UFRJ

INSTITUTO DE MATEMÁTICA

MESTRADO EM ENSINO DE MATEMÁTICA

DISSERTAÇÃO

SABERES DOCENTES DE PROFESSORES DOS ANOS INICIAIS SOBRE FRAÇÕES

AUTOR: RONALDO QUINTANILHA GUIMARÃES GOMES

ORIENTADORA: LILIAN NASSER

UFRJ

Rio de Janeiro

2010

SABERES DOCENTES DE PROFESSORES DOS ANOS INICIAIS SOBRE FRAÇÕES

Ronaldo Quintanilha Guimarães Gomes

Orientadora: Dra. Lilian Nasser

Dissertação de Mestrado submetida ao programa de Pós-graduação em Ensino de Matemática, do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Ensino de Matemática.

Aprovada por:

Lilian Nasser
____
Presidente: Profª Lilian Nasser

Elizabeth Belfort
____
Profª. Elizabeth Belfort da Silva Moren

Mônica Mandarino
____
Profª Monica Cerbella F. Mandarino

Neide da F. Parracho Sant'Anna
____
Profª Neide da Fonseca Parracho Sant'Anna

Rio de Janeiro
Fevereiro de 2010

AGRADECIMENTOS

A Deus, pelo presente que nos dá cada vez que acordamos: um novo dia para viver.

Gostaria de agradecer profundamente a todos os que me ajudaram, de alguma forma, a concluir este trabalho.

Em especial, quero agradecer:

À minha querida mãe Ilcéa, a vida toda educadora, que plantou em mim a semente da dedicação e do gosto pelo magistério e pelas coisas da Educação.

Ao meu saudoso pai, cuja presença sinto todos os dias guiando meus passos, me dando conselhos e me ajudando na tarefa de viver a vida intensamente e de forma correta.

À minha adorável esposa e companheira Mara, cuja paciência, compreensão, atenção, carinho e amor me deram forças para concluir este trabalho.

Ao meu filho Rafael, muito querido e amado, também pela paciência, compreensão, carinho e amor demonstrados durante essa difícil jornada. Espero poder compensar os momentos que não pude dar total atenção.

A todos os Mestres, Doutores e colaboradores do Projeto Fundão, pela recepção carinhosa, pelos ensinamentos e orientações, pela demonstração de humildade e desprendimento, mas principalmente por me mostrarem que nunca se deve perder o entusiasmo e a esperança a respeito das possibilidades de evolução na área do ensino de Matemática.

Aos Mestres e Doutores do Programa de Ensino de Matemática da UFRJ, pelos ensinamentos, orientações e dedicação.

Às professoras-doutoras Beth Belfort, Mônica Mandarino e Neide Sant'Anna que gentilmente aceitaram participar da Banca Examinadora, cujas críticas, sugestões e recomendações foram fundamentais na realização deste estudo.

Aos meus colegas de Mestrado, pelo companheirismo, amizade e força.

A todos os professores que de forma desprendida e com espírito de colaboração aceitaram fazer parte deste estudo. Sem essa participação, nada seria possível.

À minha eterna orientadora Lílian Nasser, por toda a dedicação, paciência, sabedoria, pelos ensinamentos e orientações, mas principalmente pela amizade demonstrada. Aprendi muitas coisas que vão muito além das pesquisas na área do ensino de Matemática.

RESUMO

Esta pesquisa pretendeu investigar as concepções e saberes disciplinares de alguns professores dos anos iniciais do Ensino Fundamental sobre os diversos significados de fração, com base no referencial teórico proposto por Kieren; Behr et al; Nesher; Silva; Vasconcelos e Belfort; Monteiro e Costa; Shulman; Ball; Tardif; Sztajn; Candau; Belfort; Mandarino, dentre outros, e das orientações contidas nos Parâmetros Curriculares Nacionais para os anos iniciais do Ensino Fundamental.

A metodologia consistiu no desenvolvimento de um questionário, respondido por trinta e seis professores de 1º ao 5º ano do Ensino Fundamental, da rede pública – federal e municipal – e também da rede particular do estado do Rio de Janeiro. Em suas respostas, o professor deveria indicar quais dos modelos de problemas apresentados ele utilizava em sua prática docente, relacionar cada problema com o seu respectivo significado de fração, além de sugerir o gabarito dos problemas propostos e indicar qual deveria ser o gabarito que a maioria dos seus alunos iria propor. A seguir, os questionários foram analisados e foi feito um estudo dos resultados obtidos, sempre levando em consideração a formação e a experiência profissional dos participantes da pesquisa. Alguns resultados confirmaram pesquisas anteriores, porém alguns fatos merecem atenção especial, como o fato de alguns professores não terem identificado as ideias de fração incluídas em alguns problemas. Também constatamos algumas fragilidades do nosso instrumento de avaliação, para as quais chamamos a atenção neste trabalho, mesmo porque nunca tivemos a pretensão de acreditar que ele conseguiria esgotar todas as possibilidades de análise dos saberes que estamos investigando. As conclusões não deixam de ser preocupantes, fundamentalmente por estarmos tratando de professores que, em sua prática docente, lidam com alunos que estão tendo seus primeiros contatos com um tema de tamanha importância e complexidade.

Palavras-chave: frações, saberes docentes, formação, prática docente.

ABSTRACT

Difficulties in understanding the concept of fraction, its various meanings and applications are observed in students of all education levels. National and international surveys show that this problem is global, and that it is due, mainly, to the difficulties encountered by initial series teachers to deal with this content. Currently, a large part of the pre-service teacher training courses for the first years of schooling does not include in its grid a discipline of Didactics of Mathematics, or Mathematical Concepts and, when one of these appear, an appropriate methodology for the teaching of fractions is not developed.

This research aimed to investigate primary teachers conceptions and content knowledge about the various meanings of fraction, based on the theoretical framework proposed by Kieren; Behr et al; Nesher; Silva; Vasconcelos e Belfort; Monteiro e Costa; Shulman; Ball; Tardif; Sztajn; Candau; Belfort; Mandarino, among others, and on the guidelines given by the National Curriculum Parameters (PCN).

The methodology consisted in developing a questionnaire, answered by thirty six teachers from the first to the fifth elementary school years from the public – federal and municipal – and private school networks of Rio de Janeiro.

In their replies, teachers should indicate which of the kinds of problems presented they used in their teaching practice and relate each problem with its fraction meaning, besides suggesting the correct answer and the answer the majority of their students would choose.

The questionnaires were analyzed taking into account the formation and professional experience of the teachers in the survey. The results confirmed previous researches, but some incomes deserve special attention, as the fact that not all the teachers could identify the fraction ideas included in some problems.

Some weaknesses were observed in our assessment instrument, although we never had the desire to believe that it would exhaust all possibilities in the analysis of the teaching knowledge we are investigating.

The findings are worrying, mainly because we are dealing with teachers whom, in their teaching practice, deal with students who are having their first contacts with such an important and complex content.

Key words: fractions, teaching knowlwdge, teaching practice

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

As frações constituem um dos mais importantes e mais desafiadores tópicos do currículo de Matemática, cujo ensino vem envolvendo, há muitas décadas, educadores e pesquisadores do mundo todo no sentido de obter resultados concretos junto aos educandos. No Brasil, principalmente nas duas últimas décadas, têm surgido novas propostas curriculares e metodológicas bastante promissoras que, juntamente com algumas orientações contidas nos novos Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN – para o Ensino Fundamental, formam um excelente arsenal pedagógico contra as dificuldades de aprendizagem de frações apresentadas pelos alunos. Muitas destas metodologias estão disponíveis em uma parte dos livros didáticos atuais e incorporam avanços significativos das mais recentes pesquisas na área de ensino de Matemática. Porém, apesar dos avanços nas pesquisas, nas orientações dadas nos PCN e nos livros didáticos, os professores que atuam no primeiro segmento do Ensino Fundamental continuam tendo muitas dificuldades para ensinar os significados básicos sobre frações. Muitas vezes essas dificuldades ocorrem porque eles próprios não adquiriram tais conhecimentos de forma apropriada, nem quando foram alunos da Educação Básica, nem durante seus cursos de formação profissional, mas também porque tais avanços não estão chegando até eles.

Para estudarmos os saberes docentes dos professores dos anos iniciais a respeito das diversas ideias de fração, três caminhos poderiam ser escolhidos. Como Shulman (1986) distinguiu, dentro do domínio de conteúdo que o docente deve possuir para estar preparado para ensinar, há três categorias de saberes: disciplinar, pedagógico-disciplinar e curricular. Decidimos estudar os chamados saberes disciplinares a respeito das ideias de fração, que são aqueles diretamente relacionados com os conhecimentos matemáticos que os professores possuem sobre o conceito de fração e seus diversos significados ou aplicações. Isso não quer dizer que ele seja o mais importante, pois acreditamos que para atingir plenamente os objetivos de ensinar qualquer conceito matemático, ou qualquer outro conhecimento, o professor deve desenvolver plenamente esses três saberes. Porém, como a pesquisadora Deborah Ball (1988) colocou,

> *Apesar do fato de que o conhecimento sobre a matéria a ser lecionada é logicamente fundamental para se ensinar (Buchmann, 1984), isto é raramente objeto de adequada consideração durante a formação e na certificação de professores. Três hipóteses amplamente difundidas nos ajudam a explicar essa situação estranha. Primeiramente, formuladores de políticas educacionais e educadores parecem assumir que tópicos tais como 'valor de lugar' e divisão, frações e razões, medidas e equações, são 'básicos' e facilmente compreensíveis. Implicitamente a mensagem é a seguinte: se você sabe 'fazer' corretamente – se você consegue obter corretamente as respostas – então você pode ensinar esses tópicos. Essa hipótese sustenta que 'memorizar' e 'fazer' são as correlações fundamentais da compreensão matemática.* (p.1)

Levando-se em consideração que a pesquisa realizada por Ball foi feita com futuros professores do Ensino Fundamental II – professores do sexto ao nono ano do Ensino Fundamental – e do Ensino Médio, ou seja, com alunos e formandos dos cursos de Graduação em Matemática, podemos ter uma idéia dos graves problemas que existem nos cursos de formação de professores dos anos iniciais – primeiro ao quinto ano – do Ensino Fundamental no Brasil. Tradicionalmente os profissionais oriundos desses cursos têm que lecionar Matemática, Língua Portuguesa, Ciências e Estudos Sociais – Geografia e História – e "não têm formação específica" (Mandarino, 2006, p. 230). A pergunta que fica é:

Se nos cursos de Licenciatura em Matemática acaba-se por menosprezar os conceitos considerados "básicos" – dentre eles os diversos significados e aplicações do conceito de fração – sem que os mesmos sejam estudados e discutidos com profundidade, o que podemos esperar dos cursos de formação de professores dos anos iniciais do Ensino Fundamental?

Esta dissertação tem o objetivo de investigar e analisar, através da aplicação de um questionário individual, os conhecimentos que os professores que atuam no primeiro segmento do Ensino Fundamental possuem sobre alguns dos significados do símbolo $\frac{a}{b}$ – com $a,b \in N$ e $b \neq 0$ – bem como verificar quais deles os professores trabalham com seus alunos no seu cotidiano escolar. Participaram da pesquisa dezoito professores da rede privada e dezoito professores da rede pública, sendo oito de uma escola federal e dez de uma escola municipal, selecionados por estarem atualmente lecionando em algum(ns) ano(s) do Ensino Fundamental, desde o primeiro até o quinto ano.

Nossa pergunta principal é:

> "O que realmente os professores participantes da pesquisa, que atuam nos primeiros anos do Ensino Fundamental, sabem sobre os significados *parte-todo* nos modelos *contínuo* e *discreto*, *quociente*, *razão*, *operador*, *porcentagem* e *probabilidade*, do símbolo $\frac{a}{b}$ – com a,b $\in$ IN e b $\neq$ 0 – e quais desses significados eles trabalham em sala de aula?"

Relembrando Tardif (2000), que expressou em seu trabalho "Saberes profissionais dos professores e conhecimentos universitários",

> *Querer estudar os saberes profissionais sem associá-los a uma situação de ensino, a práticas de ensino e a um professor seria, então, um absurdo... Finalmente, querer estudar os professores sem estudar o trabalho e os saberes deles seria um absurdo maior ainda.* (p.11)

Seguindo essa lógica exposta por Tardif, procuramos elaborar, no questionário da pesquisa, problemas clássicos que buscaram simular situações reais de trabalho dos professores pesquisados. Perguntamos quais daqueles modelos eles realmente utilizavam em seu cotidiano e sua prática profissional, pedimos que resolvessem os problemas e dissessem também quais deveriam ser as respostas que a maioria de seus alunos daria.

CAPÍTULO I – MOTIVAÇÕES PARA A ESCOLHA DO TEMA

1.1- O conceito de fração, suas ideias e sua importância

O símbolo $\frac{a}{b}$ (a, b$\in$N e b$\neq$0), que representa a fração de numerador *a* e denominador *b*, possui alguns significados e aplicações muito importantes. Pode significar, por exemplo, que repartimos um *todo – contínuo* ou *discreto* – em *b* partes iguais das quais tomamos *a* partes. Esse mesmo símbolo pode significar também o resultado da divisão do número natural *a* pelo número natural não nulo *b* – *a* maçãs divididas por *b* pessoas, por exemplo – constituindo um outro significado de frações, representando o resultado da divisão do numerador pelo denominador, ou seja, o *quociente* da divisão entre dois naturais. Também é possível representar a comparação entre duas grandezas, de mesma espécie ou não, associando fração à ideia de *razão* entre duas grandezas. Essa ideia é fundamental para o estudo das proporções, diretas ou inversas, que estão presentes o tempo todo em diversas situações reais do nosso cotidiano ao resolvermos problemas utilizando a conhecida "regra de três". É também aplicado na Física e na Química, por exemplo, ao estudarmos a velocidade e a aceleração de um móvel, a densidade, dentre outras coisas; na Geografia, quando se estuda, por exemplo, a renda "per capta" de certa população, a densidade populacional de alguma região ou quando se consulta um mapa qualquer, no qual aparece a "escala" com que o mesmo foi confeccionado, possibilitando calcularmos as distâncias reais entre os pontos do referido mapa usando a ideia de *razão*. Também está presente num dos mais importantes e fundamentais conceitos da Geometria: o conceito de "semelhança". Todas as indústrias quando pretendem fabricar qualquer coisa, antes de fazê-lo elaboram um projeto que é desenhado numa certa "escala" pelos Desenhistas Industriais, ampliando ou reduzindo seu tamanho original, estabelecendo, assim, formas *semelhantes*. Todas as construções civis também possuem um projeto elaborado pelos Engenheiros e Arquitetos – e muitas vezes também uma "maquete" – em que utilizam o conceito de *semelhança*. Poderíamos citar mais uma série de ramos da atividade humana e uma série de áreas do conhecimento que utilizam o significado de fração como *razão*.

A fração $\frac{a}{b}$ tem, ainda, a possibilidade de representar a *probabilidade* de ocorrência de um evento num experimento aleatório, desde que a ≤ b, sendo que a teoria das probabilidades é uma ferramenta poderosa dos cidadãos comuns, das empresas, dos políticos e de todos os níveis governamentais para poder planejar e traçar estratégias de atuação, tomar decisões, fixar preços, etc. Apesar de podermos considerar que a *probabilidade* de ocorrência de um evento seja uma comparação entre o número de resultados favoráveis ao evento e o número de elementos do espaço amostral, que pode ser considerada uma *razão* entre essas duas grandezas, acreditamos que representa outra importante ideia de frações e faz parte de um estudo muito importante relacionado ao Tratamento da Informação.

Além desses significados, as frações podem ser representadas na forma de números decimais ou ainda como *percentuais* – que estão por aí em toda parte no nosso dia-a-dia. Também fazem o papel de *operadores,* no caso de estarmos interessados em calcular qual é o resultado da operação $\frac{a}{b}$ vezes um número real qualquer. As frações podem, ainda, ser representadas na reta numérica. De acordo com Vasconcelos e Belfort (2006)

> *A visualização dos números fracionários na reta numérica não deveria, a rigor, ser considerada como uma nova idéia, pois também se trata da divisão de* ***uma unidade*** *em partes iguais. Só que, ao invés de destacarmos a parte, passamos a destacar* ***pontos*** *da reta*. (p. 2)

Por tudo isto, é impossível ignorarmos a importância do ensino de frações no primeiro segmento do Ensino Fundamental e o grande cuidado que devemos ter ao fazê-lo. Principalmente por toda a sua complexidade, diversidade de significados, aplicabilidade e dificuldade de compreensão, esse assunto é muito interessante e fundamental para a Matemática. De acordo com as professoras e pesquisadoras portuguesas Cecília Monteiro e Cristolinda Costa (1996, p.60), “o conceito de número racional é um dos mais complexos e importantes do currículo de Matemática”.

1.2 – Dificuldades no processo de Ensino e Aprendizagem

Com a nossa experiência de muitos anos de trabalho em sala de aula, pudemos constatar a enorme dificuldade que os alunos apresentam durante o processo de aprendizagem dos números racionais. Em sua tese de doutorado, a pesquisadora Neide Sant'Anna (2008) diz que "não têm faltado tentativas da comunidade de educação matemática para melhorar o ensino de frações"(p.25). Em seu trabalho, ela procurou oferecer indícios ou pistas de tal forma que, por meio de uma nova abordagem do ensino de frações, que toma como referência a reta numérica, o aluno possa vencer suas dificuldades na passagem do campo aritmético para o campo algébrico. Citando o educador matemático Wu como sua principal fundamentação teórica, Sant'Anna (2008) coloca que esse pesquisador propôs trabalhar o conceito de fração como medida de segmento de reta, bem como identificar fração como um número e fazer sua representação na reta numérica. Ela diz que para Wu existem dois gargalos na educação matemática no Ensino Fundamental: o *ensino de frações* e a *introdução à álgebra*. Wu aponta, segundo ela, áreas problemáticas tanto na teoria como na prática do ensino de frações, que podem ser descritas como (p. 25-26):

(1) O conceito de fração nunca é definido claramente e sua afinidade com os números inteiros não é enfatizada suficientemente.

(2) As complexidades conceituais associadas ao emprego de frações são enfatizadas desde o início em detrimento do conceito básico.

(3) As regras das operações aritméticas com frações são apresentadas sem relacioná-las às regras das operações com números inteiros, com os quais os alunos têm familiaridade.

(4) Em geral, explicações matemáticas de quase todos os aspectos essenciais do conceito de fração ficam faltando.

Acreditamos que as colocações da doutora Sant'Anna, com base em Wu, se refiram a alunos do segundo segmento do Ensino fundamental, pois sugerem a utilização da reta numérica como referência para a abordagem do ensino de fração, o que não deixa de ser uma abordagem abstrata. Também acreditamos que as áreas problemáticas sugeridas por Wu são algumas das inúmeras causas que podem explicar o porquê da grande maioria daqueles que chegam ao Ensino Médio não possuir as noções básicas a respeito dos vários significados destes números, mal conseguindo conceituá-los como números. Em geral, os alunos resolvem de forma mecânica problemas nos quais as frações aparecem como *operadores,* como *razões*, como *quocientes* da divisão entre dois inteiros ou como *probabilidades*, sem compreender tais significados.

"A multiplicidade de significados dos números racionais, que está relacionada com a diversidade de contextos onde surgem as abordagens didáticas desses números, assim como das situações do dia-a-dia que traduzem" (Monteito e Costa, 1996, p.60) acaba por complicar muito a compreensão, por parte dos alunos dos primeiros anos do Ensino Fundamental, de que o símbolo $\frac{a}{b}$, sendo a e b naturais com b ≠ 0, representa um número, "o que não ocorre com os números inteiros que são utilizados, na maioria das vezes, na contagem de objetos discretos ou na quantidade de repetições de uma unidade de medida quando da medição de uma grandeza qualquer" (Monteiro e Costa, 1996, p. 60).

A "conceptualização da unidade" (Monteiro e Costa, 1996, p. 61), ou seja, a capacidade de identificar "quem" representa o *todo* ou a *unidade* no problema, nas diversas situações cotidianas ou didáticas envolvendo números racionais, também é um fator complicador na compreensão desses números e motivo principal de erros cometidos por alunos e professores ao resolverem problemas envolvendo o conceito de número racional. Por exemplo, em relação à ideia das frações como *operadores*, um aluno que tiver que determinar quantos alunos representam "dois terços" da sua turma que possui 30 alunos no total, terá que pensar no número inteiro 30 – que representa trinta alunos inteiros – como uma nova *unidade* da qual se quer calcular uma parte – no caso 2/3, refletindo sobre o seu conceito de *unidade*. Isso realmente não é fácil e requer dos professores toda uma preparação para poder ensinar esse significado de tal forma que o aluno o compreenda e o interiorize de verdade. São comuns exercícios nos quais o aluno precisa comparar frações, como estabelecer se 1/4 é maior ou menor do que 1/5, situação que aparece na maioria dos livros sem a preocupação de se definir a *unidade* ou se as frações se referem a uma mesma *unidade*. Por exemplo, 1/5 de 20 pessoas representa uma quantidade maior do que 1/4 de 12 pessoas. Apesar de sabermos que quando comparamos 1/4 e 1/5 como números, está implícito que as frações se referem à mesma *unidade*, o professor dos anos iniciais do Ensino Fundamental ao apresentar esse conteúdo, principalmente quando estiver lidando com os primeiros contatos dos alunos com os números fracionários, deve ter muito cuidado ao fazê-lo, chamando sempre a atenção de seus alunos.

Ainda falando da conceitualização da *unidade*, destaca-se a dificuldade, mesmo para o aluno que já compreendeu o significado de fração como *parte-todo*, entender o que realmente significa calcular 1/2 de 1/3, em que a fração 1/3 passa a representar o *todo*. Tal compreensão é fundamental para as operações de multiplicação e divisão de frações que serão apresentadas mais adiante. Do mesmo modo, também é complicado compreender quando 2/3 representa a *razão* entre o número de meninos e o de meninas de uma turma, onde "um novo tipo de unidade é criado (a razão 2/3) através da comparação de duas unidades originais" – o número de meninos e o número de meninas, respectivamente. (Monteiro e Costa, 1996, p.61). Todas essas hipóteses aparecem como resultados de avaliações em larga escala realizadas pelo Ministério da Educação.

Durante todo esse tempo, também constatamos as enormes dificuldades enfrentadas principalmente pelos professores dos primeiros anos do Ensino Fundamental na hora de ensinar o conceito de fração e todos os seus significados e aplicações. Em conversas informais com esses colegas de profissão, sempre ouvimos queixas que se reportavam a uma formação que não os preparava de forma adequada para o ensino de frações. Alegavam que, durante seus cursos de formação, na esmagadora maioria das vezes, nunca haviam sequer discutido sobre o assunto ou tiveram uma disciplina específica de Matemática, o que os levava a terminá-los sem os conhecimentos necessários para o devido exercício do magistério. Esta falta de preparo os induzia fatalmente a improvisar e seguir receitas prontas que haviam aprendido quando foram alunos do Ensino Fundamental (Mandarino, 2006). Tais receitas e improvisações, segundo os depoimentos desses colegas, levavam os alunos a uma mecanização e a uma memorização de procedimentos sem a devida compreensão dos conceitos, o que acabava repercutindo negativamente no aprendizado de conceitos mais complexos adiante, como já havia acontecido com eles próprios.

Principalmente a partir da Edição dos PCN (1997-1998), aconteceram muitos avanços no que se refere aos livros didáticos direcionados aos primeiros anos do Ensino Fundamental – as antigas séries primárias. Houve uma maior preocupação com a incorporação nesses livros de vários avanços das pesquisas na área de Ensino de Matemática, tanto no que tange o programa de Matemática, quanto no que diz respeito à forma de abordagem dos conteúdos e à formulação de exercícios. Apesar disso, houve uma enorme resistência por parte de professores, coordenadores e pais de alunos em relação à utilização desses livros. Para ilustrar bem essa resistência, citamos uma experiência numa rede de escolas particulares do Estado do Rio de Janeiro, que engloba cerca de 8000 alunos e 80 professores do 2º ao 5º ano do Ensino Fundamental. A Direção da escola, certa vez, resolveu adotar uma nova coleção de livros do primeiro ao quinto ano do Ensino Fundamental, que estava bem de acordo com os comprovados avanços científicos citados acima. Apresentou-a aos professores que inicialmente concordaram com a sua utilização, porém essa decisão de aceitar os livros se mostrou precipitada mais adiante. Os próprios professores, ao usarem a coleção, começaram a fazer reclamações diversas que paulatinamente foram chegando aos ouvidos das coordenações e da direção. Começaram, também, as reclamações dos pais dos alunos, dizendo principalmente que os livros eram "fracos" – era um absurdo, por exemplo, não ensinar as operações com frações no 2º e no 3º ano – não preparavam os alunos para o ingresso no 6º ano e continham conteúdos desnecessários – por exemplo, Tratamento da Informação. Após uma série de reuniões com professores e pais de alunos, a coleção foi trocada já no ano seguinte por outra com proposta bastante tradicional.

Novamente conversando informalmente com esses professores, os mesmos alegaram que não se sentiram preparados para utilizarem o livro adotado, faltava tempo para planejarem com antecedência suas aulas baseadas nas propostas apresentadas no livro e resolverem previamente os exercícios para poderem selecioná-los. Muitos também concordavam com as colocações feitas pelos pais, principalmente com relação à falta de alguns conteúdos no 3º ano, dentre eles as operações com números fracionários. Quando perguntávamos se eles não achavam que seus alunos passariam a compreender melhor os conceitos ao invés de apenas decorar regras e procedimentos, os mesmos concordavam, porém continuavam dizendo que deveriam ter sido preparados previamente e que a mudança deveria ser feita paulatinamente, primeiramente no 1º ano, no ano seguinte no 1º e no 2º ano e assim sucessivamente.

Na nossa visão, esse é mais um fato que vem corroborar com a necessidade de mudança urgente nos cursos de formação desses profissionais, para que as discussões a respeito de todos os avanços possam se iniciar nesses cursos e posteriormente tenham condições de chegarem às salas de aula.

Voltando às discussões sobre as dificuldades históricas de se ensinar o conceito de fração, citamos a pesquisadora Argentina Cláudia Broitman (2008), da Universidade Nacional de La Plata, que escreveu em um artigo da Revista Nova Escola (2008):

> *Historicamente, os fracionários foram criados para dar conta de questões que os naturais não podem resolver. Os problemas que se apresentam envolvendo esses números são muito mais complexos para os estudantes. O aprendizado implica romper com muitas das certezas e dos saberes que as crianças construíram desde o início da vida escolar. Considerar essas rupturas é uma forma bastante eficaz de jogar luz sobre a origem das dificuldades enfrentadas na aprendizagem desse novo campo numérico e, com isso, ajudar todos os alunos a avançar.* (p. 101)

1.3- As discussões no Brasil

Após o lançamento dos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) para as antigas séries do Ensino Fundamental (1997-1998), as discussões sobre o modelo de ensino que vinha sendo utilizado há muito tempo no Brasil tomaram conta das reuniões pedagógicas em várias escolas. Começou a ser pensado, mesmo pelos mais tradicionais e alguns antigos defensores de que a Matemática só poderia ser realmente compreendida e apreendida pelos poucos afortunados que nasciam com o "dom" para tal, que algo de concreto poderia e deveria ser feito. Principalmente no sentido de aproximar cada vez mais a Matemática dos educandos, da vida real, das outras disciplinas, tornando-a mais agradável, sempre que possível e sem exageros, dando maior sentido ao que antes parecia pertencer apenas ao "mundo dos matemáticos". Foi possível analisar, num contexto mais amplo, que as dificuldades apresentadas pelos alunos e pelos professores no processo de ensino e aprendizagem dos números racionais estavam relacionadas com a forma com que a Matemática vinha sendo ensinada há décadas.

