nesta seção estabeleceremos as três hipóteses com as quais trabalharam Saccheri e Lambert. Como Lambert fez uma pesquisa semelhante à de Saccheri, dedicar-nos-emos a só mostrar os resultados obtidos por Saccheri. A idéia, então é mostrar o que acontece se se considera uma ou outra hipótese.

Na seção anterior, no quadrilátero de Saccheri, temos que os ângulos do topo são congruentes. Assim começaremos definindo cada uma das três hipóteses dependendo que ângulos são os do topo:

Definição 4.7

Hipótese do Ângulo Agudo: Existe um quadrilátero de Saccheri tal que os ângulos do topo são agudos. **Hipótese do Ângulo Reto:** Existe um quadrilátero de Saccheri tal que os ângulos do topo são retos. **Hipótese do Ângulo Obtuso:** Existe um quadrilátero de Saccheri tal que os ângulos do topo são obtusos.

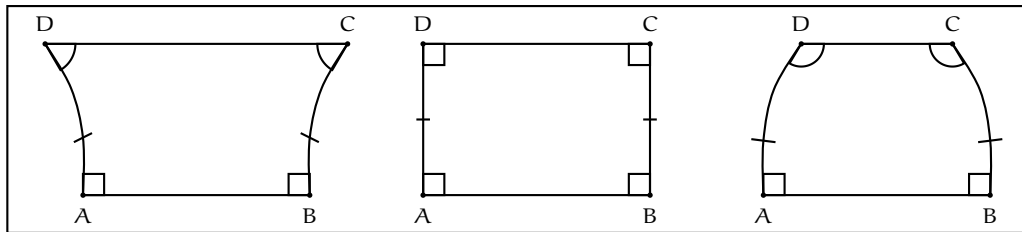


Figura 4.5: As três hipóteses de Saccheri

Até agora, em um plano onde são satisfeitos os axiomas enunciados no capítulo 2 e todas as suas conseqüências, temos trabalhado com algumas proposições que estabelecem uma relação entre os ângulos do topo do quadrilátero considerado por Saccheri e os segmentos do topo e da base, e extensões destes segmentos. Até o momento não temos nenhuma proposição que nos restrinja para a possibilidade de ter $\square ABCD$ com $\angle BCD$ agudo e $\square EFGH$ com $\angle FGH$ obtuso. O teorema a seguir resolverá este problema.

Teorema 4.8

(PROPOSIÇÕES V, VI, VII DE SACCHERI) Se existe um quadrilátero de Saccheri com ângulos do topo agudos, retos ou obtusos, então cada quadrilátero de Saccheri terá ângulos do topo agudos, retos ou obtusos, respectivamente.

Prova: Suponha $\square ABCD$ com M ponto médio de \overline{CD} e N ponto médio de \overline{AB} . Suponha $\square A'B'C'D'$ com M' ponto médio de $\overline{C'D'}$ e N' ponto médio de $\overline{A'B'}$. Queremos mostrar que os ângulos $\angle BCD$ e $\angle B'C'D'$ são do mesmo tipo, ambos agudos, retos ou obtusos.

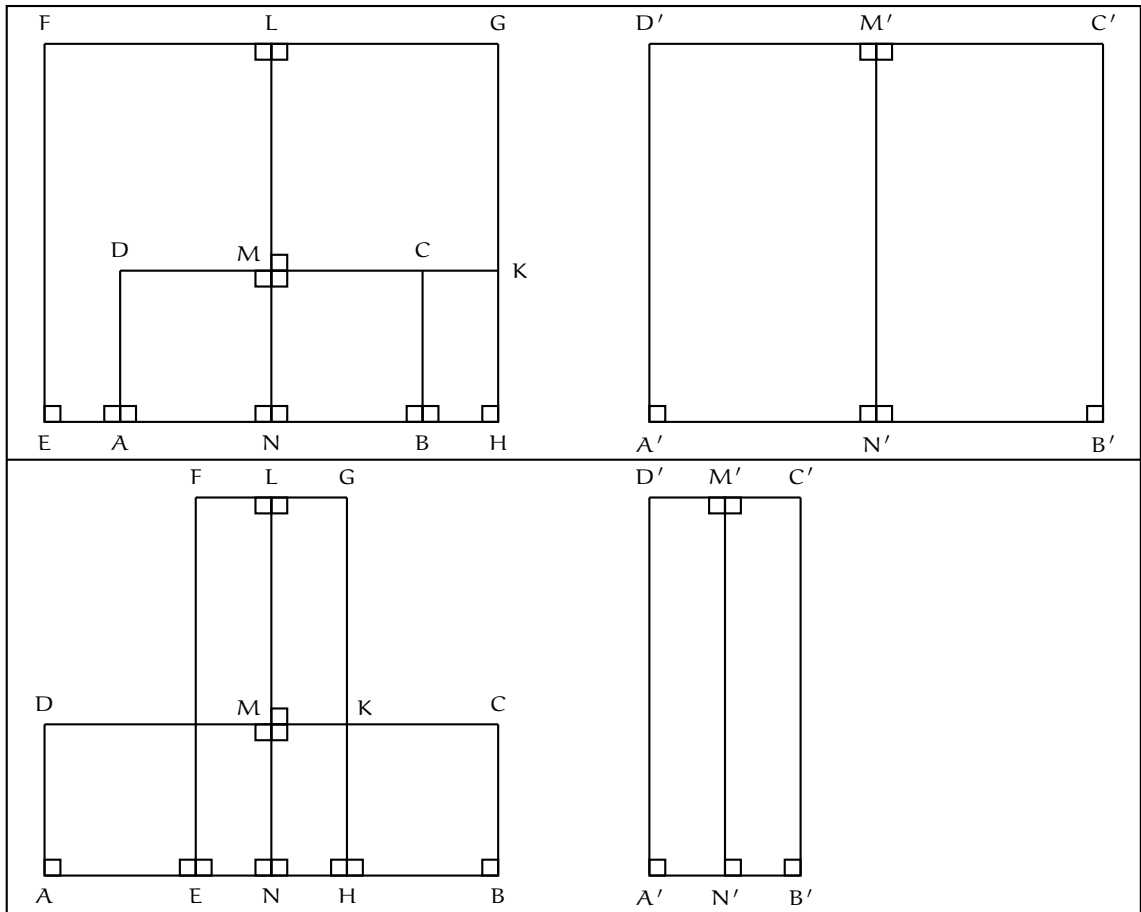


Figura 4.6: Proposição V, VI e VII de Saccheri

Sem perda de generalidade suponha $\overline{M'N'} \geq \overline{MN}$. Seja E em \overrightarrow{NA} tal que $2\overline{NE} \cong \overline{A'B'}$. Seja F do mesmo lado de D em relação a \overleftrightarrow{AB} , tal que $\overline{FE} \perp \overline{AB}$ e $\overline{EF} \cong \overline{A'D'}$. Seja L o pé da perpendicular a \overleftrightarrow{MN} que passa por F . Então $\square NEFL$ é um quadrilátero

tri-retângulo. Sejam G e H os únicos pontos tais que $\square E H G F$ com \overleftrightarrow{LN} mediatriz. Como $\overline{NH} \cong \overline{NE} \cong \overline{N'B'}$ e $\overline{HG} \cong \overline{EF} \cong \overline{A'D'} \cong \overline{B'C'}$, usando congruência de triângulos é possível mostrar que $\triangle NHG \cong \triangle N'B'C'$ e $\triangle NLG \cong \triangle N'M'C'$, portanto temos que $\square NHGL \cong \square N'B'C'M'$. Assim $\square E H G F \cong \square A'B'C'D'$. Basta mostrar que os ângulos $\angle BCD$ e $\angle HGF$ são do mesmo tipo.

Como $\overline{LN} \cong \overline{M'N'} \geq \overline{MN}$, temos duas possibilidades.

Se $\overline{M'N'} \cong \overline{MN}$, temos que $G \in \overleftrightarrow{CD}$. Daqui temos o resultado pela consequência do caso ângulo reto dos teoremas (4.5) e (4.6).

Agora se $\overline{M'N'} > \overline{MN}$, então G e H estão de lados opostos em relação da \overleftrightarrow{CD} . Seja K o ponto de interseção entre \overleftrightarrow{MC} e \overleftrightarrow{GH} . Como $\square NBCM$ e $\square NHKM$ são quadriláteros tri-retângulos metades de quadriláteros de Saccheri bem definidos, então os ângulos $\angle BCM$ e $\angle HKM$ são do mesmo tipo (consequência do teoremas 4.5 e 4.6). Mesmo para $\square NHKM$ e $\square NHGL$, então os ângulos $\angle HKM$ e $\angle HGL$ são do mesmo tipo. Assim $\angle BDC \cong \angle BCM$ e $\angle HGF \cong \angle HGL$ são do mesmo tipo.

Portanto, se um quadrilátero de Saccheri os ângulos do topo são agudos, retos ou obtusos, então cada quadrilátero terá ângulos do topo, agudos, retos ou obtusos. \square

Uma proposição interessante de ser mencionada aqui, Saccheri não a apresenta, é uma proposição que estabelece a relação entre os ângulos do topo de um quadrilátero de Saccheri e a soma dos ângulos interno de um triângulo, quando estamos frente a uma das três hipóteses. Esta proposição é apresentada em [11, Hartshorne, 2000, Cap. 7].

Teorema 4.9

Todo triângulo pode ser transformado em um quadrilátero de Saccheri de forma que a soma dos ângulos internos do triângulo seja a soma dos ângulos do topo do quadrilátero.

Prova: Sejam $\triangle ABC$, M ponto médio de \overline{AB} , N ponto médio de \overline{AC} , G o pé da perpendicular de \overleftrightarrow{MN} desde A . Seja P tal que $P * M * G$ e $\overline{MP} \cong \overline{MG}$ e seja Q tal que $Q * N * G$ e $\overline{QN} \cong \overline{GN}$. Note que $\triangle AMG \cong \triangle BMP$, pois $\overline{AM} \cong \overline{BM}$, $\angle AMG \cong \angle BMP$ e $\overline{MP} \cong \overline{MG}$. Mesmo para $\triangle ANG \cong \triangle CNQ$. Assim temos $\square QPBC$. Temos três casos para analisar, quando $M * G * N$, $M * N * G$ e $G * M * N$.

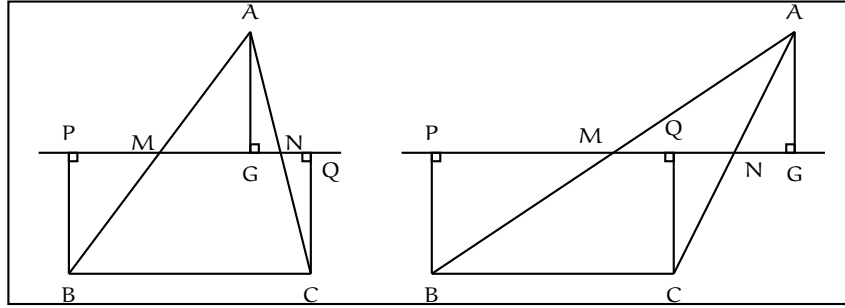


Figura 4.7: Soma dos ângulos internos de um triângulo igual à soma dos ângulos do topo

Se $M * G * N$ temos que $\angle BAC \cong \angle MAG + \angle NAG \cong \angle PBM + \angle NBQ$, os ângulos do topo $\angle PBC \cong \angle PBM + \angle MBC \cong \angle MAG + \angle ABC$ e $\angle QCB \cong \angle QCN + \angle NCB \cong \angle NAG + \angle ACB$, somando

$$\angle PBC + \angle QCB \cong \angle MAG + \angle ABC + \angle NAG + \angle ACB \cong \angle BAC + \angle ABC + \angle ACB$$

Se $M * N * G$ temos que

$$\begin{aligned} \angle PBC + \angle QCB &\cong \angle PBM + \angle MBC + \angle QCB \\ &\cong \angle BAG + \angle MBC + \angle QCB \\ &\cong \angle BAN + \angle NAG + \angle MBC + \angle QCB \\ &\cong \angle BAC + \angle NCQ + \angle QCB + \angle MBC \\ &\cong \angle BAC + \angle NCB + \angle MBC \\ &\cong \angle BAC + \angle ACB + \angle ABC \end{aligned}$$

O caso $G * M * N$ é análogo ao caso $M * N * G$.

Portanto, todo triângulo pode ser transformado em um quadrilátero de Saccheri, onde a soma dos ângulos internos seja igual à soma dos ângulos do topo. \square

Do teorema anterior podemos concluir que:

- Em um plano de Hilbert na presença da hipótese do ângulo agudo, a soma dos ângulos internos de um triângulo qualquer é menor a dois ângulos retos.
- Em um plano de Hilbert na presença da hipótese do ângulo reto, a soma dos ângulos internos de um triângulo qualquer é igual a dois ângulos retos.
- Em um plano de Hilbert na presença da hipótese do ângulo obtuso, a soma dos ângulos internos de um triângulo qualquer é maior a dois ângulos retos.

Assim, podemos estabelecer as seguintes situações em um plano de Hilbert:

- (a) Se existe um triângulo cuja soma dos ângulos internos seja menor que dois retos, todo triângulo terá a soma dos ângulos internos menor que dois retos.
- (b) As seguintes condições são equivalentes:
 - Existe um triângulo cuja soma dos ângulos internos é dois retos.
 - Existe um retângulo.
 - Todo triângulo tem a soma dos ângulos internos igual a dois retos.
- (c) Se existe um triângulo cuja soma dos ângulos internos seja maior que dois retos, todo triângulo terá a soma dos ângulos internos maior que dois retos.

Então, dependendo da hipótese considerada, podemos estabelecer três geometrias diferentes:

- (I) Um plano de Hilbert munido da hipótese do ângulo agudo é um *Plano de Hilbert semi-Hiperbólico* ou *Geometria semi-Hiperbólica*.
- (II) Um plano de Hilbert munido da hipótese do ângulo reto é um *Plano de Hilbert semi-Euclidiano* ou *Geometria semi-Euclidiana*.
- (III) Um plano de Hilbert munido da hipótese do ângulo obtuso é um *Plano de Hilbert semi-Elíptico* ou *Geometria semi-Elíptica*.

Corpos não Arquimedianos

Até agora, temos estabelecido um sistema axiomático que chamamos Plano de Hilbert, no qual enunciamos proposições que derivam de cada axioma ou grupo de axiomas. Também definimos movimentos rígidos, que formalizam o método de superposição de Euclides. Além disso, com o estudo que fez Gerolamo Saccheri, enunciamos as três hipóteses que podem acontecer no plano de Hilbert: hipótese do ângulo agudo, hipótese do ângulo reto e hipótese do ângulo obtuso. Daqui pudemos destacar três Geometrias, dependendo se o Plano de Hilbert está munido com uma das hipóteses, tendo assim: Geometria semi-Hiperbólica, Geometria semi-Euclidiana e Geometria semi-Elíptica (nomes outorgados em [11, Hartshorne, 2000, Cap. 7]), quando se está em presença da hipótese do ângulo agudo, reto ou obtuso, respectivamente.

Como nosso objetivo final é estudar Geometrias não Arquimedianas, precisamos de um modelo, onde possamos validar os axiomas desta Geometria. Os corpos não arquimedianos, estudados na álgebra, serão utilizados na concepção desses modelos.

Para tornar o texto razoavelmente autocontido, definiremos corpo, corpo ordenado e enunciaremos os axiomas de continuidade de Arquimedes e Dedekind com o fim de estabelecer uma relação entre eles e por outro lado uma relação com subcorpos dos números reais.

Pretendemos mostrar, mediante uma construção, seguindo a idéia de [18, Moise, 1974], que o conjunto de todas as classes de equivalências de funções racionais é um corpo não arquimediano. Isto será de utilidade pois queremos mostrar que existem corpos não arquimedianos pitagóricos e corpos não arquimedianos euclidianos que derivam do corpo não arquimediano que construiremos. A construção dos corpos pitagóricos e euclidianos não arquimedianos é desenvolvida sinteticamente por [11, Hartshorne, 2000, seção 18].

5.1 Corpos e propriedade Arquimediana

Nesta seção definiremos corpo, corpo ordenado e enunciaremos os axiomas de Arquimedes e Dedekind, e estabeleceremos algumas propriedades em relação a eles.

Começaremos, definindo corpo.

Definição 5.1

(CORPO) Um *corpo* é um conjunto \mathbb{F} , munido de duas operações internas fechadas $+$, \cdot , (i.e., para cada $a, b \in \mathbb{F}$ existem $a + b \in \mathbb{F}$ e $a \cdot b \in \mathbb{F}$) sujeito as seguintes condições:

1. O conjunto \mathbb{F} , munido da operação $+$ é um grupo abeliano.

(a) $(a + b) + c = a + (b + c)$ para todo $a, b, c \in \mathbb{F}$,

(b) $a + b = b + a$ para todo $a, b \in \mathbb{F}$,

(c) existe $0 \in \mathbb{F}$ tal que $a + 0 = a$ para todo $a \in \mathbb{F}$,

(d) para cada $a \in \mathbb{F}$, existe um elemento $-a \in \mathbb{F}$ tal que $a + (-a) = 0$.

2. O conjunto $\mathbb{F}^* = \mathbb{F} \setminus \{0\}$, munido da operação \cdot é um grupo abeliano.

(a) $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ para todo $a, b, c \in \mathbb{F}^*$,

(b) $a \cdot b = b \cdot a$ para todo $a, b \in \mathbb{F}^*$,

(c) existe $1 \in \mathbb{F}^*$ tal que $a \cdot 1 = a$ para todo $a \in \mathbb{F}^*$,

(d) para cada $a \in \mathbb{F}^*$, existe um elemento $a^{-1} \in \mathbb{F}^*$ tal que $a \cdot a^{-1} = 1$.

3. As operações $+$ e \cdot estão relacionadas pela distributividade

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$

Exemplo 5.2

A seguir alguns exemplos de conjuntos que são corpos:

(a) O conjunto dos os números reais (\mathbb{R}), os números complexos (\mathbb{C}), os número racionais (\mathbb{Q}), munidos de soma e produto.

(b) As classes residuais módulo um número primo p (\mathbb{Z}_p), onde a soma e produto é a usual em classes residuais.

(c) O subconjunto de \mathbb{R} , $\mathbb{Q}[\sqrt{2}] = \{q_1 + q_2\sqrt{2}, \text{ com } q_1, q_2 \in \mathbb{Q}\}$

Agora, definiremos quando um corpo qualquer \mathbb{F} é dito ordenado.

Definição 5.3

(CORPO ORDENADO) Um corpo ordenado é um corpo \mathbb{F} do qual se destaca um subconjunto \mathcal{P} , cujos elementos são chamados *positivos*, que satisfazem:

(i) Se $a, b \in \mathcal{P}$, então $a + b \in \mathcal{P}$ e $a \cdot b \in \mathcal{P}$.

(ii) Para cada $a \in \mathbb{F}$, uma e só uma das seguintes afirmações cumpre-se:

$$a \in \mathcal{P} \text{ ou } a = 0 \text{ ou } -a \in \mathcal{P}$$

Definido corpo ordenado e conjunto de elementos positivos, é necessário mostrar algumas consequências. Precisamos inicialmente definir característica de um corpo.

Definição 5.4

(CARACTERÍSTICA DE UM CORPO) Dizemos que um corpo \mathbb{F} tem característica p ($\text{char}(\mathbb{F}) = p$), se p é o menor natural tal que para todo $x \in \mathbb{F}$,

$$p \cdot x = \underbrace{x + x + \dots + x}_{p \text{ vezes}} = 0$$

Se tal p não existe, a característica de \mathbb{F} é 0.

Teorema 5.5

Seja $\mathbb{F}_{\mathcal{P}}$ um corpo ordenado, onde \mathbb{F} é um corpo e \mathcal{P} é um subconjunto de elementos positivos de \mathbb{F} , então:

- (a) $1 \in \mathcal{P}$, ou seja 1 é um elemento positivo.
- (b) \mathbb{F} tem característica 0.
- (c) Para cada $a \neq 0 \in \mathbb{F}$, $a^2 \in \mathcal{P}$.
- (d) O menor subcorpo de \mathbb{F} que contém o elemento 1 é isomorfo aos números racionais \mathbb{Q} .

Prova: Para (a) suponhamos que $1 \notin \mathcal{P}$. Como $1 \neq 0$, $(-1) \in \mathcal{P}$. Mas $(-1) \cdot (-1) = 1 \in \mathcal{P}$, o que é absurdo.

Para (b) temos de (a) que $1 \in \mathcal{P}$, logo $1 + \dots + 1 \in \mathcal{P}$, agora se somamos tantas

vezes como se quer, a soma pertence a \mathcal{P} . Então o somatório nunca será 0, só se a característica de \mathbb{F} é 0.

Para (c) temos que se $a \neq 0$, então $a \in \mathcal{P}$ ou $-a \in \mathcal{P}$, para $a \in \mathcal{P}$ é evidente, para $-a \in \mathcal{P}$ temos $(-a) \cdot (-a) \in \mathcal{P}$, logo $a^2 \in \mathcal{P}$.

Para (d), primeiro estenderemos uma função de tal modo que ela seja uma bijeção, e mostraremos que o conjunto imagem da função estendida é isomorfo a \mathbb{Q} e que é o menor subcorpo.

Considere $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{F}$, $\varphi(n) = \underbrace{1 + \dots + 1}_{n \text{ vezes}}$ com $1 \in \mathbb{F}$, temos que por (b), ela é injetiva.

Estendemos a função φ à função $\phi : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{F}$, definida:

$$\phi(z) = \begin{cases} \underbrace{1 + \dots + 1}_{z \text{ vezes}}, & \text{se } z > 0 \\ 0, & \text{se } z = 0 \\ \underbrace{(-1) + \dots + (-1)}_{-z \text{ vezes}}, & \text{se } z < 0 \end{cases}$$

Agora estendemos ϕ à função $\rho : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{F}$, $\rho(r) = \rho\left(\frac{a}{b}\right) = \phi(a)(\phi(b))^{-1}$ com $a \in \mathbb{Z}$ e $b \in \mathbb{N}$, note que esta função é bem definida, é um homomorfismo e é injetiva, pelo que ρ é uma bijeção, assim temos que $\mathbb{Q} \cong \rho(\mathbb{Q})$.

Seja \mathbb{K} um subcorpo qualquer de \mathbb{F} que contém o 1. Temos que $\varphi(\mathbb{N}) = \phi(\mathbb{N}) \subseteq \mathbb{K}$ (como $1 \in \mathbb{K}$, temos que $1 + \dots + 1 \in \mathbb{K}$), $\phi(0) = 0 \in \mathbb{K}$ e $-\varphi(n) = \phi(-n) \in \mathbb{K}$ com $n \in \mathbb{N}$, logo $\phi(\mathbb{Z}) \subseteq \mathbb{K}$.

Agora seja $r = \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$, temos que $\phi(a), \phi(b) \in \mathbb{K}$, $\phi(b) \neq 0$, logo $\phi(a)(\phi(b))^{-1} = \rho(r) \in \mathbb{K}$. Assim $\rho(\mathbb{Q}) \subseteq \mathbb{K}$. Portanto $\rho(\mathbb{Q})$ é o menor corpo contido em \mathbb{F} . \square

Mostraremos, a seguir, exemplos de corpos ordenados e não ordenados:

Exemplo 5.6

Corpos ordenados e corpos não ordenados:

1. O conjunto de números racionais \mathbb{Q} forma um corpo ordenado, onde o subconjunto \mathcal{P} são os números positivos usuais do corpo \mathbb{Q} .
2. O corpo dos números reais \mathbb{R} é um corpo ordenado, com números positivos usuais.
3. O corpo dos números complexos \mathbb{C} não é um corpo ordenado, pois $i^2 = -1 < 0$.
4. O corpo \mathbb{Z}_3 não é um corpo ordenado, pois é finito e, portanto, não contém uma cópia de \mathbb{Q} .
5. O corpo $\mathbb{Q}[\sqrt{2}] = \left\{ \frac{p}{q} + \frac{r}{s}\sqrt{2}, \text{ com } p, q, r, s \in \mathbb{Z} \text{ e } q, s \neq 0 \right\}$ é um corpo ordenado, onde o subconjunto $\mathcal{P} = \{a \mid a \in \mathbb{R}^+ \cap \mathbb{Q}[\sqrt{2}]\}$.

Desejamos estabelecer uma relação de ordem entre os elementos do corpo ordenado e mostrar como ela se comporta com as operações do corpo.

Teorema 5.7

Em um corpo ordenado $\mathbb{F}_{\mathcal{P}}$ definimos $a > b$ se $a - b \in \mathcal{P}$, $a < b$ se $b - a \in \mathcal{P}$. Esta noção de desigualdade satisfaz as seguintes propriedades:

- (i) Se $a > b$ e $c \in \mathbb{F}$, então $a + c > b + c$.
- (ii) Se $a > b$ e $b > c$, então $a > c$.
- (iii) Se $a > b$ e $c > 0$, então $a \cdot c > b \cdot c$.
- (iv) Dados $a, b \in \mathbb{F}$, uma e só uma das seguintes afirmativas cumpre-se:

$$a > b \text{ ou } a = b \text{ ou } a < b$$

Prova: Vamos provar a primeira delas, pois as outras provas são análogas.

Temos que se $a > b$, então $a - b > 0 \Rightarrow a + c - b - c > 0 \Rightarrow a + c > b + c$. \square

Em Os Elementos de Euclides aparece inocuamente uma definição que hoje conhecemos como “**axioma de Arquimedes**” ou “**axioma de Eudoxo**”. Ela aparece na definição 4 do livro V [7, Euclid, 1994, p.38]:

“Diz-se que duas grandezas têm a mesma razão quando pode-se multiplicar uma delas de modo que supere à outra.”

O assumido por Euclides foi considerado por Arquimedes como um postulado, daí o nome que chegou à literatura matemática. Arquimedes o enuncia na sua obra sobre a esfera e o cilindro, no postulado 5 do livro I [1, Archimedes, 1953, p.4]:

“Dadas duas linhas, duas superfícies ou dois sólidos desiguais, a maior dessas figuras excede à menor em uma grandeza tal que, adicionada a ela mesma, é capaz de ultrapassar qualquer grandeza proposta das que dizemos que guardam razão.”

A seguir, enunciaremos o axioma de Arquimedes e o axioma de Dedekind para corpos, e mostraremos que um corpo ordenado \mathbb{F} munido do axioma de Dedekind também está munido do axioma de Arquimedes.

(A') (Arquimedes para corpo) Para cada $a > 0 \in \mathbb{F}$, existe um inteiro $n \in \mathbb{F}$ tal que $n > a$.

(D') (Dedekind para corpo) Suponha que pode-se escrever o corpo \mathbb{F} como união disjunta de conjuntos não vazios $\mathbb{F} = S \cup T$, e assumimos que para cada $a \in S$ e para cada $b \in T$ temos $a < b$. Então existe um único elemento $c \in \mathbb{F}$ tal que para cada $a \in S$ e cada $b \in T$ temos $a \leq c \leq b$.

Teorema 5.8

Seja \mathbb{F} um corpo ordenado que satisfaz Dedekind, então o axioma de Arquimedes é satisfeito em \mathbb{F} .

Prova: Suponhamos que \mathbb{F} não satisfaz (A'). Consideremos $\phi(\mathbb{Z})$ definida na prova do item em (d) do teorema (5.5) e sejam $S = \{\alpha \in \mathbb{F} \mid \exists n \in \phi(\mathbb{Z}), \text{ com } \alpha < n\}$ e $T = \mathbb{F} \setminus S$.

Como \mathbb{F} não satisfaz (A') então existe $\beta \in \mathbb{F}$ tal que $n < \beta \forall n \in \phi(\mathbb{Z})$. Temos que $T = \{\beta \in \mathbb{F} \mid \forall n \in \phi(\mathbb{Z}) \beta > n\}$. Como \mathbb{F} satisfaz (D') e $T \cap S = \emptyset$, então existe $p \in \mathbb{F}$ tal que $\alpha \leq p \leq \beta$.

Se $p \in S$, temos que existe $m \in \phi(\mathbb{Z})$ tal que $p < m$, logo $m \in T$, o que é absurdo, pois T não possui nenhum elemento de $\phi(\mathbb{Z})$. Portanto $p \notin S$.

Se $p \in T$, temos que $p - 1 \in S$, pelo que existe $m \in \phi(\mathbb{Z})$ tal que $p - 1 < m \Rightarrow p < m + 1$, logo $m + 1 \in T$ e $m + 1 \in \phi(\mathbb{Z})$, o que é absurdo, pois T não possui nenhum elemento de $\phi(\mathbb{Z})$. Portanto $p \notin T$.

Assim \mathbb{F} está munido do axioma (A'). □

O seguinte teorema nos diz que um corpo ordenado \mathbb{F} que satisfaz o axioma arquimedeiano é isomorfo a um subcorpo de números reais. Assim, é possível provar proposições em um corpo que serão válidas no outro. A segunda parte do teorema diz que o corpo ao satisfazer Dedekind é completo, além de satisfazer Arquimedes. Algo importante que nos diz este teorema é que estudar corpos arquimedianos ordenados é equivalentes a estudar subcorpos ordenados de \mathbb{R} .

Teorema 5.9

Seja \mathbb{F} um corpo ordenado satisfazendo (A'). Então \mathbb{F} é isomorfo, com sua ordenação, a um subcorpo dos números reais \mathbb{R} . Além disso, \mathbb{F} satisfaz (D') se, e somente se o subcorpo é igual a \mathbb{R} .

Prova:[Idéia] Temos que \mathbb{F} é um corpo ordenado, logo existe o menor subcorpo \mathbb{F}_0 que é isomorfo a \mathbb{Q} . A ideia é estender a função $\varphi_0 : \mathbb{F}_0 \rightarrow \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ para um isomorfismo $\varphi : \mathbb{F} \rightarrow \mathbb{R}$, esta extensão é feita obtendo uma seqüência com o auxílio repetido do axioma de Arquimedes, onde ela é convergente a um número real que é chamado de $\varphi(\alpha)$. Logo, define-se a função $\varphi : \mathbb{F} \rightarrow \mathbb{R}$, onde ela é um homomorfismo, que necessariamente é um isomorfismo de \mathbb{F} com a sua imagem. Note que a função respeita ordem.

Agora, a condição (D') sobre \mathbb{F} é equivalente a (D') sobre $\varphi(\mathbb{F})$. Cada $r \in \mathbb{R}$ é caracterizado pelos conjuntos $\Sigma_1 = \{a \in \mathbb{R} | a \leq r\}$ e $\Sigma_2 = \{a \in \mathbb{R} | a > r\}$, assim o axioma de Dedekind é válido em $\varphi(\mathbb{F})$ se, e somente se $\varphi(\mathbb{F}) = \mathbb{R}$. \square

5.2 Construção de um Corpo não Arquimediano

A idéia nesta seção é mostrar que o conjunto de todos os polinômios, com coeficientes em um corpo ordenado, é um anel ordenado comutativo não arquimediano. Em seguida, mostraremos que o conjunto de todas as classes de equivalências das funções racionais, $(f \cdot g^{-1})$ com f, g polinômios, é um corpo ordenado não arquimediano.

À continuação definiremos o conjunto de todos os polinômios.

Definição 5.10

\mathbb{P} é o conjunto de todos os polinômios, com coeficientes em um corpo ordenado \mathcal{C} , da forma

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 \quad \text{com } p \in \mathbb{P}, n \geq 0, a_n \neq 0, a_i \in \mathcal{C}$$

Um polinômio constante é da forma $p(x) = a_0, \forall x \in \mathcal{C}$ constante.

Chamaremos de **Coeficiente líder** ao coeficiente que acompanha a potência de maior grau de x : a_n .

Exemplo 5.11

Seja $p \in \mathbb{P}$, $p(x) = 2x^2 + x + 3$, com coeficientes em \mathbb{R} , aqui temos que 2 é o coeficiente líder.

Definição 5.12

(POLINÔMIO POSITIVO) É um polinômio $p \in \mathbb{P}$ para o qual existe um elemento $k \in \mathcal{C}$ tal que $p(x) > 0$ para todo $x > k$. Se existe dito k , escreveremos que $p > 0$.

Exemplo 5.13

Seja $p \in \mathbb{P}$ com coeficientes no corpo dos números reais definido como $p(x) = x^2 + x - 2$; neste polinômio temos que $p(x) > 0 \forall x > 1$. Logo, $p > 0$.

Seja $p \in \mathbb{P}$ com coeficientes no corpo dos números reais definido como $p(x) = x^4 + x^2 + 1$; neste polinômio temos que $p(x)$ é sempre positivo. Portanto, $p > 0$.

O teorema a seguir mostra a relação entre um polinômio positivo e seu coeficiente líder.

Teorema 5.14

Um polinômio é positivo se, e somente se, o seu coeficiente líder é positivo.

Prova: Se p é um polinômio constante: $p(x) = a \forall x \in \mathcal{C}$

$$p > 0 \Leftrightarrow p(x) = a > 0 \forall x \in \mathcal{C} \Leftrightarrow a > 0$$

Se p não é um polinômio constante, então

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

Suponhamos que um polinômio é positivo,

$$p > 0 \Rightarrow \exists k_p \in \mathcal{C} \text{ tal que, se } x > k_p, \text{ então } p(x) > 0.$$

Seja $x > k = \max\{k_p, 1 + |a_n|^{-1}(|a_{n-1}| + \dots + |a_1| + |a_0|)\}$, onde $|a| = \max\{a, -a\}$. Assim $p(x) > 0$, então

$$p(x) = a_n x^n [1 + a_n^{-1} a_{n-1} x^{-1} + \dots + a_n^{-1} a_1 (x^{-1})^{n-1} + a_n^{-1} a_0 (x^{-1})^n] > 0$$

Como $x > 0$, então basta mostrar que

$$[1 + a_n^{-1} a_{n-1} x^{-1} + \dots + a_n^{-1} a_1 (x^{-1})^{n-1} + a_n^{-1} a_0 (x^{-1})^n] > 0$$

Suponhamos que

$$[1 + a_n^{-1} a_{n-1} x^{-1} + \dots + a_n^{-1} a_1 (x^{-1})^{n-1} + a_n^{-1} a_0 (x^{-1})^n] \leq 0$$

Usando a propriedade $b \geq -|b|$, em cada termo, temos o seguinte:

$$\begin{aligned} 0 &\geq 1 + a_n^{-1} a_{n-1} x^{-1} + \dots + a_n^{-1} a_1 (x^{-1})^{n-1} + a_n^{-1} a_0 (x^{-1})^n \\ &\geq 1 - |a_n^{-1} a_{n-1} x^{-1}| - \dots - |a_n^{-1} a_1 (x^{-1})^{n-1}| - |a_n^{-1} a_0 (x^{-1})^n| \\ &\geq 1 - |a_n|^{-1} |a_{n-1}| x^{-1} - \dots - |a_n|^{-1} |a_1| (x^{-1})^{n-1} - |a_n|^{-1} |a_0| (x^{-1})^n \end{aligned}$$

Então

$$|a_n|^{-1} |a_{n-1}| x^{-1} + \dots + |a_n|^{-1} |a_1| (x^{-1})^{n-1} + |a_n|^{-1} |a_0| (x^{-1})^n \geq 1$$

Pela definição de x sabemos que $x > 1$, então $x^{-1} > x^{-2} > x^{-3} > \dots$. Assim:

$$\begin{aligned} 1 &\leq |a_n|^{-1} |a_{n-1}| x^{-1} + \dots + |a_n|^{-1} |a_1| (x^{-1})^{n-1} + |a_n|^{-1} |a_0| (x^{-1})^n \\ &\leq |a_n|^{-1} |a_{n-1}| x^{-1} + \dots + |a_n|^{-1} |a_1| x^{-1} + |a_n|^{-1} |a_0| x^{-1} \\ &\leq |a_n|^{-1} x^{-1} (|a_{n-1}| + \dots + |a_1| + |a_0|) \end{aligned}$$

Logo, $x \leq |a_n|^{-1} (|a_{n-1}| + \dots + |a_1| + |a_0|)$, contradizendo o fato de $x > k$.

Portanto, $[1 + a_n^{-1} a_{n-1} x^{-1} + \dots + a_n^{-1} a_1 (x^{-1})^{n-1} + a_n^{-1} a_0 (x^{-1})^n] > 0$, pelo que o

coeficiente líder a_n do polinômio p é positivo.

Reciprocamente, suponhamos positivo o coeficiente líder do polinômio:

Seja $k = \max\{1, |a_n|^{-1}(|a_{n-1}| + \dots + |a_1| + |a_0|)\}$ e considere $x > k$. Como $x > 1$ então temos que $x^{-1} > x^{-2} > x^{-3} > \dots$. Assim:

$$x > k$$

$$x > |a_n|^{-1}(|a_{n-1}| + \dots + |a_1| + |a_0|)$$

Multiplicando ambos os lados da desigualdade por x^{-1}

$$\begin{aligned} 1 &> |a_n|^{-1}x^{-1}(|a_{n-1}| + \dots + |a_1| + |a_0|) \\ &= |a_n|^{-1}|a_{n-1}|x^{-1} + \dots + |a_n|^{-1}|a_1|x^{-1} + |a_n|^{-1}|a_0|x^{-1} \\ &> |a_n|^{-1}|a_{n-1}|x^{-1} + \dots + |a_n|^{-1}|a_1|(x^{-1})^{n-1} + |a_n|^{-1}|a_0|(x^{-1})^n \end{aligned}$$

Temos

$$1 > |a_n|^{-1}|a_{n-1}|x^{-1} + \dots + |a_n|^{-1}|a_1|(x^{-1})^{n-1} + |a_n|^{-1}|a_0|(x^{-1})^n$$

Usando a propriedade $b \geq -|b|$, em cada termo, temos o seguinte:

$$\begin{aligned} 0 &< 1 - (|a_n|^{-1}|a_{n-1}|x^{-1} + \dots + |a_n|^{-1}|a_1|(x^{-1})^{n-1} + |a_n|^{-1}|a_0|(x^{-1})^n) \\ &= 1 - |a_n|^{-1}|a_{n-1}|x^{-1} - \dots - |a_n|^{-1}|a_1|(x^{-1})^{n-1} - |a_n|^{-1}|a_0|(x^{-1})^n \\ &= 1 - |a_n^{-1}a_{n-1}x^{-1}| - \dots - |a_n^{-1}a_1(x^{-1})^{n-1}| - |a_n^{-1}a_0(x^{-1})^n| \\ &\leq 1 + a_n^{-1}a_{n-1}x^{-1} + \dots + a_n^{-1}a_1(x^{-1})^{n-1} + a_n^{-1}a_0(x^{-1})^n \end{aligned}$$

Como $a_n > 0$, $x^n > 0$ e $(1 + a_n^{-1}a_{n-1}x^{-1} + \dots + a_n^{-1}a_1(x^{-1})^{n-1} + a_n^{-1}a_0(x^{-1})^n) > 0$, temos que $p(x) > 0$, $\forall x > k$. Portanto, o polinômio p é positivo. \square

Do teorema anterior, temos que os polinômios positivos são fáceis de identificar, bastando examinar para o seu coeficiente líder.

A seguir definiremos, de forma análoga, polinômio negativo:

Definição 5.15

(POLINÔMIO NEGATIVO) É um polinômio $p \in \mathbb{P}$ para o qual existe um elemento $k \in \mathcal{C}$ onde $p(x) < 0$ para cada $x > k$.

Em seguida mostraremos que o conjunto \mathbb{P} contém um subconjunto de elementos positivos que satisfazem as duas condições enunciadas na definição (5.3).

Teorema 5.16

O conjunto \mathbb{P} possui um subconjunto, \mathcal{P} , de elementos positivos que satisfazem as seguintes condições:

- (i) Se $p, q \in \mathcal{P}$, então $p + q \in \mathcal{P}$ e $p \cdot q \in \mathcal{P}$.
- (ii) Para cada $p \in \mathbb{P}$, uma e somente uma das seguintes afirmações cumpre-se:

$$p \in \mathcal{P} ; p = 0 ; -p \in \mathbb{P}$$

Prova: Sejam $p, q \in \mathcal{P}$, onde o coeficiente líder de p é a_n e de q é b_m . Como p, q são polinômios positivos, temos que a_n, b_m são positivos, assim temos que o coeficiente líder do polinômio $p + q$ é também positivo, pois o coeficiente líder está entre as seguintes possibilidades: a_n quando $n > m$; b_m quando $m > n$; ou $a_n + b_m$, isto é possível pois \mathcal{C} é ordenado, quando $n = m$. Agora, o coeficiente líder do polinômio $p \cdot q$ é $a_n b_m$ que é positivo. Portanto a condição (i) está provada.