> *'O equívoco é do modelo, não das pessoas', afirma o professor Luis Márcio Imenes, engenheiro civil, mestre em Educação Matemática e autor de livros. Segundo ele, os erros são históricos. O principal deles: gastar 95% do tempo das aulas fazendo continhas. 'O ensino deve estar voltado à resolução de problemas', enfatiza. Felizmente muita gente boa*

está mudando esse quadro. Há pelo menos duas décadas, educadores do mundo todo, organizados no chamado Movimento de Educação Matemática, criam estratégias, propõem currículos com enfoques diferentes para os conteúdos, pedem a reintegração da Geometria ao programa e, sobretudo, a adoção de uma abordagem ligada ao cotidiano e vinculada às demais áreas do conhecimento.

(Ricardo Falzzeta , 2002, p.18)

A evolução das pesquisas no campo do ensino de Matemática tem trazido sugestões de modificações aos programas desde o 1º até o 9º ano do Ensino Fundamental, na forma como os conteúdos são apresentados, na maneira com que o aluno deve participar da construção do seu próprio conhecimento e do conhecimento dos seus colegas, na elaboração das atividades – com a preocupação com a contextualização, a interdisciplinaridade e a multidisciplinaridade. A ideia é focar no desenvolvimento de competências no aluno – explorar, estabelecer relações e generalizar, conjecturar, argumentar, provar, tomar decisões e criticar, utilizar a imaginação e a criatividade, expressar e registrar idéias e procedimentos – respeitando-se as faixas etárias e os níveis de desenvolvimento emocional e cognitivo.

No livro “Ofício de Mestre – Imagens e auto-imagens” de Miguel G. Arroyo (2000), o autor analisa e discute o papel atual do professor do Ensino Fundamental sob a ótica dos Parâmetros Curriculares Nacionais, comparando esse papel com aquele que era pressuposto durante a vigência da Lei nº 5692 de 1971. Ele diz que cabe fazer uma leitura dos PCN como uma tentativa de legitimar o movimento das últimas décadas para repensar os saberes fechados – aqueles relacionados aos conteúdos de cada uma das disciplinas tradicionais tais como Matemática, Física, Química, etc – e incorporar os chamados saberes mais abertos – aqueles diretamente ligados ao desenvolvimento das pessoas e das sociedades, na formação dos cidadãos. Apresenta-se então, segundo o autor, um novo e grandioso desafio para o exercício do magistério, que requer traços mais totalizantes no perfil de professor(a). Segundo Arroyo (2000):

Os PCN, se são para valer, desestruturam o perfil tradicional do ofício de mestre tão legitimado em nossa tradição....Exigem um planejamento pedagógico, tão delicado ou mais do que o ensino-aprendizagem dos conteúdos fechados e úteis das grades. Trabalhar o desenvolvimento de sujeitos afetivos, éticos, estéticos, cognitivos, trabalhar pedagogicamente identidades, diversidades exige competência e trato, profissionalismo muito especial. O

> *ofício de mestre nessas dimensões não pode ser fluido, moralizante, solto, mas cuidadoso e profissionalmente competente.*(p. 98)

O autor discute sob o ponto de vista filosófico-ideológico-político que caminhos deveriam ser seguidos, questionando algumas supostas escolhas, tais como o "credencialismo democrático" e a "cidadania competente", além de também questionar um antigo slogam: "progresso e emancipação pelas ciências".

A pergunta central do autor é: "Que perfil de profissional dará conta de experiências tão desencontradas?". Apesar de não respondê-la diretamente, o autor deixa pistas claras no texto no sentido de que ele não acredita que uma solução satisfatória seja possível tão cedo.

1.4- A escolha do tema desta dissertação

Em 2005, a pedido da Direção Geral de uma Instituição de Ensino do Município do Rio de Janeiro, foi preparado um teste de conhecimentos matemáticos gerais que envolveu 83 professores de todos os anos do Primeiro Segmento do Ensino Fundamental (1º ao 5º ano), incluindo a Pré-Escola. O teste foi preparado com o objetivo de verificar se os professores dominavam os conceitos que tinham que ensinar aos seus alunos, principalmente os "porquês" deles, pois de acordo com a preocupação externada pela Direção Geral da instituição, só é possível ensinar quando se tem pleno conhecimento do assunto a ser ensinado. Pela nossa experiência, já esperávamos um resultado ruim, não por não acreditar na competência dos professores que participariam do teste, mas fundamentalmente por causa do conhecimento das deficiências da maioria dos cursos de formação desses profissionais e da forma com que a Matemática vem sendo ensinada há muitas décadas, pouco se preocupando com os "porquês" e priorizando regras, procedimentos de cálculos e fórmulas. Pensando nesses fatos, o teste fatalmente seria difícil, porém atendia aos anseios da direção da escola, que foi previamente alertada sobre os possíveis resultados.

Como esperado, os resultados realmente foram muito ruins e isso despertou mais ainda o nosso interesse sobre os conhecimentos necessários para que um professor consiga êxito ao se propor a ensinar um conceito matemático qualquer. Mais precisamente, um assunto sempre se mostrou fascinante pela sua complexidade, diversidade de significados e aplicabilidade, não somente dentro da Matemática, mas principalmente no nosso cotidiano: frações. Foi exatamente tal interesse que nos fez escolher o tema desta dissertação e procurar descobrir um pouco mais sobre os saberes disciplinares dos professores dos primeiros anos do Ensino Fundamental a respeito do mesmo. Apesar estarmos cientes da grande importância dos saberes pedagógico-disciplinares e dos saberes curriculares – ou saberes didático-pedagógicos – baseados em toda a literatura a respeito dos saberes dos professores, acreditamos que seja fundamental, nesse primeiro momento, pesquisar sobre os chamados saberes disciplinares – ou saberes sobre o conteúdo matemático a ser ensinado. No Brasil, as pesquisas na área de Ensino de Matemática ainda estão em seu estágio inicial e precisam de colaborações em todos os sentidos, principalmente porque existem resistências de alguns professores de Matemática da Educação Básica, e de alguns Mestres e Doutores das áreas da Matemática Pura e da Matemática Aplicada em relação às pesquisas na área de Educação ou Ensino de Matemática. Isto pode ser constatado pelo número insignificante de cursos de Pós-Graduação dessa área de pesquisa ligados aos departamentos de Matemática das principais universidades do Brasil.

Ball et al. (2005), ao se referirem aos saberes disciplinares, disseram que embora inúmeras pesquisas demonstrem que o conhecimento matemático dos professores é fundamental para o desenvolvimento dos alunos, a real natureza e a extensão deste conhecimento são ainda bem desconhecidas. Este fato torna fundamental e urgente o desenvolvimento de pesquisas profundas sobre esse conhecimento – o chamado saber disciplinar do professor de Matemática.

Será muito difícil evoluir, com a rapidez necessária, no que diz respeito ao conhecimento matemático, essencial ao desenvolvimento de quase todas as áreas do conhecimento humano, sem pesquisarmos e propormos soluções eficazes para o processo de ensino e aprendizagem de Matemática.

O mundo passa por um momento crucial, no qual quase todos os modelos que vinham sendo utilizados, seja na política, na economia, na saúde, na exploração dos recursos naturais, na geração de energia, na produção de alimentos, nas relações interpessoais, na preservação do meio ambiente e dos seus ecossistemas, na ocupação dos espaços, no desenvolvimento tecnológico, ou em qualquer outra área, se mostraram ineficazes. Isso demanda soluções inteligentes, eficazes e urgentes, dentre as quais, inúmeras delas necessitam de conhecimentos matemáticos profundos e, conseqüentemente, dos avanços da Matemática. Porém, como ampliar os conhecimentos matemáticos, na mesma velocidade com que se apresentam os problemas que requerem esses conhecimentos, se a esmagadora maioria dos estudantes do mundo todo sequer compreende os conceitos básicos e fundamentais dessa disciplina? Só com o avanço das pesquisas na área do Ensino de Matemática poderemos atrair cada vez mais pessoas que passariam a se dedicar ao ensino e ao aprendizado dessa disciplina. Essa é a nossa crença e o motivo principal deste trabalho.

CAPÍTULO II – REFERENCIAL TEÓRICO

2.1- A respeito dos referenciais teóricos

Esta pesquisa tem como principal meta o estudo dos saberes disciplinares dos professores dos anos iniciais do Ensino Fundamental a respeito dos diversos significados, ideias ou aplicações do símbolo $\frac{a}{b}$, com a e b naturais e b diferente de zero. Acreditamos que estes mesmos professores, ao mostrarem através de suas respostas às questões da pesquisa se identificam tais idéias, correlacionando-as corretamente ou não aos problemas propostos, se as utilizam ou não em sua prática docente e, principalmente, se sabem ou não resolver esses problemas, permitem reflexões a respeito de todos os saberes envolvidos no ensino de um conceito matemático. Também nos levam a fazer uma série de questionamentos a respeito das suas formações, quer sejam iniciais ou continuadas, e das suas rotinas em sala de aula. Por esses motivos, foram selecionados os referenciais teóricos a respeito dos diversos significados ou aplicações das frações, analisamos, como exemplos, algumas coleções de livros didáticos dirigidas para o Ensino Fundamental, passando também pelas discussões a respeito da formação profissional dos professores e pela prática docente.

2.2- Números racionais, frações e seus diversos significados

As dificuldades enfrentadas por alunos e as deficiências da prática docente, já apontadas por outros pesquisadores em relação ao processo de ensino e aprendizagem dos números racionais e, mais especificamente, das frações, têm relação direta com a complexidade inerente ao tema.

Em uma de suas principais obras, Caraça (1952) procurou descrever o surgimento dos números racionais como a resposta do homem à necessidade de comparar grandezas, quando a habilidade de contar, que o homem já dominava, não foi suficiente para responder à questão de quantas vezes uma grandeza era maior que outra. Essa idéia está intrinsecamente ligada ao tratamento de *grandezas contínuas*, que não podem ser contadas, mas sim comparadas com um padrão previamente estabelecido, isto é, uma *unidade* de comparação. A solução do problema seria obtida por um *quociente* toda vez que a grandeza tomada como padrão coubesse um número exato de vezes na grandeza a ser medida.

Todavia, nas situações em que a grandeza tomada como padrão não coubesse um número exato de vezes no objeto medido, surgiria um novo problema. Nesse caso, tanto a *unidade* quanto o objeto medido deveriam ser redivididos em partes iguais e a divisão entre esses números de partes não seria exata, e, portanto, impossível no conjunto dos números naturais. A busca da solução para esse problema, culminou na *negação* dessa impossibilidade, e a divisão indicada entre os números naturais, antes considerada impossível, passou a ser vista como a representação de um novo tipo de número: o *número racional*. Esse número passou a ser aceito como possível e a expressar o resultado da divisão, apesar de não poder ser expresso por um número inteiro.

Segundo Caraça (1952), dois princípios básicos que norteiam a evolução de toda a Matemática estão presentes na construção do *conjunto dos números racionais*:

– *princípio da extensão*, de acordo com o qual, na construção de um novo conhecimento, este deve englobar o conhecimento já existente e mantê-lo válido;

– *princípio da economia*, segundo o qual as operações usadas para resolver problemas na situação antiga devem ser as mesmas operações usadas para resolver problemas análogos na nova situação.

Desse modo, os casos de *medição* que tinham como resultado um número natural devem ser considerados casos particulares de *medição* nesse novo conjunto numérico. Isso significa que todo número natural deve ser também considerado um número racional. Esses números, então, foram definidos, com suas propriedades e operações, a partir dos dois princípios básicos citados acima.

Apesar de o conjunto dos números racionais ser uma extensão do conjunto do números naturais, o seu estudo é muito mais complexo, principalmente por causa de seus diversos significados e/ou aplicações, como constataram posteriormente diversos pesquisadores.

A respeito das diversas ideias ou significados dos números racionais, podemos dizer que existe um consenso entre os pesquisadores a respeito de que Kieren (1976) foi o primeiro a sugerir que os números racionais possuem diversos significados, denominados, em seu primeiro trabalho, de diversas interpretações. Nesse trabalho, ele define sete interpretações para os números racionais, dizendo que eles são:

▪ **frações** que podem ser **comparadas**, **somadas**, **subtraídas**, **multiplicadas** e **divididas**;

▪ **frações decimais** que formam uma extensão natural dos números naturais;

▪ **classes de equivalências de frações**.

▪ **números da forma a/b**, onde a e b são inteiros e $b \neq 0$;

▪ **operadores multiplicativos**;

▪ **elementos de um campo quociente ordenado infinito**, isto é, há números da forma $x = a/b$, onde x satisfaz a equação $bx = a$;

▪ **medidas ou pontos sobre a reta numérica**.

Através destas primeiras interpretações de Kieren (1976), podemos ter uma ideia da complexidade e diversidade de significados dos números racionais. Podemos, também, vislumbrar a grande dificuldade enfrentada por professores, no processo de ensino desse tema, e pelos alunos, no desenvolvimento da compreensão de todos os diversos significados e aplicações que possuem esses números. Para que esse processo de ensino e aprendizagem seja concluído com sucesso, parece claro que os professores devam ser confrontados, em seus cursos de formação inicial e continuada, com todas as situações nas quais o uso das frações seja possível e necessário, para que tenham oportunidade de discuti-las e desenvolver conhecimentos disciplinares, pedagógico-disciplinares e curriculares a respeito do tema, que proporcionarão, no futuro, êxito na tarefa de ensinar frações a alunos tão novos como os dos primeiros anos do Ensino Fundamental.

Kieren (1988), baseado em análise matemática de números racionais, sugeriu que as frações são números produzidos por divisões, ao invés de por união com números inteiros. De acordo com essa concepção, elas são consideradas *números* no campo dos *quocientes*. Assim como Caraça (1952) colocou, segundo Kieren (1988), as novas propriedades fundamentais ou invariáveis que distinguem os números racionais dos números inteiros são identificadas quando os *números racionais* são considerados no campo dos *quocientes*.

Podemos acrescentar, também, que esta primeira concepção de Kieren se refere amplamente ao conceito de número racional, não se preocupando muito com as interpretações ou aplicações ou ideias relacionadas exclusivamente às frações.

Em 1988, Kieren revê suas sugestões para os diversos significados de fração e passa a falar em *subconstrutos*, ao invés de *interpretações*. Ele propõe os seguintes subconstrutos:

– medida: a unidade é apresentada na forma de uma figura contínua ou um conjunto discreto, e a mesma é repartida em partes iguais;

– quociente: um certo número de objetos deve ser repartido ou dividido igualmente num determinado número de grupos;

– número proporcional: neste caso apresenta-se uma relação de comparação multiplicativa entre duas quantidades;

– operador: relacionado ao processo de “encolher” ou “esticar”, de “reduzir” ou “ampliar”.

Podemos notar que Kieren (1988), nesse outro trabalho, passa a ter preocupação com os objetos mentais que podem ser construídos a partir das ideias mais simples de frações. Por isso, chama cada uma dessas ideias de *subconstrutos*. Nessa linha de pensamento, engloba as ideias *parte-todo* nos modelos *contínuo* e *discreto* num único *subconstruto* denominado *medida*, reune, implicitamente, as ideias de *razão* e *probabilidade* no *subconstruto número proporcional* e apresenta as ideias *quociente* e *operador* como sendo outros dois *subconstrutos* distintos. Neste trabalho, vemos uma grande preocupação com a representação dos números racionais na forma fracionária e seus diversos desdobramentos.

Na tese de doutorado “O desafio do desenvolvimento profissional docente: análise da formação continuada de um grupo de professores das séries iniciais do Ensino

Fundamental, tendo como objeto de discussão o processo de ensino e aprendizagem das frações", a pesquisadora Angélica da Fontoura Garcia Silva (2007) fez um resumo das principais pesquisas até então realizadas a respeito das várias ideias e dos vários significados das frações, desde Kieren (1976). De acordo com a pesquisadora,

> *Kieren (1976) analisa sete interpretações para os números racionais. Essas interpretações serviram por muito tempo como principal sustentação teórica da maioria dos trabalhos sobre o processo de ensino e aprendizagem de frações. Em artigos posteriores, Kieren (1981, 1988) muda a classificação apresentada originalmente, dando mais ênfase às estruturas cognitivas e menos às estruturas matemáticas.* (p.86)

Logo em seguida, Silva (2007) coloca que, em 1988, Kieren revê a expressão utilizada anteriormente – *interpretações* do número racional – passando a utilizar *subconstrutos*, isto é, "denomina construtos teóricos os objetos mentais que podem ser construídos a partir de ideias mais simples que se complementam" (Kieren, 1988, p. 162) apud Silva 2007. Silva (2007) cita os quatro subconstrutos dos números racionais apresentados por Kieren nesse mesmo trabalho:

> *Esta classificação diferencia-se da anterior, pois, segundo o autor, o subconstruto medida está ligado à ideia de parte-todo. Para o significado medida (parte-todo), a unidade é introduzida na forma de uma figura contínua (um pedaço de corda) ou um conjunto discreto (um determinado número de balas). Aqui, o todo é repartido em partes do mesmo tamanho. Como medida, esse subconstruto envolve medir área de uma região ao reparti-la e cobri-la com unidades de um tamanho apropriado.* (p. 86)

E continua

> *Kieren (1988) também chama a atenção para o fato de que para favorecer a construção de noções relativas aos números racionais por parte do aluno, é necessário que este se envolva em atividades, de modo a associar a/b com objetos e ações em quaisquer desses quatro subconstrutos (p. 166). Para Kieren (1988), o papel do professor é de extrema importância no processo de construção do conhecimento dos números racionais,* ***sendo sua principal função orientar o aluno na interpretação e compreensão dos diversos significados dos números racionais****.* (p. 87)

Estas duas últimas colocações de Kieren (1988), contidas na tese de Silva (2007), nos levam a uma reflexão da importância de o professor dominar, com profundidade, todos os diversos significados das frações para que ele possa utilizá-los de forma eficaz com seus alunos, nos momentos certos e apropriados, auxiliando no processo de construção do conceito de número racional por parte desses alunos. Kieren (1988) também deixa clara a importância de envolver os alunos em atividades que estejam relacionadas aos quatro subconstrutos definidos por ele, o que sugere a introdução dos diversos significados de fração através de situações-problema.

Silva (2007) cita, então, os trabalhos de Behr, Lesh, Post e Silver (1983), Nesher (1985) e Ohlsson (1987), que tiveram como base os trabalhos de Kieren (1976, 1981, 1988) e que trazem novas interpretações para os diversos significados dos números racionais. Primeiramente, vejamos o trabalho de Behr, Lesh, Post e Silver (1983, p. 99) apud Silva (2007), onde eles redefinem e subdividem os subconstrutos apontados por Kieren (1988):

– **medida fracionária**: trata-se de uma releitura do subconstruto parte-todo indicando a questão "quanto há de uma quantidade relativa a uma unidade especificada daquela quantidade" (p. 99). Behr et al (1983) apud Silva (2007) entendem que o subconstruto parte-todo geralmente é o primeiro a ser trabalhado com os alunos e justificam a redefinição, pois, segundo os autores, citando Kieren, "a idéia de medida está subjacente à idéia de parte-todo" (p. 92);

– **razão**: a relação expressa entre duas quantidades de uma mesma grandeza. Por exemplo: a razão entre as quantidades de meninos e meninas de uma sala de aula;

– **taxa**: define uma nova quantidade como uma relação entre duas outras quantidades. O que distingue taxa de razão é o fato de que as taxas podem ser adicionadas ou subtraídas enquanto as razões não;

– **quociente**: representa uma divisão a:b, na forma a/b, ou seja, a dividido por b, quando inserido num determinado contexto como: "Existem 4 bolachas e 3 crianças. Se as bolachas são partidas igualmente entre as três crianças, quanto cada criança receberá?"(p. 100);

– **coordenadas lineares**: interpretam o número racional como um ponto da reta numérica. A noção desse subconstruto é bastante parecida com a noção de medida de Kieren, enfatizando a questão intervalar, a densidade e a descontinuidade;

– **decimal**: enfatiza as propriedades do nosso sistema de numeração;

– **operador**: vê a fração como uma transformação.

Nessa nova classificação dos diversos significados dos números racionais apresentada por Behr et al (1983) apud Silva (2007), podemos notar a preocupação com um maior detalhamento. O que nos chamou a atenção, primeiramente, foi o fato da diferenciação entre *razão* e *taxa*. Ao concordarmos com essa interpretação, decidimos tratar, em nosso trabalho, *razão* e *taxa percentual* como duas ideias distintas. Também é importante salientar que os autores se encontram entre os primeiros a considerar *coordenadas lineares* como sendo uma idéia de número racional que merece ser tratada e estudada de forma diferenciada em relação às outras ideias. Essa idéia equivale à de *representação de frações na reta numérica*, definida por Vasconcelos e Belfort (2006), pois, como disseram estes pesquisadores, apesar de estarmos considerando partes de um *inteiro*, ao invés de destacarmos a parte da unidade que está sendo tomada, passamos a destacar pontos da reta, o que, segundo eles, traz uma nova compreensão do modelo *parte-todo*.

Mais adiante, Silva (2007) coloca a interpretação de Nesher (1985):

- A fração como descrição de uma relação parte-todo, isto é, uma descrição da partição de um objeto em partes iguais. “Sob esse significado um todo é fatiado em n fatias [iguais], cada fatia é codificada como 1/n, e se refere a várias (k) fatias, isto é, codificado como k/n. A ideia de um inteiro (1 = n/n) é uma característica dessa representação”;
- O número racional como:
  - um resultado da divisão entre dois números inteiros;
  - uma razão, isto é, comparação (multiplicativa) entre duas quantidades;
  - um operador, isto é, como alguma coisa que opera sobre algo, uma quantidade, e que muda essa quantidade;
  - uma probabilidade.

Nesher (1985) apud Silva (2007) apresenta *probabilidade* como uma ideia de fração separada da ideia de *razão*. Na sua interpretação, uma *probabilidade* não representa a comparação multiplicativa entre duas quantidades, mas sim uma *taxa*. Essa também é a nossa visão, porém acreditamos que mesmo sabendo que alguns pesquisadores e a maioria dos matemáticos consideram que a idéia de *probabilidade* está inserida na idéia de *medida*, fato que constatamos quando estudamos esse tema nos cursos de graduação e pós-graduação, acreditamos que em se tratando de alunos do Ensino Fundamental ela deva ser trabalhada separadamente, principalmente porque o conceito geral de *medida* é extremamente difícil, abstrato e profundo.

Logo após, Silva (2007) apresenta as quatro interpretações de Ohlsson (1987) para as frações:

- razão: a/b é uma comparação entre as quantidades "a" e "b", em que uma é descrita em relação à outra (2 médicos para cada aluno);
- parte-todo: a/b é uma partição, em que "a" é uma quantidade e "b" é um parâmetro. O numerador é indicado de uma forma determinada pelo denominador (uma pizza dividida em 8 partes);
- operador escalar; a/b corresponde à ideia de operações compostas, parâmetro e quantidade. O numerador é um multiplicador e o denominador um divisor aplicado à mesma quantidade-um; decréscimo ou cortes sucessivos. É a operação inversa da multiplicação (um balão é reduzido a 2/3 de seu tamanho ou $2/3 = 2 \times 1/3$);
- O quarto caso, parâmetro/parâmetro, ou seja, o numerador é operado em um caminho que é determinado pelo denominador.

Nessa nova sugestão de Ohlsson (1987) apud silva (2007), percebemos uma preocupação em definir, na fração a/b, quem representa uma 'quantidade' e quem representa um 'parâmetro', que são considerados como sendo distintos.

Silva (2007), conclui

> *Baseados no que foi descrito até então, entendemos não ser possível sistematizar todos os estudos numa única classificação, posto que não temos em todos os estudos os critérios comuns que possibilitem essa sistematização. Assim, fizemos nossa escolha com base nesses estudos e nas orientações prescritas nos Parâmetros Curriculares Nacionais, ...* (p. 90)

E apresenta (p.100) a classificação escolhida para ser investigada na sua tese: *parte-todo, quociente, medida, operador e localização da representação fracionária na reta numérica*.

No texto "Dificuldades na aprendizagem dos números racionais", Cecília Monteiro e Cristolinda Costa (1996) analisam, de forma geral, algumas das principais dificuldades apresentadas por alunos na compreensão do conceito de fração e na sua utilização na resolução de problemas. Segundo elas

> *Durante a escolaridade básica, o conceito de número racional é considerado como um dos mais complexos e também dos mais*

> *importantes do currículo de Matemática. Na opinião de alguns autores – ver, por exemplo, Behr, M. Lesh, R.Post, T. & Silver, E. (1983) – essa importância pode ser encarada segundo três perspectivas diferentes: de um ponto de vista prático, tem a ver com a capacidade das pessoas serem capazes de entender e resolver situações e problemas na vida real; numa perspectiva psicológica, os números racionais proporcionam o desenvolvimento das estruturas mentais necessárias ao crescimento intelectual; na perspectiva matemática, a compreensão dos números racionais proporciona uma base para futuros conhecimentos algébricos elementares.* (p. 60)

Ainda de acordo com elas,

> *As dificuldades dos alunos em trabalhar com números racionais têm sido objecto de várias investigações, tendo sido identificados alguns factores que poderão justificar essas dificuldades, como por exemplo:*
>
> *– A multiplicidade de significados dos números racionais.*
>
> *– A conceptualização da unidade em diversos problemas ou situações envolvendo números racionais.*
>
> *– Utilização precoce de regras e algoritmos no estudo dos números racionais e frações.* (p.60)

E continuam

> *Esta multiplicidade está relacionada com a diversidade de contextos onde surgem as abordagens didáticas destes números, assim como das situações do dia-a-dia que traduzem.*
> *Por exemplo, 3/4 pode ser interpretado de várias maneiras: 3/4 de um bolo ou 3/4 como a razão entre o número de bolas brancas e o número de bolas pretas, ou ainda 3 maçãs a dividir por 4 pessoas têm significados diferentes.* (p. 60)

Monteiro e Costa (1996) não só nos fazem refletir sobre a importância dos números racionais fracionários e as dificuldades enfrentadas pelos alunos para compreenderem seu conceito, como também deixam claro que um dos fatores que corroboram com essa dificuldade é a multiplicidade de significados e aplicações desses números. Elas citam no referido texto (p.60) três desses significados: *parte-todo no modelo contínuo, razão* e *quociente* da divisão entre dois números naturais.

Falando dessa multiplicidade de significados, Vasconcelos e Belfort (2006), no texto “Diferentes significados de um mesmo conceito: o caso das frações”, dizem:

> *As frações, assim como as operações fundamentais, também estão associadas a mais de uma idéia e, ao contrário do que se pensa, as frações estão presentes em muitas situações do nosso dia-a-dia. Em qualquer profissão que você exerça poderá encontrar situações em que deverá usar frações. Elas estão presentes quer*

> *numa mistura de bolo; quer na medida de canos e conexões; quer na manipulação de remédios. (p.1)*

No mesmo texto, Vasconcelos e Belfort (2006) discutem diferentes situações em que as frações são úteis, “sem esgotar as possibilidades” (p. 1).

Os autores desenvolvem, então, o que eles definiram como cinco idéias de fração: fração como *parte de uma unidade*, *representação de frações na reta numérica*, fração como *parte de um conjunto*, frações como *quociente de divisão* de um número inteiro por outro e fração como medida de comparação entre duas grandezas – *razão*. Enfatizam que estas cinco idéias não são as únicas, e passam a discuti-las em diferentes situações.