Seja $p \in \mathbb{P}$, com coeficiente líder a_n : se $a_n > 0$ temos que $p \in \mathcal{P}$; se $a_n < 0$ temos que o polinômio $-p$ possui coeficiente líder $-a_n > 0$, pelo que $-p \in \mathcal{P}$; se $a_n = 0$ temos que $p = 0$. Portanto a condição (ii) está provada. \square

O conjunto \mathbb{P} satisfaz as propriedades de anel, pois contém o zero, chamado polinômio nulo, $p = 0$. Contém ao polinômio unidade, que é chamado polinômio constante $q =$

1. Além disso, temos que adição e produto são associativos, comutativos e satisfazem distributividade.

A seguir estabeleceremos uma relação de ordem sobre \mathbb{P} , para obter um anel comutativo ordenado e mostrar que o anel é não arquimediano.

Definição 5.17

(RELAÇÃO DE ORDEM EM \mathbb{P}) Sejam $p, q \in \mathbb{P}$. Dizemos que $p > q$ quando $p - q > 0$. Assim $p > q$ se $p(x) > q(x)$ para cada $x \in \mathcal{C}$ maior que um certo $k \in \mathcal{C}$.

Se existe uma relação de ordem no conjunto dos polinômios, então existem condições que os elementos do conjunto \mathbb{P} satisfazem, como tricotomia, transitividade, entre outras. O seguinte teorema nos mostra estas condições.

Teorema 5.18

Para cada $p, q, s \in \mathbb{P}$ podem-se verificar as seguintes condições:

- (i) $p > q$ ou $p = q$ ou $q > p$
- (ii) Se $p > q$, então $p + s > q + s$
- (iii) Se $p > q$ e $q > s$, então $p > s$

Prova: Imediatamente da definição (5.17) e do teorema (5.16). □

Note que \mathbb{P} não satisfaz que: para cada $p \in \mathbb{P}$ com $p \neq 0$ existe seu inverso multiplicativo, portanto o conjunto \mathbb{P} não é corpo. Então, até aqui temos que o conjunto \mathbb{P} é um anel comutativo ordenado. Agora basta somente mostrar que \mathbb{P} é não arquimediano.

Teorema 5.19

O anel comutativo ordenado \mathbb{P} não satisfaz o axioma de Arquimedes.

Prova: Consideremos os seguintes polinômios:

$$p, \quad p(x) = 1 \quad \forall x \in \mathcal{C}$$

$$\text{e } q, \quad q(x) = x \quad \forall x \in \mathcal{C}$$

para um inteiro n temos $n < x$ quando $x > n$. Portanto, por mais vezes que somemos o polinômio p nunca podemos ultrapassar ao polinômio q , assim $n \cdot p < q$ para cada n . Logo, o axioma de Arquimedes não é satisfeito. Poderíamos dizer que $q(x) = x$ é “infinitamente grande” comparado com $p(x) = 1$. Pelo que, \mathbb{P} é não arquimediano. \square

Tendo que \mathbb{P} é um anel comutativo ordenado não arquimediano, queremos construir a partir de \mathbb{P} um corpo ordenado não arquimediano. Para isto usaremos o quociente de polinômios, que chamaremos de funções racionais. Pois assim obteremos que, para cada elemento $\varphi(x) = p(x) (q(x))^{-1}$, com $q(x) \neq 0$, deste novo conjunto, exista inverso multiplicativo.

Definição 5.20

(FUNÇÕES RACIONAIS) São funções da forma $\varphi = (p, q)$ com $p, q \in \mathbb{P}$ tal que, $\forall x \in \mathcal{C}$, temos:

$$\varphi(x) = p(x) (q(x))^{-1} = \frac{p(x)}{q(x)}.$$

onde $q(x) \neq 0$.

Definiremos, de maneira análoga a como foram definidos polinômios positivos e negativos no anel \mathbb{P} , funções racionais positivas e funções racionais negativas.

Definição 5.21

(FUNÇÃO POSITIVA) É uma função φ para a qual existe um elemento $k \in \mathcal{C}$ onde $\varphi(x) > 0$ para cada $x > k$.

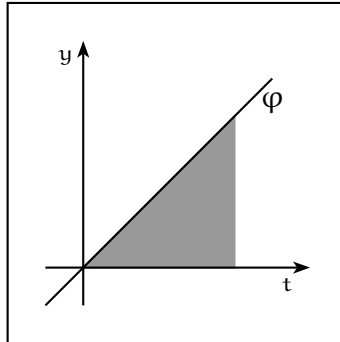
Definição 5.22

(FUNÇÃO NEGATIVA) É uma função φ para a qual existe um elemento $k \in \mathcal{C}$ onde $\varphi(x) < 0$ para cada $x > k$.

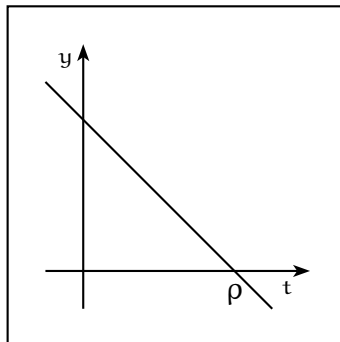
Exemplo 5.23

Considere as seguintes funções:

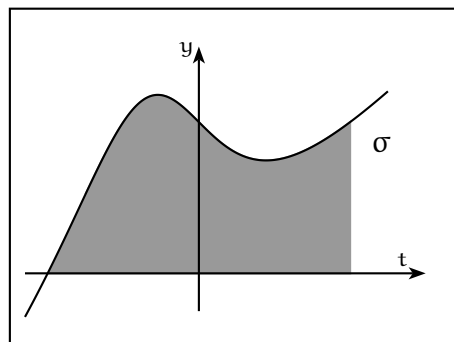
- (1) $\varphi(t) = p(t) \cdot (q(t))^{-1} = t \cdot (1)^{-1} = t$, temos que a função é positiva, pois a partir de $t = 0$ ela é maior que zero.



- (2) $\rho(t) = p(t) \cdot (q(t))^{-1} = (-t + 2) \cdot (1)^{-1} = -t + 2$, temos que a função é negativa, pois a partir de $t = 2$ ela é menor que zero.



- (3) $\sigma(t) = p(t) \cdot (q(t))^{-1} = (t^3 + t^2 + 1) \cdot (t^2 + t + 2)^{-1} = \frac{t^3 + t^2 + 1}{t^2 + t + 2}$, temos que a função é positiva, pois a partir de $t = -2$ ela é maior que zero.



Os teoremas que a seguir se enunciarão têm como objetivo provar que o conjunto das funções racionais contém um subconjunto de elementos positivos que satisfazem as duas condições as do teorema (5.16).

Teorema 5.24

Toda função racional (diferente da função 0) é positiva ou negativa.

Prova: Seja $\varphi(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ onde p e q não são polinômios nulos. Podemos tomar p, q de tal forma que $q > 0$ (caso contrário multiplicar por (-1) cada uma das partes de φ). Logo temos que existe k_q tal que $q(x) > 0$ para cada $x > k_q$.

Suponha, agora, que $p > 0$, então existe k_p tal que $p(x) > 0$ para cada $x > k_p$. Seja $k = \max\{k_p, k_q\}$. Temos que se $x > k$, então $x > k_p$ e $x > k_q$. Logo $p(x) > 0$ e $q(x) > 0$ para cada $x > k$. Assim $\varphi(x) = \frac{p(x)}{q(x)} > 0$ para cada $x > k$. Analogamente, se $p < 0$ e $q > 0$, temos que $\varphi(x) < 0$. \square

A seguir enunciaremos um teorema que relaciona funções racionais com a ordem estabelecida anteriormente.

Teorema 5.25

Sejam φ, ρ funções racionais, tais que $\varphi > 0$ e $\rho > 0$. Então $\varphi + \rho > 0$ e $\varphi \cdot \rho > 0$.

Prova: Dado que $\varphi > 0$, existe k_φ tal que $\varphi(x) > 0$ para cada $x > k_\varphi$, e $\rho > 0$, existe k_ρ tal que $\rho(x) > 0$ para cada $x > k_\rho$.

Tomemos $k = \max\{k_\varphi, k_\rho\}$. Para cada $x > k$, temos:

$$\varphi(x) + \rho(x) > 0$$

$$\varphi(x) \cdot \rho(x) > 0$$

portanto $\varphi + \rho > 0$ e $\varphi \cdot \rho > 0$. \square

Notemos que poderíamos pensar que o conjunto de todas as funções racionais é um bom candidato para ser o corpo não arquimediano que estamos procurando, pois ele possui elemento neutro aditivo, elemento neutro multiplicativo, um único inverso aditivo, é comutativo, distributivo, associativo, além de possuir inverso multiplicativo. Porém, o inverso multiplicativo não é único, pois considere o seguinte exemplo:

$$\varphi(x) = \frac{(x-1)(x-4)}{(x+2)(x-4)},$$

$$\rho(x) = \frac{(x+2)(x-4)}{(x-1)(x-4)} \text{ e}$$

$$\phi(x) = \frac{x+2}{x-1}$$

Para cada $x \neq 1, 4, -2$, temos que

$$\varphi(x) \cdot \rho(x) = \varphi(x) \cdot \phi(x) = 1$$

Portanto este conjunto de funções racionais não é um corpo. Assim, para evitar o problema da pluralidade de inversos multiplicativos, introduziremos o conceito de funções racionais equivalentes que a seguir serão definidas.

Definição 5.26

(FUNÇÕES EQUIVALENTES) Sejam f, g duas funções quaisquer. Dizemos que elas são equivalentes, $f \approx g$, se $f(a) = g(a)$ com exceção de um número finito de pontos.

Caso específico de funções racionais:

Sejam $\varphi = (p, q)$ e $\rho = (r, s)$ duas funções racionais. Dizemos que elas são equivalentes, $\varphi \approx \rho$, se

$$\varphi(x) = \rho(x) \quad | \quad q(x) \neq 0 \text{ e } s(x) \neq 0.$$

Exemplo 5.27

Sejam

$$\varphi(x) = \frac{(x+2)(x-2)}{(x-1)(x-2)}$$

e

$$\rho(x) = \frac{(x+2)(x-3)}{(x-1)(x-3)}$$

φ não é definida para $x = 1$ e $x = 2$, ρ não é definida para $x = 1$ e $x = 3$. Mas, onde φ e ρ são definidas, elas têm o mesmo valor.

O teorema a seguir mostra como se comporta a soma e produto de funções racionais equivalentes.

Teorema 5.28

Sejam $\varphi_1, \varphi_2, \rho_1, \rho_2$ funções racionais, tais que $\varphi_1 \approx \rho_1$ e $\varphi_2 \approx \rho_2$. Então temos $\varphi_1 + \varphi_2 \approx \rho_1 + \rho_2$ e $\varphi_1 \cdot \varphi_2 \approx \rho_1 \cdot \rho_2$.

Se $\varphi_1 \approx \varphi_2$ e φ_1 é positiva, então φ_2 é positiva.

Prova: Temos:

$$\varphi_1 \approx \rho_1 \Rightarrow \exists \mathcal{A} := \{a_1, a_2, \dots, a_n\} \text{ tal que } \varphi_1(x) = \rho_1(x), \forall x \in \mathcal{C} \setminus \mathcal{A}$$

$$\varphi_2 \approx \rho_2 \Rightarrow \exists \mathcal{B} := \{b_1, b_2, \dots, b_m\} \text{ tal que } \varphi_2(x) = \rho_2(x), \forall x \in \mathcal{C} \setminus \mathcal{B}$$

Seja $x \in \mathcal{C} \setminus (\mathcal{A} \cup \mathcal{B})$, então temos

$$\varphi_1(x) = \rho_1(x) \quad \text{e} \quad \varphi_2(x) = \rho_2(x)$$

logo

$$\varphi_1(x) + \varphi_2(x) = \rho_1(x) + \varphi_2(x) = \rho_1(x) + \rho_2(x)$$

$$\varphi_1(x) \cdot \varphi_2(x) = \rho_1(x) \cdot \varphi_2(x) = \rho_1(x) \cdot \rho_2(x)$$

como $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ é finito, pois \mathcal{A} e \mathcal{B} são finitos, temos que $\varphi_1 + \varphi_2 \approx \rho_1 + \rho_2$ e $\varphi_1 \cdot \varphi_2 \approx \rho_1 \cdot \rho_2$.

Para a segunda parte do teorema temos que:

$$\varphi_1 \approx \varphi_2 \Rightarrow \exists \mathcal{A} := \{a_1, a_2, \dots, a_n\} \text{ tal que } \varphi_1(x) = \varphi_2(x), \forall x \in \mathcal{C} \setminus \mathcal{A}$$

Por outro lado temos:

$$\varphi_1 > 0 \Rightarrow \exists k_{\varphi_1} \text{ tal que para cada } x > k_{\varphi_1}, \varphi_1(x) > 0.$$

Considere $k = \max\{k_{\varphi_1}, a_1, \dots, a_n\}$. Então para cada $x > k$, temos que $\varphi_1(x) = \varphi_2(x)$ e $\varphi_1(x) > 0$, logo $\varphi_2(x) > 0$. Pelo que $\varphi_2 > 0$. \square

Definição 5.29

O conjunto de todas as funções equivalentes a φ é denotado por $\overline{\varphi}$, assim

$$\overline{\varphi} = \{\rho | \rho \approx \varphi\}$$

Gostaríamos de saber quando uma classe de equivalência é positiva e como se relacionam as classes quando as somamos ou fazemos o produto entre elas. O seguinte teorema responde nossa inquietude e sua prova deriva imediatamente do teorema (5.28).

Teorema 5.30

Sejam $\overline{\varphi}, \overline{\rho}$, então:

- $\overline{\varphi} > 0$ se $\varphi > 0$
- $\overline{\varphi} + \overline{\rho} = \overline{\varphi + \rho}$
- $\overline{\varphi} \cdot \overline{\rho} = \overline{\varphi \cdot \rho}$

Ao conjunto de todas as classes de equivalência $\overline{\varphi}$ denotaremos por \mathbb{F} . Este conjunto satisfaz associatividade, comutatividade, distributividade, pois elas são válidas no corpo \mathcal{C} . Por exemplo:

$$(\overline{\varphi}\overline{\rho})\overline{\sigma} = \overline{\varphi}(\overline{\rho}\overline{\sigma})$$

já que para todo $x \in \mathcal{C}$, menos em um número finito de elementos no corpo, temos

$$[\varphi(x)\rho(x)]\sigma(x) = \varphi(x)[\rho(x)\sigma(x)]$$

portanto

$$(\varphi\rho)\sigma \approx \varphi(\rho\sigma)$$

assim

$$(\overline{\varphi\rho})\overline{\sigma} = \overline{\varphi}(\overline{\rho\sigma})$$

pela definição de multiplicação para $\overline{\varphi}$, $\overline{\rho}$, $\overline{\sigma}$.

Os outros postulados verificam-se similarmente.

O conjunto \mathbb{F} contém o 0 e o 1, nomeados $\overline{0}$ e $\overline{1}$. Além disso, $-\overline{\varphi} = \overline{-\varphi}$ e $(\overline{\varphi})^{-1} = \overline{\varphi^{-1}}$

É claro que \mathbb{F} é fechado para adição e multiplicação, pois soma e produto de funções racionais também são funções racionais.

Até aqui temos que \mathbb{F} é corpo, então agora a idéia é mostrar que \mathbb{F} é um corpo ordenado não arquimediano. Para isso estabeleceremos, primeiro, uma relação de ordem onde explicitaremos duas propriedades relevantes. Para mostrar que \mathbb{F} é não arquimediano fazemos de maneira análoga a como foi mostrado que o anel de todos os polinômios com coeficientes em \mathcal{C} é não arquimediano.

Definição 5.31

(RELAÇÃO DE ORDEM EM \mathbb{F}) Sejam $\overline{\varphi}, \overline{\rho} \in \mathbb{F}$, dizemos que $\overline{\varphi} > \overline{\rho}$ quando $\overline{\varphi} - \overline{\rho} > 0$.

O corpo \mathbb{F} , para esta relação de ordem, possui um subconjunto de elementos positivos que satisfaz as duas condições. Isto ficará explicitado no teorema seguinte, cuja demonstração é imediata ao usar os teoremas (5.25) e (5.30).

Teorema 5.32

Se $\overline{\varphi} > 0$ e $\overline{\rho} > 0$, então $\overline{\varphi} + \overline{\rho} > 0$ e $\overline{\varphi} \cdot \overline{\rho} > 0$.

Cada $\overline{\varphi} \in \mathbb{F}$ satisfaz exatamente uma das seguintes condições:

$$\overline{\varphi} > 0; \quad \overline{\varphi} = 0; \quad -\overline{\varphi} > 0$$

Com tudo o que foi feito, estamos em condições de dizer que \mathbb{F} é um corpo ordenado não arquimediano.

5.3 Corpo Pitagórico não Arquimediano

A idéia nesta seção é construir um corpo não arquimediano que seja extensão de \mathbb{F} e satisfaça a propriedade pitagórica. Para isto, definiremos um conjunto que é união da função nula com todas as classes de equivalências de funções contínuas com um número finito de raízes. Mostraremos que este conjunto não é um corpo, contudo ele possui uma ordenação natural. Além disso, mostraremos que este conjunto possui um subconjunto de funções que são obtidas a partir do corpo \mathbb{F} com um número finito de operações $(+, -, \cdot, \div, c \rightarrow \sqrt{1+c^2})$. Provaremos que este subconjunto é o corpo não arquimediano pitagórico procurado.

Definição 5.33

(CORPO PITAGÓRICO) Diremos que um corpo \mathcal{H} é pitagórico quando

$$\text{Para cada } a \in \mathcal{H}, \sqrt{1+a^2} \in \mathcal{H}$$

O menor corpo pitagórico ordenado é um corpo enumerável chamado Corpo de Hilbert.

Definição 5.34

Seja o conjunto \mathcal{F} definido por:

$$\mathcal{F} : \{\bar{h} \mid h \text{ função contínua com um número finito de raízes}\} \cup \{\bar{f} \mid f(x) = 0 \forall x\}$$

Exemplo 5.35

Considere as seguintes funções contínuas $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^3 + 1}{x}$, $g, h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = \frac{x^3 + x^2 + 1}{x^2 + x + 2}$, $h(x) = \sin(x) + 2$, elas têm um número finito de raízes.

NOTA: Para simplificar a notação daqui em diante somente será utilizado o representante da classe de equivalência. Assim, dizer φ será entendido como $\bar{\varphi}$.

Teorema 5.36

\mathcal{F} possui um subconjunto, $\mathcal{P}_{\mathcal{F}}$, de elementos positivos, ou seja \mathcal{F} é um conjunto com uma ordem natural. Mas \mathcal{F} não é corpo.

Prova: Primeiro mostraremos que \mathcal{F} não é corpo, para isto basta considerar $f, g \in \mathcal{F}$ tais que $f(x) = \sin(x) + 3$ e $g(x) = 2$, temos que $f, g \in \mathcal{F}$, contudo $f - g \notin \mathcal{F}$ pois $\sin(x) + 1$ possui um número infinito de raízes. Pelo que \mathcal{F} não é corpo.

Agora, para mostrar que \mathcal{F} possui uma ordem natural, consideremos o conjunto

$$\mathcal{P}_{\mathcal{F}} = \{\varphi \in \mathcal{F} \mid \varphi > 0 \text{ se } \exists \alpha_0 \in \mathcal{C} \text{ tal que } \forall b > \alpha_0 \varphi(b) > 0\}$$

Como cada $\varphi \neq 0 \in \mathcal{F}$ é contínua e possui um número finito de raízes, então existe $\alpha \in \mathcal{C}$ onde $\varphi(\alpha) = 0$ e α é maior que todas as raízes de φ . Então para cada $b > \alpha$ temos que $\varphi(b) > 0$ ou $\varphi(b) < 0$. Portanto o conjunto $\mathcal{P}_{\mathcal{F}}$ satisfaz as condições da definição (5.3). Assim, o conjunto \mathcal{F} possui uma ordem natural. \square

A seguir definiremos um conjunto que está contido em \mathcal{F} e é extensão de \mathbb{F} . A idéia

é mostrar que ele é o corpo não arquimediano pitagórico que estamos procurando. Para isto mostraremos que qualquer extensão de um subcorpo deste conjunto é um corpo e continua contido nele.

Definição 5.37

Seja o conjunto Ω definido como segue:

$$\Omega : \left\{ \varphi \in \mathcal{F} \mid \varphi \text{ é obtido a partir de } \mathbb{F} \right. \\ \left. \text{com um número finito de operações: } +, -, \cdot, \div, c \mapsto \sqrt{1 + c^2} \right\}$$

Exemplo 5.38

Sejam, $\alpha, \beta, c \in \mathcal{F}$ tais que

$$\alpha(x) = x^2 \cdot (x^2 + 1)^{-1} = \frac{x^2}{x^2 + 1}, \quad \beta(x) = 2x^3 + 3x - 1 \text{ e } c(x) = x,$$

então temos que

$$\alpha(x) + \beta(x)\sqrt{1 + c(x)^2} = \frac{x^2}{x^2 + 1} + (2x^3 + 3x - 1) \cdot \sqrt{1 + x^2}.$$

Como $\alpha + \beta\sqrt{1 + c^2}$ é uma função continua com um número finito de raízes e é extensão de \mathbb{F} , então ela pertence a Ω .

É importante destacar que $\mathbb{F} \subset \Omega \subset \mathcal{F}$, pois Ω é um subconjunto de \mathcal{F} que é uma extensão obtida a partir de \mathbb{F} mediante um número finito das seguintes operações $\{+, -, \cdot, \div, c \mapsto \sqrt{1 + c^2}\}$, onde c é um função que foi também obtida por um número finito destas operações.

O lema a seguir nos ajudará a mostrar que o conjunto Ω é um corpo. Neste lema mostraremos que uma extensão de um corpo contido em Ω , continua contido nele. Fixamos um elemento ω do corpo tal que a raiz $\sqrt{1 + \omega^2}$ não esteja contida no corpo;

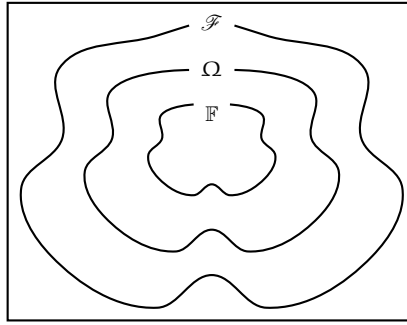


Figura 5.1: Diagramação da inclusão de um conjunto em outro

estendemos o corpo com essa raiz. Assim, o conjunto resultante é um outro corpo que ainda está em Ω .

Lema 5.39

Considere Ω como o conjunto definido em 5.37, e \mathbb{K} um corpo tal que $\mathbb{K} \subset \Omega$. Seja $\omega \in \mathbb{K}$ tal que $\sqrt{1 + \omega^2} \notin \mathbb{K}$. Então o conjunto

$$\mathbb{K}_\omega = \mathbb{K} \left[\sqrt{1 + \omega^2} \right] = \left\{ \alpha + \beta \sqrt{1 + \omega^2} \mid \alpha, \beta \in \mathbb{K} \right\}$$

é um corpo e $\mathbb{K}_\omega \subseteq \Omega$.

Prova: Temos que mostrar duas coisas, a primeira é que \mathbb{K}_ω é um corpo, e a segunda é que esteja contido em Ω .

(a) Para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{K}_\omega$, então $\alpha + \beta$; $\alpha - \beta$; $\alpha \cdot \beta$; $\alpha \cdot \beta^{-1} \in \mathbb{K}_\omega$

Sejam $\alpha = a + b\sqrt{1 + \omega^2}$, $\beta = c + d\sqrt{1 + \omega^2}$

$$\begin{aligned} \bullet \quad \alpha \pm \beta &= \underbrace{(a \pm c)}_{\in \mathbb{K}} + \underbrace{(b \pm d)}_{\in \mathbb{K}} \sqrt{1 + \omega^2} \\ \bullet \quad \alpha \cdot \beta &= \underbrace{(ac + bd(1 + \omega^2))}_{\in \mathbb{K}} + \underbrace{(ad + bc)}_{\in \mathbb{K}} \sqrt{1 + \omega^2} \\ \bullet \quad \alpha \cdot \beta^{-1} &= \underbrace{\left((ac - bd(1 + \omega^2)) \cdot (c^2 - d^2(1 + \omega^2))^{-1} \right)}_{\in \mathbb{K}} \\ &\quad + \underbrace{\left((bc - ad) \cdot (c^2 - d^2(1 + \omega^2))^{-1} \right)}_{\in \mathbb{K}} \sqrt{1 + \omega^2} \end{aligned}$$

Pelo que $\alpha + \beta; \alpha - \beta; \alpha \cdot \beta; \alpha \cdot \beta^{-1} \in \mathbb{K}_\omega$.

(b) Para todo $\alpha \in \mathbb{K}_\omega$, então $\alpha \in \Omega$

Seja $\alpha = a + b\sqrt{1 + \omega^2}$, temos que $a, b, \omega \in \mathbb{K} \subseteq \Omega$, que foram obtidos por um número finito de operações $+, -, \cdot, \div, c \mapsto \sqrt{1 + c^2}$, assim α é obtido, também, por um número finito de operações $+, -, \cdot, \div, c \mapsto \sqrt{1 + c^2}$

$$\left(a, b, \omega \in \mathbb{K} \subseteq \Omega \Rightarrow \omega \mapsto \sqrt{1 + \omega^2} \mapsto b \cdot \sqrt{1 + \omega^2} \mapsto a + b \cdot \sqrt{1 + \omega^2} \in \Omega \right)$$

Pelo que $\alpha \in \Omega$.

Por (a) e (b) temos que \mathbb{K}_ω é corpo e está contido em Ω . □

Vale a pena ressaltar que $\mathbb{K} \subset \mathbb{K}_\omega \subseteq \Omega$.

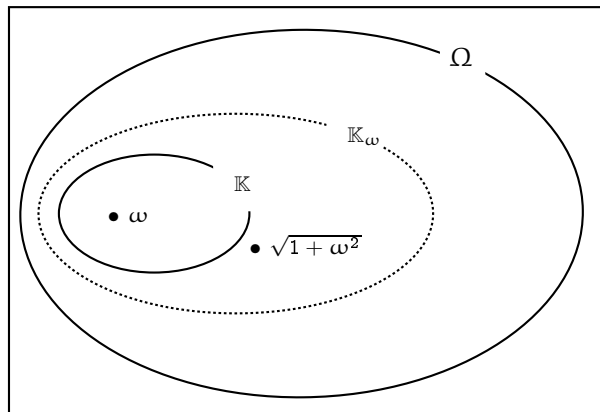


Figura 5.2: $\mathbb{K} \subset \mathbb{K}_\omega \subseteq \Omega$

Até agora temos que o conjunto Ω é pitagórico, por como foi definido, e é não arquimediano, pois deriva do corpo \mathbb{F} , que construímos na seção anterior de tal forma que fora não arquimediano. Basta mostrar que ele é um corpo.

Já mostramos que é possível estender cada corpo que esteja contido em Ω que continuaremos dentro dele. Podemos pensar que se partindo de \mathbb{F} e cada vez que encontrarmos uma raiz quadrada da forma $\sqrt{1 + \omega^2}$, podemos estender o corpo

tantas vezes quantas forem necessárias até que dois elementos escolhidos arbitrariamente de Ω estejam contidos em um corpo contido em Ω . A prova do teorema a seguir especifica isto.

Teorema 5.40

O conjunto Ω é corpo pitágórico não arquimediano.

Prova: Já temos que Ω é pitágórico e não arquimediano, por como foi definido. Assim, basta mostrar que para todo $\alpha, \beta \in \Omega$ temos que $\alpha \pm \beta, \alpha \cdot \beta, \alpha \div \beta \in \Omega$.

Como $\alpha \in \Omega$, ele é obtido com um número finito de operações $+, -, \cdot, \div, c \mapsto \sqrt{1+c^2}$. Começamos com o corpo \mathbb{F} estendendo-o, onde será aplicado o lema (5.39) cada vez que aparecer uma raiz quadrada em α , vamos obter um corpo $\mathbb{K}_{\alpha_i} \subseteq \Omega$, tal que $\alpha_i \in \mathbb{K}_{\alpha_{i-1}}$ e $\sqrt{1+\alpha^2} \notin \mathbb{K}_{\alpha_{i-1}}$, $i = 1, \dots, k$, onde $\mathbb{F} = \mathbb{K}_0$. Logo obteremos um corpo $\mathbb{K}_{\alpha_k} \subset \Omega$ tal que $\alpha \in \mathbb{K}_{\alpha_k}$.

Se $\beta \notin \mathbb{K}_{\alpha_k}$ então estendemos o corpo \mathbb{K}_{α_k} como feito no lema (5.39) cada vez que aparecer uma raiz quadrada, assim, obtem-se um corpo \mathbb{K}_{β_m} tais que α e β estejam contidos. Portanto, $\alpha \pm \beta, \alpha \cdot \beta, \alpha \div \beta \in \mathbb{K}_{\beta_m} \subseteq \Omega$ □

O teorema acima provado, mostra que qualquer elemento de Ω pertence a um corpo que está contido no conjunto Ω , assim se consideramos dois elementos de Ω , pode-se estender o corpo das classes de equivalências de funções racionais \mathbb{F} até um corpo que contenha os dois elementos. Usando o lema (5.39) repetidas vezes é possível fazer esta extensão.

5.4 Corpo Euclidiano não Arquimediano

A idéia nesta seção é construir um corpo não arquimediano que seja extensão de \mathbb{F} e satisfaça a propriedade euclidiana. Para isto, definiremos um conjunto que é união da

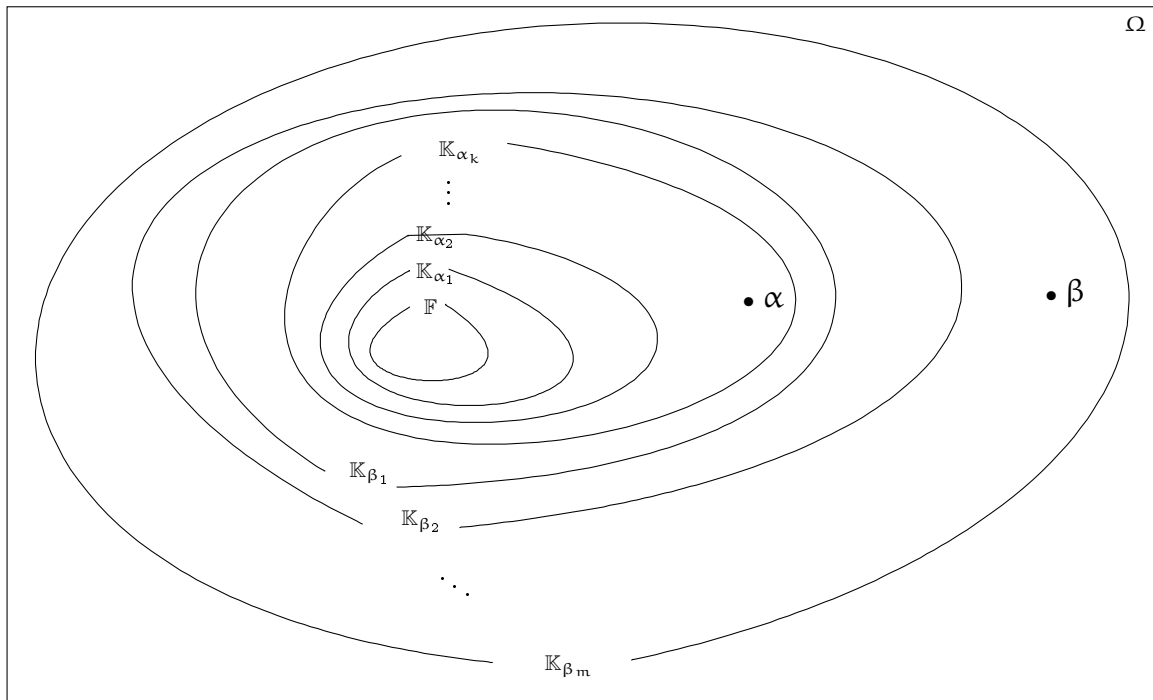


Figura 5.3: Extensão de corpos para mostrar que Ω é corpo

função nula com todas as classes de equivalências de funções contínuas que a partir de algum momento não se anulam. Mostraremos que este conjunto não é um corpo, contudo ele possui uma ordenação natural. Além disso, mostraremos que este conjunto possui um subconjunto de funções que são obtidas a partir do corpo \mathbb{F} com um número finito de operações $(+, -, \cdot, \div, c > 0 \rightarrow \sqrt{c})$. Provaremos que este subconjunto é o corpo não arquimediano euclidiano procurado.

Definição 5.41

(CORPO EUCLIDIANO) Diremos que um corpo \mathcal{J} é euclidiano quando

Para cada $a > 0 \in \mathcal{J}$, existe $\sqrt{a} \in \mathcal{J}$

Em seguida definiremos o conjunto que consiste na união da função nula com todas as classes de equivalência de funções contínuas que a partir de um elemento de \mathcal{C} nunca se anulam.

Definição 5.42

Seja o conjunto \mathcal{G} como segue:

$$\mathcal{G} = \{ \bar{h} \mid h \text{ função contínua e, } h(x) \neq 0 \ \forall x > y, \text{ onde } y \in \mathcal{C} \text{ fixo} \} \\ \cup \quad \{ \bar{f} \mid f(x) = 0 \ \forall x \}$$

Exemplo 5.43

Considere as funções contínuas f, g, h , $f(x) = x^4 - 2x^3 + 2x$, $g(x) = \frac{x^3 + x^2 + 1}{x^2 + x + 2}$, $h(x) = -\frac{x^3 + 1}{x}$, com $x > 0$.

O seguinte teorema nos fornece que o conjunto \mathcal{G} não é corpo, mas ele possui uma ordenação natural, quer dizer possui um subconjunto de elementos positivos.

Teorema 5.44

\mathcal{G} possui um subconjunto, $\mathcal{P}_{\mathcal{G}}$, de elementos positivos, ou seja \mathcal{G} é um conjunto com uma ordem natural. Mas \mathcal{G} não é corpo.

Prova: Primeiro mostraremos que \mathcal{G} não é corpo, para isto basta considerar $f, g \in \mathcal{G}$ tais que $f, g : (3, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ definidas $f(x) = 2x - 3$, $g(x) = x + 1$, temos que $f - g \notin \mathcal{G}$ pois $f - g$ anula-se para $x = 4$. Pelo que \mathcal{G} não é corpo.

Agora, para mostrar que \mathcal{G} possui uma ordem natural, seja $\varphi \in \mathcal{G}$, pela definição do conjunto \mathcal{G} temos que para todo $x > y$, $\varphi(x) \neq 0$, pelo que $\varphi(x) > 0$ ou $\varphi(x) < 0$. Assim, consideremos o conjunto

$$\mathcal{P}_{\mathcal{G}} = \{ \varphi \in \mathcal{G} \mid \varphi(x) > 0 \ \forall x > y \}$$

Temos que para cada $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{P}_{\mathcal{G}}$, $\varphi_1 + \varphi_2, \varphi_1 \cdot \varphi_2 \in \mathcal{P}_{\mathcal{G}}$. Portanto o conjunto \mathcal{G} possui uma ordem natural. \square

A seguir definiremos um conjunto que está contido em \mathcal{G} e é extensão de \mathbb{F} , a idéia é mostrar que ele é o corpo não arquimediano euclidiano que estamos procurando. Para isto mostraremos que qualquer extensão de um subcorpo deste conjunto é um corpo e continua contido nele.

Definição 5.45

Seja Δ o conjunto definido como segue:

$$\Delta : \left\{ \varphi \in \mathcal{G} \mid \varphi \text{ é obtido a partir de } \mathbb{F} \right.$$

$$\left. \text{com um número finito de operações: } +, -, \cdot, \div, c > 0 \mapsto \sqrt{c} \right\}$$

Exemplo 5.46

Considere $\alpha, \beta, c \in \mathcal{G}$ com $U = \{x \mid x > 0\}$, tais que

$$\alpha(x) = 101, \beta(x) = -(x^4 + 1) \cdot (x^2)^{-1} \text{ e } c(x) = (x^4 + x^2 + 1) \cdot (x^2 + x + 2)^{-1},$$

então temos que $\sqrt{\alpha} + \beta\sqrt{c} \in \Delta$, pois:

$$\sqrt{\alpha(x)} + \beta(x)\sqrt{c(x)} = \sqrt{101} + (-(x^4 + 1) \cdot (x^2)^{-1}) \cdot \sqrt{(x^4 + x^2 + 1) \cdot (x^2 + x + 2)^{-1}}.$$

É importante destacar que $\mathbb{F} \subset \Delta \subset \mathcal{G}$, pois Δ é um subconjunto de \mathcal{G} que é uma extensão obtida a partir de \mathbb{F} mediante um número finito das seguintes operações $\{+, -, \cdot, \div, c > 0 \mapsto \sqrt{c}\}$, onde c é um função que foi também obtida por um número finito destas operações.

O lema a seguir nos ajudará a mostrar que o conjunto Δ é um corpo, pois neste lema mostraremos que uma extensão determinada de um corpo contido em Δ , continua contido nele. Quando falamos de determinada, queremos dizer o seguinte: fixamos um elemento $\rho > 0$ do corpo tal que a raiz $\sqrt{\rho}$ não esteja contida no corpo; estendemos o

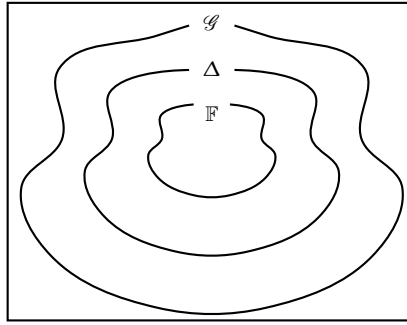


Figura 5.4: Diagramação da inclusão de um conjunto em outro

corpo com essa raiz. Assim, o conjunto resultante é um outro corpo que ainda está em Δ .

Lema 5.47

Considere Δ o conjunto definido em 5.45, e \mathbb{G} um corpo tal que $\mathbb{G} \subset \Delta$. Seja $\rho > 0 \in \mathbb{G}$ tal que $\sqrt{\rho} \notin \mathbb{G}$. Então o conjunto

$$\mathbb{G}_\rho = \mathbb{G}[\sqrt{\rho}] = \{\alpha + \beta\sqrt{\rho} \mid \alpha, \beta \in \mathbb{G}\}$$

é um corpo e $\mathbb{G}_\rho \subseteq \Delta$.

Prova: Temos que mostrar duas coisas, a primeira é que \mathbb{G}_ρ é um corpo, e a segunda é que esteja contido em Δ .

(a) Para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{G}_\rho$, então $\alpha + \beta$; $\alpha - \beta$; $\alpha \cdot \beta$; $\alpha \cdot \beta^{-1} \in \mathbb{G}_\rho$

Sejam $\alpha = a + b\sqrt{\rho}$, $\beta = c + d\sqrt{\rho}$, com $a, b, c, d, \rho \in \mathbb{G}$

$$\begin{aligned} \bullet \quad \alpha \pm \beta &= \underbrace{(a \pm c)}_{\in \mathbb{G}} + \underbrace{(b \pm d)}_{\in \mathbb{G}} \sqrt{\rho} \\ \bullet \quad \alpha \cdot \beta &= \underbrace{(ac + bd\rho)}_{\in \mathbb{G}} + \underbrace{(ad + bc)}_{\in \mathbb{G}} \sqrt{\rho} \\ \bullet \quad \alpha \cdot \beta^{-1} &= \underbrace{\left((ac - bd\rho) \cdot (c^2 - d^2\rho)^{-1}\right)}_{\in \mathbb{G}} + \underbrace{\left((bc - ad) \cdot (c^2 - d^2\rho)^{-1}\right)}_{\in \mathbb{G}} \sqrt{\rho} \end{aligned}$$

Pelo que $\alpha + \beta$; $\alpha - \beta$; $\alpha \cdot \beta$; $\alpha \cdot \beta^{-1} \in \mathbb{G}_\rho$.