Eles definem a primeira delas como a mais usual, pensando nas frações como parte de uma *unidade* ou *todo*, que foi dividida em partes iguais. Deixam claro que ao tomarmos uma figura plana como *todo* – um retângulo, por exemplo – a idéia de partes iguais está relacionada à de áreas iguais e não de quantidades ou formas iguais. Defendem a escolha da *representação de frações na reta numérica*, como sendo uma nova idéia de fração, porque ao invés de destacar a parte da *unidade* que está sendo tomada, passa-se a destacar pontos da reta. A terceira ideia, fração como *parte de um conjunto*, que os autores colocam como podendo ser considerada “uma variante da primeira para o caso de grandezas discretas” (p.3), é aquela que associa frações a subconjuntos de um conjunto.

> *De acordo com essa interpretação, de um conjunto com 5 elementos, cada subconjunto com 2 elementos corresponde a 2/5 desse conjunto; de um conjunto de 10 elementos, qualquer subconjunto de 4 elementos corresponde a 2/5 desse conjunto; e assim por diante.* (p.3)

Implicitamente, o conceito de frações equivalentes está presente nesse trecho do texto, quando os autores citam que tomar 4 de 10 também representa a fração 2/5. Além disso, Vasconcelos e Belfort destacam que nesse caso as partes iguais não são necessariamente iguais em forma ou tamanho, mas são iguais em **número de elementos**.

Falando da ideia de fração como *quociente* da divisão de um número inteiro por outro, os autores dizem que:

> *Uma quarta ideia, também muito importante, mas que dificilmente é encontrada nos livros didáticos (e mesmo nas salas de aula) é a que vê a fração 2/5 como o resultado da divisão de dois números inteiros: o numerador será dividido pelo denominador.* (p.4)

E apresentam o seguinte problema como exemplo dessa quarta idéia:

> *Temos duas pizzas e queremos dividi-las igualmente para cinco pessoas. Qual a parte que cada um receberá?* (p.4)

Nas discussões sobre a solução do problema, enfatizam que resolvê-lo significa encontrar o resultado da divisão de 2 unidades – duas pizzas – em cinco partes, o que significa que queremos determinar o quociente da divisão de 2 por 5. Isto faz com que a resposta tenha que ser dada na mesma *unidade*, ou seja, devemos responder dizendo que fração de *uma pizza* deve ser dada a cada pessoa. A fração procurada é 2/5 de uma pizza, isto é, 2/5 da *unidade*.

Passando à última ideia sugerida pelos autores, fração como medida de comparação entre duas grandezas, eles colocam

> *Uma outra ideia, de grande importância mas não tão explorada na aprendizagem de frações, é aquela que associa a fração à razão entre duas grandezas. De acordo com essa idéia uma fração é o quociente (resultado) da comparação (divisão) de uma grandeza (numerador) por outra (denominador). Assim a fração 2/5 seria o resultado da comparação de duas grandezas que estão na razão de 2 para 5, ou seja, de cada 7 unidades 2 são de um tipo e 5 são de outro tipo. Por exemplo, das 21 figuras abaixo, 6 são de um tipo e 15 de outro, ou seja, de cada 7 figuras, 2 são de um tipo e 5 de outro.* (p.5)

Vasconcelos e Belfort destacam, nesse caso, que a fração não representa a comparação de uma parte com o todo, mas sim considera cada tipo de figura como uma grandeza diferente e determina a *razão* entre as duas. É importante também dizer que implicitamente os autores estão novamente utilizando o conceito de frações equivalentes, ao colocarem que a comparação entre 6 figuras de um tipo e 15 de outro – que nos forneceria a fração 6/15 – equivale à comparação entre 2 figuras de um tipo e 5 de outro – que representa a fração 2/5.

2.3- Os PCN e os números racionais

Vejamos, agora, algumas das orientações contidas nos PCN (1997) a respeito do ensino de frações. Em relação aos objetivos do ensino de Matemática no segundo ciclo – antigas 3ª e 4ª séries e atuais 2º e 3º anos – do Ensino Fundamental, temos:

> *Construir o significado do número racional e de suas representações (fracionária e decimal), a partir dos seus diferentes usos no contexto social*. (p. 55)

De acordo com essas orientações, a construção do conceito de número racional deverá ser baseada nos diversos usos desses números no contexto social, o que pressupõe a utilização de seus diversos significados, ideias e aplicações práticas nessa construção.

Os PCN colocam que o estudo dos números racionais deve ter início no segundo ano do Ensino Fundamental, com a preocupação de garantir o trabalho com situações contextualizadas e propõem (p. 56-59) que sejam trabalhados os seguintes conteúdos diretamente relacionados ao assunto "números racionais na representação fracionária":

- Reconhecimento de números naturais e racionais no contexto diário.
- Leitura, escrita, comparação e ordenação de representações fracionárias de uso freqüente.
- Reconhecimento de que os números racionais admitem diferentes (infinitas) representações na forma fracionária.
- Identificação e produção de frações equivalentes, pela observação de representações gráficas e de regularidades nas escritas numéricas.
- Exploração dos diferentes significados das frações em situações-problema: parte-todo, quociente e razão.
- Observação de que os números naturais podem ser expressos na forma fracionária.
- Relação entre representações fracionária e decimal de um mesmo número racional.
- Análise, interpretação, formulação e resolução de situações-problema, compreendendo diferentes significados das operações envolvendo números naturais e racionais.

Também é sugerido, como forma de abordagem dos números racionais, a exploração de situações-problema que induzam os alunos a perceberem que os números naturais são insuficientes para resolvê-las, levando à necessidade de ampliação do conjunto de números.

Os PCN chamam a atenção para alguns obstáculos epistemológicos do ensino dos números racionais e citam cinco dificuldades que as crianças podem encontrar, quando raciocinam sobre os números racionais como se fossem números naturais (p. 66). Pelo menos quatro delas dizem respeito à representação fracionária desses números e apresentamos a seguir:

• Os alunos podem estar acostumados ao fato de que cada número natural é representado por um único símbolo, porém o número racional pode ser representado por infinitas escritas fracionárias – utilizando frações equivalentes.

• A um aluno que sabe que a relação $4 > 3$ é verdadeira, pode parecer contraditório que $1/4 < 1/3$.

• No conjunto dos números naturais o aluno está acostumado a falar em antecessor e sucessor, fato que não é possível no conjunto dos números racionais.

• Quando um aluno multiplica dois números naturais, diferentes de zero e de um, ele sempre espera um resultado que é maior do que ambos. Este mesmo aluno se surpreenderá ao verificar que $10 \times 1/2$ produzirá um número menor do que 10.

Podemos também verificar que os PCN (p. 54) sugerem, para o segundo ciclo do Ensino Fundamental, a exploração apenas de três significados dos números racionais – *quociente*, *parte-todo* e *razão* – além de chamar a atenção para o trabalho com suas duas representações – fracionária e decimal. Em relação às interpretações sugeridas para essas três ideias, temos (p. 67):

– *Parte-todo*: relação em que um todo se divide em partes (equivalentes em quantidade de superfície ou de elementos). A fração indica a relação que existe entre um número de partes e o total de partes.

– *Razão*: aquela em que a fração é usada como uma espécie de índice comparativo entre duas quantidades de uma grandeza, ou seja, quando é interpretada como uma razão.

– *Quociente*: divisão entre dois números naturais. O símbolo $\frac{a}{b}$ representa $a : b$, com $b \neq 0$.

Segundo os PCN, este último se distingue do primeiro, pois ele pode ser observado em situações que envolvem a idéia de divisão.

Eles também sugerem que nos ciclos posteriores uma outra interpretação dos números racionais deverá ser explorada: a de *operadores*. Apesar dessa sugestão, a maioria dos livros didáticos, segundo pesquisas recentes (Silva, 1997; Canova, 2006), explora a idéia de fração como *operador multiplicativo* desde o quarto ano do Ensino Fundamental – que equivale à terceira série, do segundo ciclo citada nos PCN. Mais ainda, segundo essas mesmas pesquisas, os professores dos anos iniciais, quando da elaboração de situações-problema, apresentaram mais situações envolvendo o significado *operador*.

Canova (2006) revela

> *Esse resultado nos surpreendeu, pois as recomendações dos PCN para os ciclos iniciais sugerem que o ensino de frações aborde os significados parte-todo, quociente e razão, sendo o significado operador multiplicativo sugerido para os ciclos posteriores*.
> (p. 160-161)

Apesar de ter causado surpresa aos pesquisadores, podemos analisar essa preferência dos professores pela utilização da idéia de fração como *operador multiplicativo* comparando-a com a sua utilização na maioria dos livros didáticos (Silva, 1997; Canova, 2006). Como mostram algumas pesquisas, os professores dos anos iniciais baseiam suas aulas principalmente nas experiências que tiveram durante toda a sua escolaridade, desde o Ensino Fundamental, e nos livros didáticos que são adotados nas instituições onde trabalham. Isto explica, em parte, o porquê dessa preferência.

2.4- As ideias de frações e os livros didáticos no Brasil

A título de exemplo, escolhemos três coleções de livros didáticos para verificar a utilização das diversas ideias de frações: Coleção de Imenes et al, Coleção de Pires et al e Coleção de Bigode. As duas primeiras possuem livros que vão do 1º até o 9º ano do Ensino Fundamental, possibilitando um acompanhamento da utilização dessas ideias em todo Ensino Fundamental. Já a terceira, só possui livros do 6º ao 9º ano, porém resolvemos também colocá-la para analisar como o tema frações é desenvolvido numa coleção que não possui livros do primeiro segmento do Ensino fundamental, mas apenas do segundo.

A seguir fazemos um resumo do conteúdo de números racionais dessas coleções, baseado numa comunicação científica de NEPEM/USF (2004), com o título de “Números Racionais no Ensino Fundamental: Subconstrutos, o papel da linguagem e dos materiais manipulativos”. Assim como foi dito na comunicação, consideramos que estas obras são representativas das atuais tendências do ensino de Matemática. Para as obras com mais de um autor, como há mudanças de parceria de um nível de ensino para outro, utilizaremos como referência o autor comum. Assim, ao nos referirmos a Imenes et al. subentende-se: Imenes, Jakubo e Lellis do 2º ao 5º ano e Imenes e Lellis, do 6º ao 9º ano. De maneira análoga, para Pires et al. subentende-se: Pires e Nunes do 2º ao 5º ano e Pires, Curi e Pietropaolo,do 6º ao 9º ano. Fazemos, também, algumas considerações baseadas no nosso referencial teórico.

▪ **Coleção de Imenes et al. (2001, 2002)** : A ideia de fração como *parte-todo*, ou *medida*, como definiram Behr et al (1983), aparece desde o 4º até o 8º ano. A noção de fração como *representação na reta numérica* aparece pela primeira vez no 5º ano, numa situação envolvendo percurso (p. 94), mas ainda sem relacioná-la com pontos da *reta numérica* propriamente ditos. Esse significado só é sistematizado no 9º ano. O significado *quociente* só é abordado nas três últimas séries do Ensino Fundamental, enquanto o de *razão* é trabalhado no 7º e no 9º anos. Chamou-nos a atenção o fato de os autores definirem *razão* como uma divisão entre dois números (p. 152), o que poderia ser considerada a ideia de fração como *quociente*. Apenas no 9º ano é trabalhada a ideia de fração como a medida da chance ou a *probabilidade* de ocorrência de um certo resultado (p. 95). Falando do subconstruto *número decimal*, como definem Behr et al (1983), o mesmo é introduzido no 5º ano relacionado ao sistema monetário e a algumas unidades de medida. A representação decimal dos números racionais é explorada, num primeiro momento, sem qualquer vínculo com frações. Somente após a retomada de frações num ano posterior, é que esta representação é associada à fração decimal. É importante destacar que a *porcentagem*, tratada por nós neste trabalho como uma das idéias de fração, recebe uma maior ênfase na sua representação decimal e não fracionária. No 6º e no 7º ano, os autores mantém essa concepção, fazendo retomadas desse subsconstructo. Os demais subconstructos definidos por Behr et al (1983) não são abordados na coleção, porém foi encontrado apenas um exercício no 7º ano (p.72) que traz implicitamente a noção de *operador*, mas este é transformado na relação *parte-todo* para a sua resolução.

Em resumo, a coleção utiliza até o 5º ano do Ensino Fundamental apenas as seguintes ideias dos números racionais: *parte-todo*; *representação na reta numérica* – não explicitamente; *número decimal* – não como fração decimal; *porcentagem* – com ênfase na representação decimal.

▪ ***Coleção de Pires et al.* (1998, 2002):** O significado *parte-todo* é abordado desde o 4º até o 7º ano. A representação de frações na *reta numérica* é apresentada no 4º ano – capítulo 14 – em um exercício em que o aluno precisa descobrir a metade entre dois números naturais, mas no 5º ano é abordada no capítulo 10, no qual são exploradas noções de densidade. Depois somente no 8º ano. O significado *quociente* é abordado no 4º ano, em situações de divisão de folhas e de chocolates entre crianças. Já no 5º ano, há a relação entre a divisão e a fração e no 6º ano (p. 137) aparece um texto sistematizando os significados *parte-todo* e *quociente*. Vale destacar que esta coleção é a única que contém um texto explicativo ao aluno sobre alguns dos diferentes significados e aplicações da fração. A ideia de fração como *razão* é explorada apenas no 6º e 8º anos. Sendo que no 6º ano ela aparece em situações-problema sobre proporcionalidade (módulo 14). Vale salientar que no Manual do Professor há orientações de que esses contextos envolvem o conceito de *razão* e nele os autores o definem com uma interpretação diferente das anteriores, na qual o número racional é usado como um índice comparativo entre duas quantidades, ou seja, quando é interpretado como *razão* (p. 39). Também é importante destacar que os autores incluem nessa idéia de fração os seguintes significados: índice comparativo, probabilidade e escala. No 8º ano essa ideia reaparece no trabalho com escala (módulo 20), em que esta é definida como uma *razão*. A *representação decimal* dos números racionais aparece desde o 4º ano na coleção, é apresentada no manual do professor como um *subconstruto* próprio desses números, porém, no 6º ano, há uma ampliação, relacionando a representação decimal com a divisão entre dois números inteiros. Assim, os decimais ora são tratados como um subconstructo próprio, ora como frações no subconstructo *quociente*. Quanto ao subconstructo *operador*, este é definido no volume do 4º ano (p. 39), juntamente com a informação de que o mesmo não será trabalhado nesse ciclo. No 5º ano essa definição é retomada, quando é colocado pelos autores que a fração desempenha um papel de transformação, algo que atua sobre uma situação e a modifica (p.30). Novamente há a informação de que essa interpretação para número racional será utilizada nos ciclos posteriores. Nessa coleção, as ideias dos números racionais usadas até o 5º ano foram:

parte-todo; *representação na reta numérica*; *quociente*; *número decimal*. A idéia de *operador* é apenas definida no 4º e no 5º ano, porém não é utilizada em situações práticas.

▪ **Coleção de Bigode (2000)**: O significado *parte-todo* é explorado apenas no volume do 6º ano. A reta numérica aparece no 6º ano, no capítulo 11, no tópico "As frações e a reta numérica", porém apenas para frações próprias. O assunto é retomado no 7º ano (p. 68-69), quando o autor, ao explorar a idéia de fração como *quociente*, usa contextos de reta numérica, tanto de números racionais na representação decimal quanto na fracionária. No 9º ano volta-se à reta numérica com a discussão da densidade do conjunto dos racionais. O significado *quociente* é trabalhado no 7º e no 8º anos. No 7º ano há a afirmação de que em muitas situações as frações são usadas para indicar uma divisão, todavia, não foram identificadas situações em que a divisão estivesse associada a uma fração, mas apenas a um número decimal.

O significado *razão* aparece em um único exercício (p. 197), no 6º ano, apesar de sem nenhuma discussão. Já no 7º ano, a *razão* é trabalhada no capítulo relativo à proporcionalidade e é definida como o *quociente* entre dois números inteiros. Novamente existe uma mistura entre as ideias *razão* e *quociente*.

Não identificamos na coleção a exploração do *número decimal* como um subconstructo dos racionais separado, pois este aparece sempre relacionado à fração, ou seja, como resultado decimal da divisão do numerador pelo denominador. Quanto ao significado *operador*, este é definido apenas no Manual do Professor do 7º ano (p.27), mas em nenhum momento ele é discutido com o aluno.

Podemos verificar nesta última coleção que, mesmo em se tratando do segundo segmento do Ensino Fundamental, nem todos os significados e aplicações dos números racionais, e mais especificamente das frações, são realmente utilizados, contrariando totalmente as orientações contidas nos PCN. Em relação às três coleções, novamente verificamos a predominância e a intensidade de utilização da idéia *parte-todo*, sendo trabalhados os modelos *contínuo* e *discreto*, porém com o ponto de partida nas grandezas contínuas, o que reforça uma tendência ao ensino tradicional já confirmada por inúmeras pesquisas.

2.5- Conhecimentos necessários para ensinar Matemática

Além dos problemas relacionados com os chamados conhecimentos disciplinares – conhecimentos a respeito dos conceitos matemáticos que o professor deve ensinar aos alunos – e dos conhecimentos didático-pedagógicos – aqueles relacionados com todos os procedimentos e técnicas de ensino – não devemos nos esquecer dos conhecimentos pedagógico-disciplinares.

No texto “O que precisa saber um professor de Matemática?– Uma revisão da Literatura Americana dos anos 90”, a pesquisadora brasileira, na época radicada na Universidade da Geórgia (EUA), Paola Sztajn (2002), fazendo uma revisão dos artigos de pesquisa no campo da Educação Matemática publicados nos periódicos de língua inglesa durante a década de 90, coloca que dentre os diversos saberes dos professores, o “saber da disciplina” (Tardif et al. 1991) é uma das bases da relação ensino-aprendizagem, da relação entre professor e alunos dentro da sala de aula. Entretanto, a relação entre esse saber e a qualidade da aula de um professor não é direta e, muito menos, óbvia. Fazendo um rápido panorama dos estudos sobre os professores no final dos anos 80, a autora coloca a seguinte questão, que há muito inquieta educadores e formadores de professores: O que precisa saber um professor?

Como a autora bem coloca:

> *Afinal, em nossas aspirações tantas vezes lineares e causais, ainda parecemos acreditar que se pudermos definir o que precisa saber o professor de Matemática, poderemos melhorar a sua formação e, conseqüentemente, a educação das crianças.* (p.27)

Essa crença é uma das razões principais que nos impulsionaram a desenvolver esta dissertação. Acreditamos profundamente que quanto mais descobrirmos a respeito do que um professor de Matemática precisa saber para ter êxito na tarefa de ensinar, poderemos melhorar muito sua formação com conseqüente desenvolvimento da educação dos alunos.

Falando dos saberes necessários para ensinar, Shulman (1986) distingue, dentro do domínio de conteúdo que o docente deve possuir, três categorias de saberes: disciplinar, pedagógico-disciplinar e curricular. Essas categorias de Shulman são uma das mais importantes referências sobre os saberes do professor na literatura americana especializada. Dentre elas, a noção de saber pedagógico-disciplinar é a mais discutida e a de maior interesse por representar o elo entre a pesquisa sobre ensino e a pesquisa sobre aprendizagem. Shulman (1987) o caracteriza como um amálgama especial entre o conteúdo e a pedagogia, algo que é particular ao mundo do ensino, ao espaço do professor e "sua forma própria e única de entendimento profissional" (1987, p.14). O mesmo autor diz que o professor deve possuir um repertório de representações e saber avaliar qual a mais apropriada para cada momento. Deve também ter um repertório instrucional que inclua diversos modos de ensinar, organizar e gerir sua sala de aula além de conhecer diversos materiais didáticos disponíveis para o ensino do conteúdo programático. É o conjunto desses conhecimentos, junto com mais alguns outros propostos por Shulman (1987), que constitui esse importante conceito de saber pedagógico-disciplinar do professor. É esse conjunto de saberes que distingue aquele que "apenas" sabe uma disciplina daquele que é capaz de ensiná-la.

Citando algumas pesquisas contemporâneas com as de Shulman e algumas posteriores, nas quais o foco era principalmente o comportamento do professor e os seus processos de pensamento, Paola Sztajn (2002) coloca que o trabalho de Shulman (1986) impulsionou tanto os estudos sobre a eficácia do professor como aqueles acerca dos processos de pensamento do docente ao considerar a questão disciplinar e os aspectos particulares do ensino de uma disciplina específica. Sztajn (2002) passa, então, a analisar a discussão sobre o saber disciplinar e pedagógico-disciplinar na Educação Matemática americana nos anos 1991-1992 citando dois importantes artigos da literatura especializada: "Research on teaching mathematics: making subject-matter knowledge part of the equation" (Ball, 1988) e "Teachers'knowledge and its impact" (Fennema & Franke, 1992). No primeiro artigo, é proposta uma revisão do que entendemos pela expressão "saber matemática" quando nos referimos aos professores. Ball apresenta a tese que desenvolve em seu artigo: o conhecimento que o profissional de ensino tem de Matemática interage com seus pressupostos e com suas crenças – sobre ensino-aprendizagem, sobre seus alunos e sobre o contexto da sala de aula – moldando a forma como cada professor ensina essa disciplina a seus alunos. O saber disciplinar de Matemática é apresentado por Ball como um conceito que envolve três dimensões: *conhecimento substantivo* – conhecimento da substância da matemática, de suas proposições, conceitos e procedimentos; *conhecimento sobre a natureza dessa disciplina e do discurso matemático* – conhecimento sobre o fazer matemático, entendendo as regras de funcionamento da Matemática – e a terceira dimensão é composta pelas *respostas emocionais que a pessoa apresenta com relação a essa ciência, além da auto-percepção que o indivíduo possui acerca da sua relação com a mesma.* O conhecimento que alguém tem da Matemática envolve o que sabe sobre o assunto, o que sabe sobre a organização do campo e suas atitudes perante o assunto. O professor de Matemática, entretanto, precisa ser capaz de articular seu saber, pois como Paola Sztajn (2002) coloca em seu texto, para Ball (1991):

> *O professor de Matemática, entretanto, precisa ser capaz de articular seu saber, pois aquilo que é apenas tacitamente aceito não pode ser explicitamente ensinado.* (p.21)

O saber explícito e conectado do professor deve estar articulado com a visão que este tem sobre a Matemática, sobre a natureza da disciplina, formando aquilo que influenciará a forma com a qual decide apresentar certo tópico para seus alunos. Ball (1991) também alerta para o fato de que a relação entre esse "saber Matemática" e o ensino dessa disciplina não é linear. Como ela destaca, saber Matemática "para si" não é o mesmo que saber Matemática para ensinar. O segundo artigo citado por Sztajn (2002), de Fennema e Franke (1992), discute o conhecimento de Matemática do professor. As autoras concluem que esse conhecimento impacta a sala de aula pela riqueza da discussão matemática que permite, influenciando na própria organização do ambiente de estudo. Considera ainda o conhecimento das representações matemáticas, isto é, a capacidade de traduzir assuntos complexos de modo que possam ser entendidos pelos alunos. O terceiro aspecto do saber do professor considerado na revisão bibliográfica é o conhecimento que ele tem dos alunos. Finalmente, as autoras propõem que o professor deve ter conhecimento sobre como ensinar e sobre o processo de tomada de decisão que acontece em sala de aula. Fennema e Franke propõem então, segundo Sztajn (2002), o seu modelo para estudar o saber do professor de Matemática, o qual inclui: conhecimento de Matemática, conhecimento pedagógico, conhecimento dos processos cognitivos dos alunos ao aprenderem a disciplina, tudo isso ligado ao contexto específico no qual o docente precisa utilizar esses conhecimentos.

A partir desse ponto Stajn (2002) faz uma revisão dos artigos publicados nos periódicos de língua inglesa de 1993 a 2000. A autora começa dizendo que a pesquisa sobre o saber do professor de Matemática é ainda recente e tem muito a caminhar, principalmente quando se considera a busca de uma maior compreensão da transformação do saber disciplinar em saber ensinável, da qual falam Fennema e Franke (1992). Após ler 42 artigos obtidos utilizando a base de dados *Education Abstract* (que cobre mais de 400 periódicos em educação), Sztajn diz que se pode concluir que para a comunidade americana de educação matemática ao falar de ensino, o saber disciplinar é importante apenas na medida em que pode ser entendido como saber pedagógico-disciplinar. Ela, então, seleciona alguns deles para apresentar seus resumos. No primeiro, Lubinski (1994) inicia seu artigo considerando que professores precisam ter conhecimentos sobre conteúdo, métodos e materiais. Em particular, a autora discute o conhecimento dos professores sobre atividades matemáticas interessantes e como pensam seus alunos. Ela observa que o conhecimento sobre atividades matemáticas envolve tanto o saber disciplinar quanto o pedagógico. Conhecer os alunos é uma questão também levantada por Even e Tirosh (1995) em seu trabalho com professores, de acordo com Sztajn (2002). Para esses autores, entretanto, assim como o professor precisa "saber que" e "saber por que", no que se refere ao conteúdo matemático, ele precisa "saber que" e "saber por que" com relação a seus alunos. Em seus estudos, os autores observaram que a maioria dos professores não estava preocupada em entender as origens das respostas dos alunos.

Sztajn (2002) apresenta, então, mais dois artigos escritos por Thompson e Thompson (1994, 1996), nos quais eles analisam um experimento em que observam um professor ensinando a uma aluna o conceito de velocidade como *razão* entre distância percorrida e tempo gasto e verificam que o fato de o professor não conseguir discutir *velocidade* e *razão* de modo conceitual influencia o entendimento que a aluna desenvolve. Considerando que a comunicação é fundamental na sala de aula, os autores argumentam que para haver reforma no ensino de Matemática, os professores precisam aprender a ouvir os alunos e, mais ainda, devem ser capazes de adaptar suas ações instrucionais ao que "ouvem" dos alunos, buscando garantir que estes, por sua vez, irão ouvir o que eles, professores, desejam.

Considerando a prática como elemento fundamental para discussão e apropriação do conteúdo, Paola Sztajn (2002) cita Even (1999) que relata um programa de formação continuada de professores que busca integrar o saber acadêmico com o saber oriundo da prática. Para o autor, é a integração entre os saberes construídos na academia e na prática que tem o potencial de desafiar as concepções e crenças dos docentes, promovendo reestruturação intelectual. Essa integração é muitas vezes dificultada porque aqueles que possuem o saber da prática ignoram o saber produzido na academia. Ainda segundo Sztajn

(2002), Von Minden et al. (1998) comparam diversas dimensões dos saberes matemático e pedagógico de professores/pesquisadores em Matemática, professores universitários de métodos matemáticos e professores de Matemática dos Ensinos Médio e Fundamental. Apesar de professores/pesquisadores em Matemática possuírem estruturas mais integradas de conhecimento do conteúdo matemático, são os professores de métodos de ensino que apresentam maior integração entre o conteúdo matemático e pedagógico. Mais ainda, tanto professores de métodos quanto os professores da escola – Ensino Fundamental e Ensino Médio – possuíam maior conhecimento do que os matemáticos acerca de situações de ensino, problemas e atividades para a sala de aula, relacionados com conteúdos específicos do ensino.

Sztajn (2002) passa, então, a falar sobre o trabalho de Stein e Smith (1998) no qual eles relatam que para refletir sobre suas aulas de modo sistemático, os professores devem tomar como principal foco de sua reflexão as tarefas matemáticas escolhidas e suas fases de desenvolvimento em sala de aula. Em particular, o artigo discute tarefas com menor ou maior demanda matemática (memorização e procedimentos versus procedimentos explicados e resolução de problemas) e como elas podem ser transformadas ao passarem por três fases de reflexão dos professores: como aparecem nos livros ou outros materiais didáticos; como propostas pelo professor e como implementadas pelos alunos. Continuando, Sztajn (2002) relembra o trabalho de Mitchell e Carré (1996), onde eles discutem como os “elos conceituais” de duas professoras guiaram o modo como aplicações do conteúdo matemático foram tratadas dentro da sala de aula. Os dados foram organizados em quatro categorias: elos conceituais (percepção do professor sobre a relação entre o conhecimento ensinado e as aplicações propostas), cenário de ensino (o que acontece quando o conhecimento a ser aplicado é ensinado), elos no ensino (o que o professor faz para ligar o que foi ensinado e a aplicação subseqüente), e cenário de aplicação (o que acontece na sala de aula quando os alunos precisam aplicar seus conhecimentos). Os elos conceituais, segundo as autoras, influenciam as demais categorias e o que ocorre em sala de aula.

Os pesquisadores Deborah Ball, Heather Hill e Ehyman Bass também abordam o tema dos conhecimentos necessários para o ensino de Matemática no texto “Knowing Mathematics for teaching”(2005). O texto inicialmente fala do grave problema, detectado por inúmeras pesquisas, envolvendo todo o processo de ensino e aprendizagem de Matemática nos Estados Unidos, e da enorme necessidade de se buscar soluções efetivas. Um dos principais problemas está relacionado aos saberes docentes, quer sejam saberes disciplinares, pedagógico-disciplinares ou curriculares.

Ball et al. (2005), se referindo aos saberes disciplinares, dizem que embora várias pesquisas demonstrem que o conhecimento matemático dos professores é fundamental para o desenvolvimento dos alunos, a real natureza e a extensão deste conhecimento são ainda bem desconhecidas, o que torna fundamental e urgente fazer-se pesquisas profundas sobre esse conhecimento – o chamado saber disciplinar. Só com a constatação científica sobre os problemas que realmente existem em relação aos saberes dos professores, poderão surgir pesquisas que irão sugerir alternativas concretas de melhoria da aquisição de conhecimentos matemáticos, desde o momento em que os futuros professores de Matemática estão no Ensino Fundamental e no Ensino Médio, depois durante a formação inicial, passando pela formação continuada, até os cursos de pós-graduação.

No artigo, Ball et al. (2005) passam a descrever um programa de pesquisa que vem sendo desenvolvido pelos autores há mais de uma década, examinando e analisando de perto o verdadeiro trabalho cotidiano do professor e os desafios de ensinar Matemática na escola básica. A partir da pesquisa, eles deduziram um retrato do que eles chamam de "conhecimento matemático para ensinar", que consiste num conhecimento profissional específico diferente daqueles necessários ao exercício de outras profissões que exigem conhecimento matemático. Os autores testaram rigorosamente as suas hipóteses, primeiramente criando um sistema especial de medição desse conhecimento e depois estabelecendo uma ligação entre os resultados dessa medição e o desenvolvimento de conhecimentos matemáticos pelos alunos dos professores testados. Eles descobriram que os professores que obtiveram grande pontuação no sistema de medição criado por eles, conseguem melhores resultados no que se refere à aquisição de conhecimentos matemáticos pelos seus alunos. Ball et al. (2005) apresentam, então, a seguinte pergunta no texto: "O quê, na prática, professores devem saber sobre matemática para obter sucesso com seus alunos em sala de aula?" (p. 22). Esse tipo de saber é exatamente aquele definido pelos autores como "conhecimento matemático para ensinar" (p.22). Estudando o trabalho do professor em sala, eles definem os "conhecimentos necessários para estar apto a exercer a função de ensinar matemática" (p.22) como sendo tudo aquilo que os professores devem saber/fazer para dar suporte ao aprendizado dos alunos, o que envolve o planejamento e todas as tarefas práticas referentes ao bom andamento de uma aula e à efetiva aquisição de conhecimentos matemáticos pelos alunos. Cada uma dessas tarefas envolve conhecimento de idéias matemáticas, habilidades de raciocínio e de comunicação matemática, fluência com os termos matemáticos, capacidade de selecionar adequadamente exemplos e modelos matemáticos, e atenção sobre a natureza da proficiência matemática. Eles dizem:

> *Saber Matemática para ensinar demanda um tipo de profundidade e particularidade que vai muito além do que é necessário para realizar o algoritmo de forma confiável.* (p. 22)

Continuando seu artigo, Ball et al. (2005), na tentativa de melhor definir e ilustrar o que significa esse "saber matemática para ensinar", utilizam como exemplo um problema envolvendo o algoritmo da multiplicação de números naturais. Eles colocam que não é suficiente que o professor saiba utilizar corretamente o algoritmo e meramente resolva o problema enquanto os alunos o observam. Ele deve explicar cada passo, prestar atenção e investigar o trabalho dos alunos, escolher profícuos modelos ou exemplos que expliquem o significado do algoritmo, deve estar apto a "enxergar", entender e analisar cada erro típico e a sua origem para poder interferir no momento exato. Ensinar também requer saber escolher e fazer uso de várias representações com o intuito de esclarecer melhor o significado do que está sendo ensinado. Tais tarefas requerem um "insight" e uma compreensão matemática adicional que vão além do simples saber disciplinar.

Estar apto a realizar e compreender problemas de variados graus de dificuldade é outra tarefa que requer um "insight" matemático explícito em ensino. Para ensinar não basta simplesmente saber chegar às respostas certas. Todas essas tarefas, comuns ao ensino de matemática, envolvem tanto o raciocínio matemático quanto fazem pensar pedagogicamente. Ainda segundo o texto, o professor quando vai apresentar um novo conceito deve pensar sob a perspectiva do aluno e considerar o que realmente faz alguém compreender uma idéia matemática que vê pela primeira vez.

Um outro tema emergente nas pesquisas dos autores Deborah Ball, Heather Hill e Ehyman Bass (2005), e que faz parte dos conhecimentos necessários para ensinar, é a "centralidade da linguagem matemática" e a necessidade de um tipo especial de fluência com termos e noções matemáticas. Os professores devem constantemente fazer julgamentos sobre como definir termos e noções matemáticas e sobre o perigo do uso de neologismos, metáforas e linguagem ambígua ou imprecisa na tentativa de explicá-los. Eles necessitam de habilidade com termos matemáticos e com o discurso matemático que permitam aos estudantes um trabalho matemático cuidadoso e que não gere concepções equivocadas nem erros. Preservar a precisão e a integridade matemática é dever do professor.

Ball et al. (2005) definiram o domínio matemático dos números e das operações como foco da pesquisa e, com o auxílio de pedagogos, matemáticos, educadores matemáticos e professores, formularam questões para medirem dois tipos de conhecimento matemático para ensinar: conhecimento matemático comum que todo adulto deve possuir e conhecimento matemático especializado para o trabalho como professor. O alvo principal da pesquisa era identificar o conteúdo do conhecimento necessário à efetiva prática docente, desenvolver um instrumento de medida desse conhecimento que pudesse ser usado por outros pesquisadores e verificar se o bom resultado dos professores ao responderem as questões selecionadas está relacionado à efetividade no ensino. Para os pesquisadores, os resultados foram claros: os alunos de professores que responderam mais itens corretamente alcançam maiores ganhos de aprendizagem.

Nas conclusões, os pesquisadores falam de como os resultados da pesquisa podem ser úteis no sentido de se repensar a formação dos professores, com claros reflexos na melhoria da qualidade de ensino, e dizem que apesar de todos os obstáculos e dificuldades para se fazer pesquisas a respeito dos saberes docentes, é necessário e urgente que cada vez mais pesquisas sejam realizadas nesse sentido. E terminam afirmando que:

> *Enfrentar este desafio é uma responsabilidade profissional. Fazê-lo com sucesso é essencial à nossa sobrevivência como uma profissão.* (p. 46)

2.6- Os saberes docentes e a formação profissional

No texto “Saberes profissionais dos professores e conhecimentos universitários”, da Revista Brasileira de Educação (2000), o pesquisador Maurice Tardif aborda três questões que nas últimas décadas têm estado no centro da problemática da profissionalização do ensino e da formação de professores:

1) Quais são os saberes (conhecimentos, competências, habilidades, etc.) profissionais dos professores?
2) Em que e como esses saberes profissionais se distinguem dos conhecimentos universitários elaborados pelos pesquisadores da área de ciências da educação, bem como dos conhecimentos incorporados nos cursos de formação universitária dos futuros professores?
3) Que relações deveriam existir entre os saberes profissionais e os conhecimentos universitários, e entre os professores do ensino básico e os professores universitários (pesquisadores ou formadores), no que diz respeito à profissionalização do ensino e à formação de professores?

Inicialmente o autor analisa o movimento atual de profissionalização do ensino, inserido num contexto bastante paradoxal considerando que se pede aos professores para se tornarem profissionais no momento em que o profissionalismo, a formação profissional e as profissões atravessam um período de crise profunda. Esse movimento busca renovar os fundamentos epistemológicos do ofício de professor. A questão da epistemologia da prática profissional se encontra no cerne desse movimento de profissionalização, já que no mundo do trabalho o que distingue as profissões das outras ocupações é, em grande parte, a natureza dos conhecimentos que estão em jogo. A crise a respeito do valor dos saberes profissionais, das formações profissionais, da ética profissional e da confiança do público nas profissões e nos profissionais constitui o pano de fundo do movimento de profissionalização do ensino e da formação para o magistério. O autor diz que se admitirmos que o movimento de profissionalização é, em grande parte, uma tentativa de renovar os fundamentos epistemológicos do ofício de professor, então é necessário examinar seriamente a natureza desses fundamentos e extrair daí elementos que permitam entrar num processo reflexivo e crítico a respeito das práticas dos próprios formadores e pesquisadores.

Tardif (2000) define epistemologia da prática profissional como “o estudo do conjunto dos saberes utilizados realmente pelos profissionais em seu espaço de trabalho cotidiano para desempenhar todas as suas tarefas” (p.10). A noção de “saber” tem, segundo o autor, um sentido mais amplo englobando os conhecimentos, as competências, as habilidades (ou aptidões) e as atitudes, ou seja, o que muitas vezes já foi chamado de saber-fazer e saber-ser. A finalidade de uma epistemologia da prática profissional é revelar esses saberes, compreender como são integrados concretamente nas tarefas dos profissionais e como estes os incorporam, produzem, utilizam, aplicam e transformam em função dos limites e dos recursos inerentes às suas atividades de trabalho. Também visa compreender a natureza desses saberes, assim como o papel que desempenham tanto no processo de trabalho docente quanto em relação à identidade profissional dos professores. O autor chama atenção para certas conseqüências teóricas e metodológicas decorrentes da definição de epistemologia da prática profissional e que estão relacionadas com a pesquisa universitária. Primeiramente, em termos de postura de pesquisa, essa definição propõe “uma volta à realidade”, ou seja, um processo centrado no estudo dos saberes dos atores em seu contexto real de trabalho. O autor diz, então:

> *A hipótese subjacente a essa postura de pesquisa é que os saberes profissionais são saberes da ação ou ainda, usando uma expressão que preferimos, saberes do trabalho, saberes no trabalho:* **working knowledge**, *como tão bem expressa Kennedy. (Tardif, 1983,* p.11)

E continua:

> *Querer estudar os saberes profissionais sem associá-los a uma situação de ensino, a práticas de ensino e a um professor seria, então, um absurdo. É a mesma coisa que querer estudar uma situação real de trabalho, uma situação real de ensino, sem levar em consideração a atividade do professor e os saberes por ele mobilizados. Finalmente, querer estudar os professores sem estudar o trabalho e os saberes deles seria um absurdo maior ainda. Ora, uma boa parte da literatura da área de educação, nos últimos cinqüenta anos, está assentada nesses absurdos.* (p.11)

Outra conseqüência direta da definição de epistemologia da prática profissional é que não se deve confundir os saberes profissionais com os conhecimentos transmitidos no âmbito da formação universitária. Do ponto de vista metodológico, essa definição exige um distanciamento etnográfico em relação aos conhecimentos universitários, ou seja, se os pesquisadores universitários querem estudar os saberes profissionais da área do ensino, devem abandonar todas as antigas práticas e ir diretamente aos lugares onde os profissionais de ensino trabalham, para ver como eles pensam e falam, como trabalham na sala de aula, como transformam programas escolares para torná-los efetivos, como interagem com os pais dos alunos, com seus colegas, etc. Essa mesma definição também propõe que se pare de considerar os professores como “idiotas cognitivos” cuja atividade é determinada pelas estruturas sociais, pela cultura dominante, pelo inconsciente, mesmo sendo ele prático, e outras realidades do gênero. Também é não-normativa, o que constitui um ponto positivo já que um dos maiores problemas da pesquisa em ciências da educação, segundo o autor, é o de abordar o estudo do ensino sob um ponto de vista normativo, ou seja, os pesquisadores se interessam muito mais pelo que os professores deveriam ser, fazer e saber do que pelo que eles são, fazem e sabem realmente. Por fim, ela sustenta que é preciso estudar o conjunto dos saberes mobilizados e utilizados pelos professores em todas as suas tarefas.

Discutindo algumas características dos saberes profissionais, baseado em resultados de pesquisas recentes sobre ensino nos Estados Unidos, o autor coloca que os saberes profissionais dos professores são temporais, são plurais e heterogêneos e são personalizados e situados. São temporais, ou seja, são adquiridos através do tempo, em três sentidos (Tardif, Raymond Lessard e Mukamurera, no prelo). Em primeiro lugar, boa parte provém da própria história de vida, sobretudo da história de vida escolar, dos professores. Em segundo lugar, os primeiros anos de prática profissional são decisivos na aquisição do sentimento de competência e no estabelecimento das rotinas de trabalho. Por fim, são utilizados e se desenvolvem no âmbito de uma carreira.

Os saberes profissionais dos professores são plurais e heterogêneos também em três sentidos: eles provêm de diversas fontes; não formam um repertório de conhecimentos unificado, eles são, antes, ecléticos e sincréticos; os professores, na ação, no trabalho, procuram atingir diferentes tipos de objetivos cuja realização não exige os mesmos tipos de conhecimento, de competência ou de aptidão.

Esses mesmos saberes são personalizados, pois o professor tem uma história de vida, é um ator social, tem emoções, um corpo, poderes, uma personalidade, uma cultura, ou mesmo culturas, e seus pensamentos e ações carregam as marcas dos contextos nos quais se inserem, por isso, o estudo dos saberes profissionais não pode ser reduzido ao estudo da cognição ou do pensamento dos professores. Eles são situados, pois são construídos e utilizados em função de uma situação de trabalho particular.

Por fim, vale a pena chamar a atenção sobre o fato de que “o objeto de trabalho do docente são seres humanos e, por conseguinte, os saberes dos professores carregam as marcas do ser humano”(p.16). Isso acarreta conseqüências importantes raramente discutidas, das quais o autor menciona duas. Primeiramente os seres humanos existem como indivíduos e esse fenômeno da individualidade está no cerne do trabalho dos professores, pois, embora eles trabalhem com grupos de alunos, devem atingir os indivíduos que os compõem, pois são os indivíduos que aprendem. A segunda conseqüência decorrente do objeto humano do trabalho docente reside no fato de o saber profissional comportar sempre um componente ético e emocional. Primeiro porque, como explica Denzin (1984, apud Hargreaves, 1998), o ensino é uma prática profissional que produz mudanças emocionais inesperadas na trama experiencial da pessoa docente. Em seguida, os estudantes, os alunos, são seres humanos cuja concordância e cooperação devem ser obtidos para que aprendam e para que o clima da sala de aula seja impregnado de tolerância e de respeito pelos outros. Motivar os alunos é uma atividade emocional e social que exige mediações complexas da interação humana: a sedução, a persuasão, a autoridade, a retórica, as recompensas, as punições, etc.

Tardif (2000) passa, então, a analisar os problemas epistemológicos do modelo universitário de formação de professores. Ele coloca que os cursos de formação para o magistério são globalmente idealizados segundo um modelo aplicacionista do conhecimento: os alunos passam alguns anos assistindo a aulas baseadas em disciplinas e constituídas de conhecimentos proposicionais, em seguida, ou durante as aulas, eles vão estagiar para “aplicarem” esses conhecimentos e, por fim, quando a formação termina, eles começam a trabalhar sozinhos, aprendendo seu ofício na prática e constatando, na maioria das vezes, que esses conhecimentos proposicionais não se aplicam bem na ação cotidiana. Tal modelo não é somente ideológico e epistemológico, é também um modelo institucionalizado através de todo o sistema de práticas e de carreiras universitárias.

Primeiro problema decorrente desse modelo é que ele é idealizado segundo uma lógica disciplinar e não segundo uma lógica profissional centrada no estudo das tarefas e realidades do trabalho dos professores. Um segundo problema é que esse modelo trata os alunos como espíritos virgens e não leva em consideração suas crenças e representações anteriores a respeito do ensino.

Por fim, Tardif (2000) analisa algumas possibilidades promissoras, e campo de trabalho para os pesquisadores universitários, sugerindo quatro tarefas concretas. A primeira delas consiste na elaboração de um repertório de conhecimentos para o ensino, repertório de conhecimentos baseado no estudo dos saberes profissionais dos professores. A segunda consiste em introduzir dispositivos de formação, de ação e de pesquisa que não sejam exclusivamente ou principalmente regidos pela lógica que orienta a constituição dos saberes e as trajetórias de carreira do meio universitário. A terceira, considerada pelo autor como utópica, apesar de ter sido tentada em diversos lugares, consiste na tentativa de transferir boa parte da responsabilidade da formação inicial para o meio escolar. Isto não significa que é preciso fazer as disciplinas da formação de professores desaparecerem, mas que é preciso fazer com que contribuam de outra maneira e tirar delas, onde ainda existe, o controle total na organização dos cursos. Por fim, a quarta tarefa parece, segundo o autor, a mais urgente e diz:

> *Acreditamos que já é tempo de os professores universitários da educação começarem também a realizar pesquisas e reflexões críticas sobre suas próprias práticas de ensino.* (p.21)

Falando, ainda, da formação de professores, a pesquisadora Vera Maria Candau (1997) no texto "Magistério – Construção Cotidiana" focaliza a problemática da formação continuada de professores através de três momentos: fazendo referência ao modelo considerado "clássico"; analisando algumas novas tendências desenvolvidas e trabalhadas na área e levantando questionamentos e sugerindo pistas para uma reflexão crítica. No modelo "clássico", a ênfase é posta na "reciclagem" dos professores, ou seja, voltar e atualizar a formação recebida. O professor, uma vez na atividade profissional, volta à universidade (ou a mesma "vai" até ele) para fazer cursos de aperfeiçoamento, especialização, pós-graduação lato sensu ou strictu sensu, ou participa de simpósios, congressos, encontros orientados,etc. Nesta perspectiva, o "lócus" da reciclagem privilegiado é a universidade e outros espaços com ela articulados, diferentes das escolas de Ensino Fundamental e Médio, onde se supõe que se pode adquirir o que constitui o avanço científico e profissional. A autora, então, questiona:

> *Essa concepção de formação continuada não está informada por uma visão em que se afirma que a universidade corresponde à produção do conhecimento, e aos profissionais do ensino da educação básica a sua aplicação, socialização e transposição didática, ou seja, uma visão dicotômica entre teoria e prática?* (p.54)

Reagindo a essa concepção, destacam-se, atualmente, três teses: o "lócus" da formação a ser privilegiado é a própria escola; a referência fundamental da formação é o saber docente; a formação deve levar em consideração as diferentes etapas do desenvolvimento profissional. Em relação à primeira, deve-se partir das necessidades reais dos professores, dos problemas do seu dia-a-dia, favorecendo os processos de pesquisa-ação.

Ainda segundo Vera Maria Candau (1997):

> *Questões de fundo como 'que tipo de educação queremos promover?', 'para que tipo de sociedade?', não podem estar ausentes do debate cotidiano dos professores, junto com a análise crítica das reformas educativas que vêm sendo propostas.* (p.67)

O terceiro eixo, também ainda pouco pesquisado, levanta muitas questões relacionadas ao ciclo de vida profissional dos professores e, com certeza, também não pode ser ignorado ao se planejar qualquer ação de formação continuada. Por fim, Candau (1997), fazendo algumas reflexões críticas, chega à conclusão de que, junto com as enormes contribuições que essas novas tendências têm trazido para repensar a questão da formação continuada de professores, é necessário também estarmos conscientes dos seus limites e silêncios, da necessidade de articular dialeticamente as diferentes dimensões da profissão docente: os aspectos psicopedagógicos, técnicos, científicos, político-sociais, ideológicos, éticos e culturais.

No artigo "Formação de professores de Matemática: a Aritmética como ferramenta para a construção do saber pedagógico-disciplinar" a doutora Elizabeth Belfort (2003) analisa os resultados da aplicação de uma seqüência de atividades de aritmética básica na formação inicial e continuada de professores, elaboradas com o objetivo de auxiliar a percepção da necessidade da construção de um saber pedagógico-disciplinar utilizando como base o raciocínio aritmético. Esse trabalho tem uma enorme importância na análise das formas de aquisição, desenvolvimento e utilização dos chamados saberes pedagógico-disciplinares pelos professores – na formação continuada – e futuros professores – na formação inicial – uma vez que utiliza um problema de Aritmética aplicável a alunos do Ensino Básico como fonte de discussão das possíveis soluções, de possíveis generalizações e de todos os conceitos matemáticos envolvidos na sua solução.

A autora diz que

> *se desejamos que nossos alunos sejam capazes de construir este saber, temos que confrontá-los com situações em que eles sejam levados a aprender novas formas de ensinar Matemática, enquanto as utilizam para aprender Matemática.*(p.4)

Essa colocação nos leva a reflexões profundas a respeito da forma com que vêm sendo planejados e executados os cursos de formação inicial e continuada de professores de Matemática, quer sejam daqueles que atuarão do 6º ao 9º ano do Ensino Fundamental e no Ensino Médio, quer sejam dos que trabalharão com os anos iniciais do Ensino Fundamental – do 1º ao 5º ano – que, como terão que lecionar todas as disciplinas, serão também professores de Matemática. Talvez seja uma das mais felizes e inteligentes colocações a respeito das possibilidades de aquisição, desenvolvimento e aprimoramento dos saberes pedagógico-disciplinares, que os educadores nunca deveriam deixar de considerar ao planejarem um curso qualquer de formação de professores.

A pesquisadora, então, conclui:

> *parece que os responsáveis pela formação esperam que os alunos estabeleçam sozinhos as ligações entre os conteúdos das disciplinas ministradas durante o curso e as formas de utilizar este conhecimento em suas atuações profissionais.* (p.4)

A primeira tarefa proposta se referia ao célebre “problema das cabras e galinhas”, para o qual os alunos-professores deveriam apresentar mais de uma solução. Analisando as soluções, a autora pode verificar que todas as primeiras soluções utilizavam a modelagem algébrica, porém foi na “segunda solução” que apareceu uma grande variedade de métodos, desde aqueles por tentativas até soluções aritméticas mais bem elaboradas. A obrigatoriedade de apresentar uma outra solução, que evidenciou certa resistência por parte de alguns alunos, foi usada como uma forma de incentivar um pensamento matemático mais flexível.

A segunda tarefa proposta utilizou uma listagem de soluções já compiladas apresentadas por alunos durante cinco anos de aplicação da primeira tarefa. Os alunos, reunidos em duplas, eram desafiados a tentar "adaptar" cada uma das soluções listadas para um problema similar ao anterior, porém onde os animais fictícios tinham 5 e 9 patas. Neste segundo episódio, a autora privilegiou a "generalização de problemas, a "habilidade de pensar de forma flexível... e a reflexão sobre a importância da escolha da estratégia de solução"(p. 11). Além disso, a tarefa teve como objetivo demonstrar "como pode ser difícil decidir sobre a possibilidade de generalizar um processo de solução proposto".

A necessidade de utilizar conhecimentos matemáticos mais elaborados para analisar propostas de soluções e sugerir novas, foi bastante sentida por alguns alunos, que verificaram, por isso, a fundamental importância de um conhecimento disciplinar profundo para o exercício do magistério.

Embora não tenha sido sugerida aos alunos – alguns deles já em exercício no magistério – a transposição dessas atividades para as suas turmas, vários deles se motivaram a fazê-lo, utilizando, quando necessário, algumas adaptações às devidas faixas etárias e estágios de desenvolvimento dos alunos.

Aparecem no artigo alguns interessantes depoimentos sobre as motivações e sobre os resultados obtidos pelos alunos cursistas com a aplicação das tarefas em suas turmas. Em sua maioria, os depoimentos trazem colocações no sentido do desconhecimento, e até da surpresa, por parte dos alunos/professores e futuros professores em relação à importância e à riqueza de possibilidades da aritmética na resolução de problemas e, conseqüentemente, da sua importância estratégica para o ensino de Matemática.

Belfort (2003) diz, também, que "da mesma forma que os alunos estão sendo confrontados com novas situações, a responsável pelo curso passa pelo mesmo tipo de experiência" (p.14), na medida que a diversidade do trabalho realizado pelos alunos cria a necessidade de rever estratégias e respostas já estabelecidas. Em entrevista informal, uma professora que apresentou uma solução totalmente inovadora disse o seguinte: "eu pensei: se existem tantas maneiras diferentes de pensar sobre esse problema, o que me impede de criar uma nova?". A necessidade, por parte dos cursistas, do uso de conhecimentos matemáticos (PA, MMC, etc.) para a análise e adaptação de algumas soluções propostas, evidenciou "a importância de uma base matemática sólida para o trabalho em sala de aula do professor" (p. 12).

Por fim, o artigo destaca que "a possibilidade de adaptar e transpor situações vividas em formação para a prática de sala de aula parece ser fator de motivação para o professor em formação" (p. 17). Além disso, a pesquisa verifica experimentalmente "a importância de criar diversas oportunidades para a análise de uma multiplicidade de soluções apresentadas para um mesmo problema" (p. 17) e que esta estratégia está diretamente relacionada à concepção de boa prática didática discutida por Stigler e Hielbert (2000).

Pensando na formação, é fundamental que esta permita criar a confiança necessária ao professor para desempenhar o papel de mediador, é necessário que ela crie situações que "destaquem a importância do papel do professor na sistematização, justificativa e síntese dos resultados matemáticos obtidos através de uma metodologia de resolução de problemas" (p. 17), também é necessário que ela crie "diversas oportunidades para a análise de soluções incorretas e/ou incompletas" (p. 17). Os experimentos parecem mostrar que é fundamental a utilização de atividades que privilegiem a construção de conceitos, possibilitem a discussão das justificativas e do raciocínio matemático pertinentes aos tópicos trabalhados, evidenciem a necessidade de se utilizar "diferentes métodos de prova e justificativa matemática, bem como a importância do uso de contra-exemplos, como forma de mostrar que um resultado é falso" (p. 18). Esses experimentos também "parecem indicar uma influência positiva nas práticas subseqüentes" dos professores.

Belfort (2003) conclui que o objetivo nestas atividades de formação é

> *convencer estes professores e futuros professores que o conhecimento pedagógico-disciplinar dos conteúdos matemáticos que eles deverão ensinar é fundamental para que possam realizar bem seu trabalho como professores – e que este conhecimento também é uma ferramenta poderosa. Para usar este conhecimento de forma efetiva é necessário desenvolver uma compreensão aprofundada da matemática que eles vão ensinar.* (p.19)

O texto todo chama muito a nossa atenção sobre o fato de como uma boa escolha de um "simples" problema pode proporcionar tantas reflexões e criar tanta demanda matemática.

Ele nos faz perceber realmente como é possível nos cursos de formação de professores, inicial ou continuada, construir e desenvolver o tão importante e discutido "conhecimento pedagógico-disciplinar" e mostrar a sua fundamental importância como conhecimento necessário a uma boa prática pedagógica. De todas as diversas colocações feitas pela autora, aquela que resume a forma prática mais eficiente de construir e desenvolver este saber é a que se encontra na citação acima.

2.7 – A prática docente

Na tese de Doutorado "Concepções do ensino da Matemática elementar que emergem da prática docente", a pesquisadora Mônica Mandarino (2006) procura contribuir com novas reflexões sobre o ensino de Matemática, sobre o dia-a-dia das salas de aula e sobre as concepções do professor, tendo como foco os anos iniciais do Ensino Fundamental. Para tal, a autora analisou 424 aulas, ministradas por 116 professores de escolas públicas e particulares, espalhadas pela cidade do Rio de Janeiro.