(b) Para todo $\alpha \in \mathbb{G}_\rho$, então $\alpha \in \Delta$

Seja $\alpha = a + b\sqrt{\rho}$, temos que $a, b, \rho \in \mathbb{G} \subseteq \Delta$, que foram obtidos por um número finito de operações $+, -, \cdot, \div, c > 0 \mapsto \sqrt{c}$, assim α é obtido, também, por um número finito de operações $+, -, \cdot, \div, c > 0 \mapsto \sqrt{c}$

$$\left(a, b, \rho \in \mathbb{G} \subseteq \Delta \Rightarrow \rho \mapsto \sqrt{\rho} \mapsto b \cdot \sqrt{\rho} \mapsto a + b \cdot \sqrt{\rho} \in \Delta \right)$$

Pelo que $\alpha \in \Delta$.

Por (a) e (b) temos que \mathbb{G}_ρ é corpo e está contido em Δ . □

É necessário ressaltar que $\mathbb{G} \subset \mathbb{G}_\rho \subseteq \Delta$.

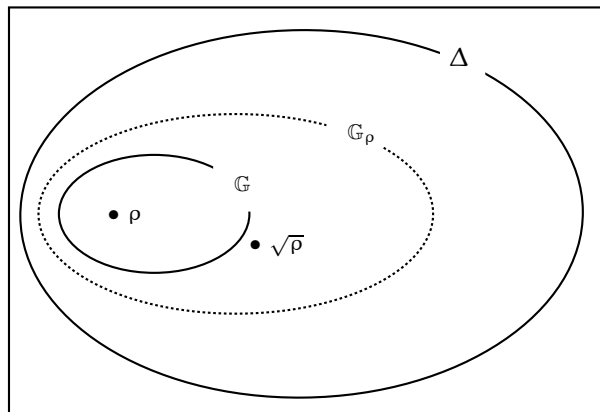


Figura 5.5: $\mathbb{G} \subset \mathbb{G}_\rho \subseteq \Delta$

Até agora temos que o conjunto Δ é euclidiano, por como foi definido, e é não arquimediano, pois deriva do corpo \mathbb{F} , que construímos na seção (5.2) de tal forma que fora não arquimediano. Só basta mostrar que ele é um corpo.

Já mostramos que é possível estender cada corpo que esteja contido em Δ que continuaremos dentro dele. Podemos pensar que se partindo de \mathbb{F} e cada vez que encontrarmos com uma raiz quadrada da forma $\sqrt{\rho}$, podemos estender o corpo tantas vezes quantas forem necessárias até que dois elementos escolhidos arbitrariamente de Δ estejam contidos em um corpo contido em Δ . A prova do teorema a seguir especifica isto.

Teorema 5.48

O conjunto Δ é corpo euclidiano não arquimediano.

Prova: Já temos que Δ é euclidiano e não arquimediano, por como foi definido. Assim, basta mostrar que para todo $\alpha, \beta \in \Delta$ temos que $\alpha \pm \beta, \alpha \cdot \beta, \alpha \div \beta \in \Delta$.

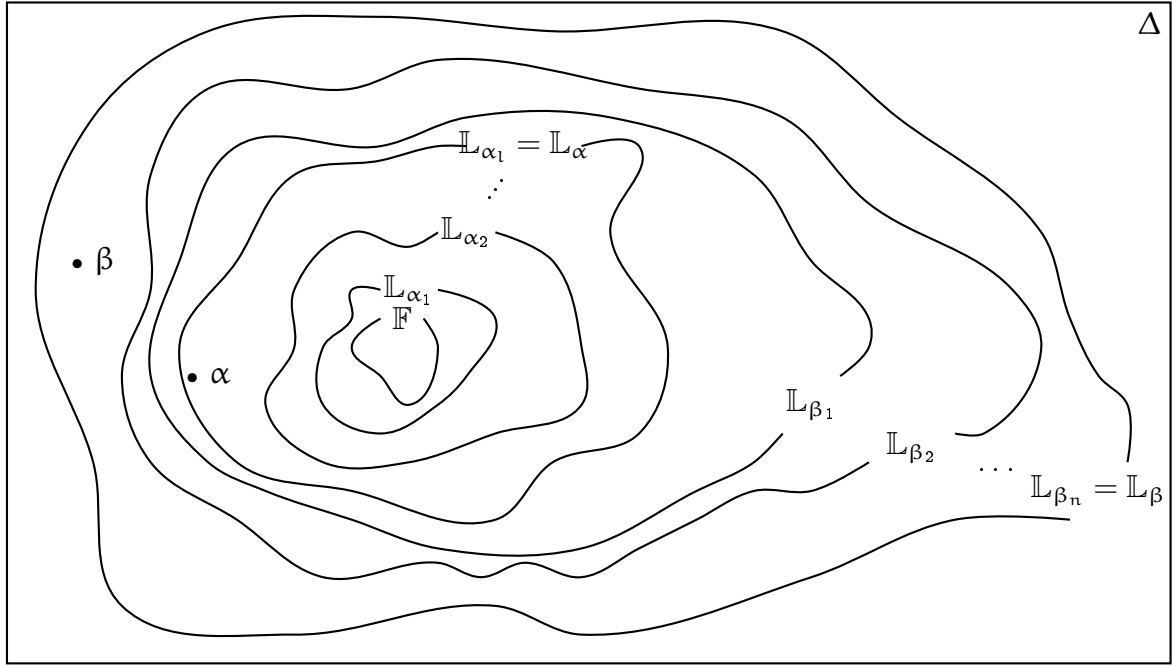


Figura 5.6: Extensão de corpos para mostrar que Δ é corpo

Como $\alpha \in \Delta$ ele é obtido com um número finito de operações $+, -, \cdot, \div, c > 0 \mapsto \sqrt{c}$. Começamos com o corpo \mathbb{F} extendendo ele, onde será aplicado o lema (5.47) cada vez que aparece uma raiz quadrada em α , vamos obter um corpo $\mathbb{L}_{\alpha_i} \subseteq \Delta$ tal que $\alpha_i \in \mathbb{L}_{\alpha_{i-1}}$ e $\sqrt{\alpha_i} \notin \mathbb{L}_{\alpha_{i-1}}$, $i = 1, \dots, l$, onde $\mathbb{F} = \mathbb{L}_0$. Logo obteremos um corpo $\mathbb{K}_{\alpha_1} \subset \Delta$ tal que $\alpha \in \mathbb{L}_{\alpha_1}$.

Se $\beta \notin \mathbb{L}_{\alpha}$ então estendemos o corpo \mathbb{L}_{α_1} como feito no lema (5.47) cada vez que aparecer uma raiz quadrada, assim, obtem-se um corpo \mathbb{L}_{β_n} tal que α e β estejam contidos. Portanto, $\alpha \pm \beta, \alpha \cdot \beta, \alpha \div \beta \in \mathbb{L}_{\beta} \subseteq \Delta$ \square

O teorema acima provado, mostra que qualquer elemento de Δ pertence a um corpo

que está contido no conjunto Δ , assim se consideramos dois elementos de Δ , pode-se estender o corpo das classes de equivalências de funções racionais \mathbb{F} até um corpo que contenha os dois elementos. Usando o lema (5.47) repetidas vezes é possível fazer esta extensão.

Geometria sobre Corpos

Queremos construir um modelo algébrico no qual os axiomas do Plano de Hilbert sejam satisfeitos. Ou seja queremos dar uma interpretação ao sistema axiomático estabelecido no capítulo 2 com o auxílio das ferramentas algébricas que foram enunciadas e definidas no capítulo anterior. Assim, começaremos traduzindo para o modelo os termos de ponto, plano, reta e paralelismo. Mostraremos que com esta interpretação dos termos, um plano cartesiano sobre um corpo abstrato qualquer satisfaz os axiomas de incidência e o axioma de paralelismo. Aqui, enunciaremos o teorema de mudança linear de variáveis, explicando a sua utilidade. Na seguinte seção, mostraremos a equivalência: existência da relação “estar entre” em um modelo algébrico $\Pi_{\mathbb{F}}$ somente se o corpo é ordenado. Também traduziremos para o modelo algébrico os termos segmento, semi-reta, ângulo, ângulo agudo, reto ou obtuso, e interior do ângulo. Em seguida, se interpretará congruência de segmentos mediante a função distância quadrada (pois a função distância em um corpo qualquer pode não ser garantida), também interpretaremos a congruência de ângulos usando a função tangente do ângulo. Demonstraremos que em todo plano cartesiano sobre um corpo ordenado, os axiomas (C2)-(C5) são satisfeitos, mas para que seja válido (C1) precisamos impor uma condição adicional sobre o corpo ordenado, que seja um corpo pitagórico. Para que todos os axiomas de Hilbert sejam satisfeitos em nosso modelo algébrico, necessitamos verificar o axioma (C6), isto é feito

no fim do capítulo, onde usando a definição de movimentos rígidos dada no capítulo 3, mostrar-se-á que no plano cartesiano associado a um corpo pitagórico existem suficientes movimentos rígidos (MRS) para que o método de superposição de Euclides funcione e assim seja satisfeito (C6). Feito isto, teremos concluída a construção do modelo algébrico do sistema axiomático definido no capítulo 2.

6.1 Plano Cartesiano sobre um Corpo Abstrato

No capítulo anterior, definimos corpo abstrato. Agora, estabeleceremos um plano cartesiano sobre um corpo qualquer.

Traduziremos os termos indefinidos do sistema axiomático estabelecido no capítulo 2 para o modelo algébrico que queremos construir. Seja \mathbb{F} um corpo qualquer.

- Chamaremos de **ponto** um par ordenado da forma (a, b) , $a, b \in \mathbb{F}$.
- **Plano cartesiano** sobre um corpo \mathbb{F} é o conjunto \mathbb{F}^2 de todos os pares ordenados (x, y) .
- Definimos como **eixo-x** e **eixo-y** como o conjunto de pontos da forma $(a, 0)$ e $(0, b)$ respectivamente (0 é o elemento neutro aditivo do corpo).
- O ponto $(0, 0)$ é chamado **origem** do plano.
- O conjunto de todos os pontos do plano (x, y) que satisfazem a equação $ax + by + c = 0$, onde $a, b, c \in \mathbb{F}$ com a, b não ambos nulos, chamaremos de **reta**.
- A reta vertical possui equação $x = c$.
- Para definir **inclinação** de uma reta (conceito que será útil para definir tangente do ângulo) é necessário escrever de outra forma a equação, onde fique claro que a inclinação é em relação ao eixo-x e não ao eixo-y. Assim a reta também pode-se

escrever da forma $y = mx + n$, desde que $b \neq 0$, diremos que a inclinação da reta é m , e $(0, n)$ é o ponto onde a reta intercepta o eixo- y .

- A inclinação das retas verticais será expressada por ∞ . Aqui, ∞ é um símbolo e não um elemento do corpo \mathbb{F} .

Exemplo 6.1

Considere $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, o plano cartesiano $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ é usado na geometria analítica, representa um modelo algébrico da geometria euclidiana.

Em seguida, vamos traduzir paralelismo para o modelo algébrico.

Definição 6.2

(PARALELISMO) Duas retas são paralelas se as suas inclinações são a mesma. Assim, se temos as retas com equação $l : y = mx + n$ e $l' : y = m'x + n'$, elas são paralelas ($l \parallel l'$) se $m = m'$.

Para determinar que duas retas sejam paralelas, basta examinar a inclinação de cada uma das retas, pois se as retas são verticais, pela definição fica claro que as inclinações são iguais. Agora se as retas não são verticais, expressam-se as equações das retas como $y = mx + n$, daí pode-se observar que ambas possuem a mesma inclinação. Tomemos $l : y = mx + n$ e $l' : y = mx + n'$ duas retas paralelas, notemos que $l = l'$ se $n = n'$ e que $l \cap l' = \emptyset$ se $n \neq n'$.

Notemos que até aqui é possível identificar a inclinação da reta somente se conhecermos a sua equação. Mas se não nos fornecem a equação da reta, porém conhecemos dois pontos distintos da reta, $P_1 = (x_1, y_1)$ e $P_2 = (x_2, y_2)$, podemos determinar a sua inclinação por meio da seguinte expressão $m = (y_2 - y_1) \cdot (x_2 - x_1)^{-1}$ se $x_1 \neq x_2$. No caso que $x_1 = x_2$ temos que a reta é vertical e sua inclinação é $m = \infty$.

6.2 Corpo Abstrato e Incidência

Nesta seção desejamos investigar quais são as propriedades necessárias que deve satisfazer um corpo para que o plano cartesiano construído sobre um corpo satisfaça os axiomas de incidência de Hilbert, enunciados no capítulo 2.

Consideraremos, ponto, plano, reta, como foram definidos na seção anterior.

Em seguida, verifica-se que, em um plano cartesiano sobre um corpo qualquer, são satisfeitos os axiomas de incidência de Hilbert e o axioma de paralelismo.

Teorema 6.3

Se \mathbb{F} é um corpo, os axiomas de incidência de Hilbert (I1), (I2), (I3) e o axioma das paralelas (P) são satisfeitos em \mathbb{F}^2 .

Prova: Para (I1) (*Para cada dois pontos distintos A e B, existe uma única reta incidente a A e B simultaneamente*). Consideram-se dois pontos diferentes do plano cartesiano $P_1 = (x_1, y_1)$ e $P_2 = (x_2, y_2)$, a equação da reta $ax + by + c = 0$ satisfeita por P_1 e P_2 tem obtido seus coeficientes pela solução de um sistema linear:

$$(y_2 - y_1)x + (x_1 - x_2)y + ((y_1 - y_2)x_1 + (x_1 - x_2)y_1) = 0.$$

Sendo $(x_1, y_1) \neq (x_2, y_2)$ temos que a equação é única e os coeficientes são elementos de \mathbb{F} .

Para (I2) (*A toda reta incidem pelo menos dois pontos distintos*). Um corpo possui pelo menos dois elementos, sejam eles 0, 1, os neutros da soma e do produto do corpo. Se $x = 0$ temos que $y = mx + n = n$; quando $x = 1$, temos que $y = m + n$. Portanto a reta contém pelo menos os pontos $(0, n)$ e $(1, m + n)$. Se a reta é da forma $x = c$, temos que os pontos $(c, 0)$ e $(c, 1)$ pertencem à reta.

Para (I3) (*Existem três pontos distintos que não são incidentes a uma mesma reta*). Se o corpo tem pelos menos dois elementos, os pontos $(0, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 0)$ estão no plano \mathbb{F}^2 e não jazem na mesma reta.

Para (P) (*Para cada ponto A e cada reta l , existe uma única reta que incide em A e é paralela a l*). Suponhamos que existem duas retas distintas paralelas $l_1 : y = m_1x + n_1$, $l_2 : y = m_2x + n_2$ à reta $l : y = mx + n$ que passam pelo mesmo ponto $A = (a_1, a_2)$. Como $l \parallel l_1$, temos que $m = m_1$. Por outro lado temos que $l \parallel l_2$, pelo que $m = m_2$. Portanto $m_1 = m = m_2$ e $l_1 \parallel l_2$, mas temos que $n_1 = a_2 - m_1a_1$ e $n_2 = a_2 - m_2a_1$. Assim, $n_1 = n_2$ e portanto $l_1 = l_2$. \square

Com o teorema anterior, podemos concluir que um plano cartesiano sobre qualquer corpo satisfaz os axiomas de incidência e o axioma de paralelismo. Note que aqui podem-se obter modelos geométricos finitos.

Exemplo 6.4

Considere $\mathbb{F} = \mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$.

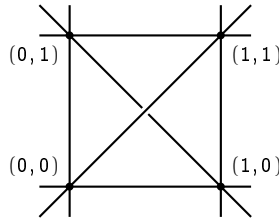


Figura 6.1: Exemplo de plano cartesiano sobre um corpo

Neste modelo algébrico, as retas “diagonais” não se interceptam, pois são finitas e constituídas apenas por suas extremidades. Outra forma de verificar é se olharmos para a equação delas,

$$l_{\{(0,0)-(1,1)\}} : y = x \quad \text{e} \quad l_{\{(0,1)-(1,0)\}} : y = -x + 1$$

Como $\mathbb{F} = \mathbb{Z}_2$ temos que $1 \equiv -1$, logo $l_{\{(0,1)-(1,0)\}} : y = x + 1$. E portanto a inclinação

em ambas é 1, assim elas são paralelas.

No seguinte teorema mostra-se uma conexão entre as propriedades algébricas do corpo \mathbb{F} e as propriedades de incidência no plano \mathbb{F}^2 .

Teorema 6.5

(MUDANÇA DE VARIÁVEIS) No plano cartesiano sobre o corpo \mathbb{F} , é possível fazer uma mudança linear de variáveis

$$\begin{cases} x' = Ax + By + C \\ y' = Dx + Ey + G \end{cases}$$

tal que os novos eixos coordenados são duas retas dadas que se interceptam, e os novos pontos unitários, correspondentes aos pontos $(1, 0)$ e $(0, 1)$, são dois pontos P, Q dados que não sejam iguais ao ponto de encontro, E , das retas.

Prova:[Idéia] Sejam $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{F}$.

1) Primeiro a idéia é “transladar” a origem:

$$\begin{cases} x' = x - a \\ y' = y - b \end{cases}$$

Aqui, (a, b) são as coordenadas do ponto E em relação ao sistema antigo.

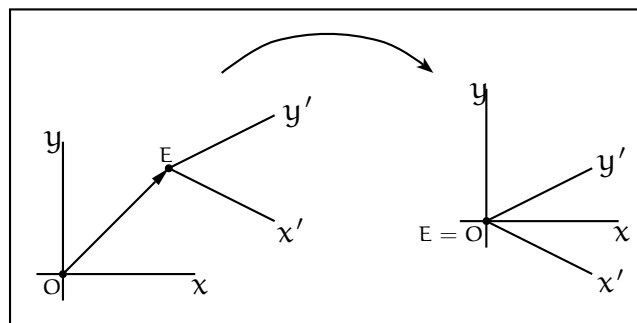


Figura 6.2: Transladar a origem

- 2) Agora a idéia é mover os pontos unitários para alguns outros pontos do mesmo eixo:

$$\begin{cases} x' = cx \\ y' = dy \end{cases}$$

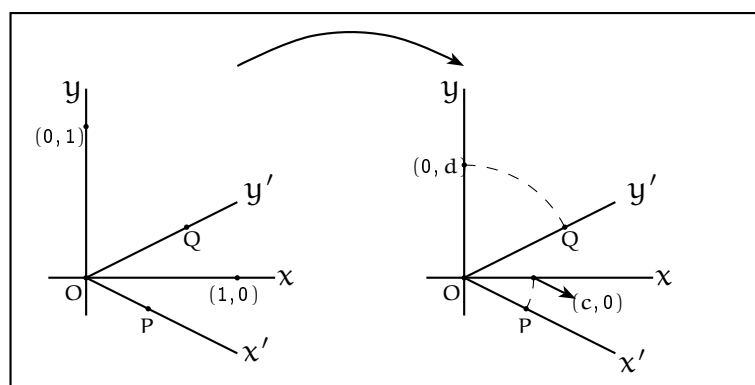


Figura 6.3: Mudança de pontos unitários

- 3) Para finalizar, a ideia é “girar” os eixos coordenados:

- (i) Primeiro mudamos y para y' :

$$\begin{cases} x' = x - ey \\ y' = y \end{cases}$$

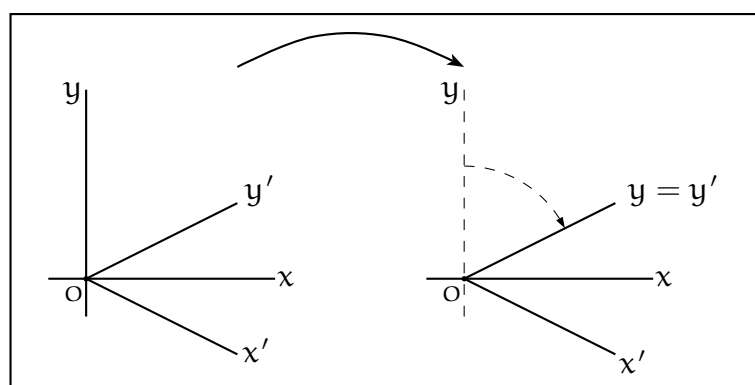


Figura 6.4: Mudança de y para y'

(ii) Por último mudamos x para x' :

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = y - fx \end{cases}$$

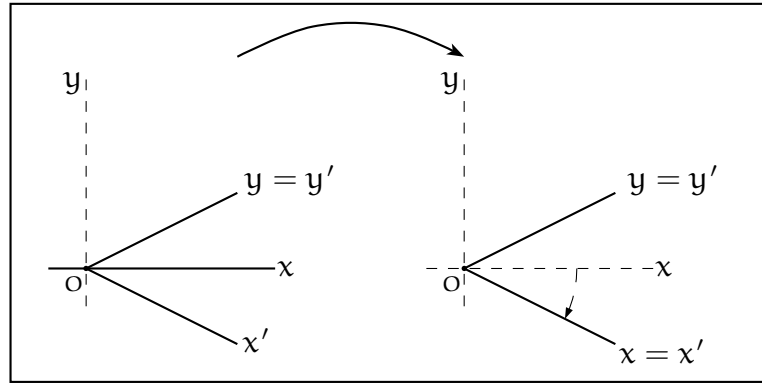


Figura 6.5: Mudança de x para x'

Como $x, y, a, b, c, d, e, f \in \mathbb{F}$, então $x', y' \in \mathbb{F}$ em cada um dos casos. Portanto, em um modelo algébrico sobre qualquer corpo é possível fazer uma mudança de variáveis. \square

A mudança linear de variáveis é necessária em algumas situações, pois ao escolher eixos coordenados convenientes, as contas nas demonstrações de certas proposições ficam simplificadas.

Este teorema é de grande utilidade, pois será utilizado no fim deste capítulo para mostrar a existência de suficientes movimentos rígidos em \mathbb{F}^2 com \mathbb{F} pitagórico, e com isto, ficará provado que todos os axiomas de Hilbert são satisfeitos no modelo algébrico que estamos construindo.

A seguir algumas aplicações do teorema acima descrito:

Teorema 6.6

Existe uma configuração no plano \mathbb{F}^2 dos quatro pontos A, B, C, D tais que $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$, $\overleftrightarrow{AC} \parallel \overleftrightarrow{BD}$, $\overleftrightarrow{AD} \parallel \overleftrightarrow{BC}$ se e somente se a característica de \mathbb{F} é 2.

Prova: Suponha que exista uma configuração em \mathbb{F}^2 , fazendo uma mudança de variáveis tal que C seja a origem, A, D os pontos unitários e portanto B é o ponto (1, 1), logo nesta configuração $\overleftrightarrow{AD} \parallel \overleftrightarrow{BC}$, suas equações

$$\overleftrightarrow{BC} : x = y ; \quad \overleftrightarrow{AD} : x + y = 1$$

têm uma solução comum $2x = 1$ que, em \mathbb{F} , tem solução só se $2 = 0$, pelo que \mathbb{F} deve ter característica 2.

Reciprocamente, basta considerar o exemplo do plano cartesiano sobre o corpo \mathbb{Z}_2 . \square

Teorema 6.7

(TEOREMA DE PAPPUS) No plano \mathbb{F}^2 , suponha dados as retas l , m e os pontos $A, B, C \in l$ e $A', B', C' \in m$ tais que $\overleftrightarrow{AC'} \parallel \overleftrightarrow{A'C}$ e $\overleftrightarrow{BC'} \parallel \overleftrightarrow{B'C}$. Então, também, $\overleftrightarrow{AB'} \parallel \overleftrightarrow{A'B}$.

Prova:[Idéia] Escolhendo configurações convenientes e calculando as inclinações em cada uma das retas que formam-se o problema fica resolvido. Então escolheremos configurações dependendo se as retas l e m são ou não paralelas.

1) Quando l não é paralela a m :

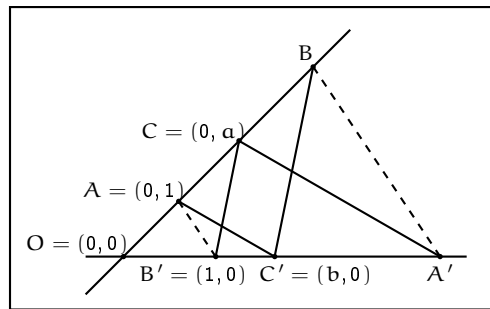


Figura 6.6: Teorema de Pappus para $l \not\parallel m$

2) Quando $l \parallel m$:

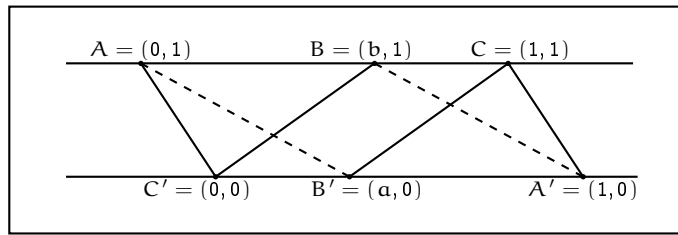


Figura 6.7: Teorema de Pappus para $l \parallel m$

Assim, $\overleftrightarrow{AB'} \parallel \overleftrightarrow{A'B}$.

□

Observação: Note que este teorema diz que, se \mathbb{F} é um corpo, então o teorema de Pappus é válido. Mas Hilbert mostrou que se \mathbb{F}^* possui uma estrutura algébrica similar a \mathbb{F} , mas não necessariamente se cumpre a comutatividade multiplicativa, temos que, se o teorema de Pappus é válido em \mathbb{F}^{*2} , então \mathbb{F}^* é corpo.

6.3 Corpo Ordenado e Relação de “Estar Entre”

Nesta seção desejamos traduzir, no modelo algébrico que estamos construindo, a noção de “estar entre”, postulada nos axiomas (B1)-(B4). Para isto, precisa-se impor uma estrutura adicional sobre o corpo, tal que ela torne possível a relação de “estar entre”.

Vamos supor a noção da relação de “estar entre” em um modelo algébrico. Assim, o eixo x poderia ser dividido em três subconjuntos disjuntos, consistindo em “*eixo x positivo*” como todos os pontos que estão do mesmo lado do 1 em relação ao 0, o *zero* ‘0’ e “*eixo x negativo*” os demais pontos.

No capítulo 5 foi definido quando um corpo é dito ordenado e mostrou-se algumas propriedades. Assim, à continuação será mostrado que os axiomas de ordem, enunciados no capítulo 2, são satisfeitos em um plano cartesiano sobre um corpo ordenado.

Teorema 6.8

Se \mathbb{F} é um corpo, e se existe a noção de “estar entre” no plano cartesiano \mathbb{F}^2 satisfazendo os axiomas do plano de Hilbert (B1)-(B4), então \mathbb{F} deve ser um corpo ordenado.

Prova: Vamos supor que \mathbb{F} seja um corpo e existe noção de “estar entre” no plano cartesiano \mathbb{F}^2 satisfazendo os axiomas de ordem, então mostraremos que \mathbb{F} é ordenado.

Então a idéia é mostrar que existe um subconjunto \mathcal{P} de elementos positivos de \mathbb{F} que satisfaz as duas condições enunciadas na definição (5.3).

Vamos definir o conjunto \mathcal{P} como todos os pontos do eixo x do mesmo lado de $(1, 0)$ em relação ao $(0, 0)$. Isto é possível de fazer, pois existe a noção de estar entre, portanto o teorema de lados de uma reta é válido, teorema (2.9), que é consequência dos axiomas (B1) até (B4). A adição no \mathbb{F}^2 corresponde a somar elementos do corpo sobre o eixo x , assim se $a, b \in \mathcal{P}$ logo $a + b \in \mathcal{P}$.

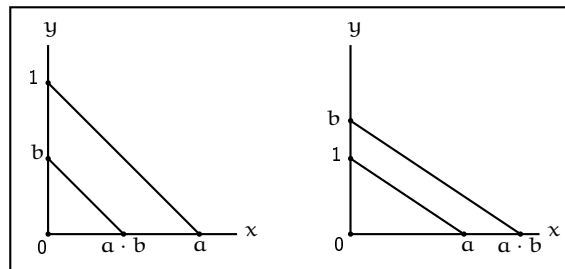


Figura 6.8: Multiplicação de elementos do conjunto \mathcal{P}

Para a multiplicação são dados $1, a, b \in \mathcal{P}$ onde $(a, 0)$ pertence ao eixo x e $(0, 1), (0, b)$ ao eixo y , a reta paralela à $(0, 1)-(a, 0)$ que passa por $(0, b)$ encontra ao eixo x em $(ab, 0)$. Agora pelos axiomas (P) e (B4) temos que $a \cdot b \in \mathcal{P}$. \mathcal{P} cumpre a primeira condição da definição de corpo ordenado. Pela construção de \mathcal{P} , temos que para cada $a \in \mathbb{F}$, $a \in \mathcal{P}$; $a = 0$; $-a \in \mathcal{P}$. Logo $\mathbb{F}_{\mathcal{P}}$ é um corpo ordenado. \square

O teorema anterior possui uma recíproca, onde se supõe que \mathbb{F} é um corpo ordenado e queremos mostrar que o plano cartesiano sobre esse corpo satisfaz os axiomas de ordem.

Para isto, precisamos definir relação de “estar entre” para os pontos sobre uma reta. Definimos esta relação como:

Sejam $A = (a_1, a_2)$, $B = (b_1, b_2)$, $C = (c_1, c_2)$ três pontos da reta $y = mx + b$.

B está entre A e C ($A * B * C$) se se cumpre qualquer das duas condições:

$$a_1 < b_1 < c_1 \quad \text{ou} \quad a_1 > b_1 > c_1.$$

Se a reta for vertical consideramos as segundas coordenadas.

Antes de provar a recíproca do teorema precedente, necessitamos mostrar que o teorema (6.5) sobre *mudança linear de variáveis* preserva a relação de “estar entre” definida acima.

Teorema 6.9

A mudança de variáveis preserva relação de “estar entre” em um modelo algébrico, cujo corpo é ordenado.

Prova: Sejam \mathbb{F}^2 o plano cartesiano, l uma reta em \mathbb{F}^2 e $A, B, C \in l$ com $A = (x_1, y_1)$, $B = (x_2, y_2)$, $C = (x_3, y_3)$ tais que $A * B * C$. Se l é vertical considere as segundas coordenadas, caso contrário considere as primeiras.

Temos que mostrar que os quatro passos para fazer a mudança de variáveis preserva a relação de estar entre. Como $A * B * C$, então $x_1 \geq x_2 \geq x_3$.

Para a idéia de transladar a origem, temos que $x_1 - a \geq x_2 - a \geq x_3 - a$, portanto preserva relação de estar entre.

Para a idéia de mover os pontos unitários, temos que $c \cdot x_1 \geq c \cdot x_2 \geq c \cdot x_3$, portanto preserva relação de estar entre.

Para a idéia de mudar o eixo x , temos que as primeiras coordenadas se mantêm. Portanto preserva relação de estar entre.

Para a idéia de mudar o eixo y , consideremos a comparação com as segundas coordenadas. Se a reta for paralela ao eixo x , temos que $y_1 = y_2 = y_3 = y$, assim $x_1 - ey \geq x_2 - ey \geq x_3 - ey$. Portanto preserva relação de estar entre. \square

Teorema 6.10

Se $\mathbb{F}_{\mathcal{P}}$ é um corpo ordenado, a relação de “estar entre”, definida previamente, em \mathbb{F}^2 satisfaz os axiomas (B1)-(B4).

Prova: (B1): (Se $A * B * C$, então A, B e C são três pontos distintos incidentes a uma reta e vale também $C * B * A$). Cumpre-se pela definição da relação de “estar entre”.

(B2): (Se A e B são pontos distintos, então existe um ponto C tal que $A * B * C$). Considere $b, d \in \mathbb{F}$ com $d > b$, logo existem $a, c, e \in \mathbb{F}$ tais que $a < b < c < d < e$, por exemplo escolha $a = b - 1, c = \frac{1}{2}(b + d), e = d + 1, \frac{1}{2} \in \mathbb{F}$, pois $\text{char}(\mathbb{F}) = 0^{(1)}$.

(B3): (Dados três pontos distintos incidentes a uma reta, exatamente um deles está entre os outros dois). Considere $a, b, c \in \mathbb{F}$ distintos, então temos exatamente seis possibilidades: $a < b < c$; $a < c < b$; $b < a < c$; $b < c < a$; $c < a < b$; $c < b < a$.

(B4): (*Pasch*). Suponha o triângulo ABC e uma reta l que encontra o lado AB e $A, B, C \notin l$. Se l não for vertical, com uma mudança de variáveis é possível torná-la vertical, e com equação $x = d$. Sejam a, b, c as coordenadas x dos pontos A, B, C . Como \mathbb{F} é ordenado temos que $a < d < b$ ou $b < d < a$. Assuma que $a < d < b$ então é claro que: se $c < d$, l encontra BC , mas não AC ; se $c > d$, l encontra AC , mas não BC . Analogamente se assume-se que $b < d < a$. Portanto l encontra BC ou AC mas não a ambos. \square

Note que é possível considerar qualquer das duas coordenadas dos pontos.

⁽¹⁾ $\text{char}(\mathbb{F})$ definido no capítulo 5.

Já estamos em condições de definir segmento, semi-reta e ângulo no modelo algébrico, ou seja no plano cartesiano sobre um corpo ordenado.

Definição 6.11

Sejam $A = (a_1, a_2)$, $B = (b_1, b_2)$, $C = (c_1, c_2)$, m a inclinação de \overleftrightarrow{AB} e m' a inclinação de \overleftrightarrow{BC} .

SEGMENTO: $\overline{AB} = \{A\} \cup \{B\} \cup \{C \mid a_1 \geq c_1 \geq b_1 \text{ ou } a_2 \geq c_2 \geq b_2 \text{ e } m = m'\}$.

SEMI-RETA: $\overrightarrow{AB} = \overline{AB} \cup \{C \mid a_1 \geq b_1 \geq c_1 \text{ ou } a_2 \geq b_2 \geq c_2 \text{ e } m = m'\}$.

No capítulo 2 instauramos dois teoremas de separação, um referido à separação do plano em dois conjuntos disjuntos, e outro aludido à separação da reta, teoremas 2.8 e 2.9 respectivamente.

Para interpretar estes dois teoremas. Consideremos os pontos $A = (x_A, y_A)$, $B = (x_B, y_B)$, $C = (x_C, y_C)$ e $D = (x_D, y_D)$, os pontos $AB = A - B$ e $CD = C - D$. Seja a função $\odot : \mathbb{F} \times \mathbb{F} \rightarrow \mathbb{F}$ definida como segue:

$$AB \odot CD = (x_A - x_B)(y_A - y_B) + (x_C - x_D)(y_C - y_D)$$

Também, entenderemos por A_B o ponto de coordenadas (y_A, x_B) e diremos A *composto* $B^{(2)}$. Com isto, já estamos em condições de traduzir para o modelo quando os pontos X e Y estão do mesmo lado do plano em relação à reta \overleftrightarrow{AB} . Assim,

$$X \sim_{\overleftrightarrow{AB}} Y \iff (XA \odot B_A A_B)(YA \odot B_A A_B) > 0$$

⁽²⁾Na verdade o que estamos fazendo aqui é determinar dois pontos, A_B e B_A , da reta perpendicular à reta \overleftrightarrow{AB} de modo que a reta $\overleftrightarrow{A_B B_A}$ seja perpendicular à reta \overleftrightarrow{AB} . Isto ficará claro com a definição de ângulo reto.

Diremos que o ponto X está do mesmo lado da reta \overleftrightarrow{AB} em relação ao ponto A se:

$$X \sim_A B \Leftrightarrow (XA \odot B_A A_B) = 0 \wedge X \sim_{\overleftrightarrow{AB}} B$$

Notemos que como foi definida a relação de estar entre, podemos instaurar que a separação da reta fique traduzida como segue:

$$X \sim_A B \Leftrightarrow X = B \text{ ou } A * X * B \text{ ou } A * B * X$$

6.4 Congruência de Segmentos e Ângulos

No modelo algébrico que estamos construindo, até agora, são válidas as noções de incidência, estar entre e os axiomas de congruência (C2)-(C5). Mas para que seja válido o axioma (C1) vamos mostrar que o corpo deve ser pitagórico.

Daqui em diante, vamos assumir que o corpo seja ordenado.

O primeiro passo é definir a noção de congruência para segmentos de reta e para ângulos. Para definir congruência de segmentos a idéia é usar a função distância euclidiana usual, para dois pontos $A = (a_1, a_2)$, $B = (b_1, b_2)$, como:

$$\text{dist}(A, B) = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2}$$

O problema desta definição é que não é possível garantir que o corpo possua raízes quadradas. Então usaremos a função:

$$\text{dist}(A, B)^2 = (a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2.$$

A seguir definir-se-á congruência de segmentos.

Definição 6.12

Dois segmentos \overline{AB} e \overline{CD} no plano cartesiano sobre um corpo ordenado \mathbb{F} são congruentes se

$$\text{dist}(A, B)^2 = \text{dist}(C, D)^2$$

Agora, quer-se definir congruência de ângulos, para isto utilizaremos a função *tangente* do ângulo ($\tan \alpha$), que ela pode ter como valor um elemento do corpo \mathbb{F} ou o símbolo ∞ quando o ângulo for reto. Como a função tangente pode tomar o valor de um elemento do corpo abstrato, então não podemos assumir como válidas certas propriedades.

Definição 6.13

Sejam os pontos A, B, C, D , m a inclinação de \overrightarrow{AB} e m' a inclinação de \overrightarrow{AC} .

ÂNGULO: $\angle BAC$ ou $\angle CAB$ é a união de duas semi-retas que emanam do mesmo ponto, tal que $m \neq m'$.

Dizemos que o ângulo formado pelas semi-retas é um ângulo AGUDO, RETO ou OBTUSO quando $BA \odot CA \geq 0$, respectivamente.

INTERIOR DE UM ÂNGULO: O ponto D é um ponto interior do ângulo $\angle BAC$ se:

$$C \sim_{\overrightarrow{AB}} D \quad \wedge \quad B \sim_{\overrightarrow{AC}} D$$

Usaremos a função $|\cdot| : \mathbb{F} \rightarrow \mathcal{P} \cup \{0\}$ definida por:

$$|a| = \begin{cases} a & \text{se } a \in \mathcal{P} \\ -a & \text{se } -a \in \mathcal{P} \\ 0 & \text{se } a = 0 \end{cases},$$

lembrando que \mathcal{P} é o conjunto dos elementos positivos do corpo \mathbb{F} .

Definição 6.14

Se α é um ângulo formado pelas semi-retas r, r' que jazem em retas com inclinação m, m' , respectivamente. Define-se *tangente* de α como:

$$\tan \alpha = \begin{cases} \pm \left| \frac{m' - m}{1 + m \cdot m'} \right| & \text{se } m \cdot m' \neq -1 \\ \infty & \text{se } m \cdot m' = -1 \end{cases}$$

onde é $(+)$ se o ângulo é agudo e $(-)$ se o ângulo é obtuso.

Nesta definição seria ideal usar a definição usual de tangente de um ângulo (cateto oposto sobre o cateto adjacente), mas para ela são necessárias as raízes quadradas e no corpo não podemos garantir que existam. Note que $\tan \alpha$, onde o ângulo é agudo ou obtuso, é um elemento do corpo. Mas a tangente do ângulo reto assume o valor ∞ , o mesmo da inclinação das retas verticais.

Congruência de ângulos fica traduzida, no modelo algébrico, da seguinte maneira:

Definição 6.15

Dois ângulos no plano Cartesiano sobre um corpo ordenado \mathbb{F} são congruentes se eles têm a mesma tangente, considerando-a como um elemento do conjunto $\mathbb{F} \cup \{\infty\}$.

Tendo interpretadas as noções de congruência de segmentos e ângulos, no modelo algébrico, quer-se mostrar que no plano cartesiano sobre um corpo ordenado são satisfeitos os axiomas de congruência de (C2) até (C5). Estas provas podem-se encontrar em [11, Hartshorne, 2000, Cap. 3].

Teorema 6.16

Sejam \mathbb{F} um corpo ordenado e \mathbb{F}^2 o plano cartesiano associado. Então \mathbb{F}^2 satisfaz os axiomas (C2)-(C5).

Note que (C1) não é satisfeito em um plano cartesiano sobre um corpo ordenado que não seja pitagórico, pois considere o corpo \mathbb{Q} . O segmento com extremos $(0, 0) - (1, 1)$ não pode ser “copiado” sobre a semi-reta dos pontos positivos do eixo x .