Uma das primeiras constatações da pesquisadora foi a de que, independentemente do tipo de escola, do nível de formação do professor, do tempo de experiência profissional, do número de alunos por sala ou da existência de materiais didáticos, as aulas seguem uma estrutura similar que pode ser resumida pela seqüência: "organização da sala de aula e correção do dever de casa → apresentação ou revisão de conteúdos → exercícios de aplicação → correção das atividades de aula → dever de casa".

Mandarino diz que:

> *A maioria dos professores do grupo estudado acredita que a Matemática é um conjunto de procedimentos e seu objetivo é ajudar os alunos a se tornarem hábeis executores de cálculos e estratégias de resolução de problemas, escolhidos por serem considerados mais eficazes ou por serem aqueles com os quais os docentes se sentem seguros.* (p. 229)

Essa convicção guia a prática cotidiana de ensino de Matemática a qual se caracteriza pela

> *apresentação de conteúdos parte a parte, de forma superficial e fragmentada e pela crença de que se aprende prestando atenção, repetindo exemplos e fazendo muitos exercícios...de aplicação imediata.* (p. 229)

A pesquisa mostra que esta concepção sobre a Matemática escolar está bastante consolidada no imaginário social.

Mandarino diz que dentre as várias ações necessárias no intuito da melhoria desse quadro, uma delas é, sem dúvida, repensar a formação inicial e continuada de professores dos anos iniciais, já que atualmente a "ênfase recai na perspectiva de uma formação pedagógica plena e na formação de um profissional que reflete sobre a sua prática" (p. 230), acreditando-se que "o futuro professor saiba a Matemática que precisará ensinar (assim como os conteúdos das outras áreas)" (p. 231). Nesse sentido, é preciso urgentemente repensar o currículo dos cursos de formação de professores para que eles possam ter a oportunidade de reconstruir seus conhecimentos de Matemática, e não venham mais tarde reproduzir com seus alunos o modelo de ensino dessa disciplina que tiveram contato durante a sua escolaridade básica. A respeito da necessidade vital de reestruturação dos cursos de formação dos profissionais que atuam em sala de aula nos primeiros anos do Ensino Fundamental, Mandarino nos faz refletir profundamente ao dizer, em dois momentos da tese:

> *Além disso, nesse nível de ensino os professores* ***não têm formação específica*** *e muitos declaram* ***sequer gostar de Matemática****. Dentre as várias ações necessárias para que todos os fios da rede sejam fortalecidos, sem dúvida, a formação inicial e continuada de professores das séries iniciais precisa ser repensada.* (p. 230)
> *Muitos declaram chegar ao curso de Pedagogia buscando uma formação de nível superior, distante da área das carreiras tecnológicas. Chegam à Universidade* ***odiando Matemática*** *e é preciso, pelo menos, ajudá-los a superar os traumas, revelar a beleza desta ciência, ajudá-los a compreender os motivos do seu desprazer. Se isso não for modificado, o mais provável é que seus futuros alunos se contaminarão com o seu desencanto.* (p. 232)

Mandarino continua, dizendo que há necessidade de se repensar políticas públicas para a melhoria da qualidade de ensino, principalmente pensando em pequenas ações possíveis e que privilegiem aquilo que está ao alcance das próprias escolas e dos professores. Nesse sentido, ela aponta algumas questões que já poderiam ser modificadas, tais como a estratégia adotada no Japão (Stigler e Hiebert, 1999) com um trabalho de formação continuada que previa a troca de experiências entre professores, elaboração coletiva de atividades a serem implementadas e posteriormente discutidas. A autora lembra que no município do Rio de Janeiro já existe um tempo remunerado para trabalho fora de sala de aula, porém que o mesmo é mal utilizado e diz que

> *é preciso insistir, a postura de trabalho solitário de tomada de decisões sobre as práticas cotidianas, que para alguns professores é quase sigilosa, precisa ser alterada.* (p. 233)

Nesse caminho, os professores

> *precisam receber apoio e se atualizar naquilo que sentem necessidade e não no que foi pensado, por outros, que seria bom para eles.* (p. 233)

Por isso, a necessidade de que os mesmos façam parte de um grupo de estudos no qual possam discutir suas práticas sem nenhum constrangimento.

Finalmente, Mandarino (2006) conclui que

> *os dados da pesquisa apontam para as interpretações freqüentemente equivocadas das recomendações oriundas das pesquisas e dos documentos oficiais. O desconhecimento dos PCN, publicado em 1988; o currículo em espiral que gerou uma organização que mais parece com a imagem de um ciclone ou de um furacão; a desarticulação entre conceitos e a conseguinte fragmentação e mistura de assuntos; a contextualização mal efetivada em problemas que são inverossímeis; dentre tantos outros exemplos que as análises realizadas evidenciaram, precisam ser pensados com seriedade.* (p. 234)

Além de confirmar antigas conjecturas a respeito das práticas cotidianas de sala de aula nos anos iniciais do Ensino Fundamental – quer sejam práticas ligadas às rotinas de funcionamento, quer sejam relacionadas ao processo de ensino e aprendizagem de Matemática – os dados da pesquisa trazem novas preocupações na medida que evidenciam as interpretações e utilizações equivocadas, por parte dos docentes, dos resultados das pesquisas mais recentes no campo da Educação Matemática e das orientações contidas nos PCN. Fica evidente que se deve, em regime de “urgência urgentíssima”, repensar e replanejar os cursos de formação de professores – inicial e continuada – pois caso contrário corre-se o sério risco de não serem mudadas antigas práticas inadequadas e ainda contaminá-las com informações totalmente distorcidas a respeito dos resultados das novas pesquisas e das orientações/sugestões oriundas delas.

CAPÍTULO III – O QUESTIONÁRIO

3.1- O questionário e os professores participantes

Com o objetivo de obter informações sobre os conhecimentos disciplinares dos professores dos primeiros anos do Ensino Fundamental – 1º ao 5º ano – a respeito dos vários significados do símbolo $\frac{a}{b}$ – com a,b∈**N** e b ≠ 0 – foi aplicado um questionário a trinta e seis professores desse segmento da seguinte forma: dezoito deles se encontram distribuídos em quatro escolas privadas tradicionais das zonas norte e oeste do município do Rio de Janeiro e os outros dezoito professores em três unidades escolares de uma escola federal tradicional e em duas escolas da Rede Municipal situadas, também, no município do Rio de Janeiro. Tal questionário está dividido em três partes: dados pessoais, problemas e questões.

Na primeira parte o professor deveria colocar seu nome, ou um codinome qualquer que não o identificasse, sua data de nascimento, sua formação, discriminando todos os cursos concluídos com as respectivas datas de conclusão, e todas as suas experiências profissionais. Em seguida, foram apresentados sete problemas objetivos cada um envolvendo um dos significados do símbolo $\frac{a}{b}$: *parte-todo no modelo contínuo*, *parte-todo no modelo discreto*, *razão*, *quociente*, *operador*, *porcentagem* e *probabilidade*. Por fim, foram propostas quatro questões aos professores: na primeira o professor deveria citar quais daqueles modelos de problemas ele já havia utilizado em suas aulas; na segunda ele deveria relacionar cada problema ao significado de fração correspondente; na terceira ele tinha que dizer, para cada um dos problemas, qual das opções de resposta ele considerava que a maioria dos seus alunos iria escolher e, na última, ele tinha que dar o seu gabarito para os problemas – ver o questionário na íntegra no anexo.

As direções e coordenações das quatro escolas particulares foram contatadas com antecedência, quando foram informadas que os nomes das instituições seriam resguardados. Colocaram-nos, então, em contato com os seus professores. Todos aqueles que lecionavam nos primeiros cinco anos do Ensino Fundamental foram convidados a participar da pesquisa. Desses professores, dezoito aceitaram e preencheram o questionário, antes, porém, fizeram uma série de perguntas que variaram desde se haveria a necessidade de se identificarem, até se as respectivas coordenações e direções das escolas teriam acesso às suas respostas, o que demonstra claramente como é difícil fazer pesquisas diretamente com os professores a respeito dos seus conhecimentos, não só pelo receio normal e humano de possivelmente demonstrar algum desconhecimento, como também pelo medo de tais constatações serem utilizadas contra eles pelos estabelecimentos onde lecionam. Eles foram tranqüilizados no sentido de que nada sobre os dados contidos nos questionários seria divulgado às respectivas direções e coordenações, que toda a pesquisa transcorreria sem a identificação dos participantes e que todos teriam, posteriormente, acesso aos resultados das análises através da própria dissertação, quando a mesma estivesse concluída, defendida e aprovada pela banca. Mesmo assim, tivemos que insistir muito com alguns deles que, apesar de concordarem com a participação, sempre nos davam alguma desculpa para poderem postergar o preenchimento do questionário.

No caso das unidades da escola federal, o contato foi feito através de um professor que atuou na referida instituição nos primeiros anos do Ensino Fundamental – 1º ao 5º ano – durante 23 anos, que é graduado em Matemática pela UFRJ e Mestre em Educação Matemática pelo CEFET-RIO, que atualmente trabalha com turmas de Ensino Médio na mesma instituição e que também participou da pesquisa. Ele nos colocou em contato com os outros professores que responderam o questionário. Uma das coisas que nos chamaram a atenção foi que esses professores não fizeram as mesmas indagações dos professores da rede particular, talvez por serem professores concursados e com estabilidade no emprego ou porque se sentiam mais confiantes em serem testados, mas não quisemos perguntar o porquê para poder resguardar os outros participantes e também por razões éticas. Apesar dessa aparente despreocupação inicial, também enfrentamos algumas resistências não tão explícitas tais como "depois respondo", "estou sem tempo agora", "posso levar para casa", etc. Tivemos que insistir muito com alguns professores para poder aplicar o questionário, apesar de os mesmos, por livre e espontânea vontade, terem concordado com a participação na pesquisa.

Em relação às Escolas da Rede Municipal, nossos elos de ligação foram um professor que também está cursando o Mestrado em Ensino de Matemática na UFRJ, trabalha em uma dessas escolas e se ofereceu para nos apresentar aos professores do primeiro ao quinto ano do Ensino Fundamental, e uma Doutora em Língua Espanhola, que trabalha na Escola Federal que fez parte da pesquisa, e também numa escola da Rede Municipal . Assim como na Escola Federal, não houve preocupação com relação ao sigilo da pesquisa, porém também aconteceram algumas resistências não verbalizadas inicialmente, mesmo que bem menores do que as enfrentadas na Rede Particular. Mantivemos o mesmo critério utilizado em todas as outras instituições.

3.2- Elaboração e análise do instrumento de avaliação

3.2.1- Primeiras considerações

Ao pensarmos na confecção do questionário, definimos, primeiramente, qual seria o público alvo: professores que estivessem em plena atividade lecionando em escolas do município do Rio de Janeiro, da rede privada ou pública, desde o primeiro até o quinto ano do Ensino Fundamental. A seguir, consideramos que seria importante para a pesquisa que os professores participantes informassem quais as suas formações profissionais e quais as suas experiências, anteriores e atuais, no magistério.

Escolhemos, então, sete ideias ou significados de frações que consideramos de suma importância utilizando como base teórica Kieren (1976, 1981, 1988), Behr et al (1983), Nesher (1985), Ohlsson (1987), Monteiro e Costa (1996), Vasconcelos e Belfort (2006), Silva (2007) e os PCN (1997). A nosso ver, essas ideias devem ser ensinadas durante os primeiros anos do Ensino Fundamental. São elas: *parte-todo no modelo contínuo*; *parte-todo no modelo discreto*; *quociente*; *operador*; *probabilidade*; *razão*; *porcentagem*. Embora algumas das nomenclaturas dessas ideias possam não fazer parte do cotidiano dos professores pesquisados, acreditamos que elas, seus significados e suas aplicações deveriam ser de seu pleno conhecimento, apesar de termos consciência de todos os problemas que envolvem suas formações e suas práticas docentes. Por exemplo, mesmo que o professor não saiba o significado de ‘contínuo’ e ‘discreto’, os dois tipos de problemas da ideia de parte-todo devem ser exploradas. Como já vimos, os autores Deborah Ball, Heather Hill e Ehyman Bass (2005) colocaram que dentre os conhecimentos necessários para ensinar, a “centralidade da linguagem matemática” e a necessidade de um tipo especial de fluência com termos e noções matemáticas são essenciais. Eles dizem que os professores devem constantemente fazer julgamentos sobre como definir termos e noções matemáticas e sobre o perigo do uso de neologismos, metáforas e linguagem ambígua ou imprecisa na tentativa de explicá-los. Eles necessitam de habilidade com termos matemáticos e com o discurso matemático de forma a permitir aos estudantes um trabalho matemático cuidadoso e que não gere concepções equivocadas nem erros. Preservar a precisão e a integridade matemática é dever do professor.

A seguir explicamos detalhadamente as razões da escolha dos sete significados de fração, que consistiu na primeira etapa muito complexa da nossa pesquisa.

3.2.2- A escolha dos sete significados das frações

Assim como colocou Silva (2007, p. 90), não existe consenso entre os diversos pesquisadores em torno de uma única classificação para os diversos significados de fração. Isto nos levou a assumir os seguintes significados: *parte-todo no modelo contínuo*, *parte-todo no modelo discreto*, *razão*, *quociente*, *operador*, *porcentagem* e *probabilidade.* A seguir justificamos nossas opções de escolha.

- **Significado parte-todo**

O significado *parte-todo* aparece em todos os estudos apresentados no nosso referencial teórico, além de fazer parte das orientações dos PCN para o segundo ciclo do Ensino Fundamental – o que corresponde atualmente ao 4º e 5º ano do Ensino Fundamental. De acordo com Silva (2007, p. 94), para Behr et al (1983) e Kieren (1988) ele é fundamental para o entendimento de interpretações mais complexas dos números racionais, porém deve ser utilizado com muito cuidado e não deve ser a única forma de apresentar as frações, uma vez que esse significado não facilita a compreensão das frações como o *quociente* entre dois números inteiros (Kieren, 1988). Kieren (1988) define a idéia *parte-todo* como sendo o *subconstruto medida*: a unidade é introduzida na forma de uma figura contínua ou um conjunto discreto, e o todo é repartido em partes iguais.

É fato relevante, também, que a ideia de fração como *parte-todo* se encontra em todos os livros didáticos relativos aos primeiros anos do Ensino Fundamental. Silva (2007), em sua tese, coloca

> *A esse respeito os PCN (1997, p. 64) concluem que: "A prática mais comum para explorar o conceito de fração é a que recorre a situações em que está implícita a relação parte-todo".* (p. 96)

Em alguns casos, a ideia *parte-todo no modelo contínuo* – aquela que se refere a um todo contínuo tal como uma pizza ou uma barra de chocolate – é a primeira idéia de fração apresentada. Essa ideia corresponde a de *fração como parte de uma unidade* sugerida por Vasconcelos e Belfort (2006, p. 1). Eles a definem como a mais usual, pensando nas frações como parte de uma *unidade* ou *todo*, que foi dividida em partes iguais e explicam que ao tomarmos uma figura plana como *todo* – um retângulo, por exemplo – a idéia de partes iguais está relacionada à de áreas iguais e não de quantidades ou formas iguais.

Normalmente, nesses mesmos livros, a ideia de fração como *parte-todo no modelo discreto* – aquela cujo inteiro é um conjunto discreto, isto é, formado por "pontos" isolados – só é apresentada na forma de exercícios e não de teoria. Vasconcelos e Belfort (2006, p. 3) a definem como *fração como parte de um conjunto* e a apresentam separadamente em seu trabalho. Os autores a colocam como podendo ser considerada "uma variante da primeira para o caso de grandezas discretas" (p. 3), sendo aquela que associa frações a subconjuntos de um conjunto. Vasconcelos e Belfort destacam, também, que nesse caso as partes iguais não são necessariamente iguais em forma ou tamanho, mas são iguais em *número de elementos*.

Decidimos, então, utilizar os significados de fração como *parte-todo no modelo contínuo* e *parte-todo no modelo discreto* separadamente em nossa pesquisa.

- **Significado Razão**

Outro significado muito importante é aquele que se refere à fração como comparação entre duas grandezas. Apesar de sua enorme importância e de fazer parte explicitamente das orientações contidas nos PCN (1997, p. 56-59), não é uma ideia de fração muito explorada pelos professores dos anos iniciais do Ensino Fundamental. Recordando Vasconcelos e Belfort (2006, p. 5):

> *Uma outra ideia, de grande importância mas não tão explorada na aprendizagem de frações, é aquela que associa a fração à razão entre duas grandezas. De acordo com essa idéia uma fração é o quociente (resultado) da comparação (divisão) de uma grandeza (numerador) por outra (denominador).*

Vasconcelos e Belfort destacam, nesse caso, que a fração não representa a comparação de uma parte com o todo, mas sim considera cada tipo de figura como uma grandeza diferente e determina a *razão* entre as duas. Isto faz com essa idéia de fração seja diferente da idéia de *parte-todo*.

Este significado de fração também faz parte de todos os trabalhos pesquisados por nós. Kieren (1988) o define como sendo o *subconstruto* denominado *número proporcional*: é uma relação de comparação multiplicativa entre duas quantidades. Behr et al (1983), Nesher (1985) e Olhsson (1987) utilizam explicitamente o termo *razão* para defini-lo.

Por todos esses motivos, decidimos utilizar em nossa pesquisa esse significado de fração.

- **Significado Quociente**

Outro significado extremamente importante e que também faz parte das sugestões dos PCN (1997, p. 54) é o de *quociente*. Como Silva (2007) coloca em sua tese

> *Esse mesmo documento, ao sugerir os conteúdos de Matemática para as primeiras séries do Ensino Fundamental (3ª e 4ª séries), propõe que aqueles abordados nas séries anteriores (1ª e 2ª séries), como número natural, adição, medida etc. sejam ampliados, pelo estabelecimento de relações, e pelo aperfeiçoamento dos procedimentos já vistos, com a finalidade de construir novos conhecimentos. Situações que envolvam o significado de quociente podem favorecer esse aprimoramento.* (p. 96)

E continua

> *Outros estudos também mostram que o "significado parte-todo" não é suficiente para a ampliação do conjunto numérico dos números naturais e sugerem que uma abordagem envolvendo um outro significado poderá fazê-lo. Kieren (1988), por exemplo, discute que o trabalho com o modelo "parte-todo" induz ao processo de dupla contagem, não propiciando a introdução da criança no campo dos quocientes. De forma análoga, Nunes e Bryant (1997), com base em Campos e Cols (1995), afirma que se o trabalho for feito somente considerando o "significado parte-todo", ficará prejudicado o entendimento de que o conjunto dos racionais é uma extensão do conjunto dos números naturais. Ou*

> *seja, para perceber essa extensão, o aluno precisaria vivenciar situações em que a ideia da divisão fosse ampliada*. (p. 96)

Silva (2007) conclui

> *No entanto, mesmo considerando toda a importância de se desenvolver trabalhos relacionados ao "significado quociente", observamos que os resultados de pesquisas consideradas sobre o tema mostram que isso não vem ocorrendo, pelo menos com a mesma intensidade que se observa no trabalho com o "significado parte-todo"*. (p. 96)

E termina

> *Portanto, consideramos de extrema importância fazer nossa investigação utilizando esse significado*. (p. 97)

Tudo isto nos levou, também, a utilizar a ideia de fração como *quociente* em nossa pesquisa.

- **Significado Operador**

Como já vimos anteriormente, nos estudos apresentados aqui nesta dissertação, os PCN (1997) também sugerem que nos ciclos posteriores ao segundo ciclo – aquele referente às antigas 3ª e 4ª séries e atuais 4º e 5º anos – uma outra interpretação dos números racionais deverá ser explorada: a de *operadores*. Vimos, também, que apesar dessa sugestão, a maioria dos livros didáticos no Brasil, segundo pesquisas recentes (Silva, 1997; Canova, 2006), exploram a idéia de fração como *operador multiplicativo* desde o quarto ano do Ensino Fundamental – que equivale à terceira série do segundo ciclo citada nos PCN. Mais ainda, segundo essas mesmas pesquisas, os professores dos anos iniciais, quando estão envolvidos em tarefas de elaboração de situações-problema, apresentam mais situações envolvendo o significado *operador* do que os outros significados.

Além desse fato, novamente todos os estudos pesquisados por nós e que serviram como bases teóricas para o nosso trabalho, indicam como um dos significados importantes de fração o de *operador*. Kieren (1988) sugere a seguinte definição para o *subconstruto operador*: semelhante ao processo de "encolher" ou "esticar", de "reduzir" ou "ampliar". De acordo com Silva (2007, p. 88), Behr et al (1983) definem a ideia de *operador* como sendo a "que vê a fração como uma transformação". Novamente de acordo com Silva

(2007, p. 89), Nesher (1985) o define como “alguma coisa que opera sobre algo, uma quantidade, e que muda essa quantidade”.

Parece haver consenso, entre a maioria dos pesquisadores, que a exploração da ideia de fração como *operador* é muito importante. Esse fato, aliado às comprovações de que esse significado de fração é bastante utilizado pelos professores, nos fizeram escolher mais essa ideia nas nossas investigações.

- **Significado Porcentagem**

Depois de várias considerações, resolvemos também explorar a idéia de fração centesimal que implica no estudo das *porcentagens*. Apesar de não fazer parte das sugestões de classificação dos diversos significados de fração apresentados pela maioria das pesquisas anteriores, acreditamos que por sua importância e grande utilização no cotidiano das pessoas e, também, pela sua apresentação em todos os livros didáticos como um tema separado do estudo das frações, o mesmo devesse ter um tratamento diferenciado nas nossas investigações. Pela nossa experiência, verificamos que é muito comum os alunos enxergarem as *porcentagens* como um conceito matemático com “vida própria”, que se utiliza, às vezes, da idéia de fração como *operador multiplicativo*. É o caso, por exemplo, do cálculo de 25% de 40 – quando o professor sugere “transformar” 25% em 25/100 e calcular 25/100 de 40. Ainda de acordo com a nossa experiência, na maioria das vezes, a vinculação entre a taxa percentual 25% e a fração 25/100 acontece apenas quando da apresentação inicial do tema *porcentagens*. Muitas vezes, logo em seguida, os professores se utilizam da chamada “regra de três” para o cálculo de 25% de 40, passando a usar, implicitamente, a noção de *razão* e de *proporção direta*: 25 está para 100 assim como “n” está para 40. Também é fato que calcular 25% de uma quantia é equivalente a calcular ¼ dessa quantia. Assim, na prática, uma porcentagem pode ser calculada por meio da multiplicação por uma fração irredutível.

Silva (2007, p. 88) cita, em sua tese, o trabalho de Behr et al (1983, p. 99) no qual ele define *taxa* como sendo um significado de fração diferente de razão, já “que as taxas podem ser adicionadas ou subtraídas enquanto as razões não”.

Sem dúvida, uma das taxas mais importantes estudadas no Ensino Fundamental é a *taxa percentual*. Esses foram os motivos principais que nos levaram à escolha da *Porcentagem* como uma das ideias de fração do nosso trabalho.

• **Significado Probabilidade**

Silva (2007, p. 89) cita, em seu trabalho, a proposta de interpretação de frações realizada por Nesh (1985). Nela, Nesh coloca explicitamente *probabilidade* como um significado de número racional diferente de todos os outros. Ainda em sua tese, Silva (2007) apresenta *medida* como sendo uma das suas escolhas de interpretação dos diversos significados de fração:

> *Outro significado, não menos importante, é o que apresenta a idéia de comparação de grandezas. Chamamo-lo aqui de medida; entretanto, os diversos autores tomados como referência, o nomeiam de forma diferenciada usando os termos razão, probabilidade, taxa, quantidades intensivas ou mesmo medidas*.
> (p. 97)

Parece haver consenso sobre a enorme importância do estudo das *probabilidades*. Apenas para ilustrar um pouco essa importância, citamos a criação recente do curso de Ciências Atuariais nas principais universidades do país, que demonstra, em parte, como a "análise de riscos" é fundamental para praticamente todos os tipos de empresas. Uma das mais importantes disciplinas desse curso diz respeito ao estudo das *probabilidades*. Esse fato é apenas mais uma prova da importância prática desse estudo, dentre as várias já citadas por nós neste trabalho. Entendemos que o mesmo deve se iniciar já nos primeiros anos do Ensino Fundamental, relacionado ao estudo do "Tratamento da Informação", como já aparece na maioria dos principais livros didáticos direcionados para esses anos.

Pensando em toda essa importância, assumimos *probabilidade* como um dos diferentes significados de fração.

3.2.3- A elaboração dos problemas e das questões

A confecção dos sete problemas foi a etapa seguinte e se mostrou bastante difícil e de muita reflexão, pois as situações deveriam realmente representar cada uma das ideias escolhidas, sem dúbias interpretações, e estarem de acordo com os anos do Ensino Fundamental para os quais os professores lecionavam. Para que não ficassem óbvias demais as respostas de alguns problemas, decidimos por colocar nesses problemas opções contendo frações equivalentes – simplificadas – àquelas que deveriam ser encontradas. Esta escolha poderia influenciar nos resultados da pesquisa, pois envolveria mais conhecimentos dos professores pesquisados – frações equivalentes e simplificação de frações – além daqueles que realmente se desejava analisar. Apesar de indubitavelmente correr esse risco, tudo indicava que essa escolha não mudaria significativamente os resultados da pesquisa, principalmente em relação aos percentuais de acertos dos problemas propostos. O que também nos levou a essa decisão foi o fato de saber, através da experiência, que o assunto "simplificação de frações" é ensinado em todas as escolas e faz parte de todas as coleções de livros didáticos dos primeiros anos do Ensino Fundamental. Isso "obriga", de certa forma, a todos os professores que lecionam para esses anos conhecerem e estudarem o tema para poderem ensiná-lo aos seus alunos, o que acaba por diminuir muito o índice de erros relacionados à simplificação dos resultados obtidos nos problemas propostos no questionário.

O primeiro problema, que se refere à ideia de fração como *parte-todo no modelo contínuo*, é um clássico no qual uma pizza é dividida em partes iguais, são tomados alguns desses pedaços e pergunta-se que fração da pizza representa os pedaços restantes. O segundo, que está ligado à ideia de fração como *parte-todo no modelo discreto*, é também bastante comum: numa turma contendo 40 alunos, existem 16 meninos. Pergunta-se que fração da turma representa o número de meninas. Exatamente por serem dois problemas clássicos e corriqueiros, optamos por perguntas indiretas, ou seja, sempre pedimos a fração que representava o restante em relação ao que era "tomado", o que envolvia uma subtração simples de números naturais antes da obtenção da fração desejada. No segundo problema, a pessoa também tinha que simplificar a fração encontrada para marcar a opção correta.

O terceiro problema é bem direto: uma pessoa possui 9 barras de chocolate e deseja reparti-las igualmente entre os seus 15 netos. A pergunta do problema pedia que fosse marcada a opção que apresentava a fração da barra de chocolate que cada neto receberia. A ideia de fração como *quociente* da divisão entre dois números inteiros nos pareceu bem definida no problema escolhido. A pessoa, ao resolver esse problema, também deveria simplificar a fração encontrada por ela para marcar a opção dentre as apresentadas.

Nos três primeiros problemas as opções de resposta eram: a fração que era pedida, a fração que representava o restante para completar o inteiro fornecido e as inversas dessas duas frações, sempre colocadas na forma irredutível. O intuito de serem colocadas as inversas como opções de resposta foi verificar exatamente se poderia haver confusão em identificar qual dos números naturais fornecidos no enunciado do problema representava o *todo,* ou se o participante da pesquisa sabia o significado teórico do numerador e do denominador.