Para que no modelo algébrico satisfaça o axioma (C1), o corpo precisa cumprir a propriedade pitagórica. Isto será mostrado no seguinte teorema. Recordemos que, pela definição (5.33), um corpo é pitagórico quando para cada elemento ‘ a ’ do corpo a raiz $\sqrt{1 + a^2}$ pertence ao corpo.

Teorema 6.17

Sejam \mathbb{F} um corpo ordenado e \mathbb{F}^2 o plano cartesiano associado. (C1) é válido se, e somente se, \mathbb{F} for pitagórico.

Prova:[Idéia] Suponha (C1). Considera-se o segmento de pontos extremos com coordenadas $(0, 0)$ e $(a, 1)$, suponha que existe o segmento de extremos $(0, 0)$ e $(b, 0)$ no eixo dos x positivos. Temos que $b^2 = 1 + a^2$, logo $b \in \mathbb{F} \Leftrightarrow \sqrt{1 + a^2} \in \mathbb{F}$ e \mathbb{F} é pitagórico.

Reciprocamente, suponha \mathbb{F} pitagórico e considere $a, b \in \mathbb{F}, a \neq 0$. Temos que

$$a^2 + b^2 = a^2 \left(1 + \left(\frac{a}{b} \right)^2 \right) = a^2(1 + c^2)$$

com $c = \frac{a}{b}$, logo $\sqrt{a^2 + b^2} = |a|\sqrt{1 + c^2} \in \mathbb{F}$. Daqui $\text{dist}(A, B) \in \mathbb{F}$. Suponha uma reta l de equação $y = mx + b$ e $A \in l$. Quer-se obter um segmento AC da reta l tal que $\text{dist}(A, C) = \text{dist}((a, ma + b), (c, mc + b)) = d$. Assim $d = |a - c|\sqrt{1 + m^2}$, logo $c = a \pm \frac{d}{\sqrt{1 + m^2}}$. As duas soluções correspondem aos dois lados da reta. \square

Para completar esta seção se continuará com o estudo de interseção de retas e círculos, e, para que isto aconteça em um plano cartesiano sobre um corpo, o corpo ordenado deve ser euclideano. Lembrando que a propriedades de interseção de dois círculos é chamada pelo axioma (E) e a propriedade de interseção de reta e círculo é chamada de (LCI), ambas enunciadas no capítulo 2. Recordemos que, pela definição

(5.41), um corpo é euclidiano quando para cada elemento $a > 0$ do corpo a raiz \sqrt{a} pertence ao corpo.

Teorema 6.18

Seja \mathbb{F}^2 um plano cartesiano sobre um corpo ordenado \mathbb{F} . Então as seguintes condições são equivalentes:

- (i) \mathbb{F}^2 satisfaz a propriedade de interseção círculo-círculo (E).
- (ii) \mathbb{F}^2 satisfaz a propriedade de interseção reta-círculo (LCI).
- (iii) \mathbb{F} é euclidiano.

Prova:[Idéia] Suponhamos (E) e consideremos um círculo e uma reta, ao somar as suas equações obtém-se outro círculo que intersectado com o primeiro círculo tem as mesmas interseções que o primeiro círculo e a reta. Portanto (LCI) se cumpre.

Suponhamos (LCI) e consideremos $a \in \mathbb{F}, a > 0$, $O = (0, 0)$, $A = (a, 0)$, $A' = (a + 1, 0)$. Sejam o círculo de centro $\left(\frac{1}{2}(a + 1), 0\right)$ e raio $\frac{1}{2}(a + 1)$, a reta vertical $l : x = a$. Temos que A está no interior do círculo, por (LCI), logo existe B na interseção da reta e o círculo, $B = (a, \sqrt{a})$, portanto $\sqrt{a} \in \mathbb{F}$ e \mathbb{F} é euclidiano.

Suponhamos \mathbb{F} euclidiano e consideremos dois círculos, a diferença das suas equações obtém-se uma equação linear, logo resolvendo uma das equações do círculo com a equação linear obtém-se uma de segundo grau, seja ela $y = ax^2 + bx + c$, resolvendo ela é usado o fato que \mathbb{F} é euclidiano, e obtém-se que a coordenada y tem no máximo duas soluções, pelo que x poderá ter no máximo dois valores. Assim, é satisfeito (E). \square

Note que este teorema mostra que (E) e (LCI) são equivalentes em um plano cartesiano sobre um corpo euclidiano ordenado.

Até aqui temos mostrado que os axiomas de incidência, ordem e os axiomas de congruência (C1) até (C5) são satisfeitos no modelo algébrico que temos construído, ou

seja em um plano cartesiano sobre um certo corpo ordenado. Aqui mostraremos que o axioma de congruência (C6), congruência de triângulo LAL, também é válido neste modelo.

Completando-se a prova de que todos os axiomas de Hilbert são satisfeitos no plano cartesiano sobre um determinado corpo, teremos que os axiomas para o plano de Hilbert são válidos no modelo algébrico que construímos. Para tal mostraremos que existem suficientes movimentos rígidos, em um plano cartesiano sobre um corpo pitagórico, tal que o método de superposição de Euclides funcione, então assim será válido (C6). Pois como no capítulo 3 foi mostrado que em um plano quase de Hilbert a existência de suficientes movimentos rígidos é equivalente ao axioma (C6).

No seguinte teorema, será mostrado que (MRS), definido no capítulo 3, é válido em um plano cartesiano sobre um corpo Pitagórico ordenado.

Teorema 6.19

Sejam \mathbb{F} um corpo Pitagórico ordenado e \mathbb{F}^2 o plano cartesiano associado. Então (MRS) é válido em \mathbb{F}^2 .

Prova:[Idéia] Considere-se o plano \mathbb{F}^2 com coordenadas (x, y) , e as transformações de \mathbb{F}^2 definidas por funções de x e y . A ideia é mostrar que existem movimentos rígidos e que há suficientes deles para mostrar cada movimento rígido definidos como (MRS) (ver [11, Hartshorne, 2000, p.151-153]).

Para (I) (Para cada dois pontos $A, A' \in \mathbb{F}^2$, existe um movimento rígido $\varphi \in \mathcal{G}$ tal que $\varphi(A) = A'$). Considera-se a função translação τ definida por:

$$\begin{cases} x' = x + a \\ y' = y + b \end{cases}$$

Para (II) (Para cada três pontos $O, A, A' \in \mathbb{F}^2$, existe um movimento rígido $\varphi \in \mathcal{G}$

tal que $\varphi(O) = O$ e φ leva a semi-reta \overrightarrow{OA} à $\overrightarrow{OA'}$. Considera-se a função rotação ρ definida por:

$$\begin{cases} x' = cx - sy \\ y' = sx + cy \end{cases}$$

onde $c, s \in \mathbb{F}$ e $c^2 + s^2 = 1$.

Para (III) (Para cada reta l , existe um movimento rígido $\varphi \in \mathcal{G}$ tal que $\varphi(P) = P$ para todo $P \in l$ e φ intercambia os dois lados do plano em relação a l). Com a composta $(\rho \circ \tau)$ fazemos coincidir o eixo da reflexão com o eixo x . Assim considera-se a função σ definida por:

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = -y \end{cases}$$

É possível mostrar que τ , ρ e σ satisfazem as cinco condições da definição de movimento rígido (3.1), portanto elas são movimentos rígidos. Além, de que τ , ρ e σ são equivalentes as condições (I), (II) e (III), respectivamente, do (MRS) da existencia de suficientes movimentos rígidos. \square

Note que neste teorema, além de mostrar que (MRS II) é válido, temos que para cada tangente do ângulo no plano, existem o coseno e o seno desse ângulo. Este teorema nos diz que basta ter um plano cartesiano, sobre um corpo Pitagórico ordenado, para que existam movimentos rígidos, e portanto também seja válido (C6). Assim, neste plano todos os axiomas de Hilbert são satisfeitos. O teorema a seguir explicita isto.

Teorema 6.20

Se \mathbb{F} é um corpo ordenado Pitagórico, então o plano \mathbb{F}^2 é um plano de Hilbert satisfazendo o axioma das paralelas (P). Então o plano \mathbb{F}^2 será Euclideano se e somente se \mathbb{F} é Euclideano.

Prova: Já foram verificados os axiomas de incidência e o axioma das paralelas em

um plano sobre um corpo qualquer, os axiomas de ordem em um plano sobre um corpo ordenado, os axiomas de congruência em um plano sobre um corpo Pitagórico. E também verificou-se que para que o plano seja Euclideano é condição necessária e suficiente que o corpo seja Euclideano. \square

Modelos Algébricos para Geometrias não Arquimedianas

No universo de todos os planos de Hilbert, podemos destacar três conjuntos disjuntos de planos que ficam caracterizados segundo a hipótese sobre a natureza dos ângulos do topo nos quadriláteros de Saccheri que consideremos. Assim, podemos ter:

- Plano de Hilbert munido com a hipótese do ângulo agudo, que chamamos de Plano de Hilbert Semi-Hiperbólico.
- Plano de Hilbert munido com a hipótese do ângulo reto, que chamamos de Plano de Hilbert Semi-Euclidiano.
- Plano de Hilbert munido com a hipótese do ângulo obtuso, que chamamos de Plano de Hilbert Semi-Elíptico.

Entendemos por geometrias ou planos Arquimedianos às geometrias ou planos que incorporam o seguinte axioma em seu repertório:

(A) (Axioma de Arquimedes) Seja A_1 um ponto arbitrário sobre uma reta entre os pontos arbitrariamente dados A e B ; construam-se, então, os pontos A_2, A_3, A_4, \dots de forma que A_1 esteja entre A e A_2 , A_2 entre A_1 e A_3 , A_3 entre A_2 e A_4 , etc... e os segmentos $\overline{AA_1}$, $\overline{A_1A_2}$, $\overline{A_2A_3}$, $\overline{A_3A_4}$, ... sejam todos congruentes. Então existe sempre na sequência A_2, A_3, A_4, \dots um ponto A_n tal que B esteja entre A e A_n .

Em outras palavras: dados dois segmentos \overline{AB} e \overline{CD} em uma geometria, então sempre é possível obter um múltiplo de \overline{CD} que seja maior que \overline{AB} .

Como nosso objetivo é estudar geometrias não Arquimedianas, estudaremos o plano de Hilbert acrescentando ao conjunto de 13 axiomas a negação do axioma (A) de Arquimedes. No nosso universo de Planos de Hilbert, ao ser incorporado o axioma (A), fica descartado o Plano de Hilbert semi-elíptico, de acordo com o Teorema de Saccheri-Legendre⁽¹⁾. Se considerássemos o axioma (P) de paralelismo de Playfair estaríamos considerando só uma região do plano semi-euclidiano. Uma forma de representar esta situação é o seguinte esquema:

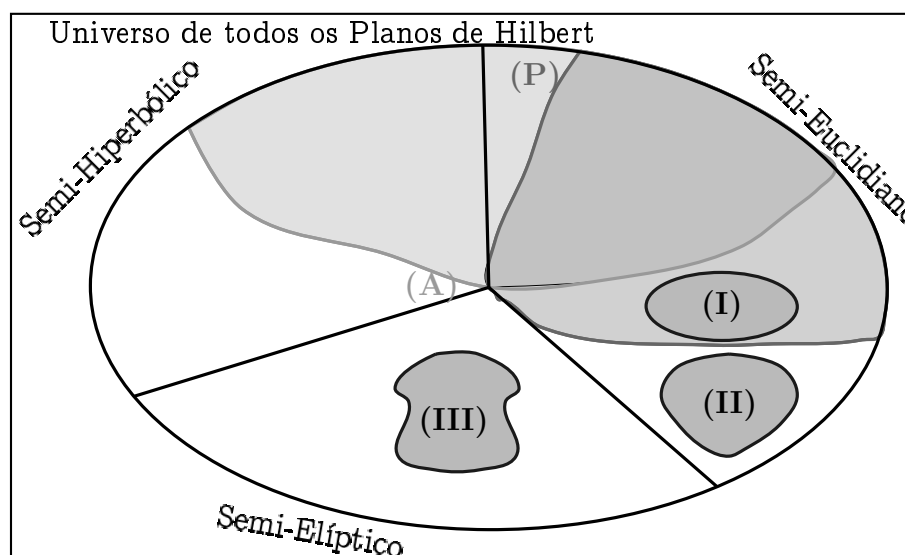


Figura 7.1: “Regiões” do Universo de Planos de Hilbert

⁽¹⁾TEOREMA SACCHERI-LEGENDRE: A soma dos três ângulos de um triângulo não pode exceder a dois ângulos retos. [16, Legendre, 2009, p.39]

Podemos nos dar conta de que o plano euclidiano, utilizado na geometria Euclidiana, é subconjunto próprio da região que representa a interseção entre os axiomas (A) e (P).

Nosso interesse é estudar, nas seções seguintes, através de modelos algébricos certas “regiões” do Universo de todos os planos de Hilbert. As regiões que nos interessa estudar são:

- Plano de Hilbert semi-euclidiano munido de (P) e negando (A): região (I).
- Plano de Hilbert semi-euclidiano negando (P) e negando (A): região (II).
- Plano de Hilbert semi-elíptico negando (A): região (III).

No capítulo anterior concluímos que, se um corpo ordenado \mathbb{F} é pitagórico, o plano cartesiano a ele associado é um plano de Hilbert satisfazendo o axioma (P). Agora tomemos \mathbb{F} um corpo ordenado pitagórico não arquimediano; o plano cartesiano \mathbb{F}^2 associado é um plano de Hilbert que satisfaz (P), mas não satisfaz (A), pois basta considerar os segmentos \overline{AB} , \overline{AC} onde $A = (0,0)$, $B = (1,0)$ e $C = (t,0)$: por mais vezes que somemos o segmento \overline{AB} com ele mesmo, nunca excederemos o segmento \overline{AC} . Além disso, no plano cartesiano \mathbb{F}^2 , a soma dos ângulos internos de um triângulo qualquer é igual a dois ângulos retos ($2\mathcal{R}$), já que o axioma (P) é válido (ver teorema 2.44). Então já temos o nosso modelo algébrico para o Plano de Hilbert semi-euclidiano munido de (P) e negando (A) (região (I)).

7.1 Plano de Hilbert semi-euclidiano negando (P) e negando (A) (região (II))

A idéia é mostrar que o plano de Hilbert semi-euclidiano negando (P) e negando (A) pode ser modelado por um subconjunto de pontos, bem determinados, do plano cartesiano \mathbb{F}^2 , onde \mathbb{F} é um corpo ordenado pitagórico não arquimediano.

Antes de apresentar o conjunto de pontos que consideraremos, definiremos algumas noções que nos serão úteis.

Lembremos que todo corpo ordenado \mathbb{F} contém um subcorpo isomorfo a \mathbb{Q} (veja seção 5.1) e, em particular, este subcorpo contém uma cópia de \mathbb{Z} .

Definição 7.1

Sejam \mathbb{F} um corpo ordenado não arquimediano e $a \in \mathbb{F}$. Diremos que o elemento a é *finitamente limitado* (f.l.) se, existe um inteiro positivo n do corpo \mathbb{F} ($n \in \mathbb{Z}_{\mathbb{F}}^+$) tal que $-n < a < n$. Diremos que o elemento a é *infinitesimal* se, para todo inteiro positivo n do corpo \mathbb{F} , tivermos $-\frac{1}{n} < a < \frac{1}{n}$. E o elemento a é *infinito* se, para todo inteiro positivo n do corpo \mathbb{F} , tivermos $|a| > n$.

Algumas propriedades imediatas de elementos finitamente limitados são as seguintes:

Teorema 7.2

Sejam \mathbb{F} um corpo ordenado não arquimediano e $a, b \in \mathbb{F}$.

- (i) Se a, b são f.l. então $a + b$ é f.l. A recíproca só vale se $a \cdot b > 0$.
- (ii) Se a, b são f.l. então $a \cdot b$ é f.l.
- (iii) Se a é f.l. então a^2 é f.l.
- (iv) Se $a \geq 0$ é f.l. então se $\sqrt{a} \in \mathbb{F}$, temos que \sqrt{a} é f.l.
- (v) Se a não é f.l. então $\frac{1}{a}$ é f.l. Mais do que isso $\frac{1}{a}$ é infinitesimal.

Do mesmo modo que definimos elemento finitamente limitado, agora definiremos ponto finitamente limitado.

Definição 7.3

(PONTO FINITAMENTE LIMITADO) Seja \mathbb{F} um corpo ordenado pitagórico não arquimediato. Diremos que o ponto $A \in \mathbb{F}^2$ é *finitamente limitado* (f.l.) se a distância do ponto A à origem O ($d(A, O)$)⁽²⁾ é finitamente limitada.

Observe que podemos ter a distância entre dois pontos f.l. e isto não implica que os pontos o sejam. Por exemplo, considerar os pontos $A = (t, 1)$, $B = (t-1, 1)$, temos que

$$d(A, B) = \sqrt{(t - (t-1))^2 + (1-1)^2} = \sqrt{1^2} = 1;$$

aqui a distância é f.l., mas os pontos não o são.

No entanto, a recíproca vale: é possível mostrar que, se um ponto A é finitamente limitado, então suas coordenadas são finitamente limitadas. A prova deriva diretamente das definições de elemento e ponto finitamente limitados.

Teorema 7.4

Sejam \mathbb{F} um corpo ordenado pitagórico não arquimediato e $A = (x_A, y_A) \in \mathbb{F}^2$. O ponto A é f.l. se, e somente se, x_A , y_A são f.l.

Note que o conjunto dos elementos finitamente limitados de \mathbb{F} não é um subcorpo de \mathbb{F} , pois os elementos infinitesimais não têm inversos em tal conjunto.

No início da seção mencionamos que gostaríamos de obter um conjunto bem determinado de pontos de \mathbb{F}^2 que representem como modelo a geometria semi-euclidiana negando os axiomas (A) e (P). Queremos mostrar que o conjunto de todos os pontos finitamente limitados de \mathbb{F}^2 , com \mathbb{F} pitagórico não arquimediato, é a interpretação que estamos procurando para nossa geometria.

⁽²⁾Distância entre dois pontos, tal como foi definida no capítulo 6.

Definição 7.5

Seja Π_0 o conjunto de todos os pontos finitamente limitados de \mathbb{F}^2 , com \mathbb{F} pitagórico não arquimediano.

$$\Pi_0 = \{P \in \mathbb{F}^2 \mid d(P, O) \text{ seja finitamente limitada}\}.$$

A idéia é mostrar que Π_0 é um plano de Hilbert semi-euclidiano não arquimediano, no qual vale a negação do axioma (P). Para isto, precisamos provar que em Π_0 são satisfeitos os axiomas de Hilbert (I1)-(I3), (B1)-(B4), (C1)-(C6) e não são satisfeitos os axiomas (A) nem (P), além de mostrar que a soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a $2\mathcal{R}$.

Antes de começarmos a mostrar que os axiomas são satisfeitos, iremos definir o que entendermos por reta em Π_0 .

Definição 7.6

l_0 é uma reta em Π_0 se existe uma reta l de \mathbb{F}^2 tal que

$$l_0 = l \cap \Pi_0 = \{P \in l \mid P \text{ seja f.l.}\} \neq \emptyset.$$

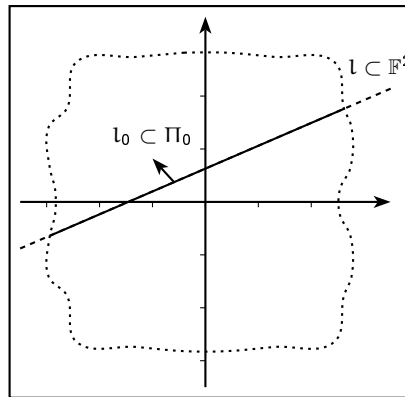


Figura 7.2: Reta em Π_0

Pela definição anterior, temos que uma reta qualquer em Π_0 deve possuir pelo menos

um ponto. Gostaríamos de construir pelo menos mais um ponto. O seguinte lema nos diz que se temos uma reta $l_0 \subset \Pi_0$, um ponto $A \in l_0$ e uma distância δ finitamente limitada, então é possível construir mais dois pontos, um a cada lado da reta em relação ao ponto A .

Lema 7.7

Sejam $l_0 \subset \Pi_0$, $\delta > 0 \in \mathbb{F}$ f.l., $A = (x_A, y_A) \in l_0$. Então existem os pontos P_1 e P_2 em l_0 tais que $d^2(A, P_1) = d^2(A, P_2) = \delta^2$.

Prova: Sendo $l_0 \subset \Pi_0$, então existe $l \subset \mathbb{F}^2$ tal que $l_0 = l \cap \Pi_0$. Temos dois casos, se l é vertical e se l não for vertical.

Queremos construir pelo menos um ponto $P = (x_P, y_P) \in l_0$ tal que $d^2(A, P) = \delta^2$. Então mostraremos que ele existe e que as suas coordenadas são finitamente limitadas.

Se l é vertical, temos que $l : x = c$, onde $c \in \mathbb{F}$ e c é f.l. É trivial ver que $(c, y_A \pm \delta)$ cujas coordenadas são f.l. são os dois pontos desejados.

Se l não for vertical, tomemos $l : y = mx + n$, com $m, n \in \mathbb{F}$. Além disso, como A é f.l., então x_A, y_A são f.l., também $y_A = mx_A + n$, pois $A \in l_0$.

Se $P \in l_0$, então $P \in l$, portanto $y_P = mx_P + n$. Agora, se $d^2(A, P) = \delta^2$ temos

$$(x_P - x_A)^2 + (y_P - y_A)^2 = \delta^2$$

como δ é f.l. então δ^2 é f.l. e $(x_P - x_A)^2, (y_P - y_A)^2 \geq 0$ então $(x_P - x_A)^2$ e $(y_P - y_A)^2$ são f.l.

$$\begin{aligned} (x_P - x_A)^2 + (y_P - y_A)^2 = \delta^2 &\Rightarrow (x_P - x_A)^2 + (mx_P + n - (mx_A + n))^2 = \delta^2 \\ &\Rightarrow (x_P - x_A)^2 = \frac{\delta^2}{1 + m^2}. \end{aligned}$$

Como $(x_P - x_A)^2$ é f.l. então $\frac{\delta^2}{1 + m^2}$ também é f.l. e como é positivo, então temos que

$\frac{\delta}{\sqrt{1+m^2}}$ é f.l. Portanto: $|x_P - x_A| = \frac{\delta}{\sqrt{1+m^2}}$ é f.l.

Temos dois casos, que correspondem aos dois lados da reta em relação ao ponto A.

$$x_P = x_A + \frac{\delta}{\sqrt{1+m^2}} \quad \text{ou} \quad x_P = x_A - \frac{\delta}{\sqrt{1+m^2}}$$

Como x_A e $\frac{\delta}{\sqrt{1+m^2}}$ são f.l. então x_P é f.l. Então agora basta mostrar que y_P é f.l.

Se $x_P = x_A \pm \frac{\delta}{\sqrt{1+m^2}}$ temos que:

$$\begin{aligned} y_P &= mx_P + n = m \left(x_A \pm \frac{\delta}{\sqrt{1+m^2}} \right) + n = mx_A \pm \frac{\delta m}{\sqrt{1+m^2}} + n \\ &= mx_A + n \pm \frac{\delta m}{\sqrt{1+m^2}} = y_A \pm \frac{\delta m}{\sqrt{1+m^2}}. \end{aligned}$$

Como y_A é f.l. basta mostrar que $\frac{\delta m}{\sqrt{1+m^2}}$ é f.l. Temos dois casos: quando m é f.l. e quando não é f.l.

- Se m é f.l.: como $\frac{\delta}{\sqrt{1+m^2}}$ é f.l. e m também é f.l. então $\frac{\delta m}{\sqrt{1+m^2}}$ é f.l.
- Se m não é f.l.: como δ é f.l. queremos que $\frac{m}{\sqrt{1+m^2}}$ seja f.l.

Temos a seguinte igualdade $\frac{|m|}{\sqrt{1+m^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{m^2}}}$. Como $1 < \sqrt{1+\frac{1}{m^2}} < 2$

então $\frac{1}{2} < \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{m^2}}} < 1$. Assim $\frac{|m|}{\sqrt{1+m^2}}$ é f.l. e portanto $\frac{m}{\sqrt{1+m^2}}$ também é f.l. que é o que queríamos.

Portanto, $\frac{\delta m}{\sqrt{1+m^2}}$ é f.l. e $y_P = y_A \pm \frac{\delta m}{\sqrt{1+m^2}}$ é f.l. Assim mostramos que as coordenadas do ponto P são f.l. e $d^2(A, P) = \delta^2$.

Assim, podemos caracterizar dois pontos:

$$P_1 = \left(x_A + \frac{\delta}{\sqrt{1+m^2}}, y_A + \frac{\delta m}{\sqrt{1+m^2}} \right)$$

$$P_2 = \left(x_A - \frac{\delta}{\sqrt{1+m^2}}, y_A - \frac{\delta m}{\sqrt{1+m^2}} \right),$$

que são os pontos que estão a ambos os lados da reta l_0 com respeito ao ponto A e encontram-se a uma distância dada δ dele, finitamente limitada. \square

Com o lema que acabamos de mostrar, podemos garantir que sempre é possível construir a partir de um ponto e uma distância dada f.l. outros dois pontos, um a cada lado da reta em relação ao ponto dado.

Agora, vamos mostrar que o nosso conjunto Π_0 de pontos é um plano de Hilbert semi-euclidiano não arquimediano. Então temos que mostrar que os axiomas de Hilbert são satisfeitos, mas os axiomas (A) nem (P) não são satisfeitos.

Para mostrar que não satisfaz (A), consideremos os segmentos \overline{AB} e \overline{AC} , onde $A = (0, 0)$, $B = \left(\frac{1}{t}, 0\right)$ e $C = (1, 0)$. Por mais vezes que somemos \overline{AB} com ele mesmo, nunca vamos ultrapassar o segmento \overline{AC} .

Para mostrar que (P) não é satisfeito, considere as retas eixo- x , L_1 e L_2 de equações:

$$L : y = 0; \quad L_1 : y = \frac{1}{t}x + 1 \quad L_2 : y = -\frac{1}{t}x + 1$$

e $l = L \cap \Pi_0$, $l_1 = L_1 \cap \Pi_0$ e $l_2 = L_2 \cap \Pi_0$.

Notemos que as retas l_1 e l_2 , que possuem o ponto $(0, 1)$ em comum, são paralelas ao eixo- x , dado que $L \cap L_1 = \{(-t, 0)\}$ não é um ponto no modelo e $L \cap L_2 = \{(t, 0)\}$ também não é.

Para mostrar que Π_0 é um plano semi-euclidiano, consideremos um triângulo $\triangle ABC$

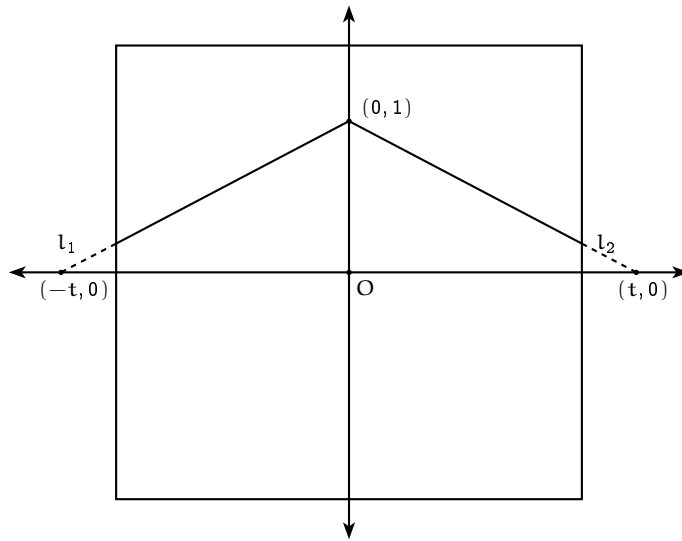


Figura 7.3: Π_0 não satisfaz (P)

em Π_0 . Como $\Pi_0 \subset \mathbb{F}^2$ então $\triangle ABC \subset \mathbb{F}^2$, e aqui a soma dos ângulos internos de um triângulo qualquer é igual a dois ângulos retos. Pelo que Π_0 é um plano de Hilbert semi-euclidiano.

Agora, vamos mostrar que Π_0 é um plano de Hilbert.

Teorema 7.8

Π_0 satisfaz os axiomas (I1)-(I3), (B1)-(B4), (C1)-(C6).

Prova: (I1): Dados os pontos $A, B \in \Pi_0$, eles determinam uma única reta em Π_0 . Pois se determinassem mais de uma reta em Π_0 o mesmo aconteceria em \mathbb{F}^2 , já que $\Pi_0 \subset \mathbb{F}^2$.

(I2): Se $l \subset \Pi_0$ é uma reta, existe pelo menos um ponto $A \in l$, pela definição (7.6). O outro ponto pode ser obtido pela aplicação do lema (7.7), bastando arbitrar uma distância δ finitamente limitada.

(I3): Basta considerar os pontos $(0, 0)$, $(1, 0)$ e $(0, 1)$.

(B1), (B3): Seguem diretamente da maneira como foi traduzida a relação “estar entre” em \mathbb{F}^2 (capítulo 6).

(B2): Decorre diretamente da aplicação do lema (7.7): dados a reta $l \subset \Pi_0$ e os pontos $A, B \in l$. Tomando $\delta = d(A, B)$ obtemos os pontos C_1 e C_2 tais que $d(C_1, B) = d(C_2, B) = \delta = d(A, B)$. Um dos pontos C_1 ou C_2 será distinto de A e portanto o outro ponto satisfaz $A * B * C$.

(B4): Dados o triângulo $\triangle ABC \subset \Pi_0$ e a reta $l \subset \Pi_0$ que não contém nenhum dos vértices do triângulo e encontra o segmento \overline{AB} no ponto D . Temos que em \mathbb{F}^2 a reta l encontra um dos lados do triângulo além do segmento \overline{AB} . Então basta mostrar que se $P_0, P_1, P_2 \in \mathbb{F}^2$ tais que $P_0 * P_1 * P_2$ e $P_0, P_2 \in \Pi_0$ então $P_1 \in \Pi_0$. Mas este resultado deriva diretamente de como foi definida a relação de “estar entre”.

(C1): Decorre diretamente da aplicação do lema (7.7): dados os segmentos \overline{AB} e uma semi-reta \overrightarrow{CD} , tomando $\delta = d(A, B)$, obtemos os pontos E_1 e E_2 na reta \overleftrightarrow{CD} tais que $d(E_1, C) = d(E_2, C) = \delta = d(A, B)$. Um dos pontos E_1 ou E_2 pertencerá à semi-reta \overrightarrow{CD} .

(C2)-(C3): Segue diretamente da maneira como foi estabelecida a relação congruência entre segmentos.

(C4): Este axioma vale desde que o axioma (I2) seja satisfeito para semi-retas. Ou seja, basta construir um ponto em Π_0 que esteja na mesma semi-reta do ângulo em \mathbb{F}^2 , mas pelo lema (7.7) é possível determinar esse ponto.

(C5): Decorre diretamente da maneira como foi traduzida a relação de congruência entre ângulos.

(C6): Decorre diretamente da congruência de triângulos em \mathbb{F}^2 . Pois dados os triângulos $\triangle ABC, \triangle DEF$ ambos em Π_0 , tais que $\overline{AB} \cong \overline{DE}$, $\angle ABC \cong \angle DEF$ e $\overline{BC} \cong \overline{EF}$. Como ambos os triângulos também pertencem a \mathbb{F}^2 , então eles são congruentes.

Logo Π_0 é um plano de Hilbert.

□

7.2 Plano de Hilbert semi-elíptico negando (P) e negando (A) (região (III))

A idéia é mostrar que o plano de Hilbert semi-elíptico negando (P) e negando (A) pode ser modelado por um subconjunto de pontos, bem determinados, de uma esfera de \mathbb{F}^3 centrada na origem e raio t , onde \mathbb{F} é um corpo ordenado euclidiano não arquimediano e $t \in \mathbb{F}$, $t > 0$, um elemento infinito positivo como definido em (7.1).

Sabemos, da geometria esférica, que a soma dos ângulos internos de qualquer triângulo é maior que dois ângulos retos. Daí, a escolha de um subconjunto da superfície esférica para modelar esta geometria. Além disso, sabemos também que, na geometria esférica, não existem “retas” paralelas, onde o termo reta deve ser entendido como qualquer círculo máximo da esfera. A escolha de um subconjunto adequado de pontos nos permitirá ter infinitas paralelas a uma reta por um ponto exterior.

Analogamente ao feito na seção anterior, diremos que um ponto $C = (x_C, y_C, z_C) \in \mathbb{F}^3$ é um ponto finitamente limitado se a distância à origem, $d(O, C)$, for finitamente limitada. Além disso, do mesmo modo que em \mathbb{F}^2 , é possível mostrar que um ponto $C \in \mathbb{F}^3$ é f.l. se, e somente se, as suas coordenadas são f.l.

Os pontos de esfera integram o conjunto

$$\mathcal{E}_t O = \left\{ \left(x_P, y_P, \pm \sqrt{t^2 - x_P^2 - y_P^2} \right) \in \mathbb{F}^3 \mid (x_P, y_P) \in \mathbb{F}^2 \text{ e } x_P^2 + y_P^2 \leq t^2 \right\},$$

como ilustrado na figura 7.4.

Dentre os pontos da esfera $\mathcal{E}_t O$ destacamos aqueles que estejam a uma distância finitamente limitada do pólo norte $N = (0, 0, t)$. Entretanto, em nosso modelo, apenas um subconjunto da superfície esférica será utilizado, notadamente os do hemisfério superior.

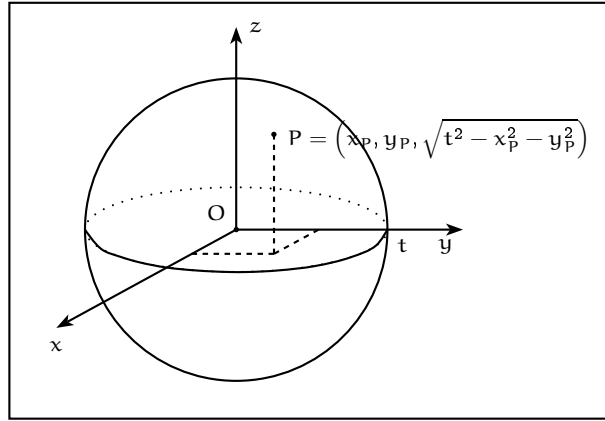


Figura 7.4: Ponto na esfera de centro na origem e raio t

Em primeiro lugar, vamos mostrar uma propriedade relacionando elementos finitamente limitados com o raio da esfera.

Teorema 7.9

Sejam \mathbb{F} um corpo euclidiano não arquimediano, $x, y \in \mathbb{F}$, ambos f.l. e $t > 0 \in \mathbb{F}$ um elemento infinito de \mathbb{F} . Então o elemento $t - \sqrt{t^2 - x^2 - y^2}$ é também f.l.

Prova: Se x, y são f.l. então existe $n \in \mathbb{Z}_{\mathbb{F}}^+$ tal que $-n < \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} < n$. Daqui temos que $-2n^2 < -x^2 - y^2 < 2n^2$. Portanto $t^2 - 2n^2 < t^2 - x^2 - y^2 < t^2 + 2n^2$, então

$$0 < t^2 - x^2 - y^2 < t^2 + 4n^2 \text{ e } 0 < \sqrt{t^2 - x^2 - y^2} < \sqrt{t^2 + 4n^2} < \sqrt{t^2} + \sqrt{4n^2} = t + 2n,$$

daqui temos que $-t - 2n < -\sqrt{t^2 - x^2 - y^2}$. Limitando obtemos

$$-t - 2n < -\sqrt{t^2 - x^2 - y^2} < -\left|\sqrt{t^2} - \sqrt{x^2 + y^2}\right| = -t + \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Assim,

$$-2n < t - \sqrt{t^2 - x^2 - y^2} < \sqrt{x^2 + y^2} < |x| + |y| < n + n = 2n.$$

Pelo que $t - \sqrt{t^2 - x^2 - y^2}$ é f.l. □

Um fato interessante que nos diz este resultado é que se um ponto $P \in \mathcal{E}_t O$, com $P = (x_P, y_P, \sqrt{t^2 - x_P^2 - y_P^2})$ onde x_P, y_P são f.l., então o ponto $(N - P)$ é f.l. Assim

temos que $d^2(O, N - P)$ é f.l. Daqui podemos concluir que:

$$d^2(O, N - P) = (0 - x_P)^2 + (0 - y_P)^2 + \left(t - \sqrt{t^2 - x_P^2 - y_P^2}\right)^2 = d^2(N, P).$$

Portanto todos os pontos P com coordenadas x_P e y_P f.l. se encontram a uma distância f.l. do ponto N , que chamamos de pólo norte. Então já temos caracterizados os pontos que vamos considerar.

Definição 7.10

Seja Π_1 o conjunto de todos os pontos $P = (x_P, y_P, \sqrt{t^2 - x^2 - y^2}) \in \mathcal{E}_t O$ tais que $d^2 = (N, P)$ seja f.l.

$$\Pi_1 = \{P \in \mathcal{E}_t O \mid d^2(N, P) \text{ é f.l.}\}.$$

Da definição do conjunto Π_1 podemos inferir que se um ponto $P \in \Pi_1$, então seu antípodo $(-P)$ não estará nele. Então como na geometria esférica (ver [19, Ryan, 1986]) se considera o ponto P e o ponto $-P$ como só um, temos que na região de pontos que queremos estudar Π_1 ficam descartados os pontos antípodos dos pontos da região.

Queremos mostrar que Π_1 é um plano de Hilbert semi-elíptico não arquimediano. Ou seja temos que mostrar que Π_1 satisfaz os axiomas (I1)-(I3), (B1)-(B4), (C1)-(C6), mas não satisfaz (A) nem (P).

Antes de começar a mostrar que os axiomas são satisfeitos, vamos definir o que entenderemos por reta em Π_1 . Sabemos da geometria esférica que retas são círculos máximos e que, em particular, uma esfera centrada na origem, as retas, são interseção da esfera com planos que contêm a origem. Assim, diremos que uma reta l na esfera $\mathcal{E}_t O$ é o conjunto

$$\{X \in \mathcal{E}_t O \mid \langle X, \xi \rangle = 0^{(3)} \text{ com } \xi \in \mathcal{E}_t O \text{ fixo}\}$$

O ponto ξ é chamado pólo da reta l .

Definição 7.11

l_1 é uma reta em Π_1 se existe uma reta l de $\mathcal{E}_t O$ tal que

$$l_1 = l \cap \Pi_1 = \{P \in l \mid d^2(N, P) \text{ seja f.l.}\} \neq \emptyset.$$

Seja $\xi = (a, b, c)$ pólo de l , para que ponto $P = (x_P, y_P, z_P) \in \mathcal{E}_t O$ pertença à reta l_1 , então se devem satisfazer as seguintes equações:

$$ax_P + by_P + c\sqrt{t^2 - x_P^2 - y_P^2} = 0 \quad \text{e} \quad x_P^2 + y_P^2 + z_P^2 = t^2.$$

Notemos que ξ não é necessariamente um ponto de Π_1 . Um exemplo disso é se consideramos $\xi = (0, t, 0)$, então os pontos da reta onde ξ é pólo são da forma $P = (x_P, 0, \sqrt{t^2 - x_P^2})$. Agora para todos os x_P finitamente limitados, o ponto P pertence à reta do modelo.

Como foi definida l_1 , temos que uma reta no modelo possui pelo menos um ponto. Gostaríamos de construir pelo menos mais um ponto. O seguinte lema nos diz que se temos uma reta $l_1 \subset \Pi_1$, um ponto $A \in l_1$ e uma distância δ finitamente limitada, então é possível construir mais dois pontos, um a cada lado da reta em relação ao ponto A .

Lema 7.12

Sejam $l_1 \subset \Pi_1$, $\delta > 0 \in \mathbb{F}$ f.l., $A = (x_A, y_A, z_A) \in l_1$. Então existem os pontos P_1 e P_2 em l_1 tais que $d^2(A, P_1) = d^2(A, P_2) = \delta^2$.

Prova: Sendo $l_1 \subset \Pi_1$, então existe $l \subset \mathcal{E}_t O$ tal que $l_1 = l \cap \Pi_1$. Seja $\xi = (a, b, c) \in \mathcal{E}_t O$ o pólo da reta l tal que $\langle A, \xi \rangle = 0$.

⁽³⁾ $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{F}^3 \rightarrow \mathbb{F}$ Produto escalar como definido na Álgebra Linear.