O quarto problema também é um clássico: de um total de 30 bolas-de-gude, 3/5 eram da cor verde. Pedia-se, então, para que fosse marcada a opção que continha o número de bolas verdes. Praticamente todas as coleções de livros didáticos direcionados aos primeiros anos do Ensino Fundamental, trazem problemas nos quais os alunos devem calcular "fração de número natural" – o que representa a idéia de fração como *operador* (Silva, 1997; Canova, 2006). Dentre as opções de resposta, constavam o número correto, o número que representava o restante em relação ao total e os números que representavam 1/2 e 1/3 do total de bolas. Chegamos a pensar em colocar como opções os valores referentes a 5/3 e 5/2 de 30, porém, como os resultados seriam maiores que 30 resolvemos colocar, ao invés deles, frações que utilizassem o 2 e o 3 como denominadores.

É importante salientar que esses quatro primeiros problemas, na nossa expectativa, são aqueles que representam as idéias de fração mais utilizadas em sala de aula pelos professores pesquisados. Foram escolhidos, então, sempre problemas clássicos e bastante comuns, pois o objetivo é analisar os saberes disciplinares (Shulman, 1986) que realmente os professores têm a respeito dessas quatro idéias, saberes estes que, por isso, devem estar intrinsecamente ligados às suas práticas docentes e ao seu cotidiano escolar.

O quinto problema se refere à ideia de fração como *probabilidade* de ocorrência de um evento simples num espaço amostral eqüiprobabilístico. Ele consiste numa urna que contém 20 bolas brancas, numeradas de 1 a 20, e 30 bolas pretas, numeradas de 1 a 30, da qual é retirada, ao acaso, uma bola – o que representa o experimento aleatório do problema. A pergunta pede para a pessoa marcar a opção que contém a fração que representa a "chance" de que seja retirada uma bola branca. A palavra “chance” foi escolhida para substituir “probabilidade” na pergunta do problema, pois posteriormente há no questionário uma questão que pede também aos professores que relacionem cada um dos sete problemas à ideia de fração correspondente. Se no enunciado desse problema aparecesse a palavra “probabilidade”, a questão se tornaria muito óbvia. Nas opções de resposta, todas apresentadas na forma irredutível, foram colocadas a fração correta, a fração que representa a probabilidade de ocorrência do evento complementar, a fração que representa a razão entre o número de bolas brancas e o de bolas pretas e a fração 1/20. Este último item foi colocado porque é muito comum, ao ensinarmos probabilidade no Ensino Médio, surgirem confusões, por parte dos alunos, do tipo: “se estamos retirando **uma** bola da urna, **queremos** que ela seja branca e existem 20 brancas, então a probabilidade é 1/20”. A palavra “**queremos**” demonstra bem a confusão com relação ao conceito de *probabilidade*, já que o estudo das probabilidades se refere, na verdade, ao cálculo da “chance” de que algum evento ocorra e não na “vontade” ou na “certeza” de que algo ocorra. Por mais que tenhamos tentado usar uma linguagem que se aproximasse dos alunos do quarto e do quinto ano do Ensino Fundamental, esperávamos que houvesse certa dificuldade na resolução do problema, uma vez que essa ideia de fração ainda é muito pouco utilizada nesses anos, apesar de a grande maioria dos bons livros didáticos disponíveis no mercado conterem o estudo das *probabilidades* normalmente relacionado ao tema Tratamento da Informação.

Para não lançar mão da palavra “razão” no enunciado do sexto problema, foi usado o termo “comparação” acompanhado do que se pode chamar de uma “receita de bolo”. O problema consiste numa lanchonete que vende todos os dias 36 sanduíches de queijo e 60 de presunto e foi colocado que, ao compararmos essas quantidades, podemos dizer que a cada **x** sanduíches de queijo que são vendidos, são vendidos **y** sanduíches de presunto. Foi pedido, então, para que fosse marcado o item que continha a fração **x/y** que representava essa comparação. Os itens de resposta continham a fração correta, a fração que representava a parte que faltava para completar um inteiro e as frações inversas dessas duas. A decisão de usar as variáveis x e y no enunciado foi muito pensada, porém consideramos que mesmo sabendo do pouco contato desses profissionais com a Álgebra em seus cursos de formação, a forma com que foi apresentada a “receita” no problema amenizaria significativamente possíveis deficiências nesse campo.

Por fim, o sétimo problema usa o conceito de frações como *percentuais*, ou seja, como frações com denominadores iguais a 100. O problema se refere a um estacionamento contendo 35 carros dos quais 14 são da cor prata. Foi pedida a fração que representa a parcela do total de carros referente aos de cor prata. Para também fugir do óbvio, foi decidido não colocar nas opções de resposta o símbolo "%" e sim frações centesimais: 35/100, 14/100, 40/100 e 60/100. As opções de resposta seguiram o seguinte critério: a fração correta, a sua complementar em relação ao inteiro e duas frações centesimais contendo nos numeradores os dois números que apareciam no enunciado, 35 e 14. Na resolução desse problema estão envolvidos os seguintes saberes sobre frações: a ideia de fração como parte-todo no modelo discreto; frações equivalentes e suas propriedades. Apesar disso, acreditávamos que a dificuldade do problema ficaria por conta apenas da transformação da fração 14/35 na fração 40/100, porém foi verificado posteriormente, quando da análise das respostas dadas ao questionário, que outras dificuldades apareceram, como veremos mais adiante.

Em resumo, os problemas foram elaborados não só com o intuito de verificar se os participantes da pesquisa os resolveriam corretamente, mas também pensando nas possíveis dúvidas ao resolvê-los, se eles utilizavam ou não esses modelos de problemas em sua prática docente e se conseguiriam identificar cada uma das sete ideias de fração contidas nos mesmos. Logo após os problemas, havia quatro questões visando exatamente a análise desses quesitos. A primeira questão pedia para os professores indicarem quais dos modelos de problemas apresentados eles usavam em sala de aula com seus alunos. Essa questão não utiliza nenhum termo ou jargão matemático em seu enunciado, pois o objetivo da mesma é verificar apenas se aqueles modelos fazem ou não parte do cotidiano escolar dos professores e alunos do primeiro ao quinto ano do Ensino Fundamental das escolas do Rio de Janeiro.

Já a segunda questão exigia dos professores conhecimento sobre os significados dos termos *parte-todo no modelo contínuo*, *parte-todo no modelo discreto*, *razão*, *quociente*, *operador*, *porcentagem* e *probabilidade*, todos relacionados ao conceito de fração. O enunciado pedia aos professores para relacionarem cada um dos sete problemas a apenas uma dessas sete ideias. Ao decidirmos colocar termos tais como "contínuo", "discreto", "razão" e "operador" tínhamos total consciência que parte dos erros que porventura ocorressem se deveriam ao desconhecimento dos seus significados, porém é importante para o ensino de qualquer ciência o conhecimento dos significados dos diversos jargões e das diversas nomenclaturas ligados a ela, como já expressaram Ball et al (2005) em seu trabalho.

A terceira questão solicitava que os participantes da pesquisa indicassem, para cada um dos problemas, qual seria a opção de resposta que a maioria de seus alunos escolheria. Essa questão foi pensada com o objetivo de verificar se os professores que trabalham com cada um dos modelos de problemas apresentados identificariam algumas dificuldades epistemológicas do ensino da ideia contida em cada um.

CAPÍTULO IV – RESULTADOS DA PESQUISA

4.1- Análise descritiva dos sujeitos participantes da pesquisa

Dos trinta e seis professores que participaram da pesquisa, apenas dois só possuem o antigo Curso Normal e não têm Curso Superior, e um deles não quis preencher a parte do questionário referente à formação. Vinte e quatro possuem até o Curso Superior, sendo quinze deles graduados em Pedagogia, um Licenciado em Matemática, dois possuem o Curso Normal Superior e dois o Curso de Letras. Temos, também, um professor graduado em Pedagogia e Engenharia Civil, outro em Enfermagem e Geografia, mais um em Direito e outro em Fonoaudiologia. Aqueles que possuem Graduação e Pós-Graduação totalizam nove professores, sendo quatro graduados e especialistas na área de Pedagogia, um graduado e especialista na área de Letras, dois licenciados em Matemática e Mestres em Educação Matemática, um graduado em Direito e Mestre em Ensino de Ciências e Saúde e um graduado em Pedagogia e especialista em Informática Educativa.

A seguir colocamos dois quadros, o primeiro contendo os professores que possuem até o curso de graduação e o segundo com aqueles que são Pós-Graduados.

Cursos	N	N + NS	N + P	N + L	N + LM	N + D	N + F	N + P-EC	N + E-G	Totais
Escolas Particulares	01	01	11	00	00	01	01	00	00	**15**
Escolas Públicas	01	01	04	02	01	00	00	01	01	**11**
Total	02	02	15	02	01	01	01	01	01	**26**

Legendas:

N → Curso Normal

NS → Curso Normal Superior

P → Pedagogia

L → Letras

LM → Licenciatura em Matemática

D → Direito

F → Fonoaudiologia

P-EC → Pedagogia e Engenharia Civil

E-G → Enfermagem e Geografia

Cursos	N+LM + MEM	N+P + EP	N+P + EIE	N+L + EL	N+D + MECS	Totais
Escolas Particulares	00	01	01	01	00	**03**
Escolas públicas	02	03	00	00	01	**06**
Total	02	04	01	01	01	**09**

Novas legendas:

MEM → Mestrado em Educação Matemática

EP → Especialista em Pedagogia

EIE → Especialista em Informática Educativa

EL → Especialista em Letras

MECS → Mestrado em Ensino de Ciências e Saúde

Podemos verificar que a imensa maioria – 33 professores – possui curso de graduação, porém 20 deles são graduados em Pedagogia e somente 3 são licenciados em Matemática.

Contando com mais um professor que é graduado em Engenharia Civil, apenas 4 professores têm ligação com a área tecnológica e tiveram, em sua graduação, que estudar Matemática com mais profundidade. Isto nos leva a concluir que quase todos os professores pesquisados, totalizando 32 dos 36 professores, provavelmente adquiriram seus conhecimentos sobre frações durante a sua escolaridade básica e no curso de formação de professores para os primeiros anos do Ensino Fundamental – antigo Curso Normal. Essa constatação é muito importante para a nossa pesquisa, pois poderemos ter uma boa ideia de como esses cursos estão preparando os professores para o ensino de frações e de seus diferentes significados e aplicações.

A esse respeito, vale a pena relembrarmos a colocação da pesquisadora Mandarino (2006)

> *... nesse nível de ensino os professores* ***não têm formação específica*** *e muitos declaram* ***sequer gostar de Matemática****. Dentre as várias ações necessárias para que todos os fios da rede sejam fortalecidos, sem dúvida, a formação inicial e continuada de professores das séries iniciais precisa ser repensada.* (p. 230)
> *Muitos declaram chegar ao curso de Pedagogia buscando uma formação de nível superior, distante da área das carreiras tecnológicas. Chegam à Universidade* ***odiando Matemática*** *e é preciso, pelo menos, ajudá-los a superar os traumas, revelar a beleza desta ciência, ajudá-los a compreender os motivos do seu*

desprazer. Se isso não for modificado, o mais provável é que seus futuros alunos se contaminarão com o seu desencanto. (p. 232)

4.2- Análise das respostas do questionário

Foram dezoito professores da Rede Particular e dezoito da Rede Pública, perfazendo um total de trinta e seis professores que responderam ao questionário. A seguir analisaremos suas respostas na tentativa de extrair o maior número possível de informações relevantes, que possam contribuir com a formação de um quadro demonstrativo da situação em que se encontra o ensino do conceito de fração e de seus significados.

ANÁLISE DOS QUESTIONÁRIOS (N = 36)

• Primeira questão

Em relação à primeira questão, que pedia para os professores dizerem quais daqueles modelos de problemas – cada um dos modelos utilizando apenas um dos diferentes significados de fração – eles utilizavam em suas aulas, temos o seguinte quadro:

CONCEITO DE FRAÇÃO	UTILIZAM	NÃO UTILIZAM
Parte-todo no modelo contínuo	**16+14 = 30**	**02+04 = 06**
Parte-todo no modelo discreto	**13+11 = 24**	**05+07 = 12**
Razão	**03+02 = 05**	**15+16 = 31**
Quociente	**09+08 = 17**	**09+10 = 19**
Operador	**13+13 = 26**	**05+05 = 10**
Porcentagem	**03+05 = 08**	**15+13 = 28**
Probabilidade	**07+02 = 09**	**11+16 = 27**
Nenhum	**–**	**02+03 = 05**

Observação: Em cada soma, a primeira parcela sempre se refere às respostas dos professores das Escolas Particulares e a segunda às das Escolas Públicas.

Antes de quaisquer considerações e análises, é importante colocarmos que essa questão não envolvia o conhecimento dos termos *parte-todo, contínuo, discreto, razão, operador, quociente, porcentagem* ou *probabilidade*. Apenas o professor teria que dizer se utilizava cada modelo de **problema** apresentado na pesquisa em sua prática docente.

A constatação de que **5** dos professores pesquisados não utilizam nenhum dos modelos de fração em suas aulas nos causou certo espanto, já que, mesmo nos chamados anos pré-escolares, deve ser ensinado, mesmo que não formalmente ou de forma explícita, algum significado ou aplicação de fração, utilizando materiais concretos, situações do cotidiano, experiências dos alunos, etc. Desses **cinco** professores, **dois** não deram justificativas, **um** alegou trabalhar apenas no Laboratório de Ciências e os outros **dois** disseram que só trabalham com crianças na faixa dos sete aos oito anos de idade. A nosso ver, poderíamos pensar que apenas aquele que trabalha somente no Laboratório de Ciências teria uma justificativa consistente para a não utilização, porém, mesmo nesse caso, é muito difícil que numa aula prática de Ciências não surja, em algum momento, a utilização de frações em alguma situação prática.

Apesar de representarem apenas cerca de **14%** dos professores pesquisados e tendo três deles justificado a não utilização, pensamos que, ainda assim, fica a pergunta: como um tema de tamanha relevância pode não ser abordado nos anos iniciais da escolaridade básica? Na Revista Nova Escola (2008), numa reportagem de Iracy Paulina, temos um interessante depoimento de uma professora do Estado de São Paulo a respeito da introdução do conceito de fração, mesmo para crianças na faixa etária dos sete aos oito anos.

> *As primeiras noções já podem ser introduzidas no 2º e no 3º ano do Ensino Fundamental, nas formas mais simples, como 1/2 e 1/3 . 'Ou até mesmo antes, se o professor sentir necessidade de usar tais representações na realização de alguma atividade', diz Daniela Padovan, professora do Colégio Friburgo e da E.E. Professora Marina Cintra, ambas em São Paulo.* (p. 101)

O tema frações faz parte do programa de Matemática dos anos iniciais do Ensino Fundamental de todas as escolas envolvidas na pesquisa – o que foi verificado por nós antes de iniciarmos a pesquisa em cada uma dessas instituições – tornando praticamente impossível a não utilização, pelo menos, do modelo *parte-todo no modelo contínuo*, que é tradicionalmente a forma como todos os livros de Matemática editados no Brasil voltados para esses anos iniciam a abordagem desse tema. Novamente recordando, Vasconcelos e Belfort (2006) definem a idéia *parte-todo no modelo contínuo* como "fração como parte de uma unidade" e dizem se tratar "da mais usual". A esse respeito, os PCN (1997, p. 64) concluem que: "A prática mais comum para explorar o conceito de fração é a que recorre a situações em que está implícita a relação parte-todo".

Tão séria quanto a não utilização de nenhum dos modelos de problemas apresentados, é a constatação de que **6** professores só utilizam o modelo de problema que contém apenas a ideia de fração como *parte-todo no modelo contínuo*. Kieren (1988) alerta para o perigo dessa escolha, dizendo que esse significado de fração é fundamental para o entendimento de interpretações mais complexas dos números racionais, porém deve ser utilizado com muito cuidado e não deve ser a única forma de apresentar as frações, uma vez que esse significado não facilita a compreensão das frações como o *quociente* entre dois números inteiros. Vale também chamar a atenção para o fato de que somente **24** professores utilizam *parte-todo no modelo discreto* em suas aulas, já que todos eles também utilizam o *modelo contínuo*. De acordo com Vasconcelos e Belfort (2006) essa idéia pensa na "fração como parte de um conjunto" (p. 3) e a apresentam separadamente em seu trabalho, principalmente porque os autores a consideram como "uma variante da primeira para o caso de grandezas discretas" (p. 3), e que nesse caso as partes iguais não são necessariamente iguais em forma ou tamanho, mas são iguais em número de elementos.

É também muito preocupante constatar que menos da sexta parte dos professores pesquisados – apenas **05** dos **36 –** utiliza o significado de fração como ***razão*** em suas aulas. Esse significado é fundamental para o estudo das proporções, diretas ou inversas, que estão presentes o tempo todo em diversas situações reais do nosso cotidiano.

Já citamos, neste trabalho, uma série de ramos da atividade humana e uma série de áreas do conhecimento que utilizam a ideia de fração como *razão*. Mesmo considerando o fato de que alguns dos professores possam ter tido contato, em sua prática docente, apenas com turmas do 2º e do 3º ano, ainda assim acreditamos que é um gravíssimo sinal de alerta a constatação de que tão poucos professores fazem uso da ideia de fração como *razão* em suas aulas. Conforme foi constatado por Vasconcelos e Belfort (2006, p.5), a ideia de fração como *razão* é pouco explorada na aprendizagem de frações. Isto nos leva a considerar que a pouca utilização desse modelo de problema não chega a ser uma novidade para os pesquisadores, porém continua consistindo num grave problema e deve ser levada em consideração ao serem planejados os cursos de formação, inicial ou continuada, de professores dos primeiros anos do Ensino Fundamental. Belfort (2003), em seu trabalho, já alertava que se desejamos que os professores e futuros professores sejam capazes de construir o saber pedagógico-disciplinar, temos que "confrontá-los com situações em que eles sejam levados a aprender novas formas de ensinar Matemática, enquanto as utilizam para aprender Matemática" (p. 4).

Somente **17** dos **36** professores entrevistados afirmaram que utilizam o conceito de fração como ***quociente*** entre dois números naturais em suas aulas, sendo que, ao analisarmos os questionários desses 17 professores, descobrimos que **7** deles não conseguiram relacionar esse conceito ao problema que realmente o utilizava na segunda questão. Isso nos faz concluir que alguns desses professores utilizam de forma equivocada esse modelo de fração em suas práticas docentes, porque não detêm o conceito correto do mesmo. Além desse fato, é importante colocarmos que o termo *quociente* é de conhecimento de todos os professores que, podemos afirmar com bastante certeza, sabem seu significado: o resultado de uma divisão. Além disso, pela nossa experiência, sabemos que todo aluno que chega ao 6º ano do Ensino Fundamental sabe – de forma "decorada", acreditamos – que "o traço de fração indica divisão do numerador pelo denominador". Essa constatação nos leva a concluir que alguns professores ensinam que o traço de fração representa a divisão entre o numerador e o denominador como uma regra a ser memorizada, sem a preocupação de discutir com seus alunos em quais situações o símbolo a/b representa efetivamente o resultado da divisão do número natural **a** pelo número natural não nulo **b**, talvez por estarem apenas reproduzindo o que decoraram quando também foram alunos do Ensino Fundamental. De acordo com Mandarino (2006), nesse sentido, é preciso urgentemente repensar o currículo dos cursos de formação de professores para que eles possam ter a oportunidade de reconstruir seus conhecimentos de Matemática, e não venham mais tarde reproduzir com seus alunos o modelo de ensino dessa disciplina que tiveram contato durante a sua escolaridade básica.

Podemos também verificar que os PCN (1997, p.54) sugerem, para o segundo ciclo do Ensino Fundamental, ou seja, para os atuais 4º e 5º ano, a exploração apenas de três significados dos números racionais – *quociente*, *parte-todo* e *razão* – além de chamar a atenção para o trabalho com suas duas representações – fracionária e decimal. A ínfima utilização do significado *razão* – cerca de **14%** dos participantes da pesquisa – a utilização apenas razoável do significado *parte-todo no modelo discreto* – **66%** – e pequena utilização da idéia de fração como *quociente* – apenas **47%** – também nos mostram o pouco conhecimento ou total desconhecimento das orientações contidas nos documentos oficiais. Mandarino (2006), a esse respeito, aponta o desconhecimento dos PCN, publicados em 1988, há mais de duas décadas. Mesmo assim, parece que pouca coisa das orientações contidas nos PCN realmente conseguiu chegar às salas de aula ou sequer foram verdadeiramente discutidas pelos profissionais responsáveis pelo ensino de frações.

Constatar que **26** dos **36** professores pesquisados utilizam, ou utilizaram, o conceito de fração como ***operador*** em suas aulas, sendo **13** deles das Escolas Particulares e **13** das Escolas Públicas, principalmente em se tratando dos anos iniciais do Ensino Fundamental, não foi surpreendente. Justamente porque é bastante comum encontrarmos nos diversos livros de Matemática dirigidos a esses anos problemas tais como "calcule 4/5 de 20", o que demonstra, em parte, que esse conceito faz parte do programa desses anos. Os PCN (1997) também sugerem que nos ciclos posteriores ao segundo ciclo outra interpretação dos números racionais, além das três citadas anteriormente, deverá ser explorada: a de *operadores*. Apesar dessa sugestão, a maioria dos livros didáticos, segundo pesquisas recentes (Silva, 1997; Canova, 2006), explora a idéia de fração como *operador multiplicativo* desde o segundo ciclo, já no quarto ano do Ensino Fundamental. Ainda, segundo essas mesmas pesquisas, os professores dos anos iniciais, quando estão envolvidos em tarefas de elaboração de situações-problema, apresentam mais situações envolvendo o significado *operador* do que envolvendo os outros significados de fração. Apesar de ter causado surpresa aos pesquisadores, podemos analisar essa preferência dos professores pela utilização da idéia de fração como operador multiplicativo, comparando-a com a sua utilização na maioria dos livros didáticos (Silva, 1997; Canova, 2006).

Os resultados da pesquisa realizada por Canova (2006) corroboram, em parte, com os resultados da nossa pesquisa, pois aproximadamente 73% de todos os professores pesquisados por nós admitiram usar em suas aulas o modelo de problema que envolvia o significado *operador*. Convém lembrar que os problemas selecionados para fazerem parte do nosso questionário têm enunciados pouco rebuscados, sem nenhuma utilização de termos ou jargões matemáticos menos conhecidos e são bem comuns nos principais livros didáticos.

O resultado é importante porque esse modelo envolve o conceito de multiplicação de frações, que mais tarde será ensinado. Se a criança não compreender muito bem a função da fração como *operador*, ela somente irá decorar regras, tais como: "para multiplicarmos frações, devemos multiplicar os numeradores entre si e os denominadores também entre si". Porém, a simples constatação do uso desse modelo não garante que o mesmo seja apresentado aos alunos com os devidos cuidados, principalmente no que tange o entendimento, por parte dos alunos, do significado teórico da idéia de *operador*.

Vale lembrar, nesse momento de nossas análises, a importância dos significados *parte-todo* nos modelos *contínuo* e *discreto*, *razão*, *quociente* e *operador* para o aprendizado de frações, ressaltada no trabalho de Kieren (1988). Nesse mesmo trabalho ele também destaca a importância do professor no sentido de auxiliar seus alunos no processo de interpretação e compreensão dos diversos significados dos números racionais, e o quanto essa pluralidade na forma de apresentação dos diferentes significados e aplicações das frações contribui para a efetiva compreensão do conceito de fração e dos números racionais em geral.

Outra preocupação, não menos importante que as anteriores, diz respeito a pouca utilização do conceito de fração como ***porcentagem***, já que somente **8** dos **36** professores pesquisados responderam que fazem uso desse modelo em suas aulas. Acreditamos que não seja necessário explicar a enorme importância do estudo das *porcentagens* possui para o exercício pleno da cidadania de uma pessoa no mundo de hoje. Levando-se em consideração que as *"porcentagens"* se encontram em todos os veículos de comunicação, estão à mostra na grande maioria das lojas de comércio de todo o mundo e fazem parte do cotidiano de grande parte das famílias, envolvidas com pagamento de contas, empréstimos, etc., podemos considerar que é um tema bastante interessante para os alunos e de fácil contextualização. Além disso, é importante lembrarmos que as *porcentagens inteiras* representam apenas frações centesimais e que podem ser facilmente exploradas, pelo menos, a partir quarto ano do Ensino Fundamental.

Realmente é surpreendente constatar, por tudo que expusemos, que apenas cerca de **22%** dos participantes da pesquisa utilizam *porcentagens* em suas aulas. Porém, esse fato também explica, em parte, o porquê de alunos que chegam à terceira série do Ensino Médio terem tantas dificuldades na compreensão de problemas envolvendo a ideia de *porcentagem*.

Analisando agora a pouca utilização da ideia de fração como ***probabilidade*** – somente **9** dos **36** professores – podemos entendê-la sob dois aspectos. Primeiramente, o tema *Probabilidade* tradicionalmente vem sendo ensinado há muitas décadas apenas a partir da

2ª série do Ensino Médio, mesmo assim, apenas para os cursos chamados “regulares”, pois nos Cursos Técnicos de Ensino Médio, depende da área relacionada ao curso. Em segundo lugar, apesar de os PCN sugerirem o *Tratamento da Informação* como um dos temas principais que devem ser ensinados no Ensino Básico, desde o Ensino Fundamental, incluindo nesse estudo as *Probabilidades*, a maioria dos livros didáticos só trazem o tema a partir do 6º ano. Além desse problema relativo aos livros didáticos, há de se considerar, pela nossa experiência, que a imensa maioria dos professores que atuam nesses anos não foi preparada para lecionar tal assunto, principalmente porque, ao optarem pelos cursos denominados “Cursos Normais”, que formam professores para atuarem desde os anos pré-escolares até o 5º ano do Ensino Fundamental, passaram a não ter contato com o assunto nem da forma com que o mesmo é apresentado aos alunos do Ensino Médio regular. Levando-se em consideração a complexidade que envolve o tema – como todos os outros significados de fração – a necessidade de se adequar o ensino do mesmo a cada faixa etária dos alunos dos anos iniciais do Ensino Fundamental, o apego natural aos programas tradicionais que vêm sendo ensinados há décadas e as dificuldades de se fazer chegar às salas de aula os avanços das pesquisas na área do Ensino de Matemática (Mandarino, 2006), não poderíamos esperar outro resultado que não fosse a baixa utilização desse modelo. Mesmo quando consideramos o caso do 6º ao 9º ano, anos para os quais já existem excelentes livros didáticos que incorporam o tema *Probabilidade*, verificamos uma enorme resistência na mudança do programa de Matemática que deve ser ensinado e na adoção de livros menos tradicionais.

- **Segunda Questão**

A segunda questão pedia para os professores relacionarem cada um dos sete problemas apresentados ao respectivo significado de fração citado no questionário. Essa questão exige que os professores tenham razoável conhecimento teórico sobre cada uma das ideias de fração apresentadas, para poderem conseguir fazer corretamente as correlações.

Os resultados se encontram no quadro a seguir, no qual aparece em negrito a quantidade de professores que escolheram corretamente o problema correspondente ao significado em questão.

	01 **C**	**02** **Di**	**03** **Q**	**04** **O**	**05** **Pr**	**06** **R**	**07** **Po**	**De**	**N**	**T**
C	**08+09** **17**	05+05 10		01+00 01				03+00 03	01+04 05	
Di	06+05 11	**04+06** **10**	03+02 05	01+00 01				03+00 03	01+05 06	
Q		00+01 01	**06+09** **15**	09+05 14		02+01 03			01+02 03	
O		05+00 05	04+01 05	**04+09** **13**	02+00 02	02+02 04			01+05 06	00+01 01
Pr				02+00 02	**14+15** **29**	02+01 03	00+01 01		00+01 01	
R		01+00 01	03+01 04	01+01 02	03+01 04	**10+11** **21**			00+03 03	00+01 01
Po		01+00 01			00+01 01		**16+16** **32**		01+01 02	

Legendas:

C → Parte-Todo no modelo contínuo
Di → Parte-Todo no modelo discreto
Q → Quociente
O → Operador
Po → Porcentagem

Pr → Probabilidade
R → Razão
De → Desconhece o termo
N → Nenhum
T → Todos

Observações:
– Na primeira linha do quadro, da segunda à oitava coluna, se encontram os números dos problemas e os respectivos significados de fração de cada um deles.
– Em cada soma, a primeira parcela se refere às Escolas Particulares e a segunda às Escolas Públicas.

Nessa questão, em relação ao significado de fração como *parte-todo no modelo contínuo*, apenas **17** acertaram dizendo que esse significado estava presente no primeiro problema apresentado, enquanto **10** deles citaram o segundo problema, que na verdade se referia ao significado de fração como *parte-todo no modelo discreto*. Os **três** professores que colocaram que desconheciam o termo, também disseram desconhecer o significado de *parte-todo no modelo discreto*. **Um** professor citou o problema número quatro, que utilizava o conceito de *operador* e **5** colocaram que não reconheceram o conceito de fração como *parte-todo no modelo contínuo* em nenhum dos sete problemas.

Analisando esses resultados, podemos verificar que **27** professores conseguiram relacionar o significado *parte-todo no modelo contínuo* a um dos problemas que realmente utilizava a ideia de fração como *parte-todo*. Apenas devem desconhecer os significados específicos de *contínuo* e *discreto*. Acreditamos ser mais séria a constatação de que **5** professores não reconheceram a idéia em questão em nenhum dos problemas apresentados, o que nos leva a concluir que os mesmos não sabem o significado de *parte-todo,* apesar de considerarmos que esse termo seja auto-explicativo e de verificarmos que todos estes cinco fazem uso em suas aulas desse modelo de problema.

Ainda na segunda questão, com relação ao conceito de fração como *parte-todo no modelo discreto*, somente **10** professores disseram, corretamente, que o modelo estava sendo utilizado no segundo problema e **11** escolheram o primeiro problema, que, como já vimos, se refere ao modelo *contínuo*. Seguindo a mesma linha de raciocínio anterior, podemos destacar que **21** professores conseguiram relacionar a ideia de fração como *parte-todo no modelo discreto* com um dos dois problemas que utilizavam o significado *parte-todo*.

Os mesmos **3** professores que haviam dito desconhecer o significado de fração como *parte-todo no modelo contínuo*, como já dissemos, também alegaram desconhecer o significado *parte-todo no modelo discreto*. Desses três professores, dois apenas colocaram "desconheço" no lugar das duas respostas. O outro colocou "desconheço", porém acrescentou uma chave unindo as ideias *parte-todo no modelo contínuo* e *parte-todo no modelo discreto* e botou os números 1 e 2 para as duas respostas, sem discriminar qual deles se referia a cada ideia. Isso significa que ele sabe que os dois primeiros problemas se referem ao significado *parte-todo,* mas desconhece os significados de *contínuo* e *discreto*.

Um dos professores que fizeram corretamente a correlação dessas duas primeiras ideias de fração, disse: "não entendo essa terminologia 'contínuo', 'discreto', por isso não tenho certeza das respostas".

A nosso ver, bem mais sério foi constatar que **6** professores não encontraram em nenhum dos sete problemas o conceito *parte-todo no modelo discreto*. Novamente chamamos a atenção para o fato de que o termo *parte-todo* pode ser considerado auto-explicativo, principalmente em se tratando de professores.

Dos restantes, **5** deles disseram que o modelo se referia ao problema de número três, que na realidade se refere ao significado de fração como *quociente* entre dois números naturais, e **1** deles citou o problema de número quatro, o qual se refere ao significado de *operador*. Confundir o problema de número três, que no seu enunciado dizia que uma pessoa iria repartir igualmente 9 barras de chocolate entre 15 crianças, com um modelo *parte-todo* é um fato que deve ser considerado com atenção, principalmente em se tratando de professores que estão lidando com alunos dos primeiros anos do Ensino Fundamental.

Novamente na segunda questão, falando do significado *quociente* que as frações também podem representar, somente **15** dos professores pesquisados conseguiram acertar dizendo que esse significado estava sendo abordado no terceiro problema proposto. Esse é outro fato que devemos analisar com muita atenção, principalmente porque a grande maioria dos professores que trabalham em sala de aula com o tema *frações* diz aos seus alunos que "o traço de fração indica a operação de divisão do numerador pelo denominador". Essa frase já faz parte do que podemos chamar de *inconsciente coletivo* dos alunos que chegam ao 6º ano do Ensino Fundamental, porém pouquíssimos desses alunos sabem explicar o porquê desse fato e em quais situações realmente uma fração representa um *quociente* entre dois naturais. Tivemos **14** professores errando ao dizerem que o modelo de fração como *quociente* estava sendo aplicado no problema de número quatro, quando o mesmo, como já vimos, se refere ao significado de fração como *operador* e pedia claramente para que fosse calculado o valor de 3/5 de 30. Outros **3** professores citaram erroneamente o sexto problema, problema esse que está ligado ao significado *razão*, mais **3** dos professores pesquisados disseram que nenhum dos problemas propostos apresentava fração como *quociente* entre dois números naturais e apenas **1** relacionou o significado *quociente* ao problema que apresentava uma situação relacionada à ideia de *parte-todo no modelo discreto*.

O termo *quociente*, como já foi citado quando analisamos as respostas dadas à primeira questão, é de conhecimento de todos os professores que lecionam Matemática nos primeiros anos do Ensino Fundamental. Fazemos tal afirmação baseados na nossa experiência, porém com razoável certeza, uma vez que todos os livros didáticos e todas as escolas ensinam nesses anos a operação de divisão entre dois números naturais desde o 2º ano e, ao ensiná-la, nomeiam os seus elementos – dividendo, divisor, quociente e resto – explicando aos alunos as funções de cada um desses termos. Também é fundamental relembrarmos que o significado *quociente* faz parte das orientações contidas nos PCN

(1997) para o ensino de frações e, por esse motivo, deveria ser de conhecimento de todos os professores que atuam no Ensino Fundamental.

Em resumo, novamente os dados coletados merecem atenção especial, principalmente porque verificamos que **7** dos **21** professores que não conseguiram relacionar corretamente o significado *quociente* ao respectivo problema, revelaram que utilizam tal significado em suas aulas. Como eles trabalham com alunos que estão tendo contato pela primeira vez com os diversos significados de fração, esse fato passa a merecer um grau maior de atenção por parte de todos nós.

Em relação ao conceito de fração com a ideia de *operador*, houve apenas **13** respostas corretas, aquelas que se reportaram ao problema de número quatro. Os outros **23** ficaram divididos da seguinte forma: **5** professores colocaram erradamente como resposta o problema que utiliza o significado de *quociente*, enquanto outros **5** professores citaram o problema que na realidade se refere à fração como *parte-todo no modelo discreto*. **Dois** professores escolheram o problema que possui o significado de *probabilidade*, outros **4** o problema que fala da ideia de *razão*, **6** deles não encontraram o significado de fração como *operador* em nenhum dos problemas e **1** deles o encontrou em todos os problemas.

Mais uma vez temos em mãos um fato que merece atenção especial. Silva (2007, p.106), realizou um estudo comparativo sobre as concepções de fração e a sua relação com a prática pedagógica do professor dos primeiros anos do Ensino Fundamental, observando que o aluno tem pouco domínio desse conceito. Quanto aos professores, destacou a ênfase muito grande no ensino de frações, utilizando prioritariamente um único significado: *parte-todo* (nos anos iniciais) ou *operador multiplicativo* (nos anos finais).

Considerando essa ênfase também constatada por Canova (2006), como se explica o desconhecimento do seu significado, já que somente **36%** dos participantes da nossa pesquisa conseguiram identificar corretamente o problema que o utilizava? É fundamental lembrarmos que, relativamente ao uso em sala de aula, **73%** dos nossos pesquisados admitiram explorar em suas aulas o modelo de problema referente à ideia de *operador*. Realmente esses dados são muito preocupantes, mesmo que possamos considerar o fato de que alguns professores não conhecem o significado do termo *operador* quando o mesmo se refere às frações. Se tantos professores utilizam o modelo de problema em suas aulas, necessariamente deveriam conhecer seu significado, sua função e sua nomenclatura, para serem capazes de bem orientar seus alunos. Ball (1991) diz em seu trabalho, que o conhecimento que alguém tem da Matemática envolve o que sabe sobre o assunto, o que sabe sobre a organização do campo e suas atitudes perante o assunto. Relembrando uma de suas mais importantes citações:

> *O professor de Matemática, entretanto, precisa ser capaz de articular seu saber, pois aquilo que é apenas tacitamente aceito não pode ser explicitamente ensinado.* (p.21)

Em relação à ideia de *probabilidade,* **29** professores acertaram ao se referirem ao problema de número cinco. Os problemas que envolviam as ideias *operador* e *razão*, foram escolhidos por **2** e **3** professores, respectivamente. **Um** professor não conseguiu encontrar o significado *probabilidade* em nenhum dos problemas apresentados e **outro** o encontrou no problema referente à *porcentagem*. Como o problema no qual o significado estava presente continha o termo “chance”, esperávamos que o índice de acerto fosse próximo de 100%, mesmo sabendo que poucos professores realmente fazem uso das “probabilidades” em suas aulas, por todos os motivos que já explicitamos anteriormente. Verificar que aproximadamente 20% dos professores pesquisados não conseguiram relacionar a palavra *chance* à ideia de *probabilidade* não deixou de ser surpreendente.

Passando agora ao significado de fração como *razão*, **21** dos 36 professores disseram acertadamente que o mesmo estava presente no problema de número seis. Outros **4** professores colocaram que ele estava presente no terceiro problema – que na verdade refere-se ao modelo de fração como *quociente* – o que é relativamente comum entre os alunos, mas não deveria ocorrer entre professores que têm que lecionar tal assunto. O índice de acertos pode ser considerado razoável, principalmente levando-se em consideração que apenas **5** admitiram usar esse modelo em suas aulas. Outro fato que pode ter corroborado para o índice de acertos, foi a utilização, no problema que se referia a essa ideia de fração, de um enunciado que pode ser considerado “uma receita de bolo”. O mesmo indicava como resolver o problema e também trazia explicitamente a palavra “comparação” entre as duas quantidades envolvidas. Mesmo assim, para conseguir acertar, o professor deveria dominar com relativa firmeza o significado do termo *razão*, relacionando-o ao ato de “comparar duas grandezas”.

Outros **4** professores citaram o problema de número cinco, o qual refere-se ao significado de fração como *probabilidade*. Alguns pesquisadores consideram que a ideia de fração como *probabilidade* pode ser também vista como um desdobramento da ideia de *razão*, ou mesmo que esses dois termos na verdade representam a mesma ideia. Silva (2007, p. 97) engloba em sua definição da ideia de fração como *medida*, os termos *razão*, *probabilidade* e *taxa*, ou seja, ela considera que *probabilidade* e *razão* fazem parte de uma mesma ideia, na qual a fração é utilizada com a finalidade de comparar duas grandezas, e chama essa ideia de *medida*.

Um professor relacionou o significado de fração como *razão* ao segundo problema – que usa a ideia de *parte-todo no modelo discreto* – e outros **2** ao problema de número quatro, que na verdade se refere à ideia de *operador* e no qual é pedido explicitamente para que seja calculado o valor de 3/5 de 30 bolas, nada tendo a ver com a comparação entre duas grandezas. Um dado relativamente curioso é que **um** dos professores disse que os significados *razão* e *operador* estava presente em todos os sete problemas. Esse mesmo professor deixou em branco os significados *parte-todo*, nos modelos *contínuo* e *discreto*, relacionou corretamente as ideias *porcentagem* e *probabilidade* aos respectivos problemas que as continham e errou a correlação do significado *quociente*. Ele trabalha há mais de 20 anos com 2º ano e 5º ano, porém neste último apenas com Língua Portuguesa e Estudos Sociais. Outros **três** não identificaram essa ideia em nenhum dos problemas apresentados, o que demonstra o desconhecimento a respeito do significado de *razão*.

Mais uma vez os dados acabam por comprovar a necessidade de se repensar os cursos de formação de professores, tanto inicial quanto continuada, pois novamente constata-se que professores que estão atuando, alguns deles com mais de vinte anos de experiência em sala de aula, não conceituam corretamente um dos mais importantes significados das frações. Normalmente esses mesmos professores ensinam, em Estudos Sociais, o conceito de “escala”, de renda “per capta”, de “densidade populacional”. Também ensinam, ou utilizam em problemas contextualizados, em Ciências, noções elementares sobre “velocidade”, por exemplo. Além disso, um dos tópicos que fazem parte dos conteúdos programáticos dos primeiros anos do Ensino Fundamental de boa parte das escolas e que normalmente é apresentado como um item do programa de Matemática separado do estudo das *razões*, é o estudo da proporcionalidade, bastante utilizado em situações práticas com a nomenclatura “regra de três”. O que se pode concluir é que este “tópico”, se é que podemos chamá-lo assim, é realmente ensinado como uma “regra” a ser decorada dissociada de significado.

Isso nos faz também compreender o porquê de alunos a partir do 7º ano do Ensino Básico considerarem que podem utilizar indiscriminadamente essa “regra” para resolver qualquer problema que envolva três números dados, e no qual seja necessário calcular um quarto valor relacionado aos outros três. Não há, por parte da maioria desses alunos, a preocupação de verificar se existe ou não proporcionalidade, de forma direta ou inversa, envolvendo os dados do problema.

Por fim, falando do modelo de fração como *porcentagem*, praticamente todos os professores acertaram ao responderem que o modelo estava sendo usado no problema de número sete – **32** professores. **Um** professor citou o problema referente à ideia *parte-todo no modelo discreto*, **outro** relacionou ao problema de *probabilidade* e **2** acharam que nenhum dos problemas utilizava o referido significado. Esse resultado já era esperado, mesmo depois da constatação, nessa pesquisa, da pouca utilização em suas aulas do tipo de problema que era relativo à *porcentagem*. Isso porque, no referido problema, as opções de resposta eram todas frações centesimais.

• **Terceira Questão**

A terceira questão solicitava que os professores colocassem quais seriam as opções de resposta que a maioria dos seus alunos daria para cada um dos problemas objetivos propostos na pesquisa. A quase totalidade dos professores pesquisados sugeriu um gabarito de respostas, que eles acreditavam que seriam dadas pela maioria de seus alunos, igual ao gabarito sugerido por eles próprios. Não sabemos se isso ocorreu por não estarem seguros das suas próprias respostas, ou por não terem entendido a importância dessa questão para a análise das possíveis interpretações equivocadas que os alunos poderiam ter de cada um dos problemas propostos. Ou seja, se em alguma das opções de resposta poderia ser mais atraente, induzindo ao erro os alunos que não tivessem realmente compreendido o significado em questão.

Durante a aplicação do questionário, nenhum professor fez qualquer pergunta a respeito de prováveis dúvidas relacionadas às questões do mesmo, somente, como já relatamos, externaram preocupação com a possível divulgação dos resultados. A partir desse fato, concluímos que haviam compreendido a importância dessa terceira questão para a pesquisa. Isto nos levou a deduzir, numa primeira análise, que esta questão acabou não tendo relevância para a pesquisa. Porém, quando nos debruçamos com maior cuidado sobre esse fato, vislumbramos uma causa bastante provável e que se baseia, principalmente, na nossa experiência: os professores normalmente não analisam nem exploram de forma profunda os erros cometidos pelos seus alunos. Analisando o trabalho de Mandarino (2006) sobre as rotinas dos professores dos anos iniciais em suas práticas docentes, notamos que o mesmo nunca cita o hábito por parte desses professores de se debruçarem sobre os erros cometidos por seus alunos. Utilizando esta linha de raciocínio, concluímos que os professores, na verdade, não sabem de verdade quais são os erros mais comuns de seus alunos para cada um dos modelos apresentados pó nós na pesquisa.

- **Quarta Questão**

Por fim, a quarta questão pedia para o professor dar o seu gabarito para cada um dos problemas propostos. Os resultados foram os seguintes:

Opção **Prob - Modelo**	**A**	**B**	**C**	**D**	**N**
Prob 1 – PT-C	**-**	**-**	**18+18** **36**	**-**	**-**
Prob 2 – PT-D	**-**	02+00 02	02+01 03	**14+17** **31**	**-**
Prob 3 - Quociente	04+01 05	01+00 01	03+01 04	**10+16** **26**	**-**
Prob 4 - Operador	01+01 02	**-**	**17+17** **34**	**-**	**-**
Prob 5 - Probabilidade	02+04 06	04+00 04	**12+13** **25**	**-**	00+01 01
Prob 6 - Razão	**-**	**18+17** **35**	**-**	**-**	00+01 01
Prob 7 - Porcentagem	**-**	07+00 07	**10+17** **27**	01+00 01	00+01 01

Em relação ao primeiro problema, que se referia ao significado de fração como ***parte-todo no modelo contínuo***, **todos** os professores acertaram marcando a alternativa (c). Esse resultado era esperado por se tratar de um problema muito tradicional que fala de uma pizza que foi dividida em 5 partes iguais, das quais uma pessoa come 3 pedaços e outra come o restante. Normalmente esse é o único modelo de fração que é apresentado aos alunos, como já vimos anteriormente, e, quando não, é quase sempre o primeiro. No próprio texto dos PCN (1997), pudemos verificar essa preferência. Se todos os professores acertaram, esse fato também demonstra em parte que eles estavam familiarizados com o problema, o que reforça mais ainda a hipótese de que os quase 17% que não admitiram o uso em suas aulas do problema referente ao significado de fração como *parte-todo no modelo contínuo*, não o fizeram por desconhecimento desse tipo de problema.

No problema seguinte, que utilizava fração como ***parte-todo no modelo discreto***, **31** professores acertaram marcando a opção (d), **2** professores marcaram (b) e outros **3** indicaram (c). A justificativa plausível para a indicação da opção (c) como resposta é a desatenção, já que o problema dizia que numa turma de 40 alunos, 16 eram meninos e pedia para os professores indicarem a fração que representava a parcela de meninas da turma. Porém, a marcação da alternativa (b) causa certa preocupação, uma vez que além da possível desatenção que os levaria a indicar 2/5 como resposta, existiu a inversão – indicaram 5/2 – o que demonstra que não souberam identificar qual dos valores fornecidos representava a *unidade*, ou não reconheceram os papéis do numerador e do denominador. Novamente citando as pesquisadoras portuguesas Cecília Monteiro e Cristolinda Costa (1996):

> *No estudo dos números inteiros, na passagem das situações aditivas para as multiplicativas, aparecem já algumas situações que requerem do aluno que passe a conceber um conjunto de várias unidades simples como uma nova unidade composta (por exemplo, 12 unidades simples deverão ser interpretadas como uma nova unidade de "12", como no caso da situação de pagarmos ovos à dúzia), e conseqüentemente a alargar o seu conceito de unidade.* (p.61)

Falando do terceiro problema, somente **26** acertaram marcando a alternativa (d), **5** marcaram a alternativa (a), **um** a alternativa (b) e **4** marcaram a (c). Vale lembrar que esse problema se referia ao conceito de fração como o ***quociente*** entre dois números naturais, o qual, como analisamos anteriormente, é utilizado em suas aulas apenas por **17** dos pesquisados. Somente **2** destes 17 erraram o problema. Os outros **8**, que também erraram, se encontram entre os **11** que disseram que não usam o modelo em suas aulas. Esses números não deixam de ser preocupantes unicamente por causa da constatação que de que

80% dos dez professores que erraram o problema não fazem uso desse modelo de problema em sua prática docente. Em parte reforçam a suposição de que alguns professores apenas ensinam aos seus alunos, da mesma forma que aprenderam quando foram alunos – ver Mandarino, 2006, p. 231 – o fato de que o traço de fração pode indicar a divisão do numerador pelo denominador, sem compreendê-lo e relacioná-lo a uma situação-problema real. Também é imprescindível atentarmos para o fato de que esses oito professores, apesar de não utilizarem o modelo, deveriam fazê-lo, não só de acordo com as orientações dos PCN (1997), mas também pela sua importância no estudo das frações.

O problema em questão dizia que uma pessoa possuía 9 barras de chocolate e deveria reparti-las igualmente entre 15 pessoas. Pedia, então, para os professores indicarem qual das frações apresentadas representava a quantidade de barras de chocolate que caberia a cada uma delas. Parece ter havido confusão na conceitualização da unidade por **5** professores que indicaram 5/3 como resposta, ao invés de 3/5, porém fica mais difícil analisar o porquê de outros **5** indicarem como resposta 2/5 ou 5/2.

No problema de número quatro, o modelo de fração utilizado foi o de ***operador***, sendo que **34** dos professores pesquisados acertaram ao marcarem a opção (c) e somente **2** professores erraram ao marcarem a alternativa (a), que ao invés de representar 3/5 de 30, correspondia a 2/5 de 30. Desde quando idealizamos esse problema já esperávamos este resultado, o que também foi reforçado pela posterior constatação de que muitos professores se utilizam desse modelo em suas aulas e têm preferência por situações-problema envolvendo essa idéia de fração (Canova, 2006).

Além disso, praticamente todos os livros didáticos exploram exercícios de fração do tipo “calcule 3/5 de 30”, ou problemas como o que estamos analisando agora (Silva, 1997; Canova, 2006), nos quais os alunos recaem em cálculos do que é comumente chamado de “fração de número”. Em tese, saber resolver tais exercícios é necessário a todo professor que trabalhe com alunos dos anos iniciais do Ensino Fundamental e que tenha que ensinar frações. Em nossa trajetória, constatamos que a grande maioria dos professores ensina uma técnica de cálculo ao aluno dizendo que ele deve trocar o “de” por “vezes”, multiplicar o número inteiro dado – aquele que na realidade passou a fazer o papel da unidade – pelo numerador da fração e dividir o resultado pelo denominador da mesma, obtendo, assim, o valor procurado. Só de se considerar o cálculo de “3/5 de 30” como cálculo de “fração de número" já pode demonstrar, também, a despreocupação com o fato de 3/5 ser um número, o que acarretará conseqüências desastrosas para todo o estudo dos conjuntos numéricos mais adiante. Para que um professor possa ensinar, antes de qualquer "regra de cálculo", ele precisa compreender muito bem um conceito, o que nos parece não acontecer com a maioria dos pesquisados, uma vez que somente **36%** correlacionaram de forma acertada o problema de número quatro ao modelo de fração como *operador*. A esse respeito, Imenez (2002) já havia alertado sobre passar 95% do tempo 'fazendo continhas', ao invés de voltar o ensino à resolução de problemas. Monteiro e Costa (1996) também alertaram para o perigo do uso prematuro de regras no ensino dos números racionais.

No quinto problema, que se referia ao conceito de fração como *probabilidade*, tivemos **25** acertos, que escolheram a alternativa (c) como gabarito. Outros **6** marcaram (a) , **4** a opção (b) e **um** deixou em branco. O índice baixo de acertos, levando em consideração que estamos analisando saberes docentes, também não nos causou surpresa, principalmente por tudo que analisamos anteriormente quanto ao estudo das *probabilidades* e sua pouca ou nenhuma utilização nos primeiros anos do Ensino Fundamental. Para que os professores conseguissem resolver corretamente o problema, eles deveriam compreender o conceito de *probabilidade de ocorrência de um evento simples num espaço amostral eqüiprobabilístico*, sabendo destacar o *espaço amostral* e o *evento*. O índice de erros demonstra, com razoável certeza, o desconhecimento sobre o significado de *fração* como *probabilidade*, uma vez que o enunciado do problema não poderia induzir ao erro uma pessoa que compreendesse tal significado. Além disso, podemos afirmar que a possibilidade de marcar outra opção por desatenção é praticamente nula.

Para embasar melhor nossas análises, vamos lembrar que o problema falava em 20 bolas brancas e 30 pretas, das quais uma pessoa, de forma aleatória, retiraria uma bola. Pedia, então, para que fosse escolhida a opção de fração, dentre as fornecidas, que representava a chance de que a pessoa retirasse uma bola branca. A escolha da fração 2/3 como opção de resposta por cerca de 11% dos professores, pode demonstrar uma certa confusão entre o significado de *probabilidade* e o de *razão*, mas também pode reafirmar a possibilidade de desconhecimento de qual é o *espaço amostral* do *experimento*. Entretanto, a escolha da fração 1/20 como resposta nos leva a considerar a possibilidade de um erro comum cometido por muitos alunos no início do estudo das probabilidades no Ensino Médio e já citado neste trabalho. Como o experimento é “retirar aleatoriamente **uma** bola da urna”, grande parte dos alunos acredita que o numerador deve conter a quantidade de bolas retiradas, enquanto que o denominador deve conter o total de bolas brancas, uma vez que o problema fala na “chance” de se obter **uma** bola branca. Muitas vezes, nos anos de experiência com turmas do Ensino Médio, ouvimos perguntas, tais como: “Mas professor, não tem que sair bola branca?”. Essa pergunta demonstra o desconhecimento de que o estudo de *probabilidades* se refere a calcular o que podemos chamar de “chance” de algo ocorrer e não a “necessidade” de que algo ocorra, como anteriormente colocamos, e que, na verdade, dizer que a probabilidade de ocorrência de bola branca é 2/5 pode ser entendido como estarmos concorrendo com dois casos favoráveis em cada cinco casos possíveis, no experimento aleatório considerado.

Já no sexto problema, que usava fração para representar a *razão* entre dois números naturais, **35** dos professores acertaram ao indicarem a opção (b) como gabarito e **1** deixou em branco. Assim como no primeiro problema, também esperávamos que todos os professores acertassem, porém não pelo mesmo motivo. O primeiro problema se referia a uma ideia que é, na maioria das vezes, a única ensinada aos alunos dos primeiros anos do Ensino Fundamental. Neste sexto problema, o enunciado fornecia um roteiro de como resolvê-lo – como se fosse uma “receita de bolo”, como já dissemos anteriormente. Seria muito improvável que algum professor errasse, entretanto devemos nos lembrar que **15** dos professores envolvidos na pesquisa não relacionaram corretamente esse modelo de problema ao significado de fração como *razão*, o que é preocupante por todos os motivos já expostos.

Chegando ao último problema, no qual a fração era utilizada como *porcentagem*, **27** professores conseguiram acertar indicando a alternativa (c) como resposta, **7** dos pesquisados marcaram (b), **1** respondeu (d) e **1** não respondeu. Comparando-se os resultados obtidos nas três questões propostas aos professores que envolviam a ideia de *porcentagem*, podemos chegar a algumas conclusões preocupantes. Primeiramente, como vimos, poucos deles admitiram utilizar tal ideia em suas aulas, o que por si só merece uma atenção especial e ações urgentes no sentido de reformulação dos currículos dos cursos de formação inicial e nos programas a serem ensinados nos anos iniciais do Ensino Fundamental. Em segundo lugar, quase todos relacionaram corretamente essa ideia de fração ao problema que a utilizava, porém apenas perto de **67%** conseguiu acertá-lo. Quase **20%** do total pesquisado escolheram a opção 14/100, o que pode demonstrar uma conceituação equivocada da "unidade" – desejávamos saber que porcentagem 14 carros representava de um total de 35 carros – ou um desconhecimento sobre o significado de *porcentagem* ou de *frações equivalentes*.

CAPÍTULO V- CONCLUSÕES

A análise das respostas ao questionário sugere que muitos dos professores pesquisados não abordam os diversos subconstrutos de fração em suas aulas de 1º ao 5º ano, independentemente de sua formação ou experiência.