Queremos construir pelo menos um ponto $P = (x_P, y_P, z_P) \in l_1 \subset \mathcal{E}_t O$ tal que $d^2(A, P) = \delta^2$. Então mostraremos que ele existe e que $d^2(P, N)$ é f.l.

Se o ponto P existe, então deve-se cumprir:

$$\langle \xi, P \rangle = 0 \quad \Rightarrow \quad ax_P + by_P + cz_P = 0$$

$$P \in \mathcal{E}_t O \quad \Rightarrow \quad x_P^2 + y_P^2 + z_P^2 = t^2$$

$$d^2(A, P) = \delta^2 \quad \Rightarrow \quad (x_P - x_A)^2 + (y_P - y_A)^2 + (z_P - z_A)^2 = \delta^2$$

Encarar estas equações tais como estão expostas poderia resultar algo trabalhoso, então recorreremos à álgebra linear e o conhecido de movimentos rígidos (ver [19, Ryan, 1986]). A idéia é usar uma transformação linear T que seja uma isometria tal que possamos anular uma das coordenadas, por exemplo fazer $z = 0$, ou seja transportar um problema do espaço para o plano XY .

Primeiro consideraremos uma transformação T_1 . Para que ela seja uma isometria basta levar uma base ortogonal em outra base ortogonal. Assim, tomaremos T_1 tal que $T_1(\xi) = (0, 0, t)$, $T_1(A) = (x'_A, y'_A, 0)$ e $T_1\left(\frac{\xi \times A}{t}\right) = (u, v, 0)$. Depois consideraremos T_2 tal que $T_2(N) = (0, 0, t)$, $T_2((x'_A, y'_A, 0)) = (t, 0, 0)$ e $T_2((u, v, 0)) = (0, t, 0)$.

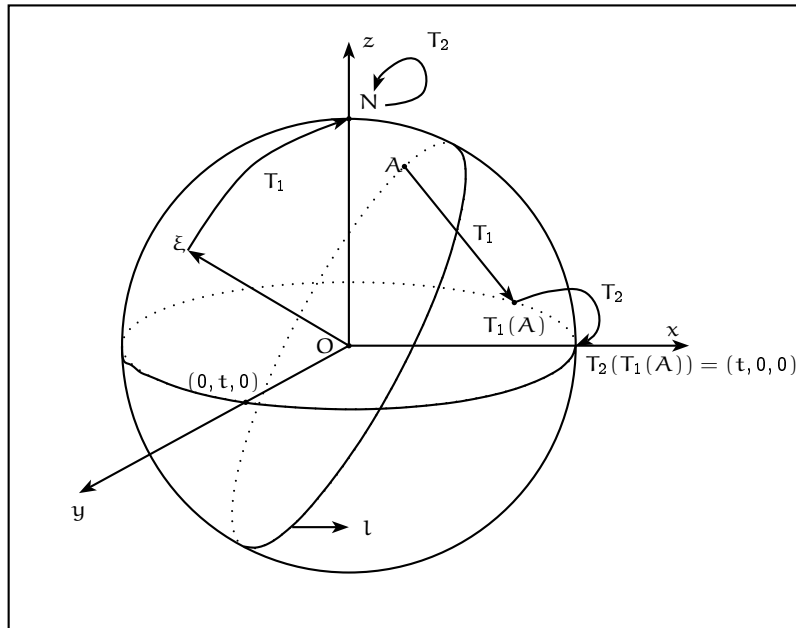


Figura 7.5: Transformação $T = T_2 \circ T_1$

Em outras palavras a transformação T_1 faz girar a esfera de tal modo que o pólo ξ da reta l seja levado no pólo norte, e os pontos A e $\left(\frac{\xi \times A}{t}\right)$ recaem no plano XY . A transformação T_2 faz girar a esfera em torno do eixo- z , de modo que A coincida com $(t, 0, 0)$ e $\left(\frac{\xi \times A}{t}\right)$ com $(0, t, 0)$.

Vamos considerar a transformação $T = T_2 \circ T_1$. Ela leva uma base ortogonal em outra ortogonal, pois:

$$T(\xi) = (0, 0, t); \quad T(A) = (t, 0, 0); \quad T\left(\frac{\xi \times A}{t}\right) = (0, t, 0)$$

Depois de aplicar a transformação T temos que $T(P) = (\overline{x_P}, \overline{y_P}, \overline{z_P})$. Assim, as equações ficam:

$$t\overline{z_P} = 0$$

$$\overline{x_P}^2 + \overline{y_P}^2 + \overline{z_P}^2 = t^2$$

$$(\overline{x_P} - t)^2 + \overline{y_P}^2 + \overline{z_P}^2 = \delta^2$$

Daqui temos que, $\overline{x_P}^2 + \overline{y_P}^2 = t^2$ e $(\overline{x_P} - t)^2 + \overline{y_P}^2 = \delta^2$. Resolvendo o sistema temos que:

$$\overline{x_P} = t - \frac{\delta^2}{2t} \quad \text{e} \quad \overline{y_P} = \pm \delta \sqrt{1 - \frac{\delta^2}{4t^2}}$$

Assim temos que

$$T(P) = \left(t - \frac{\delta^2}{2t}, \pm \delta \sqrt{1 - \frac{\delta^2}{4t^2}}, 0 \right)$$

Gostaríamos de determinar quais são as coordenadas do ponto P , para isso é necessário conhecer a transformação inversa de T : T^{-1} . Mas temos que $T^{-1}((t, 0, 0)) = A$, $T^{-1}((0, t, 0)) = \left(\frac{\xi \times A}{t}\right)$ e $T^{-1}((0, 0, t)) = \xi$. Portanto $T^{-1}(e_1) = \frac{A}{t}$, $T^{-1}(e_2) = \left(\frac{\xi \times A}{t^2}\right)$ e $T^{-1}(e_3) = \frac{\xi}{t}$. Assim:

$$T_{(e_1, e_2, e_3)}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{x_A}{t} & \frac{bx_A - cy_A}{t^2} & \frac{a}{t} \\ \frac{y_A}{t} & \frac{cx_A - az_A}{t^2} & \frac{b}{t} \\ \frac{z_A}{t} & \frac{ay_A - bx_A}{t^2} & \frac{c}{t} \end{pmatrix}$$

Onde $T_{(e_1, e_2, e_3)}^{-1}$ é a matriz associada à transformação T^{-1} na base (e_1, e_2, e_3) . Neste caso, a base é a canônica.

Daqui temos que o ponto P é da forma:

$$P = T^{-1}(T(P)) = \begin{pmatrix} x_A - \frac{x_A \delta^2}{2t^2} \pm \frac{(bz_A - cy_A)\delta}{t^2} \sqrt{1 - \frac{\delta^2}{4t^2}} \\ y_A - \frac{y_A \delta^2}{2t^2} \pm \frac{(cx_A - az_A)\delta}{t^2} \sqrt{1 - \frac{\delta^2}{4t^2}} \\ z_A - \frac{z_A \delta^2}{2t^2} \pm \frac{(ay_A - bx_A)\delta}{t^2} \sqrt{1 - \frac{\delta^2}{4t^2}} \end{pmatrix}$$

É fácil mostrar que $\langle P, \xi \rangle = 0$, $x_P^2 + y_P^2 + z_P^2 = t^2$ e que $d^2(A, P) = \delta^2$. Agora para mostrar que $d^2(N, P)$ é finitamente limitada, basta observar que $0 < d^2(N, P) < d^2(N, A) + d^2(A, P)$, como $A \in \Pi_1$, então $d^2(N, A)$ é f.l. Portanto $d^2(N, P)$ é menor que uma soma de elementos f.l.; pelo que o ponto P pertence a Π_1 .

Assim, podemos caracterizar dois pontos:

$$P_1 = \begin{pmatrix} x_A - \frac{x_A \delta^2}{2t^2} + \frac{(bz_A - cy_A)\delta}{t^2} \sqrt{1 - \frac{\delta^2}{4t^2}} \\ y_A - \frac{y_A \delta^2}{2t^2} + \frac{(cx_A - az_A)\delta}{t^2} \sqrt{1 - \frac{\delta^2}{4t^2}} \\ z_A - \frac{z_A \delta^2}{2t^2} + \frac{(ay_A - bx_A)\delta}{t^2} \sqrt{1 - \frac{\delta^2}{4t^2}} \end{pmatrix}$$

$$P_2 = \begin{pmatrix} x_A - \frac{x_A \delta^2}{2t^2} - \frac{(bz_A - cy_A)\delta}{t^2} \sqrt{1 - \frac{\delta^2}{4t^2}} \\ y_A - \frac{y_A \delta^2}{2t^2} - \frac{(cx_A - az_A)\delta}{t^2} \sqrt{1 - \frac{\delta^2}{4t^2}} \\ z_A - \frac{z_A \delta^2}{2t^2} - \frac{(ay_A - bx_A)\delta}{t^2} \sqrt{1 - \frac{\delta^2}{4t^2}} \end{pmatrix}$$

Que são os pontos que estão em ambos os lados da reta l_1 com respeito ao ponto A e encontram-se a uma distância dada δ dele. \square

Com o lema que acabamos de mostrar, podemos garantir que sempre é possível, em Π_1 , construir a partir de um ponto dado e uma distância dada f.l. outros dois pontos,

um a cada lado da reta em relação ao ponto dado.

Agora, do mesmo modo como fizemos na seção anterior, vamos mostrar que o conjunto Π_1 é um plano de Hilbert semi-elíptico não arquimediano. Então temos que mostrar que os axiomas de Hilbert são satisfeitos, mas os axiomas (A) e (P) não. Mas antes de mostrar isto, interpretaremos para nosso modelo as relações de incidência, estar entre e congruência do Plano de Hilbert.

Sejam os pontos todos distintos $A, B, C, D, E, F \in \Pi_1 \subset \mathcal{E}_t O$, a reta $l_1 \subset \Pi_1$ com pólo $\xi \in \mathcal{E}_t O$. Como já vimos, ξ não pertence necessariamente a Π_1 .

RELAÇÃO DE INCIDÊNCIA:

Um ponto $A \in l_1$ se, e somente se, $\langle A, \xi \rangle = 0$. Dados dois pontos $A, B \in \Pi_1$, o pólo da reta \overleftrightarrow{AB} é da forma $\frac{A \times B}{t}$, onde \times é o produto vetorial entre A e B .

RELAÇÃO DE ORDEM:

Consideremos um plano $\Pi_2 : z = t$ tangente à esfera $\mathcal{E}_t O$ no ponto N (pólo norte). Definimos a função $\phi : \Pi_1 \rightarrow \Pi_2$ da seguinte maneira: dado $P \in \Pi_1$, $\phi(P)$ é a interseção da semi-reta \overrightarrow{OP} com Π_2 . Desta maneira, fica estabelecido um sistema de coordenadas em Π_2 , onde $O' = \phi(O) = N$, o eixo- x' é dado pela interseção do plano XZ com Π_2 e o eixo- y' pela interseção do plano YZ com Π_2 .

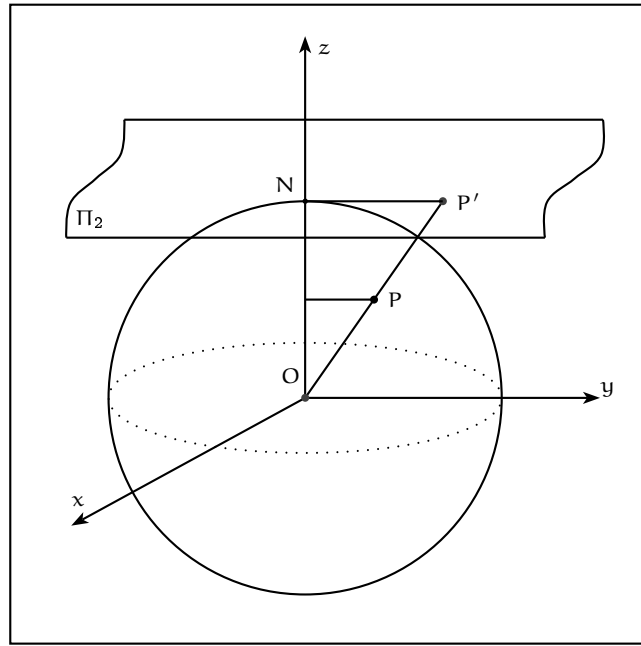
Neste sistema tem-se:

$$P' = \phi(P) = \left(\frac{tx_P}{\sqrt{t^2 - x_P^2 - y_P^2}}, \frac{ty_P}{\sqrt{t^2 - x_P^2 - y_P^2}}, t \right).$$

Teríamos que mostrar que o ponto P' é f.l. no plano Π_2 . Para isso, basta mostrar que $d(O', P')$ é f.l., mas

$$d^2(O', P') = \frac{x_P^2 + y_P^2}{1 - \frac{x_P^2 + y_P^2}{t^2}}$$

que é f.l. pois x_P e y_P por hipótese são f.l.

Figura 7.6: A função ϕ

Portanto ϕ leva Π_1 em um subconjunto de pontos f.l. de Π_2 . E Π_2 é isomorfo a Π_0 (com \mathbb{F} euclidiano).

Assim, se $A, B, C \in \Pi_1$ são pontos de uma reta, então diremos que $A * B * C$ se $\phi(A) * \phi(B) * \phi(C)$ em Π_2 .

CONGRUÊNCIA DE SEGMENTOS:

Os segmentos \overline{AB} e \overline{CD} serão congruentes se, e somente se, $d^2(A, B) = d^2(C, D)$.

CONGRUÊNCIA DE ÂNGULOS:

Sejam $\xi_{\overleftrightarrow{AB}}$ o pólo da reta \overleftrightarrow{AB} , $\xi_{\overleftrightarrow{BC}}$ o pólo da reta \overleftrightarrow{BC} , e seja $\angle ABC$ um ângulo de Π_1 . Então $\angle ABC$ é agudo, reto ou obtuso se $\langle \xi_{\overleftrightarrow{AB}}, \xi_{\overleftrightarrow{BC}} \rangle \gtrless 0$, respectivamente. Definimos

$$\cos(\angle ABC) = \frac{\langle \xi_{\overleftrightarrow{AB}}, \xi_{\overleftrightarrow{BC}} \rangle}{\langle \xi_{\overleftrightarrow{AB}}, \xi_{\overleftrightarrow{AB}} \rangle \cdot \langle \xi_{\overleftrightarrow{BC}}, \xi_{\overleftrightarrow{BC}} \rangle} = \frac{\langle \xi_{\overleftrightarrow{AB}}, \xi_{\overleftrightarrow{BC}} \rangle}{t^2}.$$

Sejam os ângulos $\angle ABC$ e $\angle DEF$ eles serão congruentes se, e somente se,

$$\cos(\angle ABC) = \cos(\angle DEF).$$

Tendo as relações interpretadas no modelo, podemos começar a mostrar os 13 axiomas de Hilbert e mostrar o não cumprimento dos axiomas (A) e (P).

Teorema 7.13

Π_1 satisfaz os axiomas (I1)-(I3), (B1)-(B4), (C1)-(C6).

Prova: (I1): Dados os pontos $A, B \in \Pi_1$. Precisamos de um ponto X tal que $\langle X, A \rangle = \langle X, B \rangle = 0$. Um bom candidato é o produto vetorial entre os pontos A e B , mas como queremos que ele seja um ponto na esfera, então ele é da forma $\left(\frac{A \times B}{t}\right)$. Pela definição de reta no modelo, a reta que tem como pólo $\left(\frac{A \times B}{t}\right)$ e é única.

(I2): Se $l \subset \Pi_1$ é uma reta, existe pelo menos um ponto $A \in l$, pela definição de Π_1 . O outro ponto pode ser obtido pela aplicação do lema (7.12), bastando arbitrar uma distância δ finitamente limitada.

(I3): Basta considerar os pontos $N = (0, 0, t)$, $A = (0, 1, \sqrt{t^2 - 1})$ e $B = (1, 0, \sqrt{t^2 - 1})$.

(B1)-(B4): Com a função ϕ , Π_1 é levado biunivocamente em um subconjunto f.l. de Π_2 . A relação “estar entre” já foi interpretada no modelo anterior.

(C1): Decorre diretamente da aplicação do lema (7.12): dados os segmentos \overline{AB} e uma semi-reta \overrightarrow{CD} , tomando $\delta = d(A, B)$, obtemos os pontos E_1 e E_2 na reta \overleftrightarrow{CD} tais que $d(E_1, C) = d(E_2, C) = \delta = d(A, B)$. Um dos pontos E_1 ou E_2 pertencerá à semi-reta \overrightarrow{CD} .

(C2)-(C3): Segue diretamente da maneira como foi estabelecida a relação de congruência entre segmentos foi interpretada a partir da função distância.

(C4): Este axioma vale desde que o axioma (I2) seja satisfeito para semi-retas. Ou seja, basta construir um ponto em Π_1 que esteja na mesma semi-reta do ângulo na esfera $\mathcal{E}_t O$, mas pelo lema (7.12) é possível construir esse ponto.

(C5): Decorre diretamente da maneira como foi traduzida a relação de congruência

entre ângulos.

(C6): Deriva da congruência de triângulos na geometria esférica.

Portanto, Π_1 é um plano de Hilbert. □

Para mostrar que (A) não é satisfeito, consideremos a reta

$$l_1 = \{X \in \Pi_1 \mid \langle X, (t, 0, 0) \rangle = 0\},$$

os pontos $N = (0, 0, t)$, $A = \left(0, \frac{1}{t}, \sqrt{t^2 - \frac{1}{t^2}}\right)$ e $B = (0, 2, \sqrt{t^2 - 4})$. Por mais vezes que copiemos o segmento \overline{AN} na reta l_1 do mesmo lado do ponto B, nunca excederemos ao segmento \overline{NB} . Logo Π_1 é um plano de Hilbert semi-elíptico não arquimediano.

Conclusão

Dada a escassez de textos didáticos sobre o estudo de estruturas não arquimedianas, praticamente inexistentes na língua portuguesa, decidimos prover um texto na medida do possível didático e esclarecedor sobre sistemas axiomáticos em geometria, enfatizando igualmente a importância do uso e análise de modelos que auxiliam na interpretação de tais sistemas. Neste texto destacamos o carácter axiomático que está presente na fundamentação da geometria e a importância do papel dos modelos na validação e visualização de tais sistemas.

O objetivo desta dissertação foi o de apresentar ao leitor um estudo sobre modelos para algumas geometrias não-arquimedianas, outorgando uma interpretação algébrica a um sistema axiomático que negue o axioma de Arquimedes. As geometrias não arquimedianas consideradas aqui foram: geometria semi-euclidiana negando o axioma arquimediano; geometria semi-euclidiana negando os axiomas arquimediano e de paralelismo; geometria semi-elíptica negando os axiomas arquimediano e de paralelismo.

Partindo do sistema axiomático conhecido como Plano de Hilbert, construímos um modelo algébrico para este sistema baseado em um corpo qualquer, que, para nossos propósitos, foi tomado não arquimediano. O estudo feito por Saccheri, relido sob a ótica axiomática de Hilbert, permitiu-nos distinguir três regiões disjuntas no universo de

todos os planos de Hilbert, regiões estas que foram denominadas plano de Hilbert semi-hiperbólico, semi-euclidiano e semi-elíptico. Saccheri e Legendre já haviam demonstrado que, na presença do axioma de Arquimedes, a soma dos ângulos internos de um triângulo não pode exceder dois ângulos retos, o que limita as geometrias arquimedianas a uma parte das regiões semi-hiperbólica ou semi-euclidiana do universo de planos de Hilbert. Todavia, os modelos que estudamos referem-se a geometrias situadas exatamente nos complementos dessas regiões.

Um estudo interessante que poderia ser desenvolvido a partir deste trabalho é a construção de um modelo algébrico para o plano de Hilbert semi-hiperbólico não arquimediano, com a finalidade de contar com a gama completa de modelos algébricos para algumas das regiões que foi particionado o universo de todos os planos de Hilbert. Além disso, a partir do estudo algébrico-geométrico que foi exposto neste trabalho, poderia ser desenvolvido um software de geometria dinâmica que modele as situações aqui abordadas. Na área de Educação Matemática, seria desafiador elaborar material didático abordando o estudo de Geometrias não arquimedianas orientado a alunos de licenciatura em matemática.

Referências Bibliográficas

- [1] Archimedes, *The works of Archimedes*. New York: Dover, 1953.
- [2] Bonola, R., Bolyai, J., Lobachevskii, N. I., *Non-Euclidean geometry: a critical and historical study of its development*. New York: Dover, 1955.
- [3] Castrucci, B., *Fundamentos de geometria: estudo axiomático do plano euclidiano*. Rio de Janeiro: LTC, 1978.
- [4] Cederberg, N., *A course in modern Geometries*. 2nd ed. New York: Springer-Verlag, 1991.
- [5] Cerroni, C. *The contributions of Hilbert and Dehn to non-Archimedean geometries*. Revue d'Histoire des Mathématiques 13, no. 2, 2007, p. 259-299.
- [6] Dehn, M., *Die Legendre'schen Sätze über die Winkelsumme im Dreieck*. Math. Ann., 53, 1900, p. 404-439.
- [7] Euclid., Vitrac, Bernard, éd. trad., *Les Éléments*, Vol. 2 livres V à IX. 1ère édition. Paris: Presses Universitaires de France, 1994.
- [8] Gianella, A., *Ficha didáctica: método y sistemas axiomáticos*. Buenos Aires: Ediciones Cooperativas. v.1.1. maio 2008. Disponível em: <<http://www.catedra-garcia.com.ar/files/all/sisax.pdf>>. Acesso em 24 mar. 2010.
- [9] Greenberg, M. J., *Euclidean and Non-Euclidean Geometries Without Continuity*. American Mathematical Monthly, Vol. 86, N°9, Nov. 1979. p. 757-764.

- [10] Greenberg, M. J., *Old and New Results in the Foundations of Elementary Plane Euclidean and Non-Euclidean Geometries*. American Mathematical Monthly, Vol. 117, N°3, Mar. 2010. p. 198-219.
- [11] Hartshorne, R., *Geometry: Euclid and beyond*. New York: Springer-Verlag, 2000.
- [12] Hilbert, D., Townsend, E. J., *The foundations of geometry*. La Salle, Ill: The Open Court Pub. Co., 1950.
- [13] Hilbert, D., *Fundamentos de la geometria*. Madrid: Instituto “Jorge Juan” de Matemáticas, 1953.
- [14] Hilbert, D., *Grundlagen der Geometrie*. Ed. 13, Mit Supplementen von Paul Bernays, Teubner Studienbücher, Teubner, 1987.
- [15] Jonhson, M., Libeskind, S., *Non-Euclidean Geometry Topics to Accompany Euclidean and Transformational Geometry*. Jones and Bartiett Publishers. Disponível em: <<http://www.jbpub.com/samples/0763743666/NonEuclideanCompanion.pdf>>. Acesso em 03 nov. 2009.
- [16] Legendre, A. M, *Elementos de Geometria*. Tradução Manoel Ferreira de Araújo Guimarães; adaptação e organização Luiz Carlos Guimarães. Ed. LIMC-UFRJ. Rio de Janeiro, 2009.
- [17] Martin, G. E., *The foundations of geometry and the non-Euclidean plane*. New York: Intext Educational Publishers, 1975.
- [18] Moise, E. E., *Elementary geometry from an advanced standpoint*. 2d ed. Reading, Mass.: Addison-Wesley Pub. Co., 1974.
- [19] Ryan, P. J., *Euclidean and non-Euclidean geometry: an analytical approach*. New York: Cambridge University Press, 1986.

- [20] Saccheri, G., Bruce, G., *Girolamo Saccheri's Euclides Vindicatus*. Chicago: The Open Court Publishing Company, 1920.
- [21] Smith, J. T., *Definitions and Nondefinability in Geometry*. American Mathematical Monthly, Vol. 117, N°3, Jun.-Jul. 2010. p. 475-489.
- [22] Szendrei, A., *Non-Archimedean Geometry*. Notas de aula: Euclidean and Non-Euclidean Geometry, MATH 3210, Spring. Colorado. 10 abr. 2009. Disponível em: <http://spot.colorado.edu/~szendrei/Geom_S09/sec18.pdf>. Acesso em 06 set. 2009.
- [23] Vernet, O., *Geometria Neutra*. Notas de aula: Geometria I, MAE713. Rio de Janeiro. 2008.
- [24] Veronese, G., *La Geometria non-Archimedeana*. Atti dei IV Congresso internazionale dei Matematici, Roma, 6-11 Aprile 1908. Vol. I. Pubblicati per cura del segretario generale G. Castelnuovo, 2009. p. 197-208.

Apêndice A

OS TEOREMAS DE LEGENDRE SOBRE A SOMA DOS ÂNGULOS NO TRIÂNGULO

MAX DEHN, em Göttingen

Introdução.

A base para as pesquisas seguintes é o tratado do Prof. Hilbert sobre os Fundamentos da Geometria. Neste é estabelecido um sistema de axiomas divididos em cinco grupos. O primeiro grupo contém os axiomas de incidência - por exemplo: dois pontos distintos A e B determinam sempre uma reta a . O segundo grupo reúne os axiomas de ordem - por exemplo: se A, B, C são pontos de uma reta e B está entre A e C , então B também está entre C e A . O terceiro grupo consiste do conhecido Axioma das Paralelas (o Axioma Euclidiano). O quarto grupo contém os axiomas de congruência e o quinto, finalmente, o Axioma de Arquimedes. Este último diz:

Seja A_1 um ponto arbitrário sobre uma reta entre os pontos arbitrariamente dados A e B ; construam-se, então, os pontos A_2, A_3, A_4, \dots de forma que A_1 esteja entre A e A_2 , A_2 entre A_1 e A_3 , A_3 entre A_2 e A_4 , etc. . . e os segmentos

$$AA_1, A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, \dots$$

sejam todos congruentes. Então existe sempre na sequência A_2, A_3, A_4, \dots um ponto A_n tal que B esteja entre A e A_n .

Em [1], persegue-se globalmente o princípio de discutir qualquer questão que se apresente de forma que, simultaneamente, fique provado se a sua resposta por um caminho prescrito com certos meios restritos é possível ou não. Em uma prova desta natureza consiste o presente trabalho.

Sabidamente estabeleceu Legendre em suas pesquisas sobre a prova do axioma das paralelas dois teoremas importantes:

- 1) *Em um triângulo, a soma dos três ângulos nunca pode exceder dois ângulos retos.*
- 2) *Quando em um triângulo qualquer a soma dos três ângulos é igual a dois ângulos retos, isto se dá para todo triângulo.*

Ao provar estes teoremas, Legendre utilizou essencialmente o supracitado axioma de Arquimedes. Entretanto, é possível - Euclides contudo não o fez - construir uma geometria sem o axioma de Arquimedes e daí levanta-se a importante questão: *valem em tal geometria necessariamente os teoremas de Legendre?* Ou em outras palavras: *é possível provar os teoremas de Legendre sem fazer uso de qualquer axioma de continuidade, isto é, sem empregar o axioma de Arquimedes?* Ocorre, como desejamos mostrar a seguir, nesta relação uma estranha diferença entre ambos os teoremas: enquanto o segundo deles pode ser provado com base nos axiomas do primeiro, segundo e quarto grupos (o terceiro grupo - o axioma Euclidiano - não podemos certamente utilizar), o mesmo é impossível com relação ao primeiro teorema. Para produzir a prova a esta afirmação, devemos estabelecer uma nova geometria não-Euclidiana, que desejamos denominar *Geometria "não-Legendriana"*.

CAPÍTULO I. Sistemas de Coordenadas e Cálculo de Segmentos.

§1. Elementos Ideais (Pontos, Retas, Planos).

Embora através dos axiomas de incidência se diga que duas retas distintas se podem cortar em apenas um ponto, não podemos assegurar que, quando jazem em um mesmo plano, sempre se cortem. Pelo contrário, podemos com o teorema do ângulo externo deduzir que, por todo ponto P fora de uma reta a, passa pelo menos uma reta b que não corta a. Por outro lado, podemos projetar o plano das duas retas a partir de um ponto, de forma que as projeções de ambas se cortem no plano de projeção em um ponto

real. Desta maneira, diz-se que as retas a e b determinam um ponto *ideal* em seu plano e uma terceira reta passa por esse ponto quando ela, na projeção, passar pelo ponto real. Da mesma forma, podem-se introduzir *retas ideais* como o encontro de planos que não se interceptam, ou também como a ligação entre dois pontos ideais que não pertençam à mesma reta real. Como é mostrado nos §§ 5, 6, 7, 8 em [2], os elementos dessa geometria estendida satisfazem todos os axiomas de incidência.

Não tão imediatamente podemos dizer o mesmo dos axiomas de ordem, pois é claro que o conceito de “estar entre” não é um invariante projetivo. Por isso é impossível libertar-se de uma certa dose de arbitrariedade para conseguir a validade dos Axiomas de Ordem. De modo mais simples, procedemos da seguinte maneira: ⁽¹⁾ assumimos sobre toda reta um ponto ideal como *ponto normal* e dizemos: A está entre B e C quando o par de pontos constituído por A e pelo ponto normal separa o par de pontos B, C . Uma definição clara do conceito de *separar* é, a partir da precedente introdução de elementos ideais, fácil de conceber. É trivial nos convertermos de que este conceito é invariante através de projeções. Os pontos normais em sua totalidade tomamos como pontos de um plano ideal - o *plano normal*. Em qualquer plano, os pontos normais pertencem a uma reta ideal - a *reta normal*. Como consequência destas constatações, *valem os axiomas de ordem para a totalidade dos elementos ideais e reais, com exceção dos elementos do plano normal*.

Então podemos, para a nossa geometria estendida, demonstrar o *teorema de Desargues sobre triângulos em perspectiva*, o qual, dado que todas as retas se cortam, podemos formular da seguinte maneira:

Quando dois triângulos ABC e $A'B'C'$ jazem em um plano de forma que os pares de lados correspondentes AB e $A'B'$, AC e $A'C'$ e BC e $B'C'$ encontram-se em três pontos sobre uma reta, então as retas que unem os vértices correspondentes AA' , BB' e CC' hão de encontrar-se em um ponto e vice-versa.

Este teorema vale para todos os elementos de qualquer plano sem exceção, inclusive os elementos normais. Pois, supondo que, por causa da posição da figura ou da posição dos elementos auxiliares utilizados na demonstração, pontos ou retas coincidam com pontos ou retas normais, ou ainda um plano com um plano normal, tomaríamos um outro plano ideal adequado como plano normal e, considerando a posição especial dos elementos da figura, demonstraríamos o teorema. Portanto, o teorema seria verdadeiro se escolhêssemos arbitrariamente um outro plano normal.

Pois um teorema que trate apenas de interseções vale naturalmente de forma independente do posicionamento especial com que nos deparemos para a ordem dos pontos

⁽¹⁾Veja [2], 1. c., §9.

no espaço.

Outra introdução de elementos ideais é dada por Schur [3], baseada no teorema da unicidade da construção do quarto harmônico. Para finalizar, observemos que é possível solucionar o problema de forma mais simples por um terceiro método, que se apóia integralmente no exame do §24 de [1]. Lá é estabelecido um cálculo de segmentos com auxílio dos axiomas planos do primeiro e do segundo grupos e do teorema de Desargues. Livrementemente, por motivo de simplificação, é empregado o axioma das paralelas, o que, em nossa consideração, naturalmente sempre deveremos evitar. Mas esse inconveniente não é certamente uma necessidade. Com auxílio do cálculo de segmentos é demonstrado que a equação da reta é linear nas coordenadas. Daí decorre facilmente que a extensão da geometria desenvolvida acima é possível e que, em especial, o teorema de Desargues é igualmente válido na geometria estendida.

§2.

Pólos e Polares.

No que se segue, assumiremos que os *axiomas planos de congruência* são satisfeitos para pontos e retas “reais” e demonstraremos três lemas no domínio estendido dos pontos e retas do plano.

Lema 1 *Todas as perpendiculares a uma reta m cortam-se em um ponto (ideal) (veja Fig. 1).*

Prova: Levantamos, por A e B , as perpendiculares l_1 e l_2 a m e tiramos por um ponto arbitrário C sobre AB uma reta l_3 de forma que l_1 , l_2 e l_3 passem pelo mesmo ponto⁽²⁾. Tiramos, então, por um ponto D duas retas g e g_1 , de forma que as retas l_1 , l_2 e l_3 as encontrem nos pontos E , F , G e E_1 , F_1 , G_1 , respectivamente, e que m seja a bissetriz do ângulo EDE_1 . A construção deve ser feita de forma que os pontos A , B , C , D , E , F , G , E_1 , F_1 , e G_1 sejam todos reais. Suponhamos que F e F_1 estejam entre E e G e entre E_1 e G_1 , respectivamente.

Ligamos F com G_1 e E_1 , F_1 com E e G . Então FE_1 e F_1E , FG_1 e F_1G devem encontrar-se em pontos reais O_1 e O_2 . Como, por construção, l_1 , l_2 e l_3 passam por um ponto, os triângulos EF_1G e E_1FG_1 estão em perspectiva e D , O_1 e O_2 estão sobre uma reta. Decorre então da congruência dos triângulos DEF_1 e DE_1F que os triângulos DEO_1 e DE_1O_1 são congruentes e, por isso, os ângulos EDO_1 e O_1DE_1 são congruentes e que,

⁽²⁾N. do T. Na verdade, o que está sendo demonstrado neste lema é que, se as perpendiculares l_1 e l_2 a uma reta m encontram-se em um ponto, então qualquer reta l_3 que passe por este ponto será perpendicular a m .

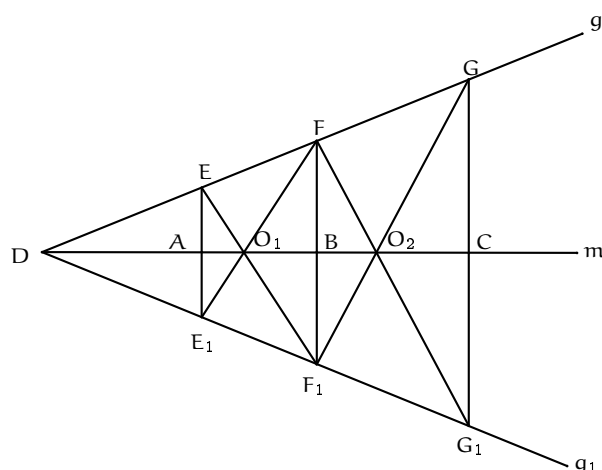


Fig. 1

portanto, as retas DO_1O_2 e m coincidem. Disso se conclui, por um simples exame de congruência, que l_3 é também perpendicular a m . É claro como a prova se modifica quando F não está entre E e G . ■

No futuro, vamos denominar *pólo* de m o ponto no qual todas as perpendiculares à reta m concorrem.

Lema 2 *Os pólos das retas que concorrem em um ponto próprio O estão sobre uma reta (ideal) e todo ponto desta reta é pólo de alguma reta que passa por O (veja Fig. 2).*

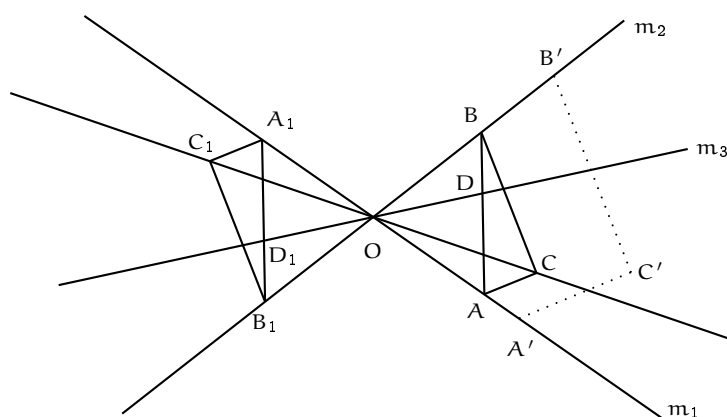


Fig. 2

Prova: Tiremos, por O , três retas m_1 , m_2 e m_3 . Baixemos por um ponto real C' as perpendiculares a m_1 e m_2 , cujos pés denominaremos A' e B' . Tracemos então uma reta perpendicular a m_3 por D , de forma que cortem $A'O$ e $B'O$ em A e B , que devem estar entre A' e O e entre B' e O respectivamente. As perpendiculares a m_1 e m_2 levantadas por A e B devem - como se vê de imediato - cortar-se em um ponto C real⁽³⁾. No prolongamento da reta OB , tomemos OB_1 congruente a OB e, da mesma forma, OA_1 congruente a OA e OC_1 congruente a OC ; finalmente, prolonguemos DO até encontrar B_1A_1 em D_1 . Então, como se mostra por aplicação repetida de congruência: o ângulo C_1B_1O é congruente ao ângulo C_1A_1O , o ângulo A_1D_1O é congruente a um ângulo reto. Mas os triângulos $C_1B_1A_1$ e CBA estão em perspectiva. Conseqüentemente, os pontos de interseção entre C_1A_1 e CA , C_1B_1 e CB e A_1B_1 e AB , ou seja, os pólos das três retas m_1 , m_2 e m_3 estão sobre uma mesma reta. Como os pólos de três retas quaisquer passando por O jazem sobre uma mesma reta, o mesmo acontecendo claramente para todas as retas que passam por O , denominá-la-emos *polar* do ponto O . Reciprocamente, seja P um ponto da polar. Tiremos por um ponto real arbitrário P' uma reta que passa por P e levantemos a perpendicular por O à reta PP' . Logo, o pólo desta última reta é o ponto P . Com isto, nosso segundo lema está completamente demonstrado. ■

O lema seguinte tem seu conteúdo integralmente calcado nos lemas precedentes e nós o empregaremos mais tarde. Ele diz:

Lema 3 (Lema da Mediatriz) *Levante-se, pelo ponto médio M de um segmento AB , a perpendicular l e tirem-se, pelos extremos do segmento, duas retas a e b que se encontram em um ponto real ou ideal de l . Então as retas a e b formam com a reta AB ângulos congruentes e as perpendiculares a l determinam segmentos congruentes sobre a e b (veja Fig. 3).*

A prova será feita indiretamente:

Prova: Suponhamos que as semi-retas a_1 e b_1 partindo de A e B estejam de um mesmo lado da reta AB e que o ângulo entre a_1 e a semi-reta AB (menor que dois retos) não seja congruente ao ângulo (menor que dois retos) entre b_1 e a semi-reta BA . Tiramos, então, por B uma reta b' tal que sua semi-reta b'_1 , partindo de B e do mesmo lado da reta AB , forme com a semi-reta BA um ângulo congruente ao que a_1 forma com a semi-reta AB .

Prolongamos AB a partir de A e B segundo segmentos congruentes até C e D e ligamos os pontos C e D a dois pontos reais E e F sobre l . Que a reta a corte CE em G e CF em H , que a reta b' corte DE em J e DF em K .

⁽³⁾N. do T. Decorre do fato de as perpendiculares a m_1 e m_2 por A' e B' encontrarem-se em C' , B estar entre O e B' e A estar entre O e A' .

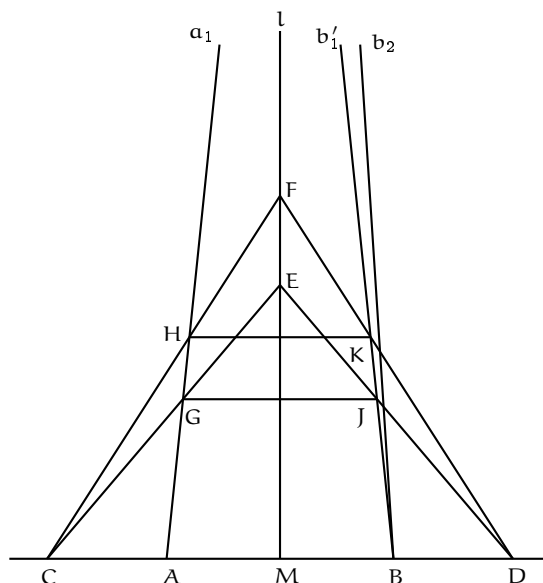


Fig. 3

Os pontos $A, B, C, D, E, F, G, H, J, K, M$ são, por hipótese ou construção, pontos reais, de forma que podemos aplicar os teoremas de congruência. Disso se segue que as retas JG e HK são perpendiculares a l .

Portanto JG e HK cortam-se sobre a reta CD (veja Lema 1). Sobre esta última se cortam também, por construção, ambos os pares correspondentes de lados dos triângulos GEJ e HFK , a saber GE e HF , JE e KF . Conseqüentemente estes triângulos estão em perspectiva e as retas que unem vértices correspondentes passam por um ponto. Cortam-se, por este motivo, as retas HG (ou a) e KJ (ou b') sobre FE (ou l). Em conseqüência, b' coincide com b e a primeira parte de nossa afirmação está provada: o ângulo $\sphericalangle GAB$ é congruente a $\sphericalangle ABJ$. Porém, que a perpendicular a l corta a e b segundo segmentos congruentes, segue imediatamente dos teoremas de congruência. Com isto, nosso lema está completamente demonstrado. ■

§3.

Introdução de uma Pseudo-Geometria.

1. Introdução de Pseudo-Paralelas.

Em virtude dos teoremas precedentes, vamos organizar os elementos de nossa Geometria no plano em um sistema de pontos e retas e associar aos elementos deste sistema propriedades tais que, para eles, a totalidade dos axiomas planos de incidência, ordem e congruência seja satisfeita, inclusive o Axioma Euclidiano das paralelas. Este sistema de elementos geométricos vamos denominar *pseudo-geometria*.

Seja O um ponto real arbitrário de nosso plano e t a polar do ponto O (veja §2).

Definições 1 Pontos reais no sentido da nossa pseudo-geometria são todos os pontos reais e ideais da geometria subjacente com exceção dos pontos sobre a reta t .

Retas reais no sentido da nossa pseudo-geometria são todas as retas reais e

Teorema 1 *Os pontos e retas reais da nossa pseudo-geometria satisfazem a totalidade dos axiomas de ordem e incidência e o axioma euclidiano.*

Prova: Pois, através do ponto A fora duma reta α uma e somente uma reta α' que não encontra a α em nenhum ponto real da nossa pseudo-geometria pode ser traçada, a saber a reta α' que se encontra com α sobre a reta t . ■

De acordo com isso, damos a seguinte definição:

Definição 1 *Duas retas α e α' que se cortam sobre a reta t denominamos pseudo-paralelas. Em símbolos: $\alpha \parallel \alpha'$.*

Além disso, demonstramos o seguinte teorema geral sobre pontos de interseção:

Teorema 2 *Sejam uma reta g e dois pontos A_1 e B_1 fora da mesma e suponhamos que a reta A_1B_1 corte g no ponto Y . Ligamos B_1 e A_1 a um ponto X_1 sobre g . As retas A_1X_1 e B_1X_1 encontram-se em uma reta arbitrária passando por Y em A_2 e B_2 . Ligamos A_2 e B_2 com um ponto arbitrário X_2 em g e A_2X_2 e B_2X_2 se encontram com uma reta arbitrária passando por Y em A_3 e B_3 e, assim por diante. Então obtemos uma quantidade arbitrária de pares de pontos:*

$$\begin{cases} A_1, A_2, \dots, A_n, \\ B_1, B_2, \dots, B_n. \end{cases}$$

Então afirmamos que as retas A_iA_k e B_iB_k vão cortar-se sobre g , sendo A_i e B_i , A_k e B_k dois pares de pontos totalmente arbitrários (veja Fig. 4).

Prova: Mostraremos primeiro que as retas A_1A_3 e B_1B_3 cortam-se em um ponto X'_1 sobre g . Os triângulos $A_1B_1X_1$ e $A_3B_3X_3$ estão em perspectiva, pois os correspondentes pares de lados dos triângulos cortam-se nos pontos A_2 , B_2 e Y sobre a reta A_2B_2 .

Conseqüentemente as linhas de ligação dos vértices correspondentes A_1A_3 , B_1B_3 e X_1X_2 passam por um ponto X'_1 sobre g , o que queríamos mostrar. Então o teorema todo

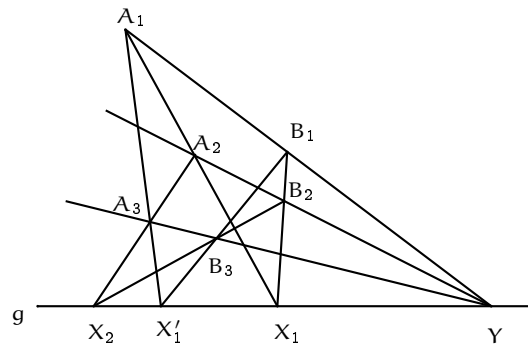


Fig. 4

decorre facilmente, se aplicarmos agora a nossa constatação à seqüência de pares de pontos:

$$\begin{aligned} &A_1, A_3, \dots, A_n, \\ &B_1, B_3, \dots, B_n. \end{aligned}$$

que, devido ao que acabou de ser provado, possui exatamente as mesmas propriedades que a seqüência antiga. Podemos mostrar que A_1A_4 e B_1B_4 se cortam sobre g e, por indução, mostramos que as retas A_1A_k e B_1B_k cortam-se sobre g .

Exatamente da mesma maneira concluímos, para cada par arbitrário de retas de ligação A_iA_k , B_iB_k , que elas se cortam sobre g . ■

Denominamos pseudo-paralelogramo um quadrilátero cujos lados sejam dois a dois pseudo-paralelos. Se tomarmos a reta g do teorema precedente como sendo a polar t de O , podemos enunciar o seguinte teorema (veja Fig. 5): *Se construirmos sobre o*

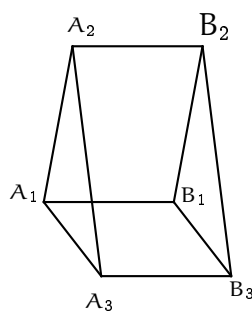


Fig. 5

segmento A_1B_1 um pseudo-paralelogramo $A_1B_1A_2B_2$, sobre o segmento A_2B_2 um novo pseudo-paralelogramos $A_2B_2A_3B_3$ e chegarmos, através da continuação deste processo, a uma seqüência de pares de pontos:

$$\begin{aligned} &A_1, A_2, \dots, A_n, \\ &B_1, B_2, \dots, B_n. \end{aligned}$$

então as retas A_iA_k e B_iB_k são pseudo-paralelas, onde A_i e B_i , A_k e B_k são dois pares arbitrários destes pontos.

Quando dois pares de pontos resultam um do outro através da construção do pseudo-paralelogramo, como A_i e B_i de A_1 e B_1 , diremos que o segmento A_iB_i resulta do segmento A_1B_1 através de um *deslocamento pseudo-paralelo*. O seguinte fica imediatamente claro: Se A_iB_i resulta de A_1B_1 por um *deslocamento pseudo-paralelo*, então A_1B_1 resulta também de A_iB_i por um deslocamento pseudo-paralelo. Podemos por isso também dizer: dois tais segmentos resultam *um do outro* por deslocamento pseudo-paralelo.

2. Pseudo-Congruência de Segmentos.

Definição 2 Vamos considerar dois segmentos AB e $A'B'$ pseudo-congruentes (em símbolos $AB \approx A'B'$) quando: ou esses segmentos decorrem um do outro por deslocamento pseudo-paralelo; ou, a partir deles, por um deslocamento pseudo-paralelo, dois segmentos OE e OF se originam tais que a reta EF passa pelo pólo da bissetriz do ângulo EOF ⁽⁴⁾.

O ponto O tem no início deste parágrafo significado definido.

Teorema 3 Sejam A e B dois pontos sobre uma reta a e além disso A' um ponto sobre a mesma ou outra reta a' . Então pode-se, sobre um dado lado da reta a' a partir de A' , sempre um e somente um ponto B' encontrar de modo que AB (ou BA) seja pseudo-congruente ao segmento $A'B'$. Todo segmento é pseudo-congruente a ele mesmo.

Prova: Como facilmente podemos por um deslocamento pseudo-paralelo fazer com que o segmento AB resulte de si mesmo, todo segmento é pseudo-congruente a si mesmo. De resto, vamos provar o teorema em dois passos:

- a) Primeiramente vamos assumir que a e a' ou são idênticas ou são pseudo-paralelas. Aplicamos sobre o segmento AB um deslocamento pseudo-paralelo qualquer e chegamos a um par de pontos A_n e B_n não pertencentes à reta a' . Ligamos A_n a A' e traçamos por B_n uma pseudo-paralela a A_nA' que corta a' em B'_1 . B'_1 deve ser um ponto real no sentido da nossa pseudo-geometria, do contrário deveria a reta

⁽⁴⁾N. do T. O segundo caso equivale à situação em que os segmentos AB e $A'B'$ devem apoiar-se em retas paralelas a t na geometria subjacente.

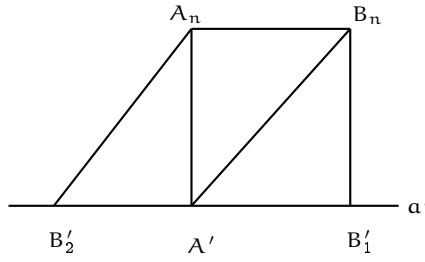


Fig. 6

B'_1B_n ser pseudo-paralela à reta α' , o que não é possível uma vez que: $B'_1B_n \parallel A'A_n$ e por isso também deveria ser $A'A_n \parallel \alpha'$, o que não é o caso. Portanto $A'A_n$ e α' têm um ponto A' real em comum, no sentido da nossa pseudo-geometria. Ligamos a seguir A' a B_n e traçamos por A_n uma pseudo-paralela $A'B_n$. Esta encontra α' em um ponto B'_2 que também é um ponto real da nossa pseudo-geometria.

Como para tais pontos os axiomas de ordem são totalmente satisfeitos (veja §3, 1), decorre facilmente que B'_1 e B'_2 estão de lados opostos da reta α' em relação a A' . Já que, pela definição, os segmentos B'_1A' e B'_2A' são pseudo-congruentes ao segmento AB , provamos a primeira parte do teorema. Poder-se-ia perguntar ainda se nós não teríamos chegado a outros pontos B'_1 e B'_2 por um outro modo de construção. Vamos então aplicar sobre o segmento AB um outro deslocamento pseudo-paralelo qualquer e supor que chegamos a um outro segmento $A'B'_3$ sobre α' . Chamemos a esta seqüência de pares de pontos correspondentes:

$$\begin{aligned} A\bar{A}_1\bar{A}_2\dots\bar{A}_nA', \\ B\bar{B}_1\bar{B}_2\dots\bar{B}_nB'_3, \end{aligned}$$

então consideramos a seqüência de pares de pontos correspondentes

$$\begin{aligned} A'A_nA_{n-1}\dots A_1A\bar{A}_1\dots\bar{A}_n, \\ B'_1B_nB_{n-1}\dots B_1B\bar{B}_1\dots\bar{B}_n. \end{aligned}$$

Decorre que ⁽⁵⁾ \bar{A}_nA' e $\bar{B}_nB'_1$ são pseudo-paralelas e também B'_3 coincide com B'_1 , já que por um ponto \bar{B}_n passa apenas uma pseudo-paralela a uma reta \bar{A}_nA' . Se a seqüência de pares de pontos correspondentes pela segunda maneira de construção se chamar

$$\begin{aligned} A\bar{A}_1\dots\bar{A}_nB'_3, \\ B\bar{B}_1\dots\bar{B}_nA', \end{aligned}$$

então consideramos a seqüência de pares de pontos correspondentes

$$\begin{aligned} B'_2A_n\dots A_1A\bar{A}_1\dots\bar{A}_n, \\ A'B_n\dots B_1B\bar{B}_1\dots\bar{B}_n. \end{aligned}$$

⁽⁵⁾Veja §3, 1 o caso especial do teorema geral acerca de pontos de interseção.

E deduzimos, exatamente como antes, que B'_3 deve coincidir com B'_2 . Com isso, sob as hipóteses feitas no começo, nosso teorema está completamente provado.

- b) Agora, assumimos que α e α' não sejam idênticas nem pseudo-paralelas. Traçamos por O as pseudo-paralelas b e b' a α e α' .

Transportamos o segmento AB por um deslocamento pseudo-paralelo sobre b originando o segmento OE_1 . Seja X um ponto sobre b' , traçamos por E_1 e pelo pólo da bissetriz do ângulo E_1OX uma reta que corta OX em um ponto real F da nossa pseudo-geometria. Então, se fosse $E_1F \parallel OF$, deveria OF passar pelo pólo da bissetriz de E_1OF e, portanto, ser perpendicular à dita bissetriz. O ângulo E_1OF seria igual a $2R$ o que, pela hipótese, está excluído. Transportamos o segmento OF por deslocamento pseudo-paralelo, como acabou de ser mostrado, para dois segmentos $A'B'_1$ e $A'B'_2$ sobre α' , onde A' está entre B'_1 e B'_2 . Então, pela definição, os segmentos $A'B'_1$ e $A'B'_2$ são pseudo-congruentes a AB e a primeira parte de nossa afirmativa está também, para este caso, provada. Como o deslocamento pseudo-paralelo do segmento OF para $A'B'_1$ e $A'B'_2$ de acordo com a parte a) da nossa prova é unicamente determinado, então só através de uma modificação de uma outra parte da nossa construção de transporte podemos chegar a um outro ponto B' . Através do deslocamento pseudo-paralelo do segmento AB sobre a reta b , chegamos, além de ao ponto E_1 também ao ponto E_2 de forma que O esteja entre E_1 e E_2 . O fato de cada uma das semi-retas OE_1 e OE_2 formar com a reta b' dois ângulos, conduz a duas construções para o ponto F . Chegamos portanto, ao todo, a quatro pontos F . Vamos mostrar que eles coincidem dois a dois: mantemos de lado ainda dois pontos F_1 e F_2 em seguida mostramos que o segmento OF_1 e OF_2 decorrem um do outro por um deslocamento pseudo-paralelo. Segue daí finalmente, de acordo com caso especial do nosso teorema geral sobre ponto de interseção (§3,1), que devemos chegar sempre aos mesmos pontos B'_1 e B'_2 através do deslocamento pseudo-paralelo dos segmentos OF_1 e OF_2 e portanto também por um transporte arbitrário do segmento AB sobre α' a partir do ponto A' .

Pela hipótese (veja Fig. 7), o segmento E_2O deriva do segmento E_1O através de um deslocamento pseudo-paralelo. Portanto, se traçamos por O uma pseudo-paralela E_1F_1 e por F_1 uma pseudo-paralela a OE_1 e ligamos o ponto de interseção G de ambas pseudo-paralelas com E_2 , então pelo teorema do ponto de interseção, já frequentemente mencionado, GE_2 deve ser pseudo-paralela a F_1O . Levantamos por O as perpendiculares l_1 e l_2 a OE_1 e OF_1 .

Então baixamos por um ponto real adequadamente escolhido H de OG as perpendiculares a l_1 e l_2 que cortam OF_1 e OE_2 nos pontos reais J e K , respectivamente. Então é fácil mostrar que OG é a bissetriz do ângulo E_2OF_1 e que KJ é perpendicular a OG e portanto passa pelo pólo desta reta. Então os triângulos GF_1E_2 e HJK estão em perspectiva, pois as retas que ligam pares de vértices correspondentes passam por O .

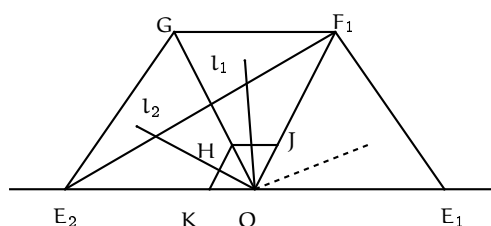


Fig. 7

Como os lados são pseudo-paralelos dois a dois e se cortam sobre a reta t , então devem também os terceiros lados E_2F_1 e KJ serem pseudo-paralelos e E_2F_1 passa pelo pólo da bissetriz do ângulo E_2OF_1 , porque o mesmo vale para reta KJ . Chegamos portanto, de acordo com o que estipulamos sobre transporte pseudo-congruente de segmentos a partir de E_2 ao mesmo ponto F_1 sobre uma das semi-retas da reta b' como a partir de E_1 . Através de um transporte arbitrário do segmento AB sobre b' chegamos portanto ao todo a dois pontos F_1 e F_2 de forma que $OF_1 \approx AB$ e $OF_2 \approx AB$ e O esteja entre F_1 e F_2 .

Além disso, traçamos (veja Fig. 8) por E_1 e O pseudo-paralelas a F_1O e F_1E_1 .

Ligamos o ponto L de interseção de essas duas retas auxiliares com F_2 , levantamos por O as perpendiculares a OE_1 e OF_1 , l_1 e l_2 . Baixamos por um ponto M adequadamente escolhido da reta OL as perpendiculares a l_1 e l_2 que cortam OF_2 em N e OE_1 em P , onde M , N , P são pontos reais. Então decorre, igualmente como antes, que OL é a bissetriz do ângulo E_1OF_2 e que PN é perpendicular a OL e portanto passa pelo pólo de OL . Os triângulos E_1LF_2 e PMN estão em perspectiva; como os pares de lados E_1L e PM , E_1F_2 e PN por construção ou por hipótese se cortam sobre a reta t , vale o mesmo para o terceiro par de lados. Por isso LF_2 e MN são pseudo-paralelas e finalmente, também LF_2 e OE_1 .

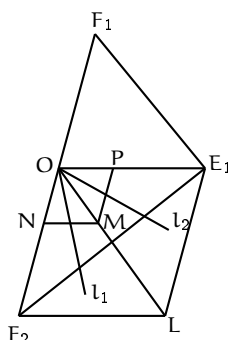


Fig. 8

Os segmentos F_1O e F_2O derivam um do outro por deslocamento pseudo-paralelo, como queríamos demonstrar. ■

Teorema 4 ⁽⁶⁾ Quando um segmento AB é pseudo-congruente ao segmento $A'B'$ e também ao segmento $A''B''$, então os segmentos $A'B'$ e $A''B''$ são pseudo-congruentes. Em símbolos: Quando

$$AB \approx A'B',$$

e

$$AB \approx A''B'',$$

também cumpre-se

$$A'B' \approx A''B''.$$

Como está claro que, quando dois segmentos $A'B'$ e $A''B''$ decorrem de um terceiro através de um deslocamento pseudo-paralelo, então também $A'B'$ e $A''B''$ decorrem um do outro por um deslocamento pseudo-paralelo. Precisamos apenas provar o seguinte:

Se temos três retas passando por um ponto O (veja Fig. 9) e sobre as mesmas respectivamente os pontos A , B e C e se a reta AB passa pelo pólo da bissetriz do ângulo AOB e a reta AC pelo pólo da bissetriz do ângulo AOC , então BC passa também pelo pólo da bissetriz do ângulo BOC .

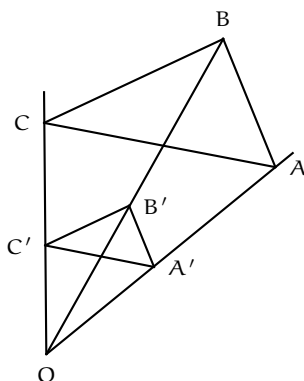


Fig. 9

Se transportarmos sobre OA , OB e OC os segmentos reais congruentes OA' , OB' , OC' então, como é fácil mostrar, as retas $A'B'$, $B'C'$ e $C'A'$ passam pelos pólos das bissetrizes dos ângulos AOB , BOC , AOC . Os triângulos ABC e $A'B'C'$ estão em perspectiva, então seus vértices estão sobre três retas que passam por O . Conseqüentemente cortam-se os pares de lados correspondentes sobre uma reta. Como AB e $A'B'$, AC e $A'C'$ por hipótese e construção se cortam sobre a polar de O então BC e $B'C'$ sobre esta mesma polar se cortam. Então o ponto de interseção de $B'C'$ com a polar de O é o pólo

⁽⁶⁾ Compare-se com [1], §6. Segundo axioma de Congruência

da bissetriz do ângulo $B'OC'$; conseqüentemente BC também passa, como afirmado, pelo pólo da dita bissetriz. ■

Teorema 5 ⁽⁷⁾ *Sejam AB e BC dois segmentos sem ponto comum na reta a e além disso $A'B'$ e $B'C'$ dois segmentos sem ponto comum sobre a mesma ou outra reta a' . Se $AB \approx A'B'$ e $BC \approx B'C'$ também é $AC \approx A'C'$.*

Novamente podemos-nos restringir à prova do teorema, como facilmente visível, quando se trata de um transporte pseudo-congruente sobre retas diferentes passando por O (veja Fig. 10).

Hipótese:

$$OD \approx OC,$$

$$DF \approx CE$$

Afirmativa:

$$OF \approx OE$$

Transportamos através de deslocamento pseudo-paralelo DF e CE sobre segmentos com uma mesma extremidade comum O , sendo A e B os outros extremos, onde A e B estão sobre semi-retas OC e OD . Traçamos por B uma pseudo-paralela a OA e por A uma pseudo-paralela a OB , que se cortam em G .

Ligamos G a E e F , A a D , D a C , então por hipótese e construção AD e GF , BC e GE , DC e BA são pseudo-paralelas. As últimas duas retas passam pelo pólo da bissetriz do ângulo AOB . Por uma construção auxiliar (ela é indicada na figura), semelhante ao que se acabou de provar⁽⁸⁾, na qual como pontos auxiliares apenas pontos reais aparecem, provamos que G e H pertencem à bissetriz do ângulo AOB . Portanto os triângulos HAB e GEF estão em perspectiva, e como os pares de lados FG e AH , EG e BH cortam-se sobre a reta t , então devem também AB e EF cortar-se sobre t , sendo portanto pseudo-paralelas. BA passa pelo pólo da bissetriz do ângulo AOB . O mesmo vale também para EF . Conseqüentemente $FO \approx EO$, o que era para demonstrar. ■

3. Pseudo-Congruência de Ângulos.

Definição 3 Definimos O conceito “ângulo” na nossa pseudo-geometria exatamente como na geometria subjacente, só que naturalmente o vértice e os lados podem ser quaisquer pontos e retas reais no sentido da nossa pseudo-geometria.

⁽⁷⁾ Compare-se com [1], §6. Terceiro axioma de Congruência.

⁽⁸⁾ Observe-se a perspectividade 1) dos triângulos ABG e JKG' ; 2) dos triângulos com os lados CB , BM , MJ , respectivamente DA , AL , LK e a perspectividade daí decorrente dos triângulos CHD e $JH'K$ (Suposto é: $JG' \parallel AG$, $KG \parallel BG$, $MJ \parallel BC$, $LK \parallel AD$, $LM \parallel AB$)

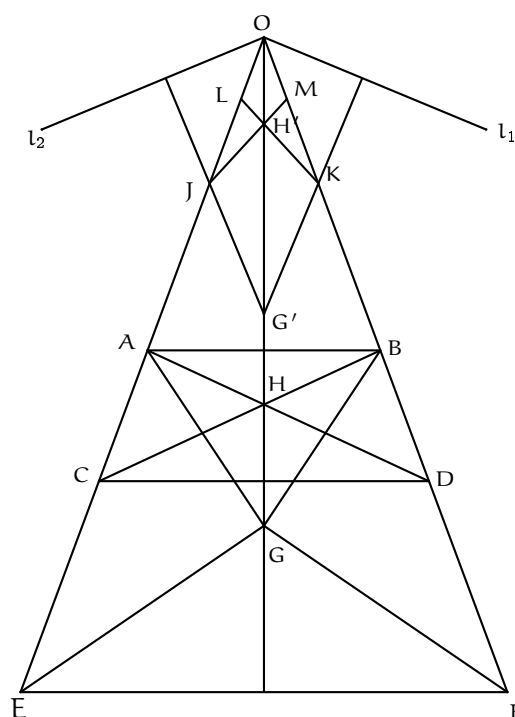


Fig. 10

Pelo vértice A do ângulo BAC (veja Fig. 11) traçamos uma reta arbitrária AD, por D duas semi-retas DF e DE pseudo-paralelas a AB e AC, de tal forma que, se a reta AD separa as semi-retas AB e AC, a mesma separa também as semi-retas DE e DF e reciprocamente. Além disso, traçamos por D uma reta DG e continuamos da mesma maneira chegando, finalmente, a um ângulo YXZ. Então queremos dizer que o ângulo $\sphericalangle YXZ$ deriva do ângulo $\sphericalangle BAC$ por deslocamento pseudo-paralelo.

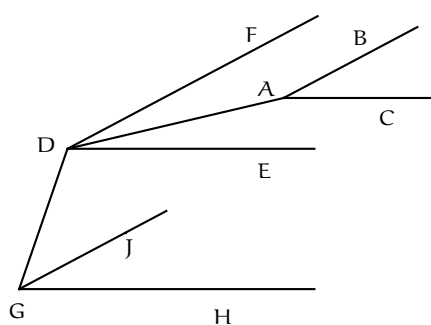


Fig. 11

Então o seguinte fica imediatamente claro: se $\sphericalangle YXZ$ deriva de $\sphericalangle BAC$ por deslocamento pseudo-paralelo, então $\sphericalangle BAC$ deriva de $\sphericalangle YXZ$ por deslocamento pseudo-paralelo. Podemos por isso dizer: dois tais ângulos derivam um do outro por deslocamento pseudo-paralelo.

Definição 4 Dois ângulos $\angle ABC$ e $\angle A'B'C'$ denominamos como pseudo-congruentes (em símbolos $\angle ABC \approx \angle A'B'C'$) quando: ou estes ângulos derivam um do outro por um deslocamento pseudo-paralelo ou a partir deles dois ângulos EOF e GOH com vértice comum O por deslocamento pseudo-paralelo derivam, que são congruentes no sentido da geometria subjacente.

Assim valem, como facilmente se pode ver, os seguintes teoremas ⁽⁹⁾:

Sejam dados um ângulo $\angle BAC$ e uma reta a' assim como um determinado lado de a' . Se B' é um ponto da reta a' então existe uma e somente uma semi-reta $C'A'$, onde A' é um ponto de a' , de forma que o ângulo BAC (ou CAB) seja pseudo-congruente com o ângulo $B'A'C'$ e ao mesmo tempo todos os pontos interiores do ângulo $B'A'C'$ estejam do lado determinado a' . Todo ângulo é pseudo-congruente a si mesmo.

Quando um ângulo BAC é pseudo-congruente tanto ao ângulo $B'A'C'$ quanto ao ângulo $B''A''C''$ então o ângulo $B'A'C'$ é pseudo-congruente ao $B''A''C''$.

4. O Primeiro Teorema de Pseudo-Congruência.

Definição 5 Dois triângulos se chamam pseudo-congruentes quando seus lados e ângulos respectivos são pseudo-congruentes.

Teorema 6 ⁽¹⁰⁾ *Se, em dois triângulos, dois lados e o ângulo por eles compreendidos são pseudo-congruentes, então as partes restantes em ambos os triângulos são pseudo-congruentes.*

Dividimos a prova em duas partes:

- a) Sejam-nos dados um triângulo ABC (veja Fig. 12) e um ponto arbitrário A' . Ligamos A a A' e traçamos por A' pseudo-paralelas a AB e BC , que cortam as pseudo-paralelas a AA' por B e C em B' e C' , respectivamente. Então os triângulos ABC e $A'B'C'$ estão em perspectiva, pois AA' , BB' , CC' passam por um ponto. Como, no em tanto, AB e $A'B'$, AC e $A'C'$ são pseudo-paralelas, então BC e $B'C'$ também o são. Disso se segue que os lados e ângulos no triângulo $A'B'C'$ são pseudo-congruentes aos correspondentes no triângulo ABC .

Portanto: pode-se a cada triângulo encontrar um outro pseudo-congruente de tal forma que um vértice coincida com um ponto arbitrariamente pré-estabelecido.

⁽⁹⁾Veja [1] §6, quarto e quinto axiomas de congruência

⁽¹⁰⁾Veja [1] §6, sexto axioma de congruência e §7, teorema 10.

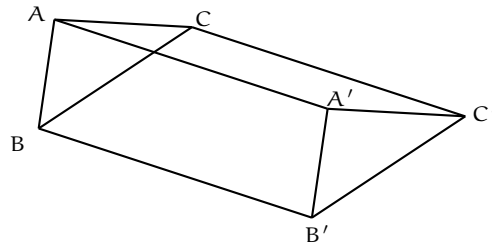


Fig. 12

- b) Suponhamos que em dois triângulos dois lados e ângulo por eles compreendido sejam pseudo-congruentes. Então nós os substituímos de acordo com o caso a) por triângulos pseudo-congruentes, de forma que os vértices dos ângulos pseudo-congruentes caiam no ponto O. Sejam O, A₁ e B₁, O, A₂ e B₂ seus vértices (veja Fig. 13). Então por hipótese:

$$OA_1 \approx OA_2, \quad OB_1 \approx OB_2, \quad \sphericalangle B_1OA_1 \approx \sphericalangle B_2OA_2.$$

Suponhamos que B₁O e B₂O não sejam separados por A₁O e A₂O. Se provamos nosso teorema para este caso, então outro caso, em que B₁O e B₂O são separados por A₁O e A₂O, também procede.

Podemos transportar o triângulo A₁OB₁ em um outro A'₁OB'₁ pseudo-congruente situado de tal forma que os pares de lados correspondentes não se separem. Então A₂O e B₂O não serão separados por A'₁O e B'₁O e podemos provar que os triângulos A'₁OB'₁ e A₂OB₂ e conseqüentemente também A₁OB₁ e A₂OB₂ são pseudo-congruentes. Pois de acordo com teoremas anteriores vale o teorema: Se dois triângulos são pseudo-congruentes a um terceiro triângulo, então eles são pseudo-congruentes entre si.

Por aquelas hipóteses traçamos por A₁ uma pseudo-paralela a B₁O, por A₂ uma pseudo-paralela a B₂O, por O pseudo-paralelas a A₁B₁ e A₂B₂, que se cortam respectivamente em C₁ e C₂. Ligamos A₁ a A₂, B₁ a B₂ e prolongamos A₁B₁ e A₂B₂ até que se cortem em O₂, C₁A₁ e C₂A₂ até que se cortem em O₁. A₁A₂ então pseudo-paralelo a B₁B₂, pois essas duas retas passam, por hipótese, pelo pólo da bissetriz comum dos ângulos B₁OB₂ e A₁OA₂. Conseqüentemente os triângulos A₁O₁A₂ e B₁OB₂ estão em perspectiva, pois os seus lados se cortam sobre a reta t, e O, O₁ e O₂ jazem sobre uma reta. Portanto estão também os triângulos O₂A₁A₂ e OC₁C₂ em perspectiva e C₁C₂, A₁A₂ e B₁B₂ são pseudo-paralelos. Vamos agora mostrar, que a reta OO₁O₂ passa pelo pólo das ultimas três retas nomeadas, isto é coincide com a bissetriz comum dos ângulos A₁OA₂ e B₁OB₂; além disso também, que OO₁O₂ divide ao meio o ângulo C₁OC₂.

Transportamos de forma pseudo-congruente o segmento OB₁ até B₃ sobre a reta OA₁, o segmento OB₂ até B₄ sobre OA₂, o segmento OA₁ até A₃ sobre OB₁, o

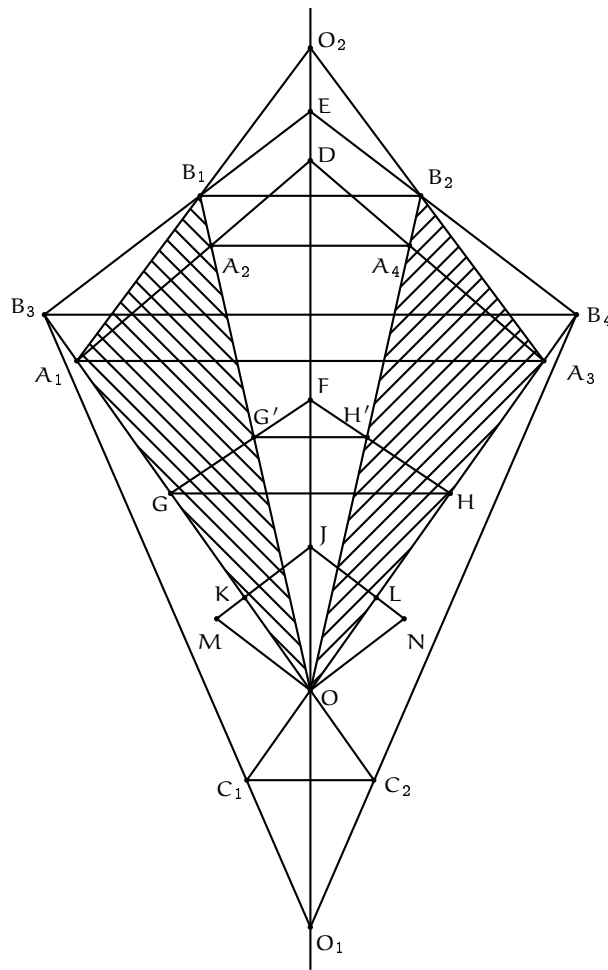


Fig. 13

segmento OA_2 até A_4 sobre OB_2 . Então A_3A_4 , B_3B_4 , B_1B_2 e A_1A_2 , $-B_1B_3$ e A_1A_3 , $-B_2B_4$ e A_2A_4 são pseudo-paralelas. Prolongamos A_1A_3 e A_2A_4 até que se cortem em D , B_1B_3 e B_2B_4 até que se cortem em E ; então os triângulos A_3DA_4 e B_1EB_2 estão em perspectiva. Conseqüentemente E , D e O jazem sobre uma reta. Por outro lado, os triângulos $A_1B_1A_3$ e $A_2B_2A_4$ estão em perspectiva, pois seus vértices correspondentes estão sobre retas pseudo-paralelas. Em conseqüência O , O_2 e D estão sobre uma reta e também os cinco pontos O , O_1 , O_2 , D , E . Se tivermos agora um triângulo FGH , cujos vértices G e H jazam sobre A_1O e A_2O (ou sobre B_1O e B_2O) e cujos lados são respectivamente pseudo-parallelas às retas A_1A_3 , A_2A_4 e A_1A_2 , então o vértice F do triângulo está sobre a reta DEO , pelo teorema de Desargues, e nosso objetivo estará alcançado se pudermos mostrar que FO é a sabida bissetriz. Está claro que, se não ocorrerem casos excepcionais, que podemos sempre encontrar um triângulo com *pontos reais* F , G , H como vértices que satisfaça essas condições. Posicionamentos excepcionais de ambos os triângulos

que estamos investigando podem ser tratados de tal maneira que transformamos um dos dois triângulos pseudo-congruentemente em um outro arbitrário e que depois escolhemos esse novo como a base de nossas considerações. Se temos um tal triângulo FGH é fácil mostrar que FO é bissetriz do ângulo GOH . (Observe (veja Fig. 13) que, $OG \equiv OH \equiv OG' \equiv OH'$, pois por construção GH e $G'H'$ são perpendiculares à bissetriz comum dos ângulos A_1OA_2 e B_1OB_2). Conseqüentemente C_1C_2 passa pelo pólo de O_1OO_2 . Além disso, escolhemos um ponto real adequado J sobre O_2O e traçamos por J pseudo-paralelas a A_1B_1 e A_2B_2 que cortam OA_1 e OA_2 nos pontos reais K e L , respectivamente. Então segue-se, pelo teorema de Desargues, que KL é pseudo-paralela a A_1A_2 e, portanto, perpendicular a OO_2 . Porque OO_2 é a bissetriz do ângulo A_1OA_2 segue imediatamente que o ângulo KJO é congruente ao ângulo LJO . Se baixarmos por O perpendiculares a JK e JL , sendo M e N respectivamente os pés destas perpendiculares, então por hipótese OM e ON são perpendiculares a OC_1 e OC_2 respectivamente. Então os triângulos MJO e NJO são congruentes; em conseqüência, o ângulo C_1OO_1 é congruente ao ângulo C_2OO_1 , pelo que precede. Portanto, pela nossa definição de pseudo-congruência, C_1O é pseudo-congruente a C_2O e A_1B_1 é pseudo-congruente a A_2B_2 . Como $\sphericalangle A_1OC_1 \equiv \sphericalangle A_2OC_2$, segue das nossas definições sobre pseudo-congruência de ângulos que $\sphericalangle OA_1B_1 \approx \sphericalangle A_2B_2O$. Da mesma forma, mostramos finalmente que os ângulos A_1B_1O e A_2B_2O são pseudo-congruentes. Assim demonstramos completamente o primeiro teorema de pseudo-congruência. ■

Convencer-nos-emos facilmente de que, a cada um dos axiomas de congruência (veja [1] §6), corresponde um dos teoremas sobre pseudo-congruência previamente demonstrados; por isso podemos resumidamente enunciar o seguinte teorema:

Os elementos da nossa pseudo-geometria, com exceção dos elementos da reta t , satisfazem todos os axiomas da Geometria Euclidiana habitual, inclusive o axioma das paralelas e a reta t faz o papel da reta “ideal” ou “infinitamente afastada”.

§4.

Introdução do Cálculo de Segmentos.

Como até agora os nossos teoremas nunca dependeram dos objetos aos quais eles, através da nossa linguagem geométrica, são referidos, mas apenas dos axiomas, ou seja das propriedades que postulamos a partir desses objetos, então tudo o que estiver provado ou se puder provar na geometria habitual estará satisfeito na nossa pseudo-geometria. Daqui em diante vamos fazer deles o mais abrangente uso.

Por exemplo, podemos imediatamente enunciar o teorema:

A soma dos ângulos em um qualquer triângulo é pseudo-congruente a dois retos.

Entretanto queremos igualmente introduzir o cálculo de segmentos como Hilbert o fez em no capítulo III de [1]. Este cálculo possibilita fundamentar a Teoria das Proporções e construir uma espécie de geometria analítica, sem fazer uso do Axioma de Arquimedes, que quisemos excluir em toda a nossa pesquisa.

O quão fácil agora consegue-se proceder, vamos imediatamente reconhecer nas provas dos seguintes teoremas:

- 1) As três alturas em um triângulo se encontram em um ponto também na geometria não euclidiana.

Prova: Se colocarmos o ponto O em um vértice do triângulo, então todas as alturas ou são perpendiculares às retas que passam por O ou são elas mesmas retas que passam por O. Em conseqüência eles também são perpendiculares em nossa pseudo-geometria, então devem-se encontrar em um ponto como se queria mostrar.

■

- 2) No teorema de Pascal sobre o hexágono apoiado em um ângulo.

Prova: O mesmo pode ser demonstrado, como é mostrado em [1] com base no cálculo de segmentos. Como, na verdade, ele é um teorema puro sobre interseções, então ele vale imediatamente em nossa geometria. Com isso conseguimos uma prova do teorema de Pascal baseada nos axiomas dos grupos I, II e dos axiomas planos do grupo IV ⁽¹¹⁾.

Através do teorema de Pascal podemos fundamentar a geometria projetiva, cujos teoremas doravante usaremos freqüentemente.

Além disso escreveremos no futuro: em vez de congruente, igual ($=$); em vez de pseudo-congruente, pseudo-igual (\approx) e definiremos de maneira conhecida ⁽¹²⁾, o que se deve entender quando dizemos que um segmento a é menor que b ($a < b$), pseudo-menor que b ($a \prec b$), maior que b ($a > b$) ou pseudo-maior que b ($a \succ b$).

Podemos enunciar o resultado principal de nossa pesquisa até agora da seguinte maneira:

⁽¹¹⁾O caso particular do teorema de Pascal no qual a reta de Pascal é a reta infinitamente distante é utilizado para construção para o cálculo de segmentos em [1]. O caso geral do mesmo é deduzido mais simplesmente através do cálculo de segmentos. Uma prova do teorema de Pascal utilizando todos os axiomas dos grupos I, II, IV é dada por Schur em [3].

⁽¹²⁾Veja [1], Cap. III, §15.

Todos os teoremas puros sobre pontos de interseção que se podem provar a partir dos grupos de axiomas I, II, III, IV seguem também, prontamente, dos grupos I, II, IV, isto é sem axioma das paralelas.

CAPÍTULO II. Congruência e Projetividade.

§5.

Teorema Fundamental.

Definição 6 Se associarmos a cada ponto real A, B, C, \dots de uma reta g um ponto real A_1, B_1, C_1, \dots da mesma reta g , de forma que o segmento entre dois pontos reais arbitrários seja congruente ao segmento entre os pontos correspondentes, chamaremos a seqüência de pontos de *congruente*.

Decorre facilmente, que duas seqüências congruentes de pontos ou decorrem uma da outra através de um deslocamento congruente ou através de uma reflexão em torno de um ponto real arbitrário da reta g seguido de um deslocamento congruente. (As expressões reflexão e deslocamento congruente devem ser entendidas no sentido usual).