Os números dessa pesquisa reforçam a hipótese de desconhecimento dos termos *contínuo* e *discreto* por boa parte dos professores, principalmente do termo *discreto.* Mas também dos termos *quociente* – menos da metade relacionou-o ao problema correto – e *operador* – apenas 36% conseguiram identificar qual dos problemas se referia a este subconstruto de fração. Os dados coletados confirmam pesquisas anteriores a respeito da preferência pela utilização dos modelos de problemas referentes a *parte-todo* e *operador*, apesar da maioria dos nossos pesquisados não conseguir relacionar o termo *operador* ao problema correto e alguns deles só utilizarem o modelo *contínuo* em suas aulas. Muito preocupante, também, foi a constatação do pouco uso do modelo de problema que trazia o subconstruto *razão*. Mesmo não sendo uma novidade, como colocaram em seu trabalho Vasconcelos e Belfort (2006), o índice de 14% de utilização do modelo é muito significativo e merece atenção especial, mesmo porque os PCN (1997) sugerem a utilização desse modelo desde o 2º ano do Ensino Fundamental. É relevante também destacar que, apesar disso, cerca de 60% dos pesquisados relacionaram corretamente o termo *razão* ao respectivo problema.

Chamou-nos a atenção o baixo índice, de apenas 22% dos professores pesquisados, que admitiram usar o modelo de problema ligado ao subconstruto *porcentagem*. Principalmente por causa das respostas trazerem apenas frações centesimais, que normalmente são trabalhadas no ensino dos números decimais. Causou-nos certa surpresa verificar que mais professores fazem uso do modelo de problema que continha a ideia de *probabilidade*, do que *razão* e *porcentagem*. A esse respeito vale salientar que 81% dos professores identificaram o problema relativo à *probabilidade*.

Em relação à resolução dos problemas, devemos destacar os 14% de índice de erro no problema ligado ao subconstruto *parte-todo no modelo discreto*, que apesar de poder ser considerado pequeno não deixa de chamar a atenção pela natureza do problema. Também devemos dar ênfase aos quase 30% de erro no problema que envolve o subconstruto *quociente* e 25% no problema referente à *porcentagem*. Vale ressaltar, novamente, que os

PCN (1997) também sugerem a utilização dos subconstrutos *parte-todo* e *quociente* desde o 2º ano do Ensino Fundamental. Surpresa nos causou os 70% de acertos no problema referente à *probabilidade*, fundamentalmente porque a resolução do mesmo envolvia conhecimento teórico sobre o tema, o qual, como constatamos, é pouco ensinado nos primeiros anos do Ensino Fundamental.

Também pudemos concluir, através da análise dos dados coletados, que poucos professores realmente conhecem as orientações contidas no documento denominado PCN, que traz muitas sugestões importantes para o ensino dos números racionais fracionários.

Um dos fatores que podem explicar as dificuldades, as dúvidas, os desconhecimentos e os receios – esses últimos apenas verbalizados – que apareceram no nosso trabalho, por parte dos professores pesquisados, é a constatação de que 34 destes professores têm curso superior, sendo 9 deles pós-graduados, porém apenas três são graduados em Matemática e um em Engenharia Civil – tendo dois deles Mestrado em Educação Matemática. A grande maioria dos outros graduados ou pós-graduados fizeram seus cursos em áreas humanas, principalmente em Pedagogia. Mandarino (2006) diz, como já vimos, que esses professores "chegam à Universidade **odiando Matemática** e é preciso, pelo menos, ajudá-los a superar os traumas, revelar a beleza desta ciência, ajudá-los a compreender os motivos do seu desprazer. Se isso não for modificado, o mais provável é que seus futuros alunos se contaminarão com o seu desencanto" (p. 232). É necessário, portanto, como afirma Mandarino (2006) em sua tese, que sejam repensadas as políticas públicas para a melhoria da qualidade de ensino, principalmente em pequenas ações possíveis e que privilegiem aquilo que está ao alcance das próprias escolas e dos professores.

Relembrando Arroyo (2000),

> *Os PCN, se são para valer, desestruturam o perfil tradicional do ofício de mestre tão legitimado em nossa tradição....Exigem um planejamento pedagógico, tão delicado ou mais do que o ensino-aprendizagem dos conteúdos fechados e úteis das grades. Trabalhar o desenvolvimento de sujeitos afetivos, éticos, estéticos, cognitivos, trabalhar pedagogicamente identidades, diversidades exige competência e trato, profissionalismo muito especial. O ofício de mestre nessas dimensões não pode ser fluido, moralizante, solto, mas cuidadoso e profissionalmente competente*.(p.98)

Em resumo, alguns resultados deste trabalho confirmaram pesquisas anteriores, como a preferência pela utilização dos modelos de problemas relacionados aos subconstrutos *parte-todo* e *operador* (Silva, 1997; Santos, 2005; Canova, 2006), apesar de demonstrarem certo desconhecimento sobre estes termos na hora de relacioná-los aos respectivos problemas. Algumas surpresas também ocorreram, não só como o índice muito pequeno de uso do modelo de problema relativo ao significado *razão*, ou a pouca utilização do modelo de problema referente à ideia de *porcentagem*, mas também em relação à sugestão do gabarito dos problemas. Os resultados indicam, também, que a maioria dos professores ensina da mesma maneira que aprenderam quando alunos do Ensino Básico, reproduzindo modelos e regras de um ensino tradicional, não parecendo utilizar no seu cotidiano profissional algumas orientações contidas nos PCN e alguns avanços das pesquisas na área de ensino de Matemática. Esse fato já havia sido constatado por Mandarino (2006).

Acreditamos que os dados permitem vislumbrar um panorama de como o ensino dos diversos subconstrutos e aplicações dos números racionais fracionários vem se desenvolvendo nos primeiros anos do Ensino Fundamental. A solução mais provável para as dificuldades apresentadas pelos professores pesquisados nos parece clara: os cursos de formação desses profissionais devem ser replanejados e repensados dirigindo seu foco para as ações em sala de aula e para as concepções e conhecimentos de Matemática que os professores possuem e àquelas que eles deverão ter para poder ensinar frações, como Tardif (2002), Candau (1997)**,** Mandarino (2006) e Belfort (2003) já haviam alertado em seus trabalhos a respeito dos saberes profissionais e sobre os cursos de formação.

Shulman (1986, 1987), Ball (1991), Ball et al (2005), Sztajn (2002), Mandarino (2006), Belfort (2006), dentro outros vários pesquisadores e educadores matemáticos, resumiram muito bem em suas pesquisas os conhecimentos necessários para ensinar Matemática. Relembrando, Shulman (1987) diz que o professor deve possuir um repertório de representações e saber avaliar qual a mais apropriada para cada momento. Deve também ter um repertório instrucional que inclua diversos modos de ensinar, organizar e gerir sua sala de aula além de conhecer diversos materiais didáticos disponíveis para o ensino do conteúdo programático. É o conjunto desses conhecimentos, junto com mais alguns outros propostos por Shulman (1987), que constitui esse importante conceito de saber pedagógico-disciplinar do professor. É esse conjunto de saberes que distingue aquele que “apenas” sabe uma disciplina daquele que é capaz de ensiná-la.

Esses conhecimentos deveriam ser um dos pontos de partida e a base dos planejamentos das disciplinas relacionadas ao ensino de Matemática, dos cursos de formação inicial e continuada dos professores dos primeiros anos do Ensino Fundamental. Porém, pelos dados contidos neste trabalho e como já verificaram, por exemplo, Mandarino (2006), Silva (1997), Silva (2007), Santos (2005), Canova (2006), esses cursos ainda não incorporaram, em suas aulas, as discussões a respeito das principais descobertas e sugestões contidas na maioria das principais pesquisas relacionadas ao processo de ensino e de aprendizagem de Matemática e, mais especificamente, das frações. O mesmo ocorre com relação às sugestões contidas nos PCN.

Em relação ao tema frações e suas diversas *aplicações* ou *ideias* ou *significados* ou *interpretações* ou *subconstrutos*, apresentamos uma sugestão que nos parece possível de ser implementada nos cursos de formação, inicial ou continuada: o estudo fundamentado em situações-problema que utilizassem todos os subconstrutos possíveis das frações. Num primeiro momento, sem a preocupação com nomenclaturas ou classificações das diversas aplicações, os professores ou futuros professores teriam oportunidade de resolvê-las, comparar suas respostas com as dos colegas, proporem novas maneiras de solucioná-las, pensar sobre possíveis generalizações de procedimentos, verificar se cada problema poderia ser pensado em outros contextos, ou seja, explorar e tentar esgotar todas as possibilidades sobre essas situações. Numa etapa posterior, já com mais segurança em relação às possíveis soluções, seriam discutidos, com fundamentação teórica, os termos parte-todo, contínuo, discreto, razão, quociente, operador, porcentagem, probabilidade, medida, taxa, representação na reta numérica ou qualquer outro que já tenha sido utilizado na tentativa de classificar as diversas ideias de fração. Não com o intuito de definir uma classificação de consenso para posteriormente passá-la aos seus alunos, mas principalmente com a finalidade de verificar o quão complexo e diversificado é o conceito de fração e proporcionar a ampliação da visão desses professores e futuros professores a respeito do tema. Acreditamos que, dessa forma, o professor desenvolveria, na formação, um grande arsenal de conhecimentos e saberes disciplinares e pedagógico-disciplinares a respeito do conceito de frações e teria oportunidade de articular esses saberes de tal forma a estar apto para a tarefa de ensinar tão complexo tema. Inclusive estaria mais bem preparado para decidir em quais momentos ou etapas cada um dos modelos de situação-problema deveria ser apresentado aos alunos dos anos iniciais do Ensino Fundamental para a construção consistente do conceito de fração.

É muito importante destacar, também, o quanto nos sentimos, de certo modo, angustiados com relação aos resultados desta pesquisa. Principalmente porque, apesar de nos esforçarmos para elaborar um instrumento de avaliação que atendesse aos nossos objetivos, baseados em outras pesquisas e outros trabalhos, após a sua aplicação e coleta de dados, percebemos que o mesmo possui algumas fragilidades. A primeira, bem clara, foi em relação à terceira questão que carregava uma grande expectativa da nossa parte com relação à possibilidade de detectarmos algumas dificuldades epistemológicas dos alunos em relação ao ensino de frações. As opções de resposta de cada problema, como já explicamos anteriormente, foram cuidadosamente elaboradas de tal forma que pudessem nos fornecer subsídios para detectarmos tais dificuldades. Numa primeira análise, pareceu-nos que a importância da mesma para a pesquisa não foi entendida pelos professores participantes. Depois de muita reflexão, pensamos numa hipótese que pode explicar o porquê de os professores terem colocado como gabarito que a maioria dos seus alunos daria igual às suas próprias sugestões de gabarito. Pela nossa experiência, sabemos que não é comum, na prática cotidiana dos professores dos anos iniciais do Ensino Fundamental – e também de todos os professores do Ensino Básico – a análise, interpretação e exploração dos erros cometidos por seus alunos. Inúmeras pesquisas demonstram a fundamental importância das discussões, em sala de aula, sobre os erros cometidos, suas possíveis causas e conseqüências, para a construção de qualquer saber por parte de alunos e de professores. Não podemos afirmar com certeza que a não exploração dos erros é comum no cotidiano escolar do Ensino Básico, principalmente porque não encontramos pesquisas específicas a respeito dessa prática aqui no Brasil e as pesquisas gerais sobre a prática docente dos professores dos anos iniciais do Ensino Fundamental – por exemplo, Mandarino (2006) – não fazem menção sobre essa rotina. Porém, quando nos deparamos com 100% dos professores participantes da pesquisa colocando um gabarito igual às suas próprias sugestões de gabarito, acreditamos que, além das hipóteses de não entendimento da importância da questão e da insegurança desses professores com relação à solução dos problemas, não podemos descartar a hipótese de desconhecimento sobre os possíveis erros dos alunos.

A segunda diz respeito à falta de pedirmos as justificativas das respostas dadas às questões de números dois e quatro. Apesar de termos consciência das limitações de tempo que possui um curso de Mestrado e da maior diversidade e complexidade de respostas que se apresentariam, requerendo uma análise muito mais aprofundada e demorada a respeito delas, não podemos negar que algumas vezes sentimos falta dessas justificativas. Mesmo assim, podemos dizer que a pesquisa proporcionou algumas conclusões bastante importantes a respeito dos conhecimentos dos professores sobre os diversos significados das frações e sobre a utilização desses significados nos primeiros anos do Ensino Fundamental. Estas conclusões também nos levaram a pensar em algumas questões que merecem ser muito mais pesquisadas.

Quais são realmente os diversos *subconstrutos* relacionados ao conceito de fração?

É ou não importante o conhecimento, por parte dos professores, das diversas nomenclaturas utilizadas para definir as funções que as frações exercem em cada modelo de problema?

Em quais momentos, em quais idades ou em quais anos do Ensino Fundamental devem ser apresentados aos alunos cada um dos diversos *subconstrutos* dos números racionais fracionários? E de que forma?

Esse trabalho deve ser gradativo, apresentando-se e trabalhando-se cada um deles separadamente, ou devemos explorar alguns deles juntos para que o aluno possa ir diferenciando um contexto de outro? Se juntos, quais deles seriam agrupados mais naturalmente?

Deve-se esgotar todos os significados superficialmente, mesmo que com o devido cuidado, até o 5º ano e depois irmos aprofundando-os até o 9º ano? Ou será que alguns deles só devem ser apresentados a partir do 6º ano e aprofundados no Ensino Médio?

Após analisarmos as três coleções de livros que citamos neste trabalho, coleções que foram muito bem avaliadas pelo Programa Nacional do Livro Didático (PNLD), podemos verificar que também não existe consenso entre os autores citados com relação à utilização dos diversos significados das frações. Isto demonstra, mais uma vez, que as discussões a respeito desse tema ainda precisam ser bastante aprofundadas, principalmente através de novas pesquisas. Nos parece claro que estamos longe de chegarmos a alguma conclusão que seja de razoável consenso.

Após relermos este nosso estudo, verificamos, até com certa surpresa, como nós mesmos fomos modificando algumas de nossas 'convicções'. Sabemos que todo estudo feito com seriedade e profundidade, por si só, traz novas contribuições, novos conhecimentos, novos questionamentos e reflexões e que, por esta razão, acaba modificando de alguma maneira algumas de nossas antigas certezas e nos faz enxergá-las sobre uma nova ótica. Mesmo assim, normalmente essas releituras acontecem no momento que estamos escrevendo as conclusões do nosso trabalho. Foi surpreendente para nós constatarmos que quando começamos a fazer nossa pesquisa, tínhamos a convicção, baseada na nossa experiência e em alguns trabalhos anteriores, que *parte-todo* nos modelos *contínuo* e *discreto*, *razão*, *quociente*, *operador*, etc. representavam as diversas *ideias* ou *significados* do conceito de fração. Ao longo do nosso texto fomos utilizando sempre um destes dois termos. Após lermos diversos trabalhos, alguns deles citados aqui nesta dissertação, e analisar as respostas dadas ao questionário pelos professores participantes, passamos a também utilizar *interpretações*, *aplicações* e *subconstrutos* (Kieren, 1988), algumas vezes "sem sentirmos". Ao pararmos para fazer uma reflexão profunda a respeito desse fato, chegamos a conclusão pessoal de que estes três últimos termos talvez representem com mais fidelidade o que antes denominávamos *ideias* ou *significados*. Isto demonstra, primeiramente, como o tema frações é complexo e diversificado. Em segundo lugar, isto demonstra que ao longo do trabalho, mesmo sem percebermos, fomos modificando a nossa visão sobre o conceito geral de frações. Neste momento, podemos afirmar que *parte-todo nos modelos contínuo e discreto*, *razão*, *quociente*, etc., além de nos fazerem repensar o tempo todo se um deles não está incluído no outro e se na verdade existem ou não outras formas de pensar a respeito das frações, na nossa visão representam *subconstrutos*, *aplicações práticas* e *interpretações* de um conceito único, complexo e profundo: o conceito de fração. Também nos parece claro, agora, que os professores dos anos iniciais do Ensino Fundamental precisam, como já dissemos anteriormente, trabalhar em seus cursos de formação todas as situações possíveis nas quais as frações podem ser aplicadas e discuti-las exaustivamente para poderem construir com profundidade o conceito de fração. Dessa forma estarão aptos a escolherem os melhores momentos de ensinarem cada uma das situações aos seus futuros alunos, sempre através de situações-problema. Acreditamos que eles também devem discutir nesses cursos as nomenclaturas e os significados de cada um dos "subconstrutos" e chegarem às suas próprias conclusões, porém de forma alguma estas nomenclaturas e/ou classificações devem fazer parte explicitamente das aulas que eles ministrarão aos seus alunos dos primeiros anos do Ensino Fundamental por trazerem, por si só, uma enorme carga de complexidade.

Por fim, em relação à importância das pesquisas na área de Ensino e de Educação Matemática, concordamos com Stajn (2002). Ao fazer uma revisão dos artigos publicados nos periódicos de língua inglesa de 1993 a 2000, ela ressalta que a pesquisa sobre o saber do professor de Matemática é ainda recente e tem muito a caminhar, principalmente quando se considera a busca de uma maior compreensão da transformação do saber disciplinar em saber ensinável. Por sua vez, apoiamos a afirmativa de Ball et al (2005), de que, apesar de todos os obstáculos e dificuldades para se fazer pesquisas a respeito dos saberes docentes, é necessário e urgente que cada vez mais pesquisas sejam realizadas nesse sentido, concluindo que:

> *Enfrentar este desafio é uma responsabilidade profissional. Fazê-lo com sucesso é essencial à nossa sobrevivência como uma profissão.* (p.46)

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ARROYO, Miguel G. *Ofício de Mestre: imagens e auto-imagens*. Petrópolis, RJ: Vozes, 2000.

BALL, D. *The Subject Matter Preparation of Prospective Teachers: Challenging the Myths* (Research Report). East Lansing, MI: National Center for Research on Teacher Education, 1988.

BALL, D. *Research on teaching mathematics: making subject-matter knowledge part of the equation.* Em J. Brophy (ed.) Advances in Research on Teaching, vol. 2, pp. 1-48. Greenwic, CT: JAI Press, 1991.

BALL, D., HILL, H. e BASS, E. *Knowing Mathematics for teaching*: *Who knows mathematics well enough to teach third grade, and how can we decide?.* American Educator, pp. 14-46, Fall 2005.

BELFORT, E. *Em busca da construção de um Saber Pedagógico-Disciplinar: Experiências no Curso de Licenciatura em Matemática*. Em: *Anais do Fórum de Licenciatura*. São Paulo: SBEM, 2003.

BELFORT, E. *O Saber Pedagógico Disciplinar na Formação de Professores de Matemática: em Busca de Princípios Norteadores*. Em: *Anais do II SIPEM*. São Paulo: SBEM, 2003.

BIGODE, A. *Matemática hoje é feita assim*. São Paulo: FTD, 2000.

BROITMAN, C. *Nova ordem numérica*. Revista Nova Escola, ano XXIII, n.211, p.101. São Paulo, SP: Abril, 2008.

CANDAU, Vera Maria (org.). *Magistério: construção cotidiana*. Petrópolis, RJ: Vozes, 1997.

CANOVA, R. F. *Crença, concepção e competência dos professores do 1º e 2º ciclos do ensino fundamental com relação à fração*. 2006. Dissertação de Mestrado. PUC/SP, São Paulo.

CARAÇA, B. J. *Conceitos fundamentais da Matemática* – Tipografia Matemática, Lisboa, 1952.

FALZETTA, R. *A Matemática pulsa no dia-a-dia*. Revista Nova Escola, ano XVII, n.150, p. 18-24. São Paulo, SP: Abril, 2002.

IMENES, L.; JAKUBO, J.; LELLIS, M. *Novo Tempo: Matemática*. São Paulo: Scipione, 2001.

IMENES, Luis Marcio, LELLIS, Marcelo. *Matemática para todos*. São Paulo: Scipione, 2002.

KIEREN, T. E. *On the mathematical, cognitive, and instructional foundations of rational numbers*. In LESH, R. (Ed.). *Number and measurement: Paper from a research workshop*. Columbus, Ohio: ERIC/MEAC, p. 101-144, 1976.

KIEREN, T. E. *Five Faces of Mathematical Knowledge Building*. Edmonton, Department of Secondary Education, University of Alberta, Canadá, 1981.

KIEREN, T. E. *Personal knowledge of rational numbers: its intuitive and formal development*. In: HIEBERT, J.; BEHR, M. (Ed.). *Number concepts and operations in the middle grades*. Hillsdale, NJ: Erlbaum, p. 162-180, 1988.

MA, L. *Knowing and Teaching Elementary Mathematics: teacher's understand of fundamental mathematics in China and the United States*. Mahwah: LEA, 1999.

MACHADO, S. D. A. (Org.). Didática da Matemática: uma Introdução. Sao Paulo: EDUC, 1999. v. 1.

MANDARINO, M.C.F. *Concepções do ensino da matemática elementar que emergem da prática docente*. 2006. Tese de Doutorado em Educação – Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, PUC/RJ, Brasil.

MONTEIRO, C. e COSTA, C. *Dificuldades na aprendizagem dos números racionais*. Educação e Matemática, nº 40, pp. 60-63, 1996.

NEPEM/USF. *Números racionais no Ensino Fundamental: subconstrutos, o papel da linguagem e dos materiais manipulativos.* Em Anais do VIII ENEM - Comunicação Científica GT 2 - Educação Matemática nas séries finais do Ensino Fundamenta, 2004.

PALIS, G. L. R. *O potencial de atividades centradas em produções de alunos no desenvolvimento profissional de professores de Matemática*.. In: VIII Encontro de Pesquisa em Educação da Região Sudeste, 2007, Vitória. Desafios da Educação Básica e da Pesquisa em Educação, 2007.

PAULINA, I. *Matemática: Frações*. Revista Nova Escola, ano XXIII, n.211, p.99-110. São Paulo, SP: Abril, 2008.

PAIS, L. C. *Didática da Matemática: uma análise da influência francesa* - 2ª edição - 2ª reimpressão. 2. ed. Belo Horizonte-MG: Autêntica, 2008. v. 1. 128 p

PERRENOUD, P. *Profissionalização do Professor e Desenvolvimento de Ciclos de Aprendizagem (Passagens).* Faculdade de Psicologia e das Ciências da Educação- Universidade de Genebra, Cadernos de Pesquisa, n.108, novembro, 1999.

PIRES, C. e NUNES, M. *Matemática no planeta azul*. São Paulo: FTD. 1998.

PIRES, C.; CURY, E. e PIETROPAOLO, R. *Educação Matemática*. São Paulo: Atual, 2002.

PONTE, J. P. *A Vertente Profissional da Formação Inicial de Professores de Matemática*. Educação Matemática em Revista. São Paulo, SBEM, v.11A, p 3-8, abril, 2002.

SANT'ANNA, N. F. P. *Práticas pedagógicas para o ensino de frações objetivando a introdução à Álgebra*. 2008. Tese de Doutorado em Educação – Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, PUC/RJ, Brasil.

SANTOS, A. *O conceito de fração em seus diferentes significados: um estudo diagnóstico junto a professores que atuam no Ensino Fundamental*. 2005. Dissertação de Mestrado. PUC/SP, São Paulo.

SBEM (ed.). *Licenciatura em Matemática: um curso em discussão*. Edição Especial de Educação Matemática em Revista, n.11, abril 2002.

SHULMAN, L. S. *Those who understand***:** *knowledge growth in teaching*. Educational Researcher, v. 15, n. 2, p. 4-14, 1986.

SILVA, M. J. *Sobre a introdução do conceito de número fracionário*. 1997. Dissertação de Mestrado em Educação Matemática. PUC/SP, São Paulo.

SILVA, A. F. G. *O desafio do desenvolvimento profissional docente: análise da formação continuada de um grupo de professores das séries iniciais do ensino fundamental, tendo como objeto de discussão o processo de ensino e aprendizagem das frações*. 2007. Tese de Doutorado em Educação Matemática- PUC/SP, Brasil.

SZTAJN, P. *O que precisa saber um professor de Matemática? – Uma revisão da literatura americana dos anos 90*. Educação Matemática em Revista, nº 11, pp. 17-28, SBEM, 2002.

TARDIF, M. *Saberes docentes e formação profissional*. Petrópolis, RJ: Vozes, 2002.

VASCONCELOS, C.B.; BELFORT, E. *Diferentes significados de um mesmo conceito: o caso das frações*. Pró-letramento Matemática. Rio de Janeiro, RJ: LIMC, 2006.

ANEXO

UFRJ – INSTITUTO DE MATEMÁTICA
CURSO DE MESTRADO EM ENSINO DE MATEMÁTICA

QUESTIONÁRIO PARA FINS DE PESQUISA

• DADOS PESSOAIS

Nome: ---

Data de Nascimento: ----- / ----- / -----------

Formação (discriminar todos os cursos concluídos com as respectivas datas de conclusão)

Experiências profissionais

Os problemas abaixo envolvem diversas ideias do uso de uma fração. Observe atentamente esses problemas, e responda as questões que os seguem.

• PROBLEMAS

1) Rafael e Mara compraram uma pizza e a dividiram em 5 partes iguais. Rafael comeu 3 desses pedaços e Mara comeu o restante.
Que fração da pizza Mara comeu?
a)5/3 b)5/2 c)2/5 d)3/5

2) Numa turma de 40 alunos existem 16 meninos. Que fração dada a seguir representa a parcela de meninas da turma?
a)5/3 b)5/2 c)2/5 d)3/5

3) Sr. Guimarães possui 9 barras de chocolate iguais e deseja reparti-las igualmente entre os seus 15 netos.
Marque a alternativa na qual se encontra a quantidade de barras de chocolate que cada neto receberá.
a)5/3 b)5/2 c)2/5 d)3/5

4) De um total de 30 bolas-de-gude, 3/5 são verdes. Quantas dessas bolas são da cor verde?
a)12 b)15 c)18 d)10

5) Numa urna se encontram 20 bolas brancas, numeradas de 1 a 20, e 30 bolas pretas, numeradas de 1 a 30. Se Ricardo irá retirar, de forma aleatória, uma bola da urna, que fração dada a seguir representa a chance de que ele retire uma bola branca?
a)1/20 b)2/3 c)2/5 d)3/5

6) Uma lanchonete vende todos os dias 36 sanduíches de queijo e 60 sanduíches de presunto. Comparando as quantidades, podemos dizer que a cada x sanduíches de queijo que são vendidos nessa lanchonete são vendidos y de presunto. A fração x/y que representa essa comparação entre o número de sanduíches de queijo e o número de sanduíches de presunto que são vendidos é:
a)2/5 b)3/5 c)5/2 d)5/3

7) Num estacionamento se encontram 35 carros dos quais 14 são da cor prata.
Marque a alternativa na qual se encontra uma fração que representa a parcela do total de carros do estacionamento que são da cor prata.
a)35/100 b)14/100 c)40/100 d)60/100

• QUESTÕES

Observando os problemas acima, responda às perguntas a seguir:
a) Quais desses modelos de problemas você utiliza em suas aulas?

(1) (2) (3) (4) (5) (6) (7)

----

b) Relacione cada problema ao significado de fração utilizado:

Parte-Todo no modelo contínuo: ------------------------

Parte-Todo no modelo discreto: ------------------------

Razão: ---------------------

Quociente: ----------------------

Operador: -----------------------

Porcentagem: ---------------------

Probabilidade: --------------------

c) Para cada problema indique qual a opção que você acredita que a maioria dos seus alunos marcaria.

1) ----- 2) ----- 3) ----- 4) ----- 5) ----- 6) ----- 7) -----

d) Dê o seu gabarito para os problemas.

1) ----- 2) ----- 3) ----- 4) ----- 5) ----- 6) ----- 7) -----