Então enunciamos o seguinte teorema fundamental que relaciona congruência e projetividade:

Se A, B, C, \dots e A_1, B_1, C_1, \dots são seqüências congruentes de pontos sobre g , então elas derivam uma da outra através de repetidas projeções (então elas estão relacionadas por projetividade).

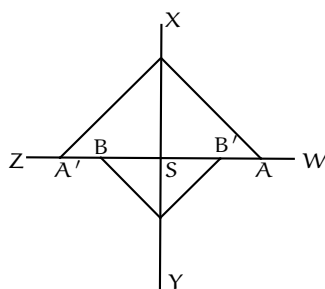


Fig. 14

A reflexão em torno de um ponto S (veja Fig. 14) de g pode ser implementada através de duas projeções.

pontos A_3, B_3, C_3, \dots ; projetamos estes a partir do pólo de MO_1 sobre g_2 e obtemos a sequência de pontos A_2, B_2, C_2, \dots ; projetamos finalmente esta a partir do pólo da bissetriz do ângulo (g_2, g) então obtemos uma dentre as duas seqüências de pontos A_1, B_1, C_1, \dots , com o exigido segmento de deslocamento v , dependendo do lado a partir do qual deve ser deslocado.

Pelo lema anteriormente provado (§2) sobre as mediatrizes, AA_1 é congruente a AA_2 que é congruente a PA_3 que é congruente (por construção) ao segmento v , ao longo do qual cada ponto de g deve ser deslocado. Por outro lado AB é congruente a A_3B_3 que é congruente a A_2B_2 que é congruente a A_1B_1 e, porque o mesmo vale para os pontos C, D , etc. as seqüências de pontos A, B, \dots e A_1, B_1, \dots são congruentes. Por outro lado elas decorrem uma da outra através de múltiplas projeções, com o que nosso teorema está provado. ■

Daí decorre imediatamente que seqüências congruentes de pontos sobre duas retas arbitrárias diferentes estão relacionadas por projeção. Pode-se, pois, pelo que foi dito anteriormente, projetar congruentemente cada reta sobre qualquer outra que a corte. Com isso antecipamos a seguinte definição de seqüências congruentes de pontos sobre retas distintas:

As seqüências de pontos A_1, B_1, \dots sobre a reta α_1 e A_2, B_2, \dots sobre a reta α_2 são congruentes quando:

$$A_1B_1 \equiv A_2B_2, \quad A_1C_1 \equiv A_2C_2, \quad B_1C_1 \equiv B_2C_2, \quad \dots$$

§6.

Relação entre Congruência e Pseudo-Congruência.

Como o teorema da invariância da razão anarmônica por projeção pode ser facilmente provado com base na teoria das proporções, então decorre do teorema do parágrafo precedente que duas quádruplas congruentes de pontos, cada uma sobre uma reta, possuem razões anarmônicas correspondentes pseudo-iguais. Vamos a empregar este fato na prova do seguinte teorema:

Sejam A e A_1 (veja Fig. 16) pontos reais sobre a reta n que passa por O e OA (ou α) congruente ao segmento AA_1 (ou α_1); além disso, sejam BB_1 dois outros pontos arbitrários sobre a mesma ou outra reta m passando por O e OB (ou b) congruente a BB_1 (ou b_1). Então afirmamos: se

$$\alpha \approx \alpha_1,$$

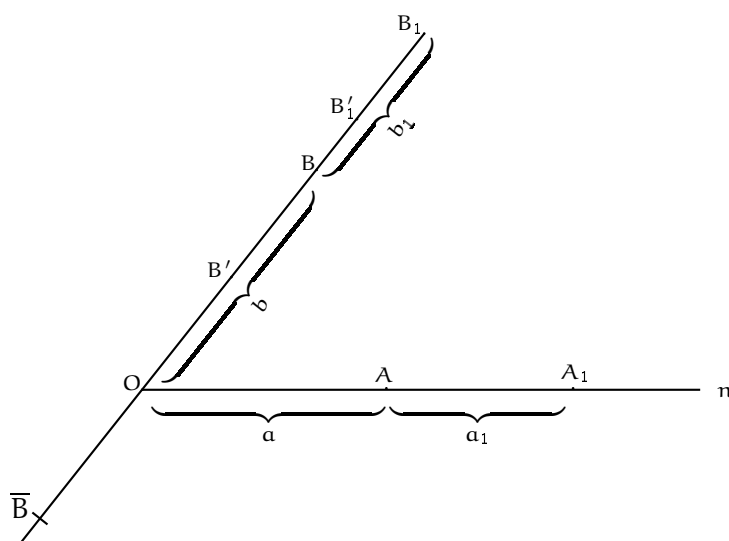


Fig. 16

então

$$b \approx b_1.$$

Como sabemos que os segmentos congruentes transportados a partir de O são também pseudo-congruentes, podemos visivelmente restringir nossas considerações a uma reta m passando por O. Provaremos primeiro o seguinte teorema auxiliar:

Se B, B_1, B', B'_1 são pontos reais sobre uma reta m que passa por O e se BB_1 (ou b_1) $\equiv B'B'_1$ (ou b') $\equiv OB$ (ou b), e se cada um dos pontos B e B_1 , B' e B'_1 jaz do mesmo lado de m a partir de O, afirmamos que: se

$$b \approx b_1,$$

então

$$b \approx b'.$$

Pelo motivo acima mencionado, podemos supor que B' pertence ao lado BO de m .

Seja, além diss, $O\bar{B}$ congruente e pseudo-congruente a OB; então

$$(\bar{B}, O, B, B') \quad \text{e} \quad (O, B, B_1, B'_1)$$

são quádruplos de pontos congruentes, e por isso:

$$\frac{\bar{B}O \cdot B'O}{\bar{B}B \cdot B'O} \approx \frac{OB \cdot B_1B_1}{OB_1 \cdot B_1B}$$

ou:

$$B_1B \approx 2B'O \frac{OB \cdot BB_1}{B'O \cdot (2OB - OB_1) + OB_1 \cdot OB}$$

de

$$OB \approx BB_1$$

segue então:

$$\begin{aligned} B_1B &\approx 2B'O \frac{OB \cdot BB_1}{OB_1 \cdot OB}, \\ B_1B &\approx B'O. \end{aligned}$$

Disso segue imediatamente que:

$$b \approx b'$$

o que deveria ser provado. Indiretamente segue que, se

$$b \approx b',$$

também

$$b \approx b_1.$$

Escolhamos então, para demonstrar o teorema principal, como ponto B' a extremidade do segmento a transportado sobre OB a partir de O do mesmo lado que b . Então BB_1' é congruente ao segmento a . Se então:

$$a \approx a_1$$

veja Fig. 16) então pelo que acabou de ser provado, é também

$$a \approx a'$$

se designarmos por a' o segmento BB_1' . Disso decorre novamente que

$$b \approx b'$$

e por isso também

$$b \approx b_1$$

com o que nosso teorema está provado. ■

Vamos então apresentar uma segunda prova muito simples para este teorema, prova esta que nos conduzirá a alguns resultados interessantes e importantes.

Perguntamo-nos sobre os pontos duplos de duas seqüências congruentes de pontos sobre a mesma reta.

A origem O do sistema de coordenadas posicionamos sobre a reta m , que queremos tratar. Então transportamos a partir de O para ambos lados da reta m um segmento a até A e \bar{A} respectivamente, e a partir de A um outro segmento a_1 congruente a a até A_1 . Associamos aos pontos $\bar{A}OA$ os pontos OAA_1 ; determinamos então duas seqüências congruentes paralelas de pontos. Sabemos então que a razão anarmônica de uma quádrupla de pontos de uma seqüência deve ser pseudo-igual à razão anarmônica correspondentes à quádrupla de pontos da outra seqüência. Conseqüentemente a coordenada x de um eventual ponto duplo deve satisfazer a seguinte condição:

$$\frac{x - a}{x + a} \approx \frac{a_1 x}{a(x + a + a_1)}$$

ou:

$$x^2 \approx \frac{a^2(a + a_1)}{a - a_1}$$

Não vamos mais nos ocupar com a questão de existência dos pontos duplos; entretanto demonstraremos o seguinte teorema importante:

As coordenadas dos pontos duplos de todos os pares de seqüências de pontos congruentes e paralelas sobre uma mesma reta satisfazem uma e a mesma pseudo-equação.

Se b é qualquer segmento transportado a partir de O até B e BB_1 (ou b_1) é congruente a OB , então deve ser:

$$\frac{a^2(a + a_1)}{a - a_1} \approx \frac{b^2(b + b_1)}{b - b_1}$$

com o que nossa afirmação está correta. Assumimos por simplicidade que B e B_1 jazam sobre o mesmo lado de m a partir de O que A e A_1 . Sejam \bar{B} e A' pontos da reta m , tais que $O\bar{B}$ seja congruente e pseudo-congruente a OB , BA' (ou a') seja congruente a OA e B esteja entre O e A' (veja Fig. 17). Então

$$(\bar{B}, O, A, B) \quad \text{e} \quad (O, B, A', B_1)$$

além disso

$$(\bar{A}, O, A, B) \text{ e } (O, A, A_1, A')$$

são quádruplas congruentes de pontos.

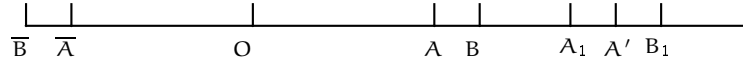


Fig. 17

Disso se seguem as duas relações seguintes:

$$\frac{b-a}{2a} \approx \frac{b(b_1-a')}{a'(b_1+b)},$$

$$\frac{b-a}{b+a} \approx \frac{a(b+a'-a_1-a)}{a_1(a'+b)}$$

Pela eliminação de a' nestas duas pseudo-equações decorre uma relação entre a , a_1 , b e b_1 , que se pode, após fácil manipulação, reconhecer como idêntica à relação imposta acima:

$$\frac{a^2(a+a_1)}{a-a_1} \approx \frac{b^2(b+b_1)}{b-b_1},$$

com o que o nosso teorema está provado. ■

Desta simples relação segue imediatamente o teorema principal deste parágrafo para o qual desejávamos apresentar uma segunda prova. Das pseudo-equações introduzidas, decorre o seguinte:

Se $a \succ a_1$ então o lado esquerdo da equação é positivo, então o lado direito da equação deve ser positivo e $b \succ b_1$. Igualmente decorre que:

$$a \prec a_1 :$$

$$b \prec b_1$$

e finalmente

$$a \approx a_1 :$$

$$b \approx b_1,$$

com o que nosso objetivo está alcançado. ■

§7.

O Segundo Teorema de Legendre.

O teorema demonstrado no parágrafo anterior conduz-nos diretamente aos seguintes

fatos fundamentais:

Se em um triângulo qualquer a soma dos ângulos é menor a dois ângulos retos, então em todo triângulo a soma dos ângulos é menor a dois ângulos retos.

Se em um triângulo qualquer a soma dos ângulos é igual a dois ângulos retos, então em todo triângulo a soma dos ângulos é igual a dois ângulos retos.

Se em um triângulo qualquer a soma dos ângulos é maior a dois ângulos retos, então em todo triângulo a soma dos ângulos é maior a dois ângulos retos.

O segundo dos três teoremas não é senão o conhecido segundo teorema de Legendre, que no entanto foi provado por Legendre com auxílio da continuidade (ou seja a utilização do axioma de Arquimedes).

Prova: Consideremos um triângulo arbitrário e baixemos por um vértice do mesmo a perpendicular ao lado oposto. Vemos de imediato que a soma dos ângulos no triângulo será menor, igual ou maior que dois ângulos retos, conforme um desses casos aconteça simultaneamente para ambos os triângulos retângulos parciais. Podemos então restringir a nossa consideração a triângulos retângulos.

Por transporte congruente, podemos supor que o vértice do ângulo reto do triângulo considerado coincide com a origem do sistema de coordenadas. Sejam A e B os outros vértices. Vamos mostrar que, acontecendo a primeira, segunda ou terceira hipóteses do teorema no parágrafo precedente, a soma dos ângulos no triângulo OAB será menor, igual ou maior que dois ângulos retos. Com isso ficará provado que todo outro triângulo arbitrário terá soma dos ângulos menor, igual o maior a dois ângulos retos.

Para isso precisamos mostrar apenas (veja Fig. 18, 19, 20), que cada um dos ângulos OAB e OBA, transportado congruentemente para O, tornou-se pseudo-menor (permaneceu pseudo-igual ou tornou-se pseudo-maior), de acordo com a hipótese assumida; pois a soma dos ângulos no triângulo OAB é, como sabemos, pseudo-congruente a dois ângulos retos e, para ângulos com vértice em O, congruência significa o mesmo que pseudo-congruência.

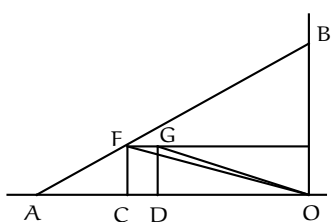


Fig. 18

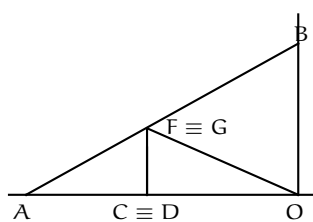


Fig. 19

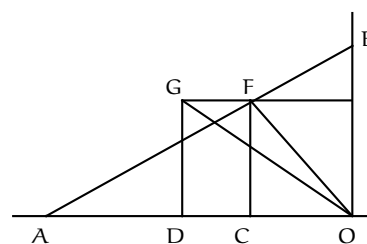


Fig. 20

Para este fim, dividimos OA ao meio em C e transportamos pseudo-congruentemente CA a partir de O até D; então, pela nossa hipótese, D está entre O e C (ou D coincide com C, ou C está entre O e D). Além disso levantamos por C uma perpendicular e ligamos o ponto de encontro F desta perpendicular com AB a O; da mesma forma levantamos por D uma perpendicular, que cortará em G a perpendicular a OB levantada por F. Então $DG \approx CF$. O triângulo ACF é congruente ao triângulo OCF, conseqüentemente, o ângulo OAB é congruente ao ângulo DOF; e o triângulo ACF é pseudo-congruente ao triângulo DOG, portanto o ângulo OAF é pseudo-congruente ao ângulo DOG e $\sphericalangle DOF \left\{ \begin{smallmatrix} \approx \\ \approx \end{smallmatrix} \right\} \sphericalangle DOG$. Por conseguinte, o ângulo OAB, que transportamos congruentemente ao ângulo AOF, ficou pseudo-menor, (permaneceu pseudo-igual, ficou pseudo-maior), como devia ser demonstrado. O mesmo se segue para o ângulo OBA. Em conseqüência, a soma dos ângulos em todos os triângulos será, dependendo da hipótese que escolhermos, \leq ou $>$ $2R$, o que no início havíamos afirmado. ■

CAPÍTULO III.

Relações entre as Hipóteses sobre a Soma dos Ângulos no Triângulo e as Hipóteses sobre Paralelas.

§8.

A Geometria não-Legendriana.

O assim chamado primeiro teorema de Legendre, como mencionado na introdução, diz que a soma dos ângulos em um triângulo nunca pode ser maior que dois retos. Convencemo-nos facilmente de que, com os métodos empregados até agora, a prova deste teorema não se pode produzir. Resta investigar se, de alguma forma, é possível prová-lo sem auxílio do axioma de Arquimedes. Se fosse impossível, isto significaria que as *três hipóteses distintas sobre existência e quantidade de retas que passam por um ponto e não cortam uma reta* não coincidem com as *três hipóteses diferentes sobre a grandeza da soma dos ângulos de um triângulo*. Sabidamente segue-se, com auxílio da continuidade, que a soma dos ângulos no triângulo é maior, igual ou menor que dois retos, dependendo de se, por um ponto a uma reta, nenhuma, uma ou infinitas

paralelas existam; ou seja cada uma das três diferentes hipóteses coincide com as outras três em toda geometria Arquimediana. Primeiramente vamos mostrar que existe uma Geometria na qual, a partir de um ponto, infinitas paralelas a uma reta são possíveis e, apesar disso, a soma dos ângulos é maior que dois retos. Com isso fica demonstrada a impossibilidade de provar o primeiro teorema de Legendre e mostrado que a *hipótese do ângulo obtuso*, como Saccheri a nomeia, não coincide com a *hipótese da finitude das retas*. Em continuação, vamos provar ainda alguns teoremas que deverão esclarecer a conexão entre os dois grupos de hipóteses.

No que se segue, vamos tomar por base o domínio dos números complexos $\Omega(t)$, que é introduzido no §12 de [1], para construir uma geometria “não-Arquimediana”. Vamos repeti-lo aqui brevemente: $\Omega(t)$ é o domínio de todas as funções algébricas em t , que derivam de t através das quatro operações de adição, subtração, multiplicação e divisão e da quinta operação $\sqrt{1 + \omega^2}$, onde ω é uma função qualquer oriunda dessas cinco operações. Encaramos então as funções do domínio $\Omega(t)$ como uma espécie de número complexo, para os quais as operações aritméticas habituais são todas válidas. Além disso dizemos que, se a e b são dois números distintos neste sistema de números complexos, o número a é maior ou menor que b ($a > b$, $a < b$) conforme a diferença $c = a - b$, como função de t , para valores positivos suficientemente grandes seja sempre positiva ou negativa. Por essa constatação, concluímos que as leis habituais que dizem respeito às relações de “maior” e “menor” são também satisfeitas neste sistema de números complexos.

A partir destes números, construímos uma Geometria plana: imaginemos um sistema de pares de números do domínio $\Omega(t)$ como um ponto e as triplas de três números arbitrários ($u : v : w$) de Ω , sendo u e v não simultaneamente nulos, como uma reta. Além disso, se esses números satisfizerem a equação:

$$ux + vy + w = 0$$

dizemos que o ponto (x, y) está sobre a reta $u : v : w$. Se consideramos as constatações sobre ordem dos elementos e transporte de segmentos e ângulos, como na geometria analítica habitual, surge então uma geometria na qual a totalidade dos axiomas é satisfeita, com exceção do axioma de Arquimedes.

Nesse plano não-Arquimediano, vamos contruir primeiramente uma geometria “e-líptica” ou “Riemanniana”. Isto pode, como se sabe, suceder-se da seguinte forma:

Estabelecemos como base a equação de uma cônica imaginária, a saber:

$$x^2 + y^2 + 1 = 0$$

Pontos e retas são pontos e retas da geometria subjacente, inclusive a reta infinitamente distante e seus pontos. Duas figuras na nossa geometria são congruentes quando uma

deriva da outra através de transformações reais lineares que levam a cônica subjacente em si mesma. Nesta geometria valem todos os axiomas, exceto o Euclidiano e Arquimedeano. Devemos contudo introduzir modificações nos axiomas de ordem. No entanto não vamo-nos deter neles, já que para nosso objetivo não são relevantes.

Nesta geometria elíptica, delimitamos uma região na qual denominaremos pontos de nossa nova geometria apenas aqueles cujas coordenadas x, y satisfazem as seguintes condições:

$$\frac{+n}{t} > \left\{ \begin{array}{c} x \\ y \end{array} \right\} > \frac{-n}{t},$$

onde n é um número racional arbitrário. As retas de nossa geometria são as retas da geometria elíptica, desde que as coordenadas dos pontos sobre as mesmas satisfaçam as condições supracitadas. Definimos igualmente o transporte de segmentos e ângulos como na geometria elíptica de forma que, quando, nesta geometria, dois segmentos ou ângulos são congruentes, também o sejam na nossa. Precisamos então mostrar que, através do transporte de segmentos e ângulos, não podemos ultrapassar nossa região. Isto se dá da seguinte forma:

Transportamos um segmento arbitrário c sobre o eixo dos x a partir da origem O até P e, a partir de P , um segmento c_1 congruente a c até Q . Examinemos se Q ainda pertence à nossa região. Pela definição, segue que, se i representa $\sqrt{-1}$:

$$\frac{(i - (c + c_1))(i + c)}{(i - c)(i + (c + c_1))} = \frac{i - c}{i + c}$$

pois segmentos congruentes sobre a mesma reta possuem com os pontos onde essas retas interceptam a cônica fundamental a mesma razão anarmônica.

Disso segue-se que:

$$c + c_1 = \frac{2c}{1 - c^2}$$

e como, pela definição, c é maior que $\frac{-n}{t}$ e menor que $\frac{+n}{t}$, temos:

$$\frac{\frac{-2n}{t}}{1 - \left(\frac{n}{t}\right)^2} < c + c_1 < \frac{\frac{+2n}{t}}{1 - \left(\frac{n}{t}\right)^2}$$

Entretanto,

$$\frac{nt}{t^2 - n^2} < \frac{2n}{t}$$

donde se segue que:

$$2n^2 < t^2,$$

que certamente está correto.

Conseqüentemente

$$\frac{-4n}{t} < c + c_1 < \frac{+4n}{t}.$$

Q faz, portanto, dentro de nossa região. Então não ultrapassamos a nossa região ao transportar qualquer segmento sobre uma reta passando por O para a mesma ou uma outra reta passando por O, fato do qual ficamos imediatamente convencidos. Pois as retas que passam por O são levadas congruentemente umas nas outras no sentido da nossa geometria por rotações em torno de O e essas rotações levam pontos da nossa região em pontos também da região. Uma rotação é bem representada através das equações:

$$\begin{aligned} x' &= \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}x - \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}y, \\ y' &= \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}x + \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}y \end{aligned}$$

Suposto é que:

$$\frac{-n}{t} < \left\{ \begin{array}{c} x \\ y \end{array} \right\} < \frac{+n}{t}$$

Portanto:

$$-\frac{n}{t} - \frac{n}{t} < \left\{ \begin{array}{c} x' \\ y' \end{array} \right\} < \frac{n}{t} + \frac{n}{t}$$

ou

$$-\frac{2n}{t} < \left\{ \begin{array}{c} x' \\ y' \end{array} \right\} < +\frac{2n}{t},$$

com o que nossa afirmativa está provada.

Em segundo lugar, transportamos o segmento arbitrário $OP = c$ de um ponto do eixo dos x com coordenada $(d, 0)$ sobre uma perpendicular ao eixo dos x . Vamos examinar se a outra extremidade do segmento ainda está dentro da nossa região. Esta extremidade tem coordenadas (d, e) . Então segue da nossa definição de congruência que:

$$\frac{i - c}{i + c} = \frac{i\sqrt{1 + d^2} - e}{i\sqrt{1 + d^2} + e}$$

e

$$e = c\sqrt{1 + d^2}$$

então:

$$-\frac{n}{t} < \left\{ \begin{array}{c} d \\ e \end{array} \right\} < +\frac{n}{t}$$

e

$$\sqrt{1 + \left(\frac{n}{t}\right)^2} < 2.$$

Conseqüentemente:

$$-\frac{2n}{t} < e < +\frac{2n}{t}$$

Portanto a outra extremidade de e jaz em nossa região. Como $e > c$, como decorre das fórmulas acima, segue imediatamente que não se consegue ultrapassar a região através do transporte inverso. Se temos agora o segmento arbitrário AB sobre a reta α e desejamos transportá-lo a partir do ponto A' sobre a reta arbitrária α' da nossa região. Baixamos por O perpendiculares a α e α' que cortam essas retas em C e D respectivamente. C e D devem visivelmente ser pontos da nossa região, se α e α' são retas da nossa região. Então decorre por conta das duas possibilidades anteriormente mostradas para transporte congruente que nós podemos transportar também o segmento AB sobre a reta α' a partir do ponto A' para ambos dos lados sem ultrapassar a região delimitada do plano não-arquimediano.

É claro que, através do transporte de ângulos, também não conseguimos sair da nossa região. Estamos portanto prontos para enunciar o seguinte teorema:

A Geometria que acabou de ser introduzida satisfaz todos os axiomas com exceção do Euclidiano e do Arquimediano.

O sistema de coordenadas não-arquimediano utilizado na construção desta Geometria corresponde inteiramente ao sistema da pseudo-geometria utilizado em nossas considerações prévias. Vimos que, quando transportamos o segmento $OP = c$ congruentemente a partir de P até Q , $PQ = c_1$ pode-se expressar da seguinte maneira em função de c :

$$c_1 = c \left(\frac{1 + c^2}{1 - c^2} \right) > c$$

A mesma relação teríamos antes expressado da seguinte maneira:

$$c_1 \approx c \left(\frac{1 + c^2}{1 - c^2} \right) \succ c$$

Porém mostramos que, quando em uma geometria c_1 é pseudo-maior que c , a soma dos ângulos em todo triângulo é maior que dois retos.

Conseqüentemente construímos uma Geometria que satisfaz todos os axiomas I, II, IV e na qual, além disso, por um ponto passam infinitas paralelas a cada reta e a soma dos ângulos em qualquer triângulo é maior que dois ângulos retos.

O axioma de Arquimedes não vale.

Com isto está demonstrada a impossibilidade de provar o primeiro teorema de Legendre sem auxílio do axioma de Arquimedes. A geometria auxiliar utilizada em esta prova demominamos geometria “não-Legendriana”, que já havíamos mencionado

na introdução.

§9.

A Geometria Semi-Euclidiana.

Vamos examinar mais de perto, como dito acima, a conexão entre as hipóteses da soma dos ângulos no triângulo e a quantidade e existência de paralelas. Para isso construímos primeiramente no plano não-Arquimediano, empregado no parágrafo anteriores, uma segunda geometria. Os pontos da mesma são aqueles cujas coordenadas satisfazem as condições:

$$-n < \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} < n$$

onde n significa um número racional positivo arbitário. As retas de nossa geometria são as retas da geometria subjacente, contanto que as coordenadas dos pontos sobre as mesmas satisfaçam a condição estabelecida acima. Definimos o transporte de segmentos e ângulos da mesma forma que na Geometria Euclidiana subjacente, de forma que, quando nesta dois segmentos ou ângulos são congruentes, eles também o sejam na nossa. Exatamente como na geometria que acabamos de construir, é nossa tarefa demonstrar que, através do transporte de segmentos e ângulos, nunca ultrapassamos a nossa região de pontos. Primeiramente fica claro que a transformação

$$x' = x + a,$$

$$y' = y + b,$$

que representa o deslocamento paralelo de segmentos e ângulos, não leva pontos da nossa região em pontos que não pertençam à mesma, pois, pela definição,

$$-n < \begin{Bmatrix} x \\ y \\ a \\ b \end{Bmatrix} < +n$$

e, conseqüentemente,

$$-2n < \begin{Bmatrix} x' \\ y' \end{Bmatrix} < +2n,$$

o que corresponde à nossa afirmativa.

Para podermos implementar a totalidade das operações de transporte, temos ainda que acrescentar uma rotação em torno do origem do sistema de coordenadas O . Esta é

representada pelas equações de transformação:

$$x' = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}x - \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}y,$$

$$y' = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}x + \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}y$$

sendo:

$$-n < \left\{ \begin{array}{c} x \\ y \end{array} \right\} < +n.$$

Então:

$$-n - n < \left\{ \begin{array}{c} x' \\ y' \end{array} \right\} < +n + n$$

$$-2n < \left\{ \begin{array}{c} x' \\ y' \end{array} \right\} < +2n$$

com que nossa afirmativa está provada. ■

Nesta geometria assim construída vale a totalidade dos axiomas dos grupos I, II, IV. Além disso, temos igualmente válidos todos os teoremas da geometria Euclidiana habitual, desde que tenham a ver com um pedaço “limitado” do espaço. A soma dos ângulos em todo triângulo é dois ângulos retos, há retângulos e triângulos semelhantes não congruentes.

Entretanto por um ponto fora de uma reta há mais de uma reta que não a corta: o axioma das paralelas não vale. Se eu⁽¹³⁾ ligar por exemplo o ponto $(t, 0)$ ao ponto $(0, 1)$, então esta reta pertence à nossa região, pois ela liga dos pontos da mesma: os pontos $(0, 1)$ e $(1, \frac{t-1}{t})$. Esta reta, entretanto, não corta o eixo coordenado $y = 0$ em um ponto da nossa região; muito menos a reta que passa por $(-t, 0)$ e $(0, 1)$, que é distinta da primeira.

O resultado é portanto:

Existem geometrias não-Arquimedianas nas quais o axioma das paralelas não é válido e, apesar disso, a soma dos ângulos em todo triângulo é igual a dois ângulos retos.

Tal geometria denominamos “semi-euclidiana”.

Decorre portanto que nenhum dos teoremas: A soma dos ângulos no triângulo perfaz dois retos; a curva equidistante é uma reta; etc. . . pode ser considerado equivalente ao Axioma das paralelas e que Euclides, ao estabelecer tal axioma, fê-lo corretamente.

⁽¹³⁾N. do T. O autor expressa-se em primeira pessoa.

§10.

O Teorema de Legendre na Geometria Elíptica.

Para concluir, vamos tratar brevemente neste contexto a *geometria elíptica*. Na mesma, é suposto que todas as retas realmente se cortem. Para que esta hipótese não contradiga os axiomas, devemos introduzir uma pequena mudança nos axiomas do grupo II - os Axiomas de Ordem. Nada impede, entretanto, de introduzir em uma tal geometria a pseudo-geometria várias vezes empregada e também deduzir todos os teoremas do §6. Consideramos uma reta passando pelo ponto O e seja J o seu ponto infinitamente distante. Então posso encontrar um ponto J_1 sobre OJ de forma que $OJ_1 \equiv J_1J$, pois J é um ponto real na geometria elíptica. Além disso, seja $OJ_2 \equiv J_2J_1$. Se OJ_2 não fosse pseudo-menor que J_2J_1 , deveria OJ_1 ser pseudo-maior que J_1J de acordo com teorema no §6, o que naturalmente não é o caso. Então, pelo mesmo teorema, todo segmento OA é pseudo-menor que o segmento AA_1 transportado congruentemente a OA a partir de A do mesmo lado. Segue-se portanto, pelo teorema do §7, que a soma dos ângulos em todo triângulo é maior que dois ângulos retos. Temos portanto o resultado:

Se, em uma Geometria, não existem paralelas e nela valem todos os axiomas dos grupos I, IV e os modificados do grupo II, então a soma dos ângulos em todo triângulo é sempre maior que dois ângulos retos.

Este teorema expressa o mui surpreendente fato de que vale o análogo do primeiro teorema de Legendre para o caso de não existência de paralelas (sem assumir a continuidade).

Podemos classificar os resultados únicos assim obtidos na seguinte tabela:

A soma dos ângulos em um triângulo:	Por um ponto a uma reta existem:		
	Nenhuma Paralela	Uma Paralela	Infinitas Paralelas
$> 2R$	Geometria Elíptica	(Impossível)	Geometria não-Legendriana
$= 2R$	(Impossível)	Geometria Euclidiana	Geometria Semi-Euclidiana
$< 2R$	(Impossível)	(Impossível)	Geometria Hiperbólica

Para concluir, cumpro o agradável dever de expressar meus mais cordiais agradecimentos a meu mui honrado senhor Prof. Dr. Hilbert, a quem devo o estímulo para este trabalho e que durante o desenvolvimento me apoiou sempre com conselhos desafiantes.

Referências Bibliográficas

- [1] Hilbert, D., *Grundlagen der Geometrie*, in Festschrift zur Feier der Enthüllung des Gauss-Weber Denkmals. Leipzig: B.G. Teubner, pp. 3-92. 1899.
- [2] Pasch, M., *Vorlesungen über neueren Geometrie*. Leipzig: Teubner. 1882.
- [3] Schur, F., *Über die Einführung der sogenannten ideale Elementen in die projective Geometrie*. Mathematische Annalen, 39, pp. 113-124, 1891.

VITA

Eu, MAX DEHN, natural de Hamburg, nascido a 13 de novembro de 1878, filho do falecido médico Dr. MAX DEHN, de confissão evangélica, graduado pelo Wilhelm-Gymnasium em Hamburg, estudei durante o semestre de inverno 1896/97 em Freiburg e a partir da Páscoa de 1897 em Göttingen Matemática e Ciencias Naturais. Neste período freqüentei as aulas e seminários dos seguintes senhores professores e docentes:

Em Freiburg: HIMSTEDT, LÜROTH, G. MEYER, WEISMANN,
WILLGERODT.

Em Göttingen: HILBERT, KERP, KLEIN, E. MEYER, RIECKE,
SCHOENFLIES, VOIGT, WALLACH.

A todos esses meus honrados mestres expresso aqui meus cordiais agradecimentos.

Apêndice B

G. VERONESE

LA GEOMETRIA NON-ARQUIMEDEA

L'argomento da me scelto è quello stesso che ero stato invitato a trattare nel Congresso di Heidelberg, parendomi che anche oggi possa interessarVi, specialmente dopo che matematici, come il POINCARÉ, ne riconobbero l'importanza. La critica ne ha già riconosciuta la validità logica, onde piuttosto che un'esposizione sistematica, come avrei fatto ad Heidelberg, credo utile di mettere ora in rilievo alcune questioni di contenuto e di metodo, che si riattaccano coll'essenza dei principî della matematica pura e della geometria, e sulle quali non parmi siano ancora concordi i geometri, pur trattandosi di argomenti geometrici⁽¹⁾.

Che cosa è la Geometria non-Archimedeana? È essa valida quale sistema di verità astratta? E soddisfa essa pure alle condizioni quali deve essere assoggettata ogni sistema geometrico

Sarebbe inutile ricordare qui le discussioni secolari intorno all'infinito e all'infinitesimo attuale; nella storia troviamo matematici favorevoli e contrari, da un lato ad es. G. BERNOULLI, dall'altro GAUSS, indeciso tra l'uno e l'altro LEIBNITZ, altri invece, come G. CANTOR favorevoli all'infinito attuale e contrari all'infinitesimo attuale, considerato quale segmento rettilineo continuo.

⁽¹⁾Non essendo stata tenuta la conferenza al Congresso, perchè l'A. si è ammalato appena giunto a Roma, è mancato uno dei suoi scopi, quello cioè di promuovere una discussione in seno al Congresso medesimo intorno a questi argomenti.

Queste discussioni si erano, si può dire, assopite, quando l'analisi, meré il concetto di limite, si adagiò su basi sicure nel campo della grandezza finita ed era prevalsa la tendenza contraria all'infinito ed infinitesimo attuale, provocata anche dal tentativo fallito di una geometria dell'infinito di FONTENELLE⁽²⁾.

Ma nonostante che GAUSS protestasse contro l'uso nella matematica della grandezza infinita determinata, qua e là risorgevano le antiche dispute.

Il fatto è però che nessuno aveva definito bene che cosa intendeva per infinito e infinitesimo attuale, che possono avere, come si vide poi, forme diverse; non lo definì il BERNOULLI, nè più recentemente l'idealista del DU BOIS REYMOND. Ne è una definizione accettabile dell'infinitesimo attuale quella del POISSON. Ma d'un tratto la luce cominciava a diffondersi con l'introduzione legittima di grandezze infinite e infinitesime attuali, cioè coi numeri transfiniti di G. CANTOR, coi momenti dello STOLZ e cogli ordini di infinito delle funzioni del DU BOIS REYMOND. Ma non si trattava di infiniti e infinitesimi geometrici. Il CANTOR facendo uso dei suoi numeri transfiniti affermava di aver dimostrata la impossibilità dell'infinitesimo attuale quale segmento rettilineo continuo. O. STOLZ aveva già fatto rilevare che la questione dell'esistenza dell'infinito e dell'infinitesimo attuale dipende da un assioma secondo il quale dati due segmenti rettilinei, l'uno minore dell'altro, vi è sempre un multiplo del minore, secondo un numero intero finito, che supera il segmento maggiore. Questo assioma fu chiamato da STOLZ col nome di ARCHIMEDE, perchè è il V assioma dell'opera *De Sphoera et cylindro* del grande siracusano, ma che era stato usato anche da altri⁽³⁾.

Lo STOLZ faceva rilevare che la dimostrazione del CANTOR non poteva toccare nè i suoi momenti nè gli ordini di infinito del DU BOIS REYMOND, i quali pur non soddisfacendo all'assioma d'ARCHIMEDE, non sono grandezze lineari, mentre lo STOLZ affermava pure l'impossibilità del segmento rettilineo infinitesimo attuale dando una dimostrazione dell'assioma stesso partendo dal postulato del continuo nella forma data da DEDEKIND. Anche dai postulati del continuo dati da WEIERSTRASS e CANTOR, sotto forme più proprie al calcolo, si deduce, come da quello di DEDEKIND, l'assioma di ARCHIMEDE⁽⁴⁾.

⁽²⁾ *Él. de Géom. de l'infini* (Paris, 1727). Vedi A., *Fondamenti di Geom.*, 1891, pag. 620, trad. tedesca di A. SCHEPP, 1894, pag. 697. Nulla hanno a che fare colla geometria non archimedeica gli infiniti del FONTENELLE, contrariamente a quanto affermò il sig. CANTOR (Math. Ann., 46)

⁽³⁾ Vedi A., *Fondamenti di Geometria*, Appendice. A proposito delle recenti discussioni sui numeri transfiniti di CANTOR, veggasi SCHOENFLIES, *Die Entwicklung der Lehre von den Punktmannigfaltigkeiten*, 1908. Per gli infiniti del DU BOIS REYMOND veggansi anche i recenti lavori di BOREL e E. BORTOLOTTI.

⁽⁴⁾ Il prof. ENRIQUES, che nel suo scritto sui principî della geometria (Encik. der math. Wissensch III, 1, 1907) riferisce esattamente sulla geometria non archimedeica, incorre però in un equivoco quando egli dà al postulato del continuo di CANTOR (Math. Ann., vol. V) una forma equivalente a quella da me data, concludendo che dal postulato del CANTOR non si deduce l'assioma d'ARCHIMEDE.

Non si trattava adunque di vedere se esistevano grandezze infinite ed infinitesime, bensì se esistevano segmenti rettilinei infiniti e infinitesimi attuali, tali da soddisfare le proprietà fondamentali della retta, eccetto l'assioma d'ARCHIMEDE.

E le vie ordinarie sembravano chiuse dopo le dimostrazioni di CANTOR e di STOLZ. Non era dunque per via analitica che potevano presentarsi spontaneamente questi segmenti, poiché i detti autori partivano dalla corrispondenza biunivoca del continuo intuitivo con quello numerico, o dai numeri transfiniti di CANTOR, che sembravano essere i soli numeri transfiniti, allo stesso modo che non si poteva presentare spontaneamente coll'analisi lo spazio generale a *infinite* dimensioni, quando si potevano considerare soltanto delle varietà a un numero finito di variabili.

La risposta doveva darla il continuo rettilineo stesso, intuitivamente considerato, e diviso nei suoi possibili elementi. E allora ci siamo accorti che i postulati sunnominati del continuo contengono qualche cosa che non è suggerita necessariamente dallo stesso continuo. Questo continuo infatti ci è fornito dall'esperienza; il segnarvi dei punti per la sua determinazione o per le operazioni pratiche che dobbiamo fare con esso è un'operazione arbitraria nostra. Empiricamente lo vediamo composto di punti materiali, gli uni accanto agli altri, oppure di trattini praticamente indivisibili. Se idealizziamo il punto riguardandolo come estremità della linea, noi vediamo che esso non può comporre il continuo, perchè ci troviamo sempre dinanzi ad un segmento che comprende idealmente almeno altri punti distinti dagli estremi. Il postulato che a tutti i numeri razionali corrispondono dei punti non è praticamente verificato, e idealizzando il punto e il segmento nel senso che esso comprenda sempre dei punti distinti dagli estremi, non è più giustificata la corrispondenza biunivoca fra i punti della rotta e i numeri reali ordinari. Allo STOLZ avevo già osservato che l'assioma d'ARCHIMEDE si deduce dal postulato del continuo di DEDEKIND, perchè anche questo postulato si basa sulla corrispondenza suddetta, ma che si può separare l'assioma d'ARCHIMEDE da quello del continuo dando a questo la forma seguente. *Se in un segmento AB esiste un segmento (XX') variabile tale che AX sia sempre crescente e minore di AX'; e (XX') diventa indefinitamente piccolo (cioè più piccolo di ogni segmento dato), sempre decrescente, esso contiene un punto Y distinto da X e X'.*

Al postulato del continuo nella nuova forma ne va aggiunto un altro analogo a quello di ARCHIMEDE, e cioè che se α e β sono due *segmenti rettilinei tali che α sia minore di β* , si può costruire un multiplo α secondo un simbolo di multiplicità η che superi β . Naturalmente se η è un numero intero finito questo postulato diventa l'assioma di ARCHIMEDE.

E nei Fondamenti ho appunto costruiti dei segmenti infiniti e infinitesimi attuali che soddisfano alla condizione che dato α come unità si può costruire β e vice-

versa⁽⁵⁾. Con questi segmenti si possono eseguire tutte le solite operazioni di addizione e di sottrazione, come si possono trovarne i multipli e summultipli eseguendo con essi varie operazioni razionali e irrazionali, *cosicchè coi simboli (numeri) che rappresentano questi segmenti si possono eseguire le operazioni fondamentali, per le quali valgono le regole ordinarie*. Naturalmente posta dinanzi, come si doveva, la questione dell'esistenza dei segmenti infiniti e infinitesimi attuali, la concezione aritmetica di questi numeri doveva stare in *seconda linea, perchè per ciò che dissi era opportuno affrontare dapprima tale questione non dal lato aritmetico, ma da quello geometrico*.

E fu questa insufficienza giustificata di sviluppo aritmetico che diede origine ad alcune critiche contro i nuovi infiniti e infinitesimi. Ed è perciò che il prof. LEVI-CIVITA, ancora quando era studente, dietro mio consiglio, trattò per primo il problema dal lato aritmetico, costruendo i detti numeri per via aritmetica e completandoli anzi con l'introduzione di nuove unità, necessarie per altre operazioni. D'altro canto il sig. HILBERT con la costruzione di un campo geometrico non-archimedeo veniva a dare una conferma autorevole alla possibilità logica di una tale geometria, e il sig. BINDONI nella sua tesi di laurea dimostrava come il campo geometrico di HILBERT sia compreso nel mio. Le recenti ricerche sulla teoria degli aggregati, anche del sig. SCHOENFLIES, confermano la validità logica di questa geometria, e le ultime ricerche sul problema del continuo rettilineo acquistano così maggior interesse, rimanendo però da stabilire in modo definitivo se, come pare, sia un solo il tipo dei numeri che vi soddisfano, anche aggiungendovi occorrendo altre unità, questioni codeste di cui si occuparono recentemente i signori HAHN, SCHOENFLIES e WAHLEN.

Assodata la validità logica del continuo rettilineo non-archimedeo, ne consegue pure quella della geometria non-archimedeo, per la quale nei miei *Fondamenti* ho scelto la forma Riemanniana. E si ha che *in un campo infinitesimo intorno ad un punto, considerando soltanto i segmenti finiti fra loro, o che soddisfano all'assioma d'ARQUIMEDE, vale la geometria euclidea*. Questo teorema fu poi dimostrato dal LEVI-CIVITA anche per la geometria non-archimedeo di EUCLIDE e di BOLYAI-LOBATSCHESKY.

E di questo teorema si possono riguardare come corollari i teoremi del sig. DEHN, trovati seguendo il metodo di HILBERT, sulle relazioni della somma degli angoli di un triangolo con le parallele condotte da un punto ad una retta, vale a dire che esistono due sistemi geometrici non-archimedei nei quali la somma degli angoli di un triangolo è maggiore di due o eguale a due retti, mentre da un punto si possono condurre più

⁽⁵⁾Vedi anche, *Il continuo rettilineo e l'assioma d'Archimede* (Atti R. Acc. dei Lincei 1890). HOELDER, *Der Quantität und die Lehre vom Mass* (Leipz. Ber., 1901). Anche sulla Geometria non archimedeo si può parlare della misurabilità dei segmenti quando uno di essi sia preso come unità fondamentale di misura.

parallele ad una retta data ⁽⁶⁾.

La validità logica della geometria non-archimedeo porta con sè l'indipendenza della teoria delle proporzioni, come quella della proiettività dal postulato di ARCHIMEDE, di cui pure si occuparono seguendo metodi più semplici altri geometri, fra i quali HILBERT e SCHUR.

*
* *

Ma assodata la validità logica della geometria non-archimedeo rimane la questione del contenuto e del metodo che furono pure oggetto di critiche, sebbene meno determinate. Permettetemi di intrattenerVi, per quanto il tempo me lo consente, su questo punto che può sembrare esorbiti dal campo matematico a chi è abituato nelle ricerche superiori della scienza a badare soltanto ai risultati, e a non dare importanza al contenuto degli oggetti matematici e al metodo, mentre il contenuto è di per sè un elemento essenziale nei principi della scienza e il metodo non bene scelto, possa anche condurre a petizioni di principio. Io mi servirò sotto altra veste di considerazioni, già vecchie, da me svolte nei *Fondamenti di Geometria*, e prima ancora in lezioni date all'Università di Padova tra il 1885 e il 1890 che servirono di preparazione alla pubblicazione dei *Fondamenti* stessi, tenendo ora conto delle pubblicazioni successive.

Gli oggetti della matematica pura non hanno necessariamente una rappresentazione fuori del pensiero, ad es. il numero, che è nella sua prima formazione il risultato dell'operazione mentale dell'enumerare degli oggetti anche astratti. La verità ha il suo primo fondamento sui principî logici e su semplici operazioni mentali universalmente consentite. La libertà dello spirito nelle sue creazioni è limitata soltanto dal principio di contraddizione, onde un'ipotesi è matematicamente possibile quando non è in contraddizione colle premesse. La matematica pura, come la logica formale, è per noi esatta.

La Geometria invece ha la sua origine nell'osservazione diretta degli oggetti del mondo esteriore, che è lo spazio fisico, e dall'osservazione idealizzata di essi trae le sue prime e precise verità indimostrabili e necessarie al suo svolgimento teoretico, che sono gli assiomi propriamente detti, come ad es. quello che per due punti nel campo della nostra osservazione passa un solo oggetto rettilineo. Ma per essere esatta la geometria essa deve rappresentare gli oggetti forniti dall'osservazione per mezzo di forme astratte o mentali e gli assiomi con ipotesi bene determinate, indipendenti cioè dall'intuizione spaziale, cosicchè la geometria diventi parte della

⁽⁶⁾Basta infatti considerare un campo infinitesimo non archimedeo nel quale la somma degli angoli di un triangolo nella geometria Rimanniana o ellittica è maggiore di due retti e nella geometria Euclidea è eguale a due retti, o per un punto passano infinite parallele ad una retta data, quando si consideri la parte di esse retto comprese nel campo suddetto.

matematica pura, ossia dell'estensione astratta (Ausdehnungslehre), dove il geometra proceda nelle sue costruzioni senza bisogno di vedere se esse abbiano o no una rappresentazione esteriore, finché non le applichi al mondo fisico, senza per questo che egli abbia ad abbandonare la visione delle figure e tutti i vantaggi che derivano dall'uso dell'intuizione nella ricerca geometrica. Epperò la esattezza della geometria sarà tanto maggiore quanto più sicura sarà quella degli assiomi suggeriti dall'osservazione e quindi quanto più essi saranno semplici e nel minor numero⁽⁷⁾. Ed invero l'osservazione non è che approssimativa e talora anche apparente e fallace, come quando muovendoci noi vediamo cambiare la grandezza degli oggetti, mentre dalle leggi della prospettiva si sa che tale fatto non sussiste. Evitando ad es. l'assioma fondamentale del piano, riducendo cioè gli assiomi a quelli più semplici della retta e fra due rette, non solo si rimedia al difetto riscontrato da GAUSS in quell'assioma, ma si risparmia la dimostrazione della possibilità di tale assioma quando lo si estende a tutto il piano illimitato, oltre che si dà alla costruzione dello spazio a quattro dimensioni la stessa origine geometrica di quella del piano e dello spazio ordinario. Certo che la richiesta della semplicità e del minor numero degli assiomi conduce a inevitabili e minuziose ricerche. E questa minuziosità fa perdere di vista i concetti generali e costituisce una delle difficoltà nella lettura di tali ricerche, ove non si supponga nulla di matematicamente noto, e si ponga dinanzi a sé tutto il problema dei principî, come nei *Fondamenti*. È chiaro anche che gli *assiomi devono essere consentiti universalmente, epperò possiamo ammettere come evidenti e quindi indimostrabili soltanto gli assiomi concessi dal filosofo empirista, pei quali è inutile dare la dimostrazione della loro compatibilità logica. Ma tale dimostrazione è invece necessaria quando si estendono questi stessi assiomi allo spazio illimitato*, dappoiché nessuno ha mai osservato nè potrà mai osservare un tale spazio. Ecco perchè non possiamo accettare come assioma suggerito dall'osservazione, quello delle parallele, quando si definiscono queste rette come quelle rette del piano che prolungate indefinitamente non si incontrano mai, perchè nessuno ha mai osservato due tali rette, nè possiamo ammettere come assioma primitivo tratto dall'osservazione quello ad es. che la retta illimitata è un sistema lineare aperto. *Ma gli assiomi tratti dalla pura osservazione non bastano per la ricerca geometrica. Diventata la geometria parte della matematica pura, o per meglio dire dell'estensione astratta, ammettiamo poi nella geometria tutte quelle ipotesi o postulati che non si contraddicono fra loro né agli assiomi premessi*; le quali ipotesi o limitano o allargano il campo della geometria, come ad es., i postulati di ARCHIMEDE, del continuo, degli spazi a più di tre dimensioni, ecc., o servono a scegliere una delle forme possibili determinate da assiomi o da ipotesi premesse, come il postulato delle parallele⁽⁸⁾.

(7) Anche il KLEIN osserva che i dati di ogni osservazione valgono sempre entro certi limiti di esattezza e sotto particolari condizioni, mentre quando stabiliamo gli assiomi possiamo porre in luogo di questi dati delle proposizioni di assoluta precisione o generalità, e facendo ricorso al principio di MACH sull'economia del pensiero egli sostiene pure che gli assiomi devono essere semplici e nel minor numero (vedi Gutachten zur Verth. des Lobatsch. Preises, nov. 1897, Kasan, oppure Math. Ann., 50, 1898; Vorles. ü. Nicht-Eucl. Geom., Bd I, 1893).

(8) Ad es. nelle *Grundlagen der Geometrie* di HILBERT il sistema degli assiomi appare invece più

Dalle cose dette discende pure che bisogna distinguere *lo spazio fisico dallo spazio intuitivo*, che è una rappresentazione idealizzata del primo, ed è *un'intuizione*, e *lo spazio intuitivo dallo spazio geometrico astratto*, che è un concetto; forme codeste non bene distinte anche da autori eminenti, come da HELMHOLTZ. *Lo spazio geometrico astratto è appunto quella parte dell'estensione pura nella quale è rappresentato lo spazio intuitivo, ma che a sua volta non ha per tutte le sue forme una rappresentazione effettiva neppure approssimativa, o non è necessario la abbia nello spazio fisico o intuitivo.* Cosicchè non solo l'eguaglianza delle figure geometriche non è necessariamente determinata dal movimento dei corpi rigidi, come riteneva HELMHOLTZ, ma è anzi l'eguaglianza delle figure, geometriche (che dipende a sua volta dal concetto logico dell'eguaglianza di due cose distinte) che è necessaria per definire il movimento dei corpi rigidi. Da ciò si ha pure un'altra conseguenza; che la geometria teoretica non è una parte della meccanica, come riteneva il NEWTON, e non dipende dalla fisica come opinava l'HELMHOLTZ. *La distinzione dello spazio fisico dallo spazio geometrico porta con sè dei postulati che sono necessari soltanto per le pratiche applicazioni della geometria, come quello approssimativo del movimento dei corpi rigidi, quello delle tre dimensioni, quello pure d'ARCHIMEDE, mentre vi sono postulati dello spazio geometrico, come quelli dello spazio generale, del continuo non-archimedeo, che non abbiamo bisogno di ammettere per lo spazio fisico*⁽⁹⁾.

E poichè nello spazio geometrico, che come lo definii nei miei *Fondamenti*, ha *infinite dimensioni*, è rappresentato lo spazio intuitivo, noi vi possiamo lavorare con l'intuizione, immaginando in esso il punto, la retta e il piano come nello spazio ordinario e operando come nella geometria pura. Ma naturalmente non avendo nè potendo avere l'intuizione di uno spazio a quattro dimensioni, combiniamo l'intuizione coll'astrazione, come facciamo per avere lo spazio illimitato da quello intuitivo, e tanta è l'abitudine che acquistiamo, che come crediamo d'intuire tutto lo spazio illimitato, così crediamo di

come un sistema di verità astratte arbitrario che di verità fornite in parte dall'esperienza ed in parte quali verità necessarie allo svolgimento logico della geometria.

⁽⁹⁾A. *Fondamenti di Geom.* L'esclusione del movimento dei corpi rigidi dalla definizione dell'eguaglianza delle figure accolta anche da HILBERT (1899) e da altri, fu pure accettata, ed era più difficile, in trattati di geometria elementare dall'A. (1^a ediz. 1897) poi da INGRAMI, da ENRIQUES e AMALDI. Per quanto siasi molto discusso su questa esclusione, e se ne trovi qualche traccia anche negli *Elementi* di EUCLIDE stesso, non s'era mai ottenuta effettivamente. (Vedi A., *Fond. di Geometria. Appendice*). Anche B. RUSSEL e POINCARÉ ritengono che la possibilità del movimento di una figura invariabile contiene in questo senso un circolo vizioso. Anzi il POINCARÉ ritiene che la possibilità di questo movimento non sia una verità evidente per sè stessa, o almeno non lo sia che allo stesso modo del postulato di EUCLIDE. Ed invero la verifica empirica del postulato delle parallele ai può far dipendere da quella del movimento di una figura invariabile. Ma per la distinzione che io faccio di spazio geometrico da spazio fisico e quindi tra la geometria pura, per la quale il principio suddetto non è necessario, e le sue pratiche applicazioni, non mi accordo coll'eminente matematico francese, quando egli sostiene (senza fare la distinzione suddetta) che "en étudiant les définitions de la géométrie on voit qu'on est obligé d'admettre, sans les démontrer, non seulement la possibilité de ce mouvement, mais encore quelques unes de ses propriétés". Questo principio e le sue proprietà sono necessarie invece per le pratiche applicazioni della geometria, come lo è l'assioma delle tre dimensioni dello spazio fisico.

vedere due piani che si incontrano in un solo punto nello spazio a quattro dimensioni⁽¹⁰⁾.

Nella distinzione fra spazio fisico e spazio geometrico si conciliano e l'affermazione di STUART MILL che la retta del matematico non esiste in natura (dovrebbe dirsi più propriamente nello spazio fisico) e la osservazione del CAYLEY, che non potremmo affermare ciò se non avessimo il concetto della retta.

Nella geometria adunque la libertà dello spirito non è soltanto limitata dal principio di contraddizione, come nella matematica pura, ma bensì anche dai dati dell'intuizione spaziale.

Non possiamo ammettere ad es. un piano nel quale non valga il teorema di DESARGUES sui triangoli omologici, nè un piano nel quale una retta, che ruota intorno ad un punto non possa assumere la posizione di un'altra retta passante per lo stesso punto, come non potremo ammettere *i piani* di BOLYAI-LOBATSCHESKY, di RIEMANN ed ellittico se fosse provato che intuitivamente vale il postulato di EUCLIDE, come non potremmo ammettere una geometria nella quale la retta fosse determinata da tre anziché da due punti, mentre queste forme sono possibili nella estensione astratta e possono avere in tutto o in parte una rappresentazione nella stessa geometria; allo stesso modo che resterebbe vera pur sempre la geometria della superficie sferica, della pseudosfera e del piano improprio all'infinito se valesse fisicamente o intuitivamente il postulato di EUCLIDE.

Ciò contrasta, ma non contraddice al principio, secondo il quale per certe categorie di proprietà possiamo ritenere equivalenti due enti diversi, ad es. due forme che si possono trasformare l'una nell'altra proiettivamente, o birazionalmente, perchè con questo principio non si tien conto delle altre proprietà geometriche o del contenuto degli enti stessi che ne costituisce invece l'essenza. Ad es. lo spazio fisico e lo spazio geometrico sono di contenuto sostanzialmente diversi fra loro, come sono diversi dalle varietà analitiche che li rappresentano, e come la esistenza dello spazio fisico, così la costruzione dello spazio geometrico costituisce un elemento essenziale della geometria, che *non va dimenticato*, come di solito avviene. E che il contenuto abbia una importanza fondamentale lo dimostra ad es. il fatto che il CAYLEY, il quale ha iniziato lo studio proiettivo della geometria non euclidea, riteneva valevole in senso assoluto quella euclidea, onde nelle ricerche del CAYLEY più che di geometria non euclidea si tratta di una rappresentazione di essa nella geometria euclidea stessa, mutando la nozione della distanza, allo stesso modo che la pseudo sfera, la sfera e il piano all'infinito improprio, sono rappresentazioni della geometria non euclidea in quella euclidea. *Ora invece il contenuto di queste geometrie ha una notevole importanza: esso ci dice che l'attuale osservazione esteriore non è sufficiente a stabilire esattamente l'una o l'altra geometria.*

⁽¹⁰⁾ Ciò spiega perchè adoperiamo qui la parola *spazio* anziché la parola *varietà*, che ha un significato più esteso ma del tutto generico ed astratto.

E un tale contenuto ha, come si vede, anche una portata filosofica per la forma dello spazio, mentre nessuna potevano averne le ricerche del CAYLEY, come non ne hanno la teoria degli immaginari o quella dell'infinito improprio, perchè non si tratta che di *denominazioni* usate per indicare enti già esistenti ed effettivi che nulla aggiungono alla genesi dello spazio.

Da tutto ciò emerge anche che le *ricerche matematiche sui principi della scienza sono bene distinte e devono tenersi distinte, da quelle filosofiche intorno alla genesi delle idee matematiche*: e noi stessi nel determinare il contenuto degli oggetti della matematica pura e della geometria non abbiamo inteso di partecipare per l'uno o per l'altro sistema filosofico, imperocchè accennando che il numero non ha necessariamente una rappresentazione fuori del pensiero, non abbiamo voluto affermare che il numero non sia esso stesso di origine empirica; e dicendo che il punto ha una rappresentazione empirica, non abbiamo voluto dire che non sia una pura intuizione a *priori* dello spirito e necessaria ad ogni esperienza esteriore. E questa distinzione è un bene perchè la matematica ci unisce mentre la filosofia, almeno per ora, ci divide. È vero che gli studî sui principî della scienza hanno dato e daranno ancora luogo a discussioni fra matematici, ma l'errore in matematica si va sempre eliminando, e restano le nuove idee definitivamente acquisite alla scienza. L'errore dipende o direttamente dal matematico o dalla indeterminatezza di alcune nuove idee o dalla poca chiarezza colla quale dapprima si presentano, ma spesso anche dalla contrarietà che esse incontrano da principio quando urtano vecchie convinzioni profondamente radicate e rafforzate dalla autorità di eminenti matematici, o contro la indifferenza degli uni, che per non darsi la pena di riflettere vorrebbero escludere le ricerche sui principî della scienza dal campo matematico, o l'opposizione di altri per i quali i nuovi pensatori sono i rivoluzionari della scienza. E ad oscurare la luce nascente delle nuove verità matematiche si aggiunsero quei filosofi che, fermi nei principî matematici già da essi conosciuti, vedevano o credevano di vedere nelle nuove idee un attentato alle loro ipotesi sulla conoscenza e sulla interpretazione della Natura, mentre da un nuovo ordinamento dei principî suggeriti e rinvigoriti da fatti nuovi, non solo può trarre profitto la matematica, ma la stessa filosofia.

La filosofia deve perciò accettare le nuove idee matematiche quando esse sieno formate definitivamente. Però se le ricerche matematiche si devono distinguere dalle filosofiche, è opportuno d'altro canto che il matematico si astenga dal giustificare i suoi concetti con considerazioni filosofiche o con finzioni che si prestano facilmente alla critica del filosofo, come fanno ad esempio l'empirista e l'idealista del DU BOIS REYMOND, o come fece talora il CANTOR per giustificare i suoi numeri transfiniti, i quali hanno una legittima esistenza, nonostante anche recenti critiche filosofiche. Ma d'altro canto per timore di queste critiche il *matematico non deve trincerarsi in un campo puramente astratto o in un formalismo simbolico mostrandosi indifferente dinanzi a questioni di contenuto matematico*, come è accaduto in passato e accade ancora al presente, quando si confonde la geometria con la teoria generale delle varietà

di elementi puramente astratte.

Epperciò è preferibile che l'ordinamento dei nuovi principî risponda allo svolgimento logico e più semplice delle idee matematiche e quindi *il metodo non sia artificio senza vita o non appaia giuoco di simboli o di parole*, per quanto utile, *ma sia filosofico*. Così la matematica può essere anche utile alle ricerche filosofiche intorno alla genesi delle idee matematiche, allo stesso modo che essa ha pure per compito di essere utile alle scienze applicate che hanno per oggetto diretto lo studio dei fenomeni della Natura scegliendo i metodi approssimativi a questo fine più appropriati. E quando invece si segue un metodo indiretto, rappresentando ad es. lo spazio mediante una varietà a più variabili per studiarne i principî, è necessario esaminare se seguendo il contenuto dello spazio stesso, o la sua costruzione, i postulati di detta varietà possano essere giustificati senza ricorrere a concetti che con quei postulati vengono definiti, ciò che costituirebbe una petizione di principio e filosoficamente un errore.

Sulla scelta del metodo sono d'accordo i più eminenti matematici. Il DU BOIS REYMOND notava che se nelle operazioni coi segni nella matematica pura non si bada più al loro significato, nella discussione dei concetti fondamentali della matematica non si deve dimenticare la loro origine; e per la geometria NEWTON osservava giustamente che la semplicità della figura dipende dalla semplicità della genesi delle idee, cioè non dalla loro equazione, ma dalla loro descrizione, e GAUSS affermava che i mezzi logici per la concatenazione e la rappresentazione delle verità geometriche per sè nulla possono produrre e soltanto germogliano senza frutto, quando la feconda e vificatrice intuizione non domini dappertutto. In modo analogo si esprimono il WEIERSTRASS, il LIE, il KLEIN ed altri. E a questi concetti si uniformano i miei "Fondamenti di geometria e in modo speciale nella genesi della geometria non-archimedeana". Sta il fatto però che questo metodo, senza l'appoggio dell'analisi, quando non supponga anzi nulla di matematicamente noto, riesce nella lettura più malagevole e soltanto negli ultimi anni in Italia e fuori il metodo basato sul puro ragionamento va prevalendo nelle ricerche sui principî della geometria. Tutti ricordano la sorte toccata all'Ausdehnungslehre del GRASSMANN del 1844, certo migliore per metodo a quella del 1862.

Tornando alla geometria non-archimedeana è necessario assicurarsi se essa soddisfa alle condizioni di contenuto e di metodo sopra enunciate. Esaminando il continuo, quale ci viene fornito dall'osservazione diretta e greggia, per due oggetti rettilinei vale l'assioma d'ARCHIMEDE, perchè qualunque essi siano, anche se non possiamo praticamente costruire un multiplo dell'uno maggiore dell'altro, potremo però considerare dei due oggetti una parte ennesima abbastanza piccola in modo che la verifica dell'assioma sia possibile per queste parti, e quindi fra i due oggetti stessi. *Ma la estensione senz'altro di questo assioma a tutto lo spazio illimitato*, non è ugualmente giustificata. Ed invero, quando noi passiamo ad ammettere che in *ogni* segmento idealizzato vi siano punti distinti dagli estremi, nè l'osservazione, nè l'intuizione ci conduce a stabilire l'assioma d'ARCHIMEDE

fra due segmenti che non si possono osservare. E siccome si dimostra che se esiste un segmento infinitesimo attuale esso si può considerare rispetto a un segmento finito con infinita approssimazione come nullo, si conclude che se anche esistesse fisicamente un tale segmento, noi non potremmo vederlo. Possiamo però applicare la nostra intuizione in ogni campo di segmenti finiti, che soddisfano cioè all'assioma d'ARCHIMEDE. *La geometria non-archimedeana soddisfa adunque alle condizioni che alla geometria in generale sono imposte dalla intuizione spaziale, e quindi il suo contenuto è geometricamente giustificato.*

*
* *

Ma un altro problema, pure geometrico, s'affaccia in seguito alle nostre premesse, quello cioè se le ipotesi non confermate dall'esperienza possono avere mercè osservazioni più accurate o più estese un'effettiva rappresentazione nel mondo fisico. Fra queste ipotesi le più caratteristiche sono quelle delle parallele, del continuo e degli iperspazi. Abbiamo già osservato che se l'ipotesi euclidea fosse esclusa, non si potrebbe più parlare di spazio euclideo. Per il continuo rettilineo osserviamo invece che fisicamente l'esistenza dell'infinito e dell'infinitesimo attuale non contraddice alla nostra intuizione, però nessuna esperienza ci conduce nè ci potrà condurre fuori delle grandezze finite, sólo possiamo dire, per un teorema sopra ricordato, che: *se lo spazio fisico fosse infinito attuale rispetto al campo delle nostre osservazioni, nello spazio fisico finito, supposto anche illimitato, varrebbe la geometria euclidea.*

L'ipotesi fisica invece di uno spazio a quattro o più dimensioni fu da me combattuta altrove, associandomi all'HELMHOLTZ⁽¹¹⁾. In ogni caso nessuna utilità ci spinge a questa ipotesi, che sarebbe puramente fantastica. Eppure è curioso che certe idee siano scaturite da intuizioni anche errate. L'idea infatti di uno spazio a più di tre dimensioni non è sorta dall'Ausdehnungslehre del GRASSMANN, per il quale lo spazio fu sempre a tre dimensioni, e quindi anche la geometria, e tanto meno è sorta dal nominalismo geometrico usato, dal CAYLEY, dal CAUCHY, dal RIEMANN e da altri nello studio di certe varietà analitiche a più di tre dimensioni; non dalla mia costruzione geometrica degli iperspazi, ma sorse dall'ipotesi fisica stessa, che fu la prima a presentarsi, e che ha perciò ostacolato l'accettazione dell'ipotesi matematica e ha fatto spesso confondere presso il volgo i sostenitori della geometria a più di tre dimensioni coi cosiddetti *medium* alla ZÖLLNER e cogli *spiritisti*.

E quanto all'utilità della geometria non-archimedeana osservo che non può confondersi con qualunque geometria che si ottenga tralasciando o modificando qualche assioma. La geometria non-archimedeana, come la non-euclidea, ha risolto una questione sulla quale si discuteva da secoli ed ha gettato nuova luce sulla costituzione del continuo e dello

⁽¹¹⁾ A., *Il vero nella matematica* (discorso inaugurale, nov. 1906. Padova)

spazio geometrico. E ciò basta per la matematica pura. Del resto, ogni legge matematica, essendo una legge del pensiero, è anche una legge della Natura. E per l'armonia meravigliosa che esiste fra le leggi del pensiero e quelle del mondo, fuori di esso non si può asserire *a priori* che in questo non possano avere un'applicazione utile anche le più alte e più astratte concezioni matematiche. Ma non può essere questa utilità *relativa* lo scopo diretto della ricerca matematica in generale e in particolare quella intorno ai principî della scienza; non escludiamo però, anzi vogliamo oggi più che mai che uno degli scopi più importanti della scienza sia anche quello di soddisfare ai bisogni delle scienze applicate e di corrispondere meglio che è possibile alla sua importante funzione sociale.

*
* *

E qui, come geometri, avremmo finito. Ma se non è compito nostro di fare della filosofia, non possiamo però accettare le restrizioni del puro empirismo sull'estensione della ricerca matematica; il PASCH stesso che ha fatto un utile tentativo in questo senso, e per tante ragioni assai lodevole, non ha potuto rimanere coerente al suo programma⁽¹²⁾. Nè possiamo quali geometri ammettere che lo spazio e i suoi postulati siano forme *a priori* dell'intuizione pura, secondo la critica di KANT, perchè nessuna prova matematica è stata data ad es. per il postulato delle parallele di EUCLIDE, il solo che KANT conoscesse. E quei filosofi positivisti i quali combattono le ipotesi euclidee non sono meno metafisici dei kantiani. E tanto meno possiamo ammettere che pur non avendo il postulato di EUCLIDE la stessa evidenza degli altri e possa non essere verificato da ulteriori osservazioni noi abbiamo un'intuizione *a priori* o subiettiva necessaria del postulato medesimo, la quale intuizione deriverebbe dalle rappresentazioni visive e tattili⁽¹³⁾. E non la possiamo accettare perchè se l'esperienza non confermasse il postulato di EUCLIDE, dovrebbero pur modificarsi le rappresentazioni visive e tattili, e quindi anche la nostra intuizione spaziale. In ogni caso nessuna prova geometrica abbiamo della necessità subiettiva del postulato di EUCLIDE e degli altri assiomi; cosicchè il geometra non può ammettere gli assiomi dati dalle rappresentazioni visive e tattili per tutto lo spazio illimitato senza giustificare tale estensione. La nostra intuizione è fatta di osservazione e di esperienza idealizzata, perchè quando mi figuro la retta intuitivamente, non la so immaginare che come un oggetto rettilineo per quanto idealizzato, e sebbene *poi coll'astrazione* io estenda tale rappresentazione a qualunque segmento della retta illimitata. Noi ci assicuriamo infatti della presenza degli oggetti esterni e delle loro proprietà per mezzo dei sensi e delle qualità delle nostre sensazioni che essi producono in noi, e tratteniamo coll'astrazione soltanto quella dell'estensione per avere le prime forme geometriche. E così, come il linguaggio, l'intuizione spaziale è il prodotto di una lunga

⁽¹²⁾ A., *Fondam. di geometria. Appendice*

⁽¹³⁾ ENRIQUES, *Sulla spiegazione psicologica dei postulati della geometria* (Rivista filosofica di G. CANTONI. Pavia, 1903). — Enc. der Math. Wiss. (loc. cit. Einleitung).

esperienza. Gli uomini la possiedono in grado diverso; essa dovrebbe essere più perfetta nei geometri puri e nei pittori, manchevole in coloro che ciechi da giovani riacquistando la vista hanno un'intuizione imperfetta delle forme geometriche più semplici.

Il sig. B. RUSSEL ha posto la questione dell'*a priori* sotto una nuova forma, distinguendo l'*a priori* logico dall'*a priori* psicologico, che per KANT si confondono. Ma per quanto siamo d'accordo in alcune considerazioni fondamentali, fra le quali quella dell'indipendenza della geometria dalla fisica, non posso associarmi a lui ad es. nè nella dimostrazione che lo spazio, come forma di esteriorità, debba avere un numero finito di dimensioni, mentre lo spazio generale ne ha un numero infinito, nè nell'altra, che egli tenta di dare, che tutti gli assiomi comuni alle tre geometrie non-euclidee sono necessari per ogni esperienza, mentre anche secondo lui sono di origine empirica i postulati stessi delle parallele. Sarebbe opportuno esaminare le conseguenze di tale ipotesi rispetto alla geometria non-archimedeica.

Vi sono dei concetti che non ci sono dati direttamente dall'osservazione, come quello dell'illimitato, dal quale abbiamo fatto dipendere quello della dimostrazione per induzione completa, o quello dell'eguaglianza delle figure indipendentemente dal principio approssimativo del movimento dei corpi rigidi, e di questi concetti non è chiaro ancora quanta parte spetti al pensiero e quanta all'esperienza⁽¹⁴⁾. Ma per il fatto che nella geometria ai dati imprecisi dell'esperienza noi sostituiamo delle forme precise, come ad esempio quella della retta, ciò non significa che essi siano forme necessarie di ogni esperienza, perchè anche i postulati non-euclidei possono essere sostituiti mediante forme matematicamente precise, senza che si possano considerare come forme trascendentali del nostro spirito. Certo è però che la geometria teorica ha la sua origine nell'esperienza, ma può rendersene indipendente colla formulazione esatta dei suoi assiomi e delle sue ipotesi, e colla dimostrazione della possibilità così di queste ipotesi come degli assiomi quando siano estesi allo spazio illimitato, e con la costruzione di forme che non sono suggerite dall'esperienza stessa. Queste forme però sono costruzioni alle quali conducono gli assiomi tratti dall'esperienza elaborata dal pensiero logico, senza venir meno alle condizioni poste dall'intuizione spaziale.

Il pensiero, la psiche e il senso sono così intimamente connessi fra loro, che la separazione di ciò che è speciale di ciascuno è quasi sempre un problema arduo, se non d'impossibile soluzione, di guisa che la filosofia vi gira intorno da secoli senza potervi mai penetrare completamente e raggiungere una soluzione definitiva. Soltanto con la specializzazione delle ricerche e con un indirizzo sperimentale e scientifico si potrà arrivare in alcuni problemi almeno ad una sintesi filosofica chiara e sicura, onde gli scienziati specialisti potranno prepararne gli elementi. E fra questi problemi possiamo considerare quelli delle idee matematiche; alla soluzione dei quali i matematici hanno contribuito con uno dei più belli monumenti nella storia della scienza.

⁽¹⁴⁾ A. *Il vero nella mat.*, nota 3.

Lista de Símbolos

Capítulos 2 e 3

A	Ponto
\overleftrightarrow{AB}	Reta incidente nos pontos A e B
l	Reta
\in	Pertence
$*$	Relação estar entre
\overline{AB}	Segmento de extremos nos pontos A e B
$\triangle ABC$	Triângulo de vértices A, B e C
\notin	Não pertence
\neq	Distinto
\emptyset	Conjunto vazio
\mathcal{P}	Plano
$\mathcal{P} \setminus l$	Plano \mathcal{P} menos a reta l
$C \sim_l D$	Os pontos C e D estão do mesmo lado do plano em relação da reta l
$C \sim_{\overleftrightarrow{AB}} D$	Os pontos C e D estão do mesmo lado do plano em relação da reta \overleftrightarrow{AB}
$C \not\sim_l D$	Os pontos C e D estão de lados opostos do plano em relação da reta l
$C \not\sim_{\overleftrightarrow{AB}} D$	Os pontos C e D estão de lados opostos do plano em relação da reta \overleftrightarrow{AB}
\overrightarrow{AB}	Semi-reta de origem A e incidente no ponto B
$\angle ABC$	Ângulo formado pelas semi-retas \overrightarrow{BA} e \overrightarrow{BC}

$\overline{AB} \cong \overline{CD}$	O segmento \overline{AB} é congruente com o segmento \overline{CD}
$\overline{AB} > \overline{CD}$	O segmento \overline{AB} é maior que o segmento \overline{CD}
$\overline{AB} < \overline{CD}$	O segmento \overline{AB} é menor que o segmento \overline{CD}
$\angle ABC \cong \angle DEF$	O ângulo $\angle ABC$ é congruente com o $\angle DEF$
$\angle ABC > \angle DEF$	O ângulo $\angle ABC$ é maior que o $\angle DEF$
$\angle ABC < \angle DEF$	O ângulo $\angle ABC$ é menor que o $\angle DEF$
\mathcal{R}	Ângulo reto
Γ, Δ	Círculos
$\text{Circ}(O, \overline{OA})$	Círculo de centro em O e raio \overline{OA}

Capítulo 4

$\square ABCD$	Quadrilátero de vértices A, B, C, D
$\boxed{S} ABCD$	Quadrilátero de Saccheri

Capítulo 5

\mathbb{F}	Corpo
\mathbb{R}	Corpo dos números reais
\mathbb{Q}	Corpo dos números racionais
\mathbb{C}	Corpo dos números complexos
\mathbb{Z}_p	Classes residuais modulo p
\mathcal{P}	Conjunto de elementos positivos do corpo
$\text{char}(\mathbb{F})$	Característica do corpo \mathbb{F}
$\mathbb{F}_{\mathcal{P}}$	Corpo ordenado com conjunto de elementos positivos \mathcal{P}
\subseteq	Contido
\mathbb{P}	Conjunto de todos os polinômios com coeficientes em \mathcal{C}
\mathcal{C}	Corpo ordenado
$ a $	Valor máximo entre os elementos a e $-a$
\forall	Para todo

$f \approx g$ f e g são funções equivalentes

$\overline{\varphi}$ Conjunto de todas as funções equivalentes de φ

\mathcal{F} Conjunto de todas as classes de equivalências de funções contínuas com um número finito de raízes e a função zero

Ω Corpo pitagórico não arquimediano

\mathcal{G} Conjunto de todas as classes de equivalências de funções contínuas que a partir de um momento nunca se anulam e a função zero

Δ Corpo euclidiano não arquimediano

Capítulo 6

(a, b) Par ordenado com $a, b \in \mathbb{F}$

\mathbb{F}^2 Conjunto de todos os pares ordenados: plano cartesiano sobre \mathbb{F}

$AB \odot CD$ Função da forma $AB \odot CD = (x_A - x_B)(y_A - y_B) + (x_C - x_D)(y_C - y_D)$

$d(A, B)$ Distância euclidiana entre os pontos A e B

$\tan(\alpha)$ Tangente do ângulo α

Capítulo 7

f.l. Finitamente limitado(a)

Π_0 Conjuntos de todos os pontos de \mathbb{F}^2 que sejam f.l.

$\mathcal{E}_t O$ Esfera centrada na origem e raio t

N Pólo norte $N = (0, 0, t)$

ξ Pólo da reta $l \subset \mathcal{E}_t O$

$\xi_{\overleftrightarrow{AB}}$ Pólo da reta \overleftrightarrow{AB}

Índice Remissivo

- Ângulo, 19, 109
 - adição de, 25
 - Agudo, 109
 - agudo, 28
 - congruência de, 110
 - interior, 20
 - Interior de, 109
 - Obtuso, 109
 - obtuso, 28
 - Reto, 109
 - retos, 28
 - soma de, 24
 - suplementares, 24
 - Tangente de, 110
 - vértice, 19
- ALA, 31, 32
- ALA_O , 32
- Arquimedes, 66
- Axioma de
 - Arquimedes, 66, 117
 - Dedekind, 66
- Axiomas de
 - Congruência para ângulos, 23
 - Congruência para segmentos, 21
 - Incidência, 11
 - Ordem, 15
- Bissetriz, 33
- Bonola, 48
- Coeficiente líder, 68
- Corpo, 61
 - Abstrato, 97
 - característica de, 63
 - Ordenado, 62, 103
- Corpo não Arquimediano, 60, 81
 - construção de, 68
 - Euclidiano, 86
 - Pitagórico, 81
- Dedekind, 66
- Eixo
 - x, 95
 - y, 95
 - negativo, 103
 - positivo, 103
- Elemento
 - Finitamente limitado, 119
 - Infinitesimal, 119
 - Infinito, 119
- Funções racionais, 74
 - Equivalentes, 77
 - Negativas, 74
 - Positivas, 74
- Geometria
 - Esférica, 127
 - Euclidiana, 31
 - Finitas, 17
 - hiperbólica, 34
 - Incidência, 12
 - não Arquimediana, 60, 116
 - Neutra, 7, 10
 - semi-Elíptica, 59, 60
 - semi-Euclidiana, 59, 60
 - semi-Hiperbólica, 59, 60
 - Sobre Corpos, 94

- Hartshorne, 11
- Hilbert, 10
 - plano de, 7, 26
 - Plano semi-Elíptico, 59, 116, 127
 - Plano semi-Euclidiano, 59, 116, 118
 - Plano semi-Hiperbólico, 59, 116
- Hipótese, 48
 - do ângulo agudo, 48, 55
 - do ângulo obtuso, 48, 55
 - do ângulo reto, 48, 55
- Inclinação, 95
- LAL, 31
- Lambert, 48
- LLL, 32
- Mediatriz, 33
- Modelo, 10
 - Geometria de incidência, 13
- Movimentos Rígidos, 40
- Movimentos rígidos, 113
- MRS, 42, 113
- Mudança de variáveis, 99
- Paralelismo, 33, 96
- Pasch, 15
- Perpendicularidade, 28
- Plano, 11
 - de Fano, 13
 - Origem do, 95
- Plano Cartesiano, 95
 - sobre um Corpo Abstrato, 95
- Polinômio, 68
 - Negativo, 72
 - Nulo, 72
 - Positivo, 69
 - Unidade, 72
- Ponto Finitamente limitado, 120
- Ponto médio, 33
- Quadrilátero, 50
 - de Saccheri, 48–50
- Relação
 - de Congruência, 21, 23, 108
 - de Estar Entre, 15, 103
 - de Incidência, 11, 97
- Reta, 95
- RHC, 32
- Saccheri, 34, 46, 47
- Segmento, 16, 107
 - congruência de, 109
 - soma de, 22
- Semi-reta, 19, 107
 - origem, 19
- Separação
 - da reta, 19
 - do plano, 18
- Sistema Axiomático, 7
 - Consistente, 9
 - Independiente, 9
- Teorema
 - da trave, 20
 - de Pappus, 102
 - do ângulo externo, 26
- Termos
 - definidos, 8
 - indefinidos, 8
- Três Hipóteses, 55
- Triângulo, 16
 - congruência de, 31
 - congruentes, 24
 - isósceles, 31
 - retângulo, 